Прикладная математика и механика

DOI 10.15507/2079-6900.26.202402.143-156
Оригинальная статья
ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.63

Применение вычислительных алгоритмов повышенного порядка точности для моделирования двумерных задач о развитии гидродинамической неустойчивости

Р. В. Жалнин[1], А. И. Кулягин[2], М. С. Нефедов[2]

[1] *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН (г. Новосибирск, Российская Федерация),*
[2] *ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Российская Федерация)*

Аннотация. В данной статье исследуется применение вычислительных алгоритмов повышенного порядка точности для моделирования двумерных задач развития гидродинамических неустойчивостей. Рассматривается эффективность использования алгоритмов для улучшения точности и достоверности результатов моделирования в этой области. Описывается разработанный численный алгоритм для решения задачи о развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова. Для построения численного алгоритма используется WENO-схема пятого порядка точности. С помощью разработанного алгоритма проведено численное решение ряда задач. В статье приведены результаты расчетов: течения на момент времени 4 046 мкс, изменение ширины области с элегазом, численные шлирен-картины на момент времени 877 мкс, изменение ширины области с тяжелым газом. Эти результаты получены различными методами на сетках различной размерности; проведено их сравнения с экспериментальными данными. Показано, что схемы с реконструкцией WENO 5-го порядка точности демонстрируют результаты, более близкие к натурным экспериментам.

Ключевые слова: WENO, газовая динамика, адаптивные сетки, неустойчивость Рихтмайера-Мешкова

Для цитирования: Жалнин Р. В., Кулягин А. И., Нефедов М. С. Применение вычислительных алгоритмов повышенного порядка точности к моделированию двумерных задач о развитии гидродинамических неустойчивостей // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 2. С. 143–156. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202402.143-156

Об авторах:
Жалнин Руслан Викторович, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН (630090, Россия, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, д. 15), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1103-3321, zhrv@mrsu.ru

Кулягин Андрей Иванович, преподаватель кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1), ORCID: https://orcid.org/0009-0005-3158-6221, andreycoolyagin@gmail.com

© Р. В. Жалнин, А. И. Кулягин, М. С. Нефедов

Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Нефедов Михаил Сергеевич, преподаватель кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1), ORCID: https://orcid.org/0009-0002-7347-2191, snef7@yandex.ru

Original article

MSC2020 76-10

Application of computational algorithms with higher order of accuracy to the modeling of two-dimensional problems on development of hydrodynamic instability

R. V. Zhalnin[1], A. I. Kulyagin[2], M. S. Nefedov[2]

[1] *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS (Novosibirsk, Russian Federation)*
[2] *National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)*

Abstract. This article examines application of computational algorithms with an increased order of accuracy for modeling two-dimensional problems of development of hydrodynamic instabilities. The efficiency of using algorithms to improve the accuracy and reliability of modeling in this area is considered. More specifically, the paper describes a numerical algorithm for solving the problem of development of Richtmayer-Meshkov instability. To construct the algorithm, the authors use the WENO scheme of the fifth order of accuracy Several problems are solved numerically using the developed method. The article models such processes as flows at a time of 4 046 microseconds, a change in the width of the region filled with sulfur hexafluoride, numerical schlieren patterns at a time of 877 microseconds, a change in the width of the region filled with heavy gas. The results are obtained by various methods on grids of different dimensions and compared with experimental data. It is shown that schemes with WENO reconstruction of the 5th order of accuracy demonstrate results closer to full-scale experiments.

Keywords: WENO, gas dynamics, adaptive grids, Richtmayer-Meshkov instability

For citation: *R. V. Zhalnin, A. I. Kulyagin, M. S. Nefedov.* Application of computational algorithms with higher order of accuracy to the modeling of two-dimensional problems on development of hydrodynamic instability. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 26:2(2024), 143–156. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202402.143-156

About the authors:

Ruslan V. Zhalnin, Ph.D. (Phys.-Math.), Researcher at the Lavrentiev Institute of Hydrodynamics SB RAS (15 Akademik Lavryentyev Av., Novosibirsk 630090, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1103-3321, zhrv@mrsu.ru

Andrey I. Kulyagin, Ph.D. (Phys.-Math.), Lecturer at the Department of Applied Mathematics, Differential equations and theoretical mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), ORCID: https://orcid.org/0009-0005-3158-6221, andreycoolyagin@gmail.com

Michael S. Nefedov, Ph.D. (Phys.-Math.), Lecturer at the Department of Applied Mathematics, Differential equations and theoretical mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), ORCID: https://orcid.org/0009-0002-7347-2191, snef7@yandex.ru

1. Введение

Неустойчивость Рихтмайера-Мешкова (далее – НРМ) возникает при прохождении ударной волны через разделительную границу между жидкостями разной плотности. Она инициализирована накоплением завихренности на границе раздела из-за сдвига градиентов давления и плотности на границе ударной волны и материала.

На данный момент прямое численное моделирование турбулентного перемешивания, возникающего при развитии неустойчивостей, остается слишком затратным с вычислительной точки зрения. Тем не менее, предыдущие исследования включали в себя множество точных вычислений и использование LES-моделей для изучения процесса развития турбулентного перемешивания при неустойчивостях.

Исследования, посвященные численному моделированию развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова на основе уравнений Эйлера, не учитывали влияние газового взаимопроникновения (например, работы [1–2]). Кроме того, было отмечено, что замена ступенчатого профиля плотности на контактном разрыве непрерывным распределением в слое конечной ширины может снизить скорость роста возмущений на начальной стадии развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова. Этот факт подтвержден в исследованиях, проведенных в работах [3–4]. Также, в работе [5] было указано на необходимость использования моделей многокомпонентных смесей для описания разрушения контактной границы и образования области смеси.

Современные стандарты качества математического моделирования гидродинамических неустойчивостей требуют проведения расчетов на подробных сетках (до нескольких миллионов ячеек и более) с использованием высокоточных схем. Такие схемы, как правило, основанные на методах высокого порядка аппроксимации, активно разрабатываются и исследуются в настоящее время [6].

Актуальные и эффективные схемы для решения задач о развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова включают в себя различные методы численного моделирования и анализа таких процессов. Некоторые из них включают в себя: метод конечных элементов [7], метод конечных разностей [8–9], метод сглаженных частиц [10] и т.д.

Эти методы могут быть комбинированы и адаптированы в зависимости от конкретной задачи и требований исследования неустойчивости Рихтмайера-Мешкова. Важно учитывать особенности конкретного физического процесса и подходить к выбору метода решения задачи индивидуально.

В данной работе исследовались две задачи о набегании ударной волны на область из более тяжелого газа с использованием схем второго и пятого порядка точности.

2. Математическая модель

Будем рассматривать двумерную систему уравнений двухкомпонентной газовой динамики, записанную в консервативной форме:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0, \tag{2.1}$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \\ \rho Y \end{pmatrix}, F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E+p)u \\ \rho uY \end{pmatrix}, G(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E+p)v \\ \rho vY \end{pmatrix}.$$

Здесь ρ – плотность жидкости, $\mathbf{v} = (u, v)$ – вектор скорости, p – давление и $E = \rho(\varepsilon + \dfrac{u^2+v^2}{2})$ – полная энергия, ε – удельная внутренняя энергия идеального газа.

Система (2.1) замыкается уравнением состояния $p/\rho = RT/M, R/M = C_p - C_v$, где R – универсальная газовая постоянная, C_p, C_v – удельные теплоемкости смеси при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно, M – молекулярная масса смеси. C_p и M вычисляются следующим образом:

$$C_p = YC_{p1} + (1-Y)C_{p2}, \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{M} = \frac{Y}{M_1} + \frac{1-Y}{M_2}, \tag{2.3}$$

где Y – концентрация, M_i, C_{pi} – молекулярная масса и теплоемкость i-й компоненты смеси соответственно $(i = 1, 2)$.

При рассмотрении конкретной модели также необходимо задать начальные и граничные условия, для полного описания решаемой задачи.

3. Вычислительный алгоритм

Построим дискретную модель для расчетной области прямоугольной формы $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$. Для этого область Ω заменим ортогональной сеткой, равномерной по каждому направлению:

$$\omega_\Delta = \omega_{\Delta_x} \times \omega_{\Delta_y},$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{\Delta_x} &= \{\Delta_i, i = 1, \ldots, N_x, \Delta_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], |\Delta_i| = h_x, h_x N_x = L_x\}, \\ \omega_{\Delta_y} &= \{\Delta_j, j = 1, \ldots, N_y, \Delta_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}], |\Delta_j| = h_y, h_y N_y = L_y\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Для аппроксимации системы (2.1) используем нелинейную консервативную дифференциально-разностную схему повышенного порядка точности:

$$\frac{dU_{ij}}{dt} + \frac{F_{i+1/2j} - F_{i-1/2j}}{h_x} + \frac{G_{ij+1/2} - G_{ij-1/2}}{h_y} = 0, \tag{3.2}$$

где $U_{ij} = \dfrac{1}{h_x h_y} \displaystyle\iint_{x_{i-1/2} y_{j-1/2}}^{x_{i+1/2}\ y_{j+1/2}} U dxdy$ – соотнесенные к центру ячейки усредненные значения консервативных газодинамических переменных, $F_{i+1/2j}$, $G_{ij+1/2}$ – дискретные потоки

на соответствующих границах между ячейками, являющиеся функциями двух переменных

$$F_{i+1/2j} = \hat{F}(U^L_{i+1/2j}, U^R_{i+1/2j}), \tag{3.3}$$

$$G_{i+1/2j} = \hat{G}(U^L_{ij+1/2}, U^R_{ij+1/2}), \tag{3.4}$$

для которых выполнено условие согласования:

$$\hat{F}(U_{ij}, U_{ij}) = F(U_{ij}), \tag{3.5}$$

$$\hat{G}(U_{ij}, U_{ij}) = G(U_{ij}). \tag{3.6}$$

Здесь $U^L_{i+1/2j}, U^R_{i+1/2j}$ – «левые» и «правые» значения вектора U на грани между i и $i+1$ ячейками, для которой вычисляется поток $F_{i+1/2j}$, $m = 1, 2, 3$; $U^L_{ij+1/2}, U^R_{ij+1/2}$ – «левые» и «правые» значения вектора U на грани между j и $j+1$ ячейками. Для того, чтобы вычислить значения вектора U на указанных гранях между ячейками введем новый вектор переменных $Q = Q(U)$. Проведем его интерполяцию на грань между ячейками и затем пересчитаем искомое значение вектора $U = U(Q)$ на данной грани. В расчетах полагалось $Q = (\rho, p, u, v, Y)$, дискретные потоки вычислялись по схемам Лакса-Фридрихса (LF) [11] и Хартена-Лакса-ван Лира с учетом контактного разрыва (HLLC) [12].

Для интерполяции значений Q на грани между ячейками использовались схема TVD с лимитером *minmod* [9] (далее – TVD2) и схема WENO5 [13].

Дискретизация по времени проводилась с использованием TVD-схемы Рунге-Кутта 3-го порядка [13]. А именно, для уравнения вида

$$\frac{\partial U}{\partial t} = L_h(U), \tag{3.7}$$

где $L_h(U)$ – пространственный разностный оператор из (3.2), используем:

$$U^* = U^n + \Delta t \cdot L_h(U^n), \tag{3.8}$$

$$U^{**} = \frac{3}{4}U^n + \frac{1}{4}U^* + \frac{1}{4}\Delta t \cdot L_h(U^*), \tag{3.9}$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{3}U^n + \frac{2}{3}U^{**} + \frac{2}{3}\Delta t \cdot L_h(U^{**}). \tag{3.10}$$

4. Постановка задач

Задача 1. Рассматривается задача о развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова при прохождении ударной волны через прямоугольную неоднородность из тяжелого газа. Начально-краевые условия взяты согласно эксперименту [14] и расчетам, описанным в работе [15], в которой используется схема КАБАРЕ.

Расчетная область – прямоугольная $[0, L_x] \times [0, L_y] = [0, 0.45] \times [0, 0.2]$, изображена на Рис. 4.1. В начальный момент времени в примыкающей к стенке прямоугольной подобласти $[0.1, 0.25] \times [0, 0.1]$ (подобласть II на Рис. 4.1) находится покоящийся тяжелый газ – фторид серы VI (SF_6, элегаз), в остальной части находится покоящийся воздух (подобласть I на Рис. 4.1), оба газа находятся в статическом равновесии. На левой грани задается условие входа ударной волны, на остальных гранях – адиабатические стенки с проскальзыванием. Параметры сред, принятые для вычислительного эксперимента, указаны в таблице 4.1.

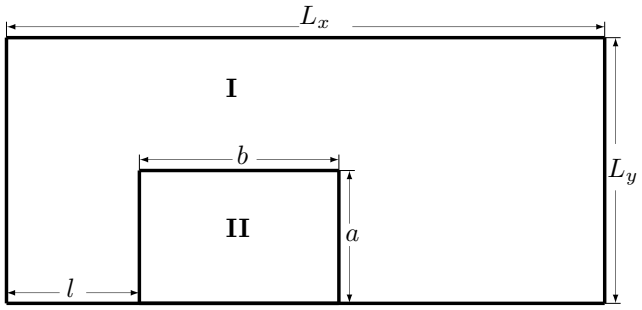


Рис. 4.1. Схема расчетной области для задачи 1

Fig 4.1. Scheme of the computational domain for problem 1

Таблица 4.1. Данные для численного эксперимента для задачи 1

Table 4.1. Data for numerical experiment for problem 1

	Ударная волна	Воздух (I)	SF_6 (II)
ρ, кг/м^3	1.6672	1.53	5.805
v, м/с	(133.273, 0)	(0, 0)	(0, 0)
p, Па	163256.0	96856.0	96856.0
C_p, Дж/(кг·К)	1008.0		660.08
C_v, Дж/(кг·К)	720.0		613.46

Задача 2. Была принята следующая постановка задачи в соответствии с экспериментом, описанным в работе [16]. Расчетная область – прямоугольная $[0, L_x] \times [0, L_y] = [0, 0.2] \times [0, 0.14]$ (Рис. 4.2).

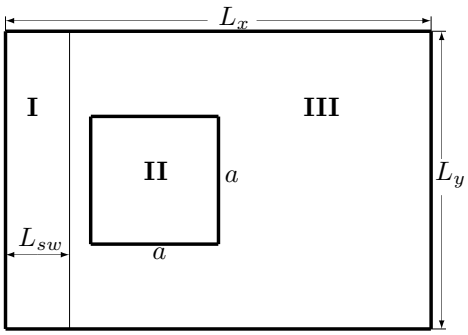


Рис. 4.2. Схема расчетной области для задачи 2

Fig 4.2. Scheme of the computational domain for problem 2

В начальный момент времени в квадратной подобласти II со стороной $a = 0.0566$ находится покоящийся тяжелый газ – фторид серы VI (SF_6, элегаз) в остальной части находится азот (подобласти I и III на Рис. 4.2). Фронт ударной волны, движущейся вправо с числом Маха 1.17, находится на расстоянии $L_{sw} = 0.02$ от левой границы.

Область с тяжелым газом располагается перед фронтом ударной волны на расстоянии, соответствующем достижению ударной волной контактной границы за 4 мкс и по центру относительно оси Oy. Давление полагалось равным 101 325 Па, а температура – равной 298 K. На левой грани задается условие втекания газа с параметрами за фронтом ударной волны, на остальных гранях – условия свободного вытекания. Параметры газов приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2. Данные для численного эксперимента для задачи 2

Table 4.2. Data for numerical experiment for problem 2

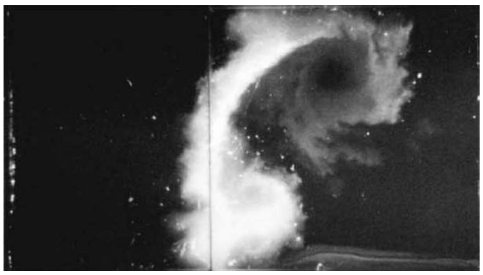
	Азот (N_2)	Фторид серы VI (SF_6)
M	0.02801	0.14606
C_p , Дж/(кг·K)	1040	665.1376

5. Результаты расчетов

5.1. Задача 1

На Рис. 5.1 показаны результаты расчетов различными методами на сетках размерности 360×160, 720×320 и 1080×480. Видно, что использование солвера HLLC для вычисления дискретных потоков позволяет воспроизвести корректную картину течения даже на грубой сетке, а использование реконструкции WENO5 позволяет смоделировать достаточно подробную структуру течения.

В работе [14] приводятся результаты измерения положения границ области с элегазом в различные моменты времени. На основе этих данных было вычислено значение ширины зоны с элегазом в эксперименте и выполнено сравнение с результатами расчетов в данной работе. На Рис. 5.2 приводится сравнение изменения ширины зоны с элегазом для различных методов на последовательности измельчающихся сеток. Видно, что до момента (≈ 1.5 мс) прохождения вторичной ударной волны, отраженной от правой границы, все методы демонстрируют приемлемое совпадение изменения ширины наблюдаемой зоны с элегазом. Далее во всех расчетах значение ширины занижено, за исключением результатов, полученных с использованием реконструкции WENO5, которые попадают в доверительный интервал экспериментальных данных.



а)

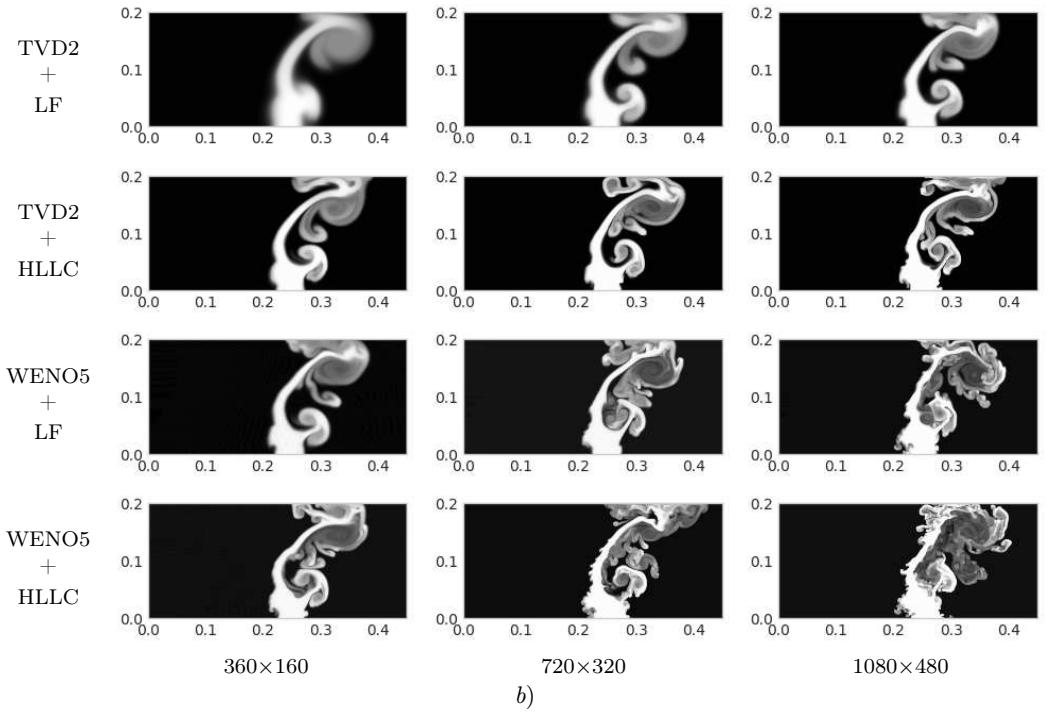
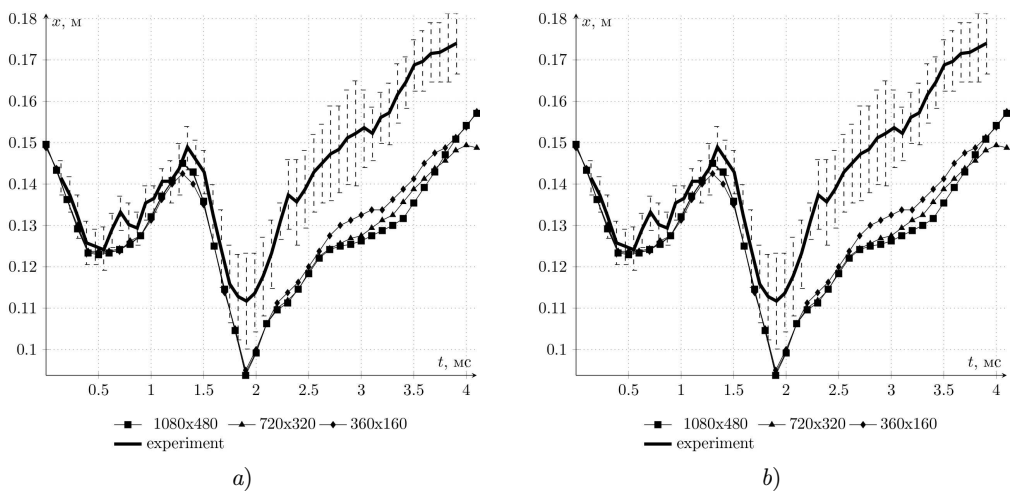


Рис. 5.1. Задача 1 – картина течения на момент времени 4 046 мкс: *a*) эксперимент [14]; *b*) результаты расчетов (концентрация)

Fig 5.1. Problem 1 – flow pattern at time 4 046 μs: *a*) experiment [14]; *b*) calculation results (concentration)



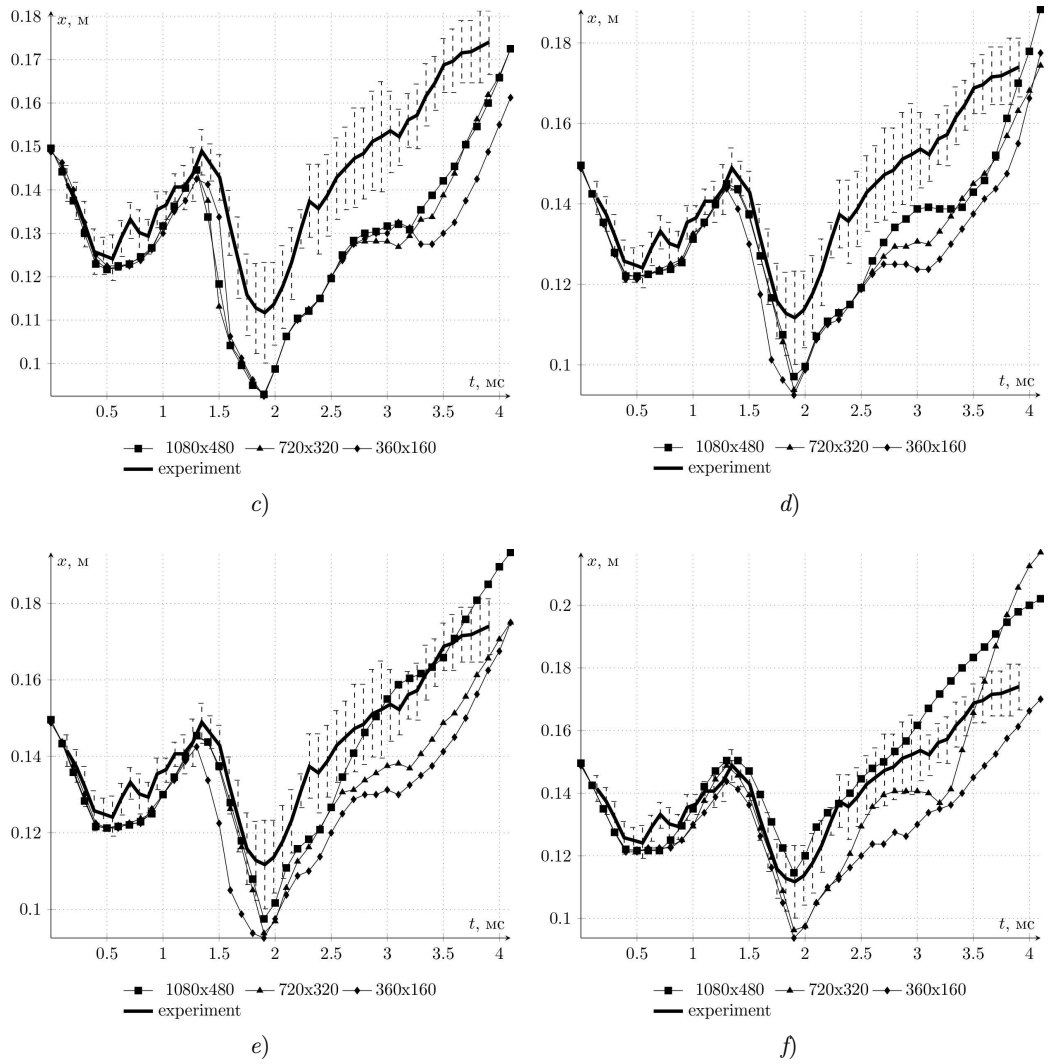


Рис. 5.2. Задача 1 – изменение ширины области с элегазом: *a*) схема первого порядка точности, поток LF; *b*) схема первого порядка точности, поток HLLC; *c*) реконструкция TVD2, поток LF; *d*) реконструкция TVD2, поток HLLC; *e*) реконструкция WENO5, поток LF; *f*) реконструкция WENO5, поток HLLC

Fig 5.2. Task 1 – changing the width of the area with SF6 gas: *a*) first-order accuracy circuit, LF flux; *b*) first order accuracy circuit, HLLC flux; *c*) reconstruction of TVD2, LF flux; *d*) TVD2 reconstruction, HLLC flux; *e*) WENO5 reconstruction, LF flux; *f*) WENO5 reconstruction, HLLC flux

5.2. Задача 2

На Рис. 5.3 показаны численные шлирен-картины по истечении 887 мкс с момента достижения ударной волной левой границы области II.

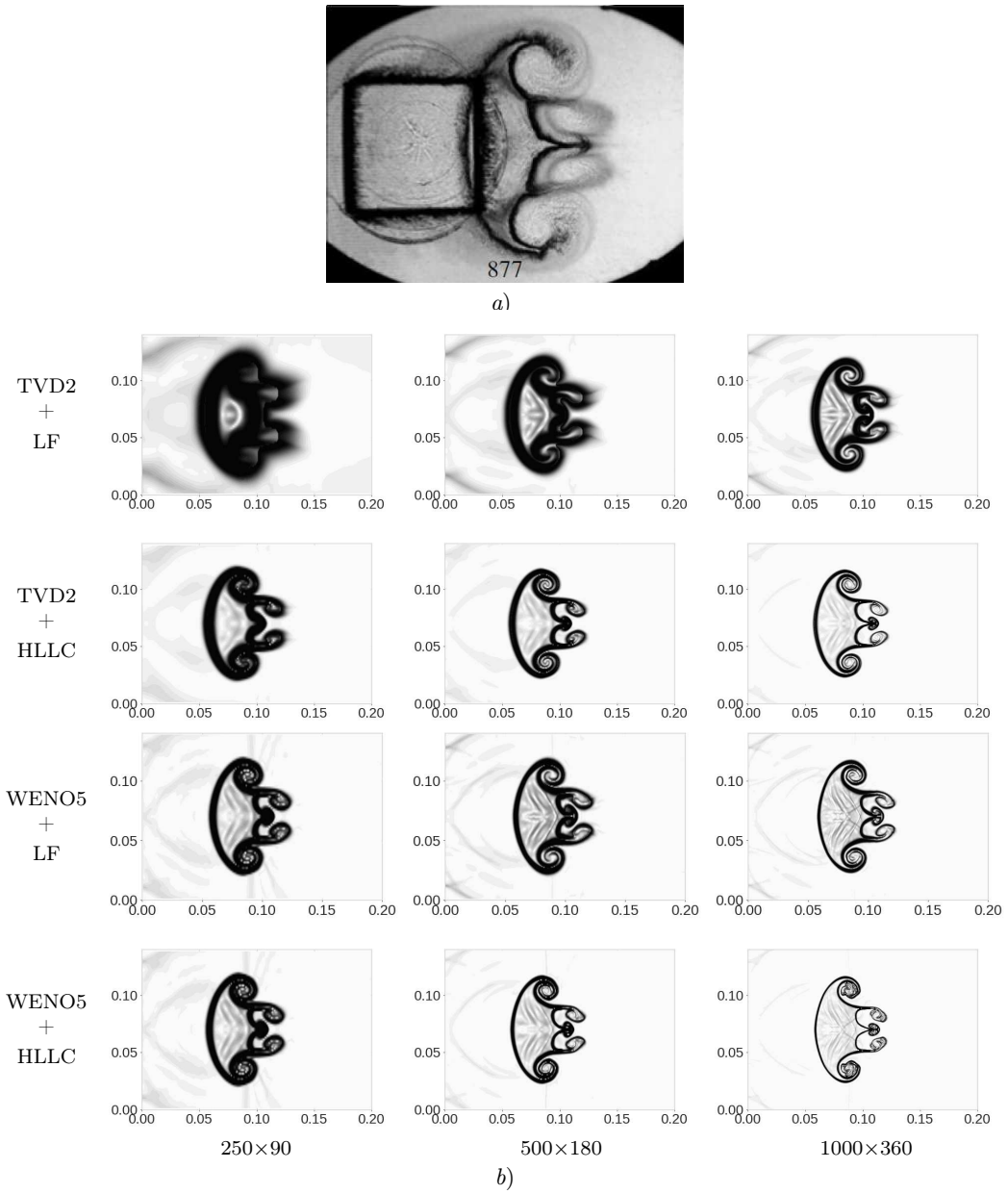


Рис. 5.3. Задача 2 – численные шлирен-картины на момент времени 877 мкс:
a) эксперимент [16]; *b*) результаты расчетов
Fig 5.3. Problem 2 – numerical schlieren pictures at time 877 μs:
a) experiment [16]; *b*) calculation results

Легко заметить, что с повышением порядка точности схемы увеличивается детализация картины течения. Схема на основе WENO позволяет разрешить более «тонкие»

детали развития вихревых структур на границе раздела двух газов. Картины течения, полученные с помощью WENO-схем, имеют более закрученные вихревые структуры, чем в эксперименте [16] (Рис. 5.3*a*). Это можно объяснить тем, что в модели не учитывается вязкость, которая увеличивала бы диссипацию вихревых структур.

На Рис. 5.4 представлена динамика изменения ширины области с тяжелым газом в сравнении с экспериментом.

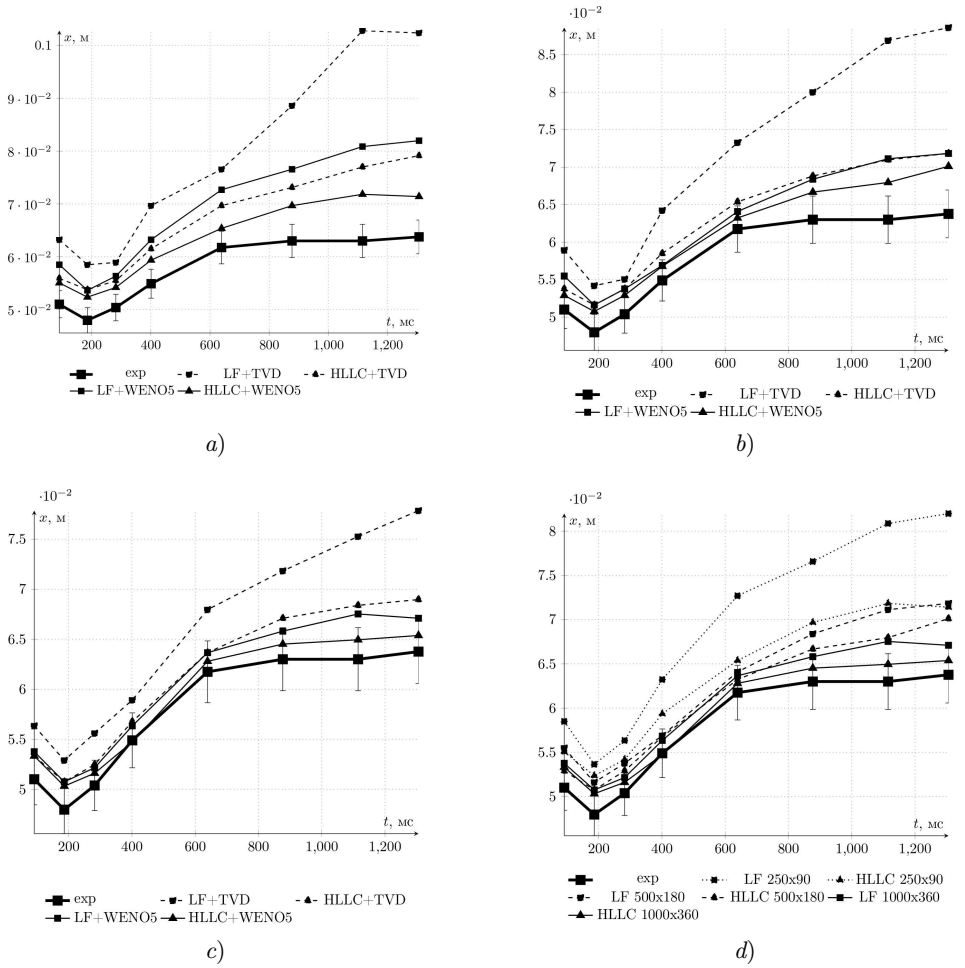


Рис. 5.4. Изменение ширины области с тяжелым газом: *a*) сетка 250 × 90; *b*) сетка 500 × 180; *c*) сетка 1000 × 360; *d*) схема WENO5 с потоками LF и HLLC на сгущающихся сетках

Fig 5.4. Dynamics of the width of the region with heavy gas: *a*) grid 250 × 90; *b*) grid 500 × 180; *c*) grid 1000 × 360; *d*) WENO5 scheme with LF and HLLC fluxes on condensed grids

Видно, что наиболее близко к эксперименту изменение ширины области с элегазом воспроизводит схема с дискретным потоком HLLC и реконструкцией WENO 5-го порядка точности.

6. Заключение

В работе решены две задачи о развитии гидродинамической неустойчивости при набегании ударной волны на область с более плотным газом. Получены картины течения и проанализирована динамика изменения области с плотным газом. Расчеты проведены с использованием вычислительных алгоритмов на основе интегро-интерполяционного метода первого порядка точности и с реконструкцией решения на границах ячеек по схеме TVD второго порядка точности и по схеме WENO птого порядка точности. Для вычисления дискретных потоков на границах ячеек использовались потоки Лакса-Фридрихса и HLLC. Что наиболее близкие к эксперименту результаты демонстрирует схема с реконструкцией WENO и дискретными потоками HLLC.

Благодарности. Постановка расчетных задач, обработка и интерпретация результатов выполнена Жалниным Р. В. за счет средств РНФ (проект № 23-11-00142).

Список литературы

1. Белоцерковский О. М., Демченко В. В., Опарин А. М. Последовательный переход к турбулентности в неустойчивости Рихтмайера-Мешкова // Докл. РАН. 1994. Т. 334, № 5. С. 581—583.

2. Youngs D. L. Numerical simulation of mixing by Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities // Laser and Particle Beams. 1994. Vol. 12, № 4. P. 725—750. DOI: https://doi.org/10.1017/S0263034600008557

3. Chandrasekhar S. Hydrodynamics and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. P. 428—436.

4. Chakraborty B. B. Rayleigh-Taylor instability of heavy fluid // Phys. Fluids. 1975. Vol. 18, № 8. P. 1066–1067.

5. Куропатенко В. Ф. Неустановившиеся течения многокомпонентных сред // Мат. моделирование. 1989. Т. 1, № 2. С. 128—155.

6. Stoyanovskaya O. P., Lisitsa V. V., Anoshin S. A., Savvateeva T. A., Markelova T. V. Dispersion Analysis of SPH as a Way to Understand Its Order of Approximation // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2024. Vol. 438. 115495. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115495

7. Жалнин Р. В., Масягин В. Ф., Пескова Е. Е., Тишкин В. Ф. Моделирование развития неустойчивости Рихтмайера–Мешкова с использованием разрывного метода Галеркина на локально-адаптивных сетках // Матем. моделирование. 2020. Т. 32, № 10. С. 34—46. DOI: https://doi.org/10.20948/mm-2020-10-03

8. Вязников К. В., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П. Построение монотонных разностных схем повышенного порядка аппроксимации для систем уравнений гиперболического типа // Математическое моделирование. 1989. Т. 1, № 5. С. 95—120.

9. Тишкин В. Ф., Никишин В. В., Попов И. В., Фаворский А. П. Разностные схемы трехмерной газовой динамики для задачи о развитии неустойчивости Рихтмаера-Мешкова // Математическое моделирование. 1995. Т. 7, № 5 С. 15–25.

10. Grigoryev V. V., Zhalnin R. V. Comparison of methods for modeling the interaction of a shock wave and a gas at rest with experiment in the problem of the development of the Richtmyer–Meshkov instability // Параллельные вычислительные технологии – XVIII Всерос. конф. с междунар. участием. Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2024. С. 17–30.

11. Lax P. D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1954. Vol. 7. P. 159–193. DOI: https://doi.org/10.1002/cpa.3160070112

12. Toro E. F., Spruce M., Speares W. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver // Shock Waves. 1994. Vol. 4. P. 25—34. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01414629

13. Shu C. W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws // ICASE Report. No. 97–65. 1997. 79 p.

14. Bates K. R., Nikiforakis N., Holder D. Richtmyer–Meshkov Instability Induced by the Interaction of a Shock Wave with a Rectangular Block of SF6 // Physics of Fluids. 2007. Vol. 19. 036101.

15. Данилин А. В., Соловьев А. В. Использование алгоритма «КАБАРЕ» для моделирования турбулентного перемешивания на примере неустойчивости Рихтмайера-Мешкова // Матем. моделирование. 2018. Т. 30, № 8. С. 3–16. DOI: https://doi.org/10.1134/S2070048219020054

16. Luo X., Wang M., Si T., Zhai Zh. On the interaction of a planar shock with an SF6 polygon // J. Fluid Mech. 2015. Vol. 773. P. 366—394. DOI: https://doi.org/10.1017/jfm.2015.257

Поступила 12.02.2024; доработана после рецензирования 15.04.2024; принята к публикации 29.05.2024

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. O. M. Belotserkovsky, V. V. Demchenko, A. M. Oparin, “Sequential transition to turbulence in the Richtmayer-Meshkov instability”, *Dokl. RAS*, **334**:5 (1994), 581–583 (In Russ.).

2. D. L. Youngs, “Numerical simulation of mixing by Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities”, *Laser and Particle Beams*, **12**:4 (1994), 725–750. DOI: https://doi.org/10.1017/S0263034600008557

3. S. Chandrasekhar, *Hydrodynamics and hydromagnetic stability*, Oxford: Clarendon Press, 1961.

4. B. B. Chakraborty, “Rayleigh-Taylor instability of heavy fluid”, *Phys. Fluids.*, **18**:8 (1975), 1066–1067.

5. V. F. Kuropatenko, "Unsteady flows of multicomponent media", *Mat. modeling*, **1**:2 (1989), 128–155 (In Russ.).

6. O. P. Stoyanovskaya, V. V. Lisitsa, S. A. Anoshin, T. A.Savvateeva, T. V. Markelova, "Dispersion Analysis of SPH as a Way to Understand Its Order of Approximation", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **438** (2024), 115495. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115495

7. R. V. Zhalnin, V. F. Masyagin, E. E. Peskova, V. F. Tishkin, "Modeling the Richtmyer–Meshkov Instability Development Using the Discontinuous Galerkin Method and Locally Adaptive Meshes", *Mathematical Models and Computer Simulations*, **13**:3 (2021), 474–482. DOI: https://doi.org/10.1134/S2070048221030194

8. K. V. Vyaznikov, V. F. Tishkin, A. P. Favorsky, "Construction of monotone difference schemes of increased approximation order for systems of hyperbolic equations", *Mathematical modeling*, **1** (1989), 95—120 (In Russ.).

9. V. F. Tishkin, V. V. Nikishin, I. V. Popov, A. P. Favorsky, "Difference schemes of three-dimensional gas dynamics for the problem of the development of Richtmayer-Meshkov instability", *Mathematical modeling*, **7**:5 (1995), 15–25 (In Russ.).

10. V. V. Grigoryev, R. V. Zhalnin, "Comparison of methods for modeling the interaction of a shock wave and a gas at rest with experiment in the problem of the development of the Richtmyer–Meshkov instability", *Parallel Computing Technologies – XVIII All-Russian Conference with International participation.*, **14** (2024), 17–30.

11. P. D. Lax, "Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation", *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **7** (1954), 159–193. DOI: https://doi.org/10.1002/cpa.3160070112

12. E. F. Toro, M. Spruce, W. Speares, "Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver", *Shock Waves*, **4** (194), 25–34. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01414629

13. C. W. Shu, "Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws", *ICASE Report*, 1997, no. 97–65, 79.

14. K. R. Bates, N. Nikiforakis, D. Holder, "Richtmyer–Meshkov Instability Induced by the Interaction of a Shock Wave with a Rectangular Block of SF6", *Physics of Fluids*, **19** (2007), 036101.

15. A. V. Danilin, A. V. Solovjev, "Simulation of Turbulent Mixing by the CABARET Algorithm for the Case of a Richtmyer-Meshkov Instability", *Mathematical Models and Computer Simulations*, **30**:8 (2019), 247–255. DOI: https://doi.org/10.1134/S2070048219020054

16. X. Luo, M. Wang, T. Si, Zh. Zhai, "On the interaction of a planar shock with an SF6 polygon", *J. Fluid Mech*, **773** (2015), 366–394. DOI: https://doi.org/10.1017/jfm.2015.257

Submitted 12.02.2024; Revised 15.04.2024; Accepted 29.05.2024

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.