

DOI 10.15507/2079-6900.26.202402.175-194

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 51-72:004.942:532.529:544.77

## Гидродинамический механизм формирования динамической структуры системы вращающихся частиц

С. И. Мартынов, Л. Ю. Ткач

БОУ ВО «Сургутский государственный университет» (г. Сургут, Российская Федерация)

**Аннотация.** На основе гидродинамического механизма, учитывающего взаимодействие всех частиц, проведено численное моделирование формирования динамической структуры в результате коллективной динамики вращающихся частиц в вязкой жидкости. Считается, что частицы обладают магнитным моментом и приводятся во вращение внешним переменным однородным магнитным полем. Представлены результаты численного моделирования коллективной динамики для трех исходных структур, которые могут быть образованы дипольными частицами за счет взаимодействия между собой в отсутствии внешнего магнитного поля. Такие равновесные структуры представляют собой прямолинейную цепочку, замкнутую цепочку и периодическую структуру в виде плоской системы цепочек частиц. Вращение частиц приводит окружающую их жидкость в движение, течение которой создает гидродинамические силы и моменты, перемещающие частицы. Коллективная динамика системы вращающихся частиц приводит к формированию из первоначальной структуры новой динамической, имеющей свои характерные особенности для каждого рассмотренного случая. Проводится качественное сравнение результатов динамики системы частиц, приходящих в движение за счет действия или внешнего момента, или внешней силы. Предложенный гидродинамический механизм формирования динамической структуры в результате коллективной динамики системы вращающихся частиц может быть использован для управления структурообразованием в системе жидкость-частицы.

**Ключевые слова:** коллективная динамика, динамическая структура, численное моделирование, вязкая жидкость, гидродинамическое взаимодействие, вращающиеся частицы.

**Для цитирования:** Мартынов С. И., Ткач Л. Ю. Гидродинамический механизм формирования динамической структуры системы вращающихся частиц // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 2. С. 175–194. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202402.175-194>

Об авторах:

**Мартынов Сергей Иванович**, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник, БОУ ВО «Сургутский государственный университет» (628412, Россия, г. Сургут, пр. Ленина, д. 1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, [martynovsi@mail.ru](mailto:martynovsi@mail.ru),

**Ткач Леонилла Юрьевна**, научный сотрудник, БОУ ВО «Сургутский государственный университет» (628412, Россия, г. Сургут, пр. Ленина, д. 1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8814-9285>, [leonilla7777@mail.ru](mailto:leonilla7777@mail.ru)

© С. И. Мартынов, Л. Ю. Ткач



MSC2020 76D07, 76D09, 76D17

# Hydrodynamic mechanism for dynamical structure formation of a system of rotating particles

S. I. Martynov, L. Yu. Tkach

*Surgut State University (Surgut, Russian Federation)*

**Abstract.** Based on the hydrodynamic mechanism, which takes into account the interaction of all particles, a numerical simulation of the formation of a dynamical structure in a viscous fluid was carried out. This structure is a result of the collective dynamics of rotating particles in the fluid. It is supposed that the particles have a magnetic moment and are driven into rotation by an external variable uniform magnetic field. The results of numerical modeling of collective dynamics are presented for three initial structures that can be formed by interacting dipole particles in the absence of an external magnetic field. Such equilibrium structures are a straight chain, a closed chain, and a periodic structure in the form of a flat system of particle chains. The rotation of particles sets the surrounding fluid in motion, whose flow creates hydrodynamic forces and moments that move the particles. The collective dynamics of a system of rotating particles leads to the formation of a new dynamical structure from the original one, and this new structure has its own characteristic features for each case considered. A qualitative comparison of the results of the dynamics for a particles' system set in motion due to the action of an external moment or an external force is carried out. The proposed hydrodynamic mechanism for the formation of a dynamical structure as a result of the collective dynamics of a rotating particles' system can be used to control structure formation in a liquid-particle system.

**Keywords:** collective dynamics, dynamical structure, numerical modeling, viscous fluid, hydrodynamic interaction, rotating particles

**For citation:** S. I. Martynov, L. Yu. Tkach . Hydrodynamic mechanism for dynamical structure formation of a system of rotating particles. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:2(2024), 175–194. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202402.175-194>

*About the author:*

**Sergey I. Martynov**, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Researcher, Surgut State University (1 Lenina A., Surgut 628412, Khanty-Mansiysk Autonomous District – Yugra, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, [martynovsi@mail.ru](mailto:martynovsi@mail.ru),

**Leonilla Yu. Tkach**, Researcher, Surgut State University (1 Lenina A., Surgut 628412, Khanty-Mansiysk Autonomous District – Yugra, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8814-9285>, [leonilla7777@mail.ru](mailto:leonilla7777@mail.ru)

## 1. Введение

Результаты, представленные в международных публикациях за последнее десятилетие, свидетельствуют об обширных и интенсивно проводимых исследованиях неравновесных систем с активными частицами. Неравновесное состояние может быть вызвано воздействием внешних полей (электрических, магнитных, акустических, световых), химических реакций или гидродинамических течений. Такие системы демонстрируют возможность динамической самосборки, как результат коллективного поведения активных

частиц в условиях неравновесного состояния [1–2], вызванного действием указанных выше причин. Активно проводятся эксперименты по формированию и управлению коллективным поведением систем активных частиц во внешних полях как в объеме жидкости (трехмерные структуры) [3–5], так и на поверхности раздела жидкость–газ (двухмерные структуры) [6–8]. Воздействие внешним полем вызывает интерес также в связи с возможностью сборки многообразных структур из синтетических частиц, имеющих анизотропные свойства поверхности [9]. Все эти исследования проводятся для конкретных практических задач, связанных с целевой доставкой груза, параллельной сборкой, очисткой жидкости и других задач, как в лабораторных, так и в естественных условиях. При этом в публикациях отмечаются и такие проблемы с практическим применением систем, как недостаточная их грузоподъемность и управляемость в реальных условиях их использования. Поскольку внешние поля непосредственно воздействуют на частицы, приводя их в определенное движение, то для решения указанных выше задач необходимо понимание механизмов, формирующих коллективную динамику, как результат динамики составляющих ее индивидуальных частиц. В то же время коллективная динамика определяет, какие динамические структуры могут быть сформированы в системе. Коллективное поведение системы большого числа частиц определяется их взаимодействием между собой с силами, непосредственно действующими между частицами, и взаимодействием через жидкость, в которой происходит их движение. Для понимания механизмов, отвечающих за преобразование динамики отдельных частиц в коллективную динамику системы, необходимо корректно учитывать все взаимодействия между частицами. Актуален и в настоящее время обзор моделей и подходов, используемых для описания динамики систем активных частиц, приведен в работе [10]. В частности, указывается, что гидродинамическое взаимодействие если и учитывается, то в сильно упрощенном виде. А именно в виде силы вязкого трения, действующей на отдельную частицу, или в приближении среднего поля. Этот вывод подтверждается и более поздними работами по моделированию динамики системы активных частиц [11–15]. Между тем трудно переоценить роль таких взаимодействий. В работе [16] подчеркивается ведущая роль именно гидродинамических взаимодействий в самосборке, эмергентности, транспорте и смешении коллоидных суспензий с внешним приводом. Следует понимать, что и межчастичное взаимодействие в теоретических моделях учитывается в приближении парных взаимодействий, что для большого числа взаимодействующих частиц дает некорректный результат [17]. Поэтому разработка новых теоретических моделей и подходов, на основе которых моделируется коллективная динамика системы активных частиц с учетом их взаимодействия, является актуальной задачей.

Динамика системы определяется внутренним взаимодействием частиц и действием и сил и моментов со стороны внешнего поля. Для дипольных частиц внешнее магнитное или электрическое поле может создавать силу и момент силы, приводящие их в поступательное и вращательное движение. Двигаясь в жидкости, частицы искажают распределение скорости и давление вокруг себя, что приводит к появлению действующих на них гидродинамических сил и моментов со стороны жидкости. Гидродинамическое взаимодействие совместно с межчастичным взаимодействием и формирует коллективную динамику системы. Учитывать гидродинамическое взаимодействие большого числа частиц позволяет метод, разработанный в работе [18] и проверенный на различных задачах [19–20]. В частности, этим методом в работе [19] проведено численное моделирование коллективной динамики облака случайно расположенных частиц в результате действия на каждую частицу постоянной внешней силы. Было найдено, что скорость частиц в центральной части облака больше, чем на его крае. Это приводит к тому, что

происходит постоянная циркуляция частиц из центра облака в ее переднюю часть, где происходит их торможение и смещение на край, а затем в хвостовую часть. Частицы, находящиеся в хвостовой части облака, отстают от центральных частиц, что приводит к постепенному распаду облака на отдельные группы частиц, в которых происходит такая же динамика. В конечном итоге распад завершается образованием следа облака в виде отдельных частиц. Отличие динамики системы активных частиц при действии на них внешнего момента можно оценить на примере моделей агрегатов, перемещающихся в жидкости за счет гидродинамической силы, создаваемой окружающей жидкостью за счет вращения частиц [17]. На этом примере уже видно отличие коллективной динамики системы вращающихся частиц от случая, когда движение частиц вызвано действием силы со стороны внешнего поля. В настоящей работе оценивается роль механизма гидродинамического взаимодействия вращающихся частиц в коллективной динамике системы и формировании динамической структуры. Цель проводимого исследования – проверка гипотезы, что при вращательном движении частиц механизм гидродинамического взаимодействия приводит к формированию динамической структуры, как результат коллективной динамики системы. Для проверки гипотезы используется математическая модель, состоящая из уравнений движения жидкости в приближении малых чисел Рейнольдса с соответствующими граничными условиями на поверхности частиц, квазистатических уравнений поступательного и вращательного движения для каждой из частиц, входящих в систему. В качестве исходного состояния системы частиц выбирались структуры, образующиеся в результате действия диполь-дипольного взаимодействия в отсутствие внешнего поля.

## 2. Постановка задачи и метод решения

Рассматривается система из  $N$  твердых сферических частиц радиуса  $a$ , помещенных в несжимаемую жидкость вязкости  $\eta$  и обладающих магнитным моментом  $\mathbf{m}$ . Приложенное внешнее однородное переменное магнитное поле приводит их во вращательное движение. Движение частиц приводит к возникновению течения вязкой жидкости и формированию гидродинамических сил и моментов, действующих на частицы.

Динамика рассматриваемой системы определяется уравнениями движения жидкости и каждой частицы, входящей в систему. В уравнениях движения частиц необходимо учитывать внутренние силы, внешние силы и силы гидродинамического взаимодействия, а также моменты сил, действующих на частицы. Такой подход уже применялся ранее в работах авторов и дает хорошее согласие с экспериментальными результатами [20]. Система уравнений динамики частиц записывается в виде:

$$\mathbf{F}_k^{(i)} + \mathbf{F}_k^{(e)} + \mathbf{F}_k^{(h)} = 0, \quad \mathbf{T}_k^{(i)} + \mathbf{T}_k^{(e)} + \mathbf{T}_k^{(h)} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь  $\mathbf{F}_k^{(h)}$  – силы;  $\mathbf{T}_k^{(h)}$  – моменты сил со стороны жидкости;  $\mathbf{F}_k^{(e)}$ ,  $\mathbf{T}_k^{(e)}$  – силы и моменты сил со стороны внешнего поля;  $\mathbf{F}_k^{(i)}$ ,  $\mathbf{T}_k^{(i)}$  – силы и моменты диполь-дипольного взаимодействия, действующие на частицу с номером  $k$  со стороны других частиц. Эта система уравнений динамики системы частиц, для которых силы инерции не учитываются. Легко получаемые оценки показывают, что в случае малых чисел Рейнольдса силы инерции малы по сравнению вязким трением, что позволяет использовать систему (2.1) для описания динамики системы частиц. В случае воздействия на частицы переменного поля имеется интервал частот, для которых силы инерции можно не учитывать (случай малых частот), и интервал частот, при которых силы инерции учи-

тывать необходимо (быстропеременные поля) даже в случае малых чисел Рейнольдса. Детально постановка задачи и метод решения задачи о гидродинамическом взаимодействии частиц в случае воздействия на них быстропеременного поля приведен в работе [21]. В настоящей работе рассматривается случай малых частот изменения поля. Учет внутренних сил взаимодействия проводится на основе парных взаимодействий. Для большого числа частиц такой подход приводит к проблеме сходимости, аналогичной случаю парного гидродинамического взаимодействия и подробно проанализированной в [17].

Для нахождения гидродинамических сил  $\mathbf{F}_k^{(h)}$  и моментов  $\mathbf{T}_k^{(h)}$ , действующих на частицы, решается система уравнений гидродинамики. В случае малых чисел Рейнольдса система уравнений для скорости  $\mathbf{u}$  и давления  $p$  жидкости имеет вид:

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

На поверхности частицы с номером  $k$  должны выполняться условия:

$$u_i = V_i^k + \Omega_{ij}^k x_j^k, \quad |\mathbf{X}^k| = a^k.$$

Здесь, введены следующие обозначения:  $\mathbf{V}^k$  – вектор абсолютной линейной скорости;  $\Omega_{ij}^k$  – тензор угловой скорости;  $\mathbf{X}^k$  – вектор положения точки жидкости относительно центра частицы с номером  $k$  и радиусом  $a^k$ .

Далеко от частиц должны выполняться условия:

$$u_i \rightarrow 0, \quad p \rightarrow p_0 \quad \text{если } |\mathbf{X}| \rightarrow \infty.$$

Здесь  $p_0$  – невозмущенное давление в жидкости.

Алгоритм расчета динамики частиц следующий. Имеется некоторое начальное расположение частиц в жидкости. Это расположение определяется внутренними силами из условия минимальности энергии взаимодействия между частицами. Течение жидкости и движение частиц рассматривается относительно неподвижной системы координат. Задаются силы и моменты силы, действующих на частицы и приводящих их в движение с поступательной и угловой скоростью. Движение частиц вызывает течение окружающей их жидкости. Находится распределение скорости и давления жидкости, вызванное движением частиц с соответствующими линейными и угловыми скоростями, и вычисляются гидродинамические силы и моменты, действующие на частицы. В силу линейности уравнений и граничных условий для течения жидкости, гидродинамические силы и моменты линейно зависят от скоростей частиц. Из уравнений динамики находятся поступательная и угловая скорости частиц относительно жидкости для данной конфигурации их расположения. Задается малый промежуток времени, за который происходит малое перемещение и угол поворота частиц и формирование новой конфигурации их положения относительно друг друга. Для новой конфигурации частиц происходит перерасчет скорости и давления в жидкости и, соответственно, гидродинамических сил и моментов. Далее определяются новые значения поступательной и угловой скорости частиц, а также последующая новая конфигурация их относительного положения. Указанные вычисления повторяются многократно с целью получения динамической картины относительного расположения частиц через каждый выбранный

промежуток времени. На каждом шаге происходит контроль точности проведенных вычислений. Все расчеты и визуализация динамики системы проводились с использованием зарегистрированного программного комплекса «Turtle» (свидетельство о регистрации от 15.01.2016 No. 2016610634), предназначенного для моделирования течения вязкой жидкости с большим числом взаимодействующих частиц.

### 3. Принятые допущения

Предполагается, что в отсутствии внешнего поля в результате действия сил диполь-дипольного взаимодействия частицы образуют некоторую структуру. Такими образованиями могут быть одномерные структуры в виде цепочки частиц, двумерные структуры в виде правильных многоугольников, в вершинах которых находятся частицы, двумерные периодические, трехмерные капельные структуры.

При изучении равновесных структур, образующихся из дипольных частиц, используется выражение для энергии парного взаимодействия частиц. Например для частиц с номерами  $k$  и  $l$ , обладающих разными магнитными дипольными моментами  $\mathbf{m}_k$ ,  $\mathbf{m}_l$ , это выражение имеет вид [22]:

$$U_{kl} = \frac{\mathbf{m}_k \cdot \mathbf{m}_l}{r_{kl}^3} - \frac{3}{r_{kl}^5} (\mathbf{m}_l \cdot \mathbf{r}_{kl}) (\mathbf{m}_k \cdot \mathbf{r}_{kl}).$$

Здесь вектор  $\mathbf{r}_{kl}$  соединяет центры частиц с номерами  $k$  и  $l$ .

Для динамических структур, образующихся из дипольных частиц, необходимо учитывать силы и моменты, действующие между частицами. Между частицами с номерами  $k$  и  $l$ , действуют силы, равные по величине и противоположные по направлению. Так, выражение для силы, действующий на частицу с номером  $k$  со стороны частицы  $l$ , имеет вид:

$$\mathbf{F}_k^{(i)} = \frac{3}{r_{kl}^5} [(\mathbf{m}_k \mathbf{r}_{kl}) \mathbf{m}_l + (\mathbf{m}_l \mathbf{r}_{kl}) \mathbf{m}_k + (\mathbf{m}_k \mathbf{m}_l) \mathbf{r}_{kl}] - \frac{15}{r_{kl}^7} (\mathbf{m}_k \mathbf{r}_{kl}) (\mathbf{m}_l \mathbf{r}_{kl}) \mathbf{r}_{kl}. \quad (3.1)$$

Выражения для моментов сил, действующих на частицы, имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_k^{(i)} &= \frac{3}{r_{kl}^5} (\mathbf{m}_l \mathbf{r}_{kl}) (\mathbf{m}_k \times \mathbf{r}_{kl}) + \frac{1}{r_{kl}^5} (\mathbf{m}_l \times \mathbf{m}_k), \\ \mathbf{T}_l^{(i)} &= \frac{3}{r_{kl}^5} (\mathbf{m}_k \mathbf{r}_{kl}) (\mathbf{m}_l \times \mathbf{r}_{kl}) + \frac{1}{r_{kl}^5} (\mathbf{m}_k \times \mathbf{m}_l). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь необходимо отметить следующее. Сумма вращательных моментов пары взаимодействующих частиц не равна нулю. Это может вызвать вопрос о корректности приведенных выражений, так как это, на первый взгляд, противоречит классическому принципу механики, согласно которому сумма моментов внутренних сил должна быть равна нулю. Однако противоречия указанному принципу нет, если учесть, что силы взаимодействия пары частиц не лежат на одной прямой, а образуют пару сил, имеющих момент, который тоже внутренний. Это означает, что нулю должна быть равна сумма не двух, а трех слагаемых: вращательных моментов и момента пары сил. Легко проверить, что это выполняется. Таким образом, динамика дипольных частицы в

результате действия внутренних сил и моментов представляется следующим образом. Частицы вращаются каждая вокруг своей оси, а обе – вокруг общей оси так, чтобы энергия их взаимодействия стала минимальна, что соответствует расположению их дипольных моментов вдоль вектора, соединяющие центры частиц. При этом частицы сближаются до минимального расстояния между их центрами. В случае если энергия взаимодействия частиц отличается от минимального значения, то это означает, что над системой была совершена работа по перемещению их относительно друг друга, так чтобы изменить ориентацию магнитных моментов частиц и расстояние между ними. Все это соответствует известным принципам механики. Хотя выражения для сил и моментов при диполь-дипольном взаимодействии частиц известны давно и их можно найти в задачнике для студентов [23], это до сих пор приводит к указанному выше недопониманию. Это при том, что спустя десятилетия это послужило причиной публикации статьи в научном журнале [24], в которой обосновываются приведенные выше аналитические выражения для вращательных моментов взаимодействующих дипольных частиц. Эти выражения в настоящей работе используются для определения средних значений сил и вращательных моментов, действующих между парой взаимодействующих дипольных частиц.

Помимо внутренних моментов, со стороны внешнего магнитного поля на частицы с номерами  $k$  и  $l$  действуют соответствующие моменты:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_k^{(e)} &= (\mathbf{m}_k \times \mathbf{H}), \\ \mathbf{T}_l^{(e)} &= (\mathbf{m}_l \times \mathbf{H}).\end{aligned}$$

Таким образом, получим, что суммарные магнитные моменты равны

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_k &= \mathbf{T}_k^{(i)} + \mathbf{T}_k^{(e)}, \\ \mathbf{T}_l &= \mathbf{T}_l^{(i)} + \mathbf{T}_l^{(e)}.\end{aligned}$$

Предполагается, что магнитные моменты частиц ориентированы в одном направлении и однородное внешнее переменное магнитное поле с вектором напряженности  $\mathbf{H} = \{0; -H \cos(\Omega t); H \sin(\Omega t)\}$  создает одинаковый момент силы, вращающий частицы в одном направлении. При этом силы и моменты диполь-дипольного взаимодействия, действующие на выбранную частицу со стороны других, считаются равными нулю. Такое предположение упрощает задачу изучения влияния только гидродинамического взаимодействия частиц на формирования коллективной динамики системы. Обоснованием этого предположения может служить тот факт, что средние значения приведенных выше сил (3.1) и моментов (3.2) парного диполь-дипольного взаимодействия за период вращения частиц равны нулю. Еще одним фактором, позволяющим принять такое предположение служит величина напряженности внешнего магнитного поля, которую можно взять такую большую, что величина момента диполь-дипольного взаимодействия частиц будет много меньше момента, создаваемым внешним полем. Фактически принятые допущения означают, что при моделировании учитываются только силы трения со стороны жидкости и внешний момент (3.3), одинаковый для всех частиц с равными магнитными моментами. Вообще говоря, величина внешнего момента равна

$$T_k^{(e)} = m_k H \sin((\Omega - \omega_k)t + \alpha).$$

и такое предположение подразумевает, что угол между вектором напряженности внешнего поля и магнитным моментом частицы не меняется и всегда остается равным  $\alpha$

(угол запаздывания поворота вектора магнитного момента частицы относительно поворота вектора напряженности внешнего магнитного поля). В начальный момент времени считается, что угол  $\alpha$  равен нулю (магнитные моменты частиц ориентированы вдоль вектора напряженности магнитного поля), а затем после начала вращения внешнего магнитного поля из-за гидродинамического сопротивления образуется острый угол между вектором магнитного момента частицы и вектором напряженности внешнего магнитного поля. Для того чтобы внешний момент был постоянен необходимо, чтобы вращение частиц происходило с угловой скоростью  $\omega_k$  равной скорости вращения внешнего поля  $\Omega$ . Однако гидродинамическое взаимодействие приводит к тому, что угловая скорость вращения частиц зависит от места частицы в общей конфигурации системы. Это приводит к тому, что угловая скорость частицы может быть как больше, так и меньше скорости вращения магнитного поля. Однако при этом, как следует из выражения для величины внешнего момента, угол между вектором напряженности внешнего поля и магнитным моментом частицы уменьшается или увеличивается по сравнению с углом  $\alpha$ , что, соответственно, приводит к уменьшению или увеличению момента, действующего на частицу. В свою очередь, уменьшение внешнего момента приводит к уменьшению угловой скорости частицы, а увеличение внешнего момента наоборот, к увеличению угловой скорости частицы. Таким образом, вращение частицы подстраивается под вращение внешнего поля. Фактически условие постоянства внешнего момента, действующего на частицы, является приближенным, средним. При этом, для того чтобы использовать такое приближение, отклонения от этого среднего должно быть мало. Как будет показано ниже, результаты моделирования дают хорошее согласие с принятым выше допущением.

Приведенные выше рассуждения в полном объеме касаются и частиц с электрическим дипольным моментом с той только разницей, что вращающееся электрическое поле приводит их во вращение, противоположное тому, что имеют частицы с магнитным дипольным моментом.

#### 4. Параметры моделирования

При компьютерном моделировании вместо реальных параметров задачи используются модельные: размер частицы  $\hat{a}$ , вязкость несущей жидкости  $\hat{\eta}$ , величина внешнего момента силы  $\hat{T}$ , действующего на частицы с магнитным моментом  $\hat{m}$ , и ее направление, а также промежуток времени  $\hat{t}$ . Модельные и реальные параметры связаны определенными соотношениями, полученными из условий подобия и приведенными в работах [20, 17].

Вращательный модельный момент  $\hat{T} = |\mathbf{m} \times \mathbf{H}|$  прикладывается к частицам во всех рассмотренных случаях модельных структур. Его величина берется равной  $1 \text{ г}\cdot\text{см}^2/\text{с}^2$ . Считается, что величина вращательного момента  $\hat{T}$  остается постоянной и максимальной. Для этого необходимо, чтобы угол между векторами  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{H}$  остается неизменным. Это возможно, когда угловая скорость частиц и частота вращения вектора  $\mathbf{H}$  одинаковые  $\omega = \Omega$ . Уравнения вращения модельной и реальной частицы в структуре имеют следующий вид:

$$8K\pi\eta a^3\omega = T, \quad 8K\pi\hat{\eta}\hat{a}^3\hat{\omega} = \hat{T}.$$

Здесь коэффициент  $K$  характеризует геометрию структуры и не зависит от размеров частиц в структуре, но зависит от того, в каком месте находится частица в данной



структуре. Каждая частица в системе имеет свою скорость вращения. Считая, что частицы сделаны из одного материала с намагниченностью насыщения  $M_s$ , их магнитный момент определяется, как  $m = M_s 4\pi a^3/3$ . Подставляя выражение для магнитного момента частицы в эти уравнения, получим

$$8K\pi\eta a^3\omega = \frac{4\pi a^3}{3}M_s H, \quad 8K\pi\hat{\eta}\hat{a}^3\hat{\omega} = \frac{4\pi\hat{a}^3}{3}M_s \hat{H}.$$

Эти уравнения дают соотношения между реальными и модельными параметрами при вращении частиц

$$\frac{\eta\omega}{\hat{\eta}\hat{\omega}} = \frac{H}{\hat{H}}.$$

Другое соотношение следует из равенства чисел Рейнольдса модельного и реального течений жидкости при вращении частиц

$$\frac{\rho\omega a^2}{\eta} = \frac{\rho\hat{\omega}\hat{a}^2}{\hat{\eta}}.$$

Из последних двух равенств следует соотношение между реальным и модельным значением напряженности магнитного поля

$$H = \frac{\eta^2\hat{a}^2}{\hat{\eta}^2 a^2}\hat{H}.$$

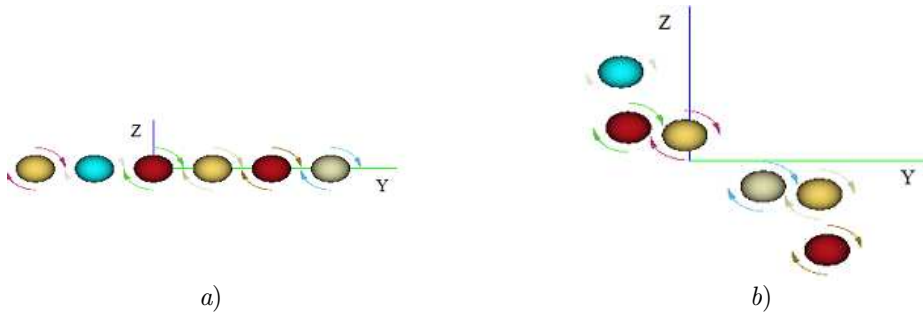
Приняв намагниченность насыщения  $M_s$  для ферромагнетиков равным 450 Г, для модельной частицы размером  $\hat{a} = 1$  см получаем модельное значение напряженности магнитного поля, равное  $\hat{H} = 5.31 \cdot 10^{-4}$  Э. При моделировании вязкость жидкости считалась равной  $\hat{\eta} = 1$  г/(см · с). Для частиц размером  $a = 10^{-4}$  см и жидкости фактической вязкости  $\eta = 10^{-2}$  г/(см · с) получим, что реальная величина напряженности магнитного поля должна быть  $H = 5.31$  Э. Увеличения величины напряженности магнитного поля приводит к увеличению момента, прикладываемого к частицам. Это ведет к увеличению скорости вращения частиц и более выраженной коллективной динамики рассматриваемых систем. Это проявляется также на промежутке времени, за который происходит характерное изменение в динамике системы. Так, модельному промежутку времени  $\hat{t} = 1$  с при принятых значениях размера частиц и вязкости жидкости соответствует реальный  $t = 3 \cdot 10^{-6}$  с. Поэтому полученные за достаточно большие модельные промежутки времени изменения в системах, моделируемых как результат коллективной динамики частиц, входящих в нее, для реальных систем происходит намного быстрее. Модельная и реальная частота изменения магнитного поля соответственно равны  $\hat{\Omega} = 3.6 \cdot 10^{-2}$  с<sup>-1</sup>,  $\Omega = 3.6 \cdot 10^4$  с<sup>-1</sup>.

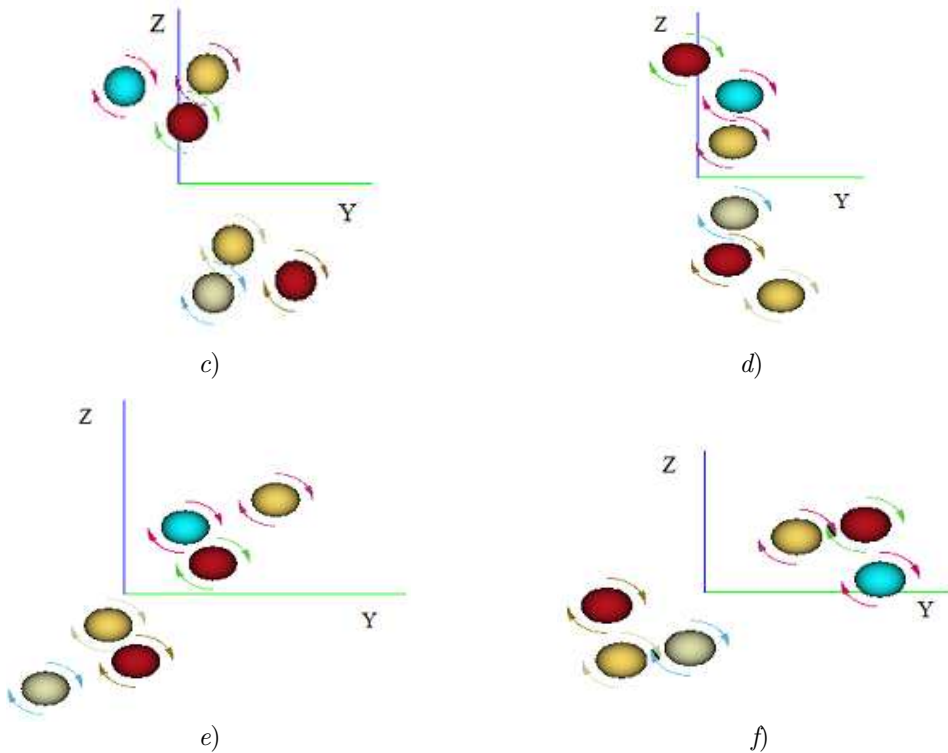
Для частиц с электрическим дипольным моментом  $\mathbf{p}$  полагаем  $p = qa$ , где  $q$  электрический заряд. Проводя аналогичные магнитным частицам анализ модельных и реальных параметров, получаем, что следующие модельные и реальные параметры. Для напряженности электрического поля и величины заряда:  $\hat{q}\hat{E} = 1$  г·см/с<sup>2</sup>,  $qE = 10^4$  г·м/с<sup>2</sup>; для модельной и реальной частоты изменения электрического поля  $\hat{\Omega} = 3.6 \cdot 10^{-2}$  с<sup>-1</sup>,  $\Omega = 3.6 \cdot 10^4$  с<sup>-1</sup>. Указанная выше связь между модельными и соответствующими им реальными параметрами используется для всех рассматриваемых в настоящей работе расчетах коллективной динамики структур из гибридных частиц с магнитным и электрическим дипольными моментами.

## 5. Формирование динамической структуры в результате коллективной динамики вращающихся частиц

Одно из возможных образований, формирующееся в результате диполь-дипольного взаимодействия магнитных частиц, представляет собой структуру в виде цепочки частиц [25]. Для моделирования коллективной динамики такой структуры рассмотрены три цепочки из 6, 8 и 15 частиц соответственно. Частицы в цепочках имеют модельный радиус  $\hat{a} = 1$  см, их центры располагаются на оси  $OY$  на расстоянии  $3\hat{a}$  друг от друга. Считается, что вращательный модельный момент  $\hat{M} = 1 \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{с}^2$ , направленный вдоль оси  $OX$ , прикладывается к каждой частице во всех рассмотренных случаях модельных структур. Действие момента приводит во вращение частицы, что формирует течение окружающей их вязкой жидкости. В результате гидродинамического взаимодействия частиц создается сила, перемещающая частицы. Первоначальная структура частиц меняется и формируется новая, как результат их коллективной динамики.

На Рис. 5.1 представлено последовательное формирование новой структуры в результате коллективной динамики 6 частиц, первоначально расположенных в виде горизонтальной цепочки. Как видно из приведенной динамики, первоначальная структуры распадается на две группы симметрично расположенных частиц. Каждая группа состоит из трех частиц, образующих вершины треугольника, вращающегося с некоторой угловой скоростью вокруг оси, параллельной оси вращения частиц, и при этом обе группы совместно совершают вращательное движение вокруг оси симметрии структуры. Численные расчеты подтверждают, что формирующаяся структура остается симметричной. Например, найдено, что координаты центра тяжести системы не изменяются, что при отсутствии внешней силы соответствует наличию симметрии системы.

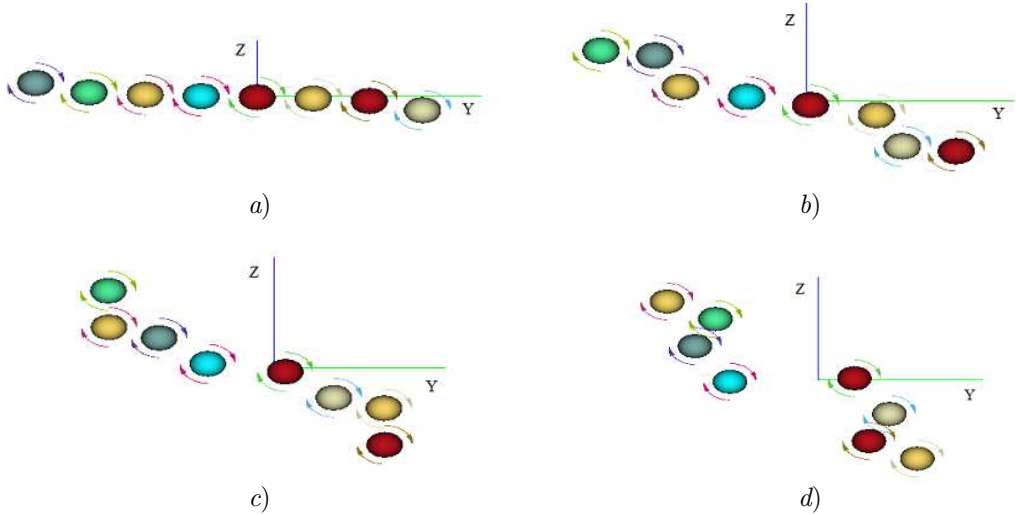




**Рис. 5.1.** Последовательное формирование структуры в результате коллективной динамики цепочки из 6 вращающихся частиц: *a*) начальная конфигурация цепочки ( $\hat{t} = 0$  с); *b*) разделение цепочки на две группы вращающихся частиц ( $\hat{t} = 1400$  с); *c*), *d*), *e*), *f*) динамика образованной структуры из двух групп вращающихся частиц ( $\hat{t} = 2900, 3700, 5300, 6500$  с)

**Fig 5.1.** Sequential formation of a structure as a result of the collective dynamics of a chain of 6 rotating particles: *a*) initial configuration of the chain ( $\hat{t} = 0$  s); *b*) division of the chain into two groups of rotating particles ( $\hat{t} = 1400$  s); *c*), *d*), *e*), *f*) dynamics of the formed structure of two groups of rotating particles ( $\hat{t} = 2900, 3700, 5300, 6500$  s)

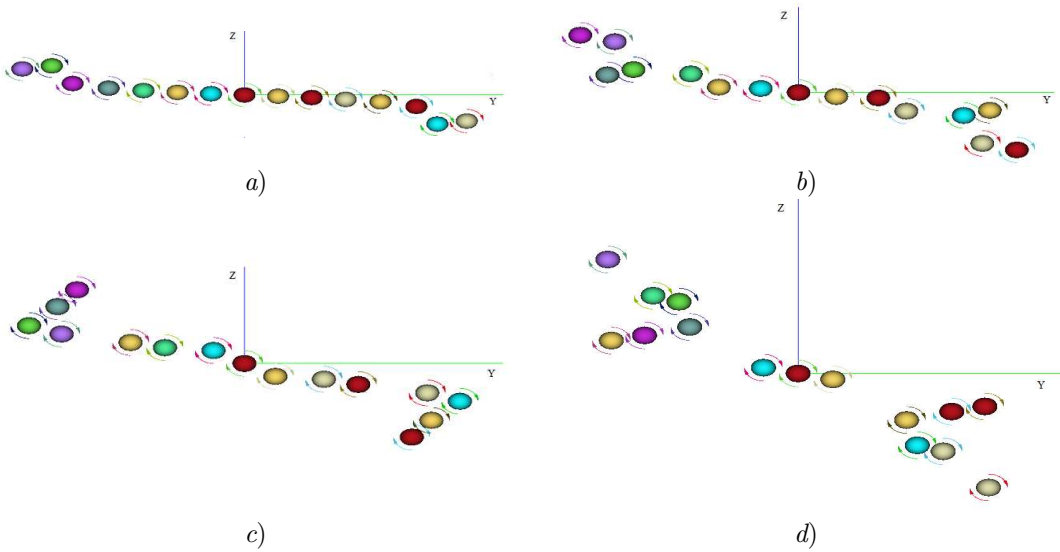
Изменение числа частиц в цепочке меняет формирующуюся структуру. Так для цепочки из 8 частиц, коллективная динамика которой приведена на Рис. 5.2, формируется структура из двух групп по 4 частицы в каждой, которые так же совместно вращаются вокруг оси симметрии. Но уже для цепочки из 15 частиц, формирующаяся структура более сложная. На Рис. 5.3 показана последовательность формирования структуры в результате коллективной динамики такой цепочки. Как видно из приведенной динамики цепочка разбивается на пять групп: две группы по четыре частицы в каждой, две группы по две частицы и одна центральная из трех частиц. Каждая группа вращается вокруг собственной оси, а все вместе вращаются вокруг оси симметрии. Если во всех рассмотренных случаях частицы в цепочке расположены вдоль оси  $OX$ , т. е. перпендикулярно вектору напряженности приложенного магнитного поля и вдоль вектора действующего момента, то их вращение не меняет первоначальную структуру.



**Рис. 5.2.** Последовательное формирование структуры в результате коллективной динамики цепочки из 8 вращающихся частиц: *a*) фаза деформации цепочки ( $\hat{t} = 150$  с); *b*) разделение цепочки на две группы вращающихся частиц ( $\hat{t} = 750$  с); *c*), *d*) динамика образованной структуры из двух групп вращающихся частиц ( $\hat{t} = 1350, 1650$  с)

**Fig 5.2.** Sequential formation of a structure as a result of the collective dynamics of a chain of 8 rotating particles: *a*) chain deformation phase ( $\hat{t} = 150$  s); *b*) division of the chain into two groups of rotating particles ( $\hat{t} = 750$  s); *c*), *d*) dynamics of the formed structure of two groups of rotating particles ( $\hat{t} = 1350, 1650$  s).

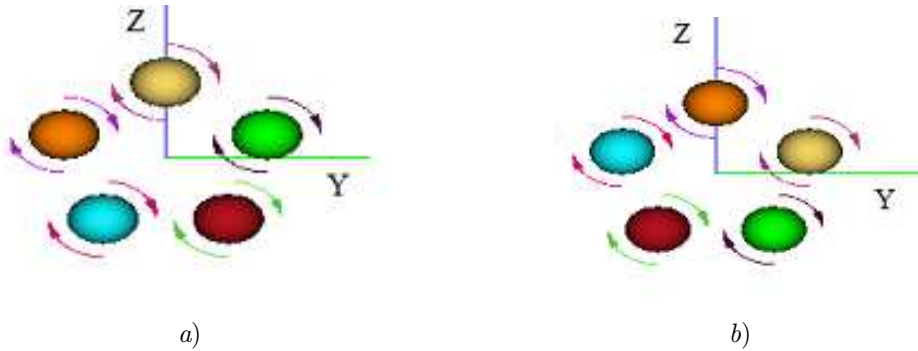
Другой структурой дипольных частиц, образующейся в результате межчастичного взаимодействия, является правильный многоугольник, в вершинах которого располагаются частицы и суммарный момент которого равен нулю. В настоящей работе моделируется динамика системы из пяти твердых сферических частиц, образующих двухмерную структуру, близкую к правильному пятиугольнику и лежащую в плоскости  $YOZ$  на окружности радиуса  $3\hat{a}$ . Векторы магнитных моментов частиц также лежат в этой плоскости. Приложенное внешнее магнитное поле, лежащее в плоскости диполей, приводит их во вращательное движение.



**Рис. 5.3.** Последовательное формирование структуры в результате коллективной динамики цепочки из 15 вращающихся частиц: *a)* начало формирования структуры ( $\hat{t} = 600$  с); *b)* разделение цепочки на три группы вращающихся частиц ( $\hat{t} = 1500$  с); *c)* начало формирования пяти групп вращающихся частиц ( $\hat{t} = 2280$  с); *d)* сформированные группы вращающихся частиц ( $\hat{t} = 4780$  с)

**Fig 5.3.** Sequential formation of a structure as a result of the collective dynamics of a chain of 15 rotating particles: *a)* beginning of structure formation ( $\hat{t} = 600$  s); *b)* division of the chain into three groups of rotating particles ( $\hat{t} = 1500$  s); *c)* beginning of formation of five groups of rotating particles ( $\hat{t} = 2280$  s); *d)* formed groups of rotating particles ( $\hat{t} = 4780$  s)

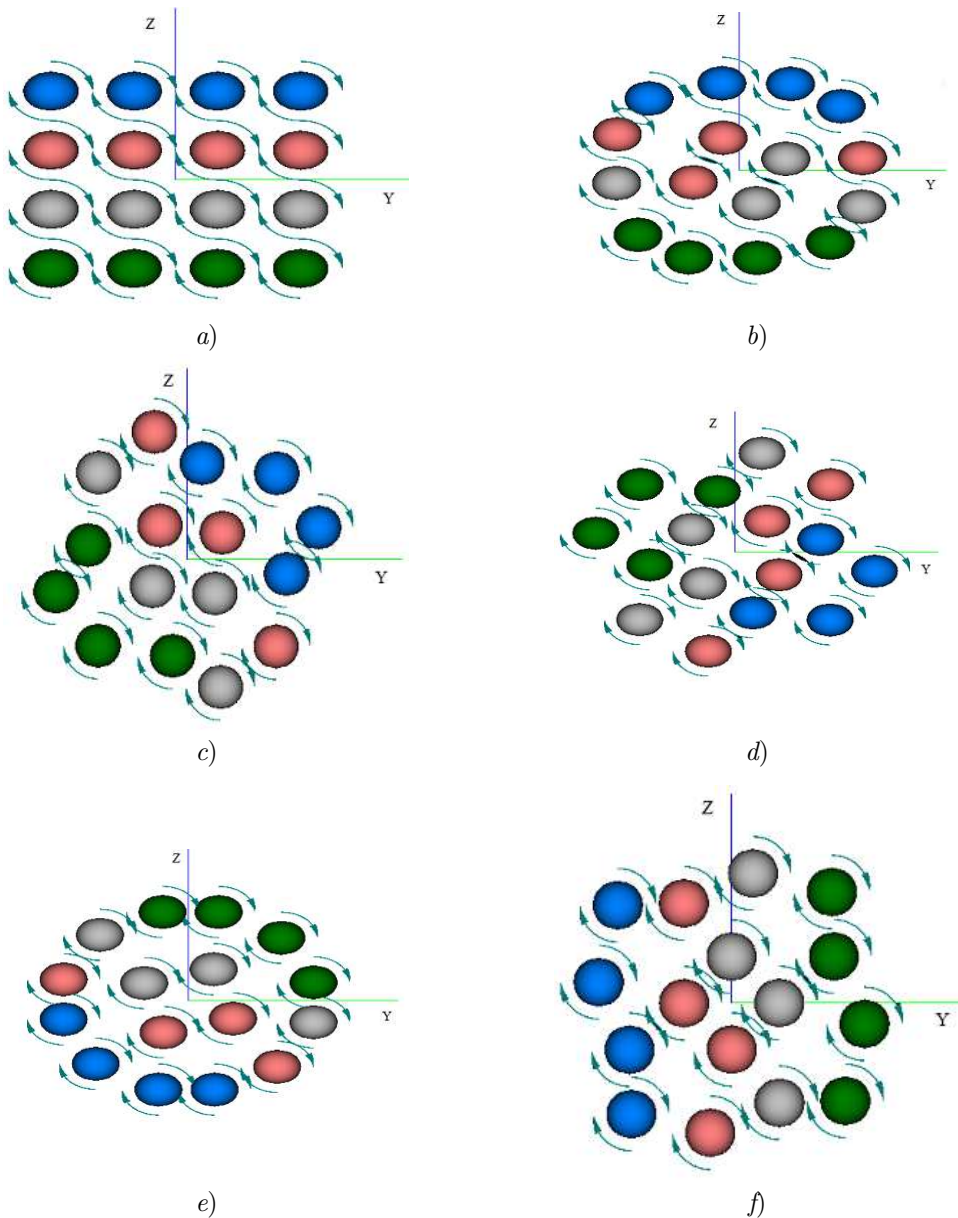
Ниже на Рис. 5.4 приведена динамика такой структуры в результате гидродинамического взаимодействия частиц. Результаты моделирования показывают, что такая структура не трансформируется в другую, а остается неизменной и вращение частиц приводит к вращению всей структуры вокруг оси симметрии  $OX$ . Из рассмотренной двумерной системы частиц в виде пятиугольников можно собрать пространственную структуру, последовательно располагая их с определенным шагом вдоль оси симметрии  $OX$ . Коллективная динамика такой пространственной структуры в рассматриваемом внешнем магнитном поле аналогична динамики одиночной системы: структура не трансформируется и все ее составляющие вращаются вокруг оси симметрии с одинаковой угловой скоростью. Если расположить одиночную структуру в плоскости, параллельной оси  $OX$  так, чтобы она была симметричной относительно этой оси, то действие вектора момента, направленного тоже вдоль оси  $OX$ , приводит к вращению всей системы вокруг оси симметрии без ее трансформации.



**Рис. 5.4.** Коллективная динамика кольца из пяти вращающихся частиц: *a)* начальная структура ( $\hat{t} = 0$  с); *b)* сохранение структуры в результате динамики вращающихся частиц ( $\hat{t} = 650$  с)

**Fig 5.4.** Collective dynamics of a ring of five rotating particles: *a)* initial structure ( $\hat{t} = 0$  s); *b)* preservation of structure as a result of the dynamics of rotating particles ( $\hat{t} = 650$  s)

Еще одна структура, образование которой также возможно в результате диполь-дипольного взаимодействия, представляет собой систему периодически расположенных частиц. Моделировалась коллективная динамика периодической структуры из 16 частиц, расположенных в плоскости  $YOZ$  с шагом  $3\hat{a}$  по каждой из осей, с магнитными моментами, лежащими в той же плоскости. Такую структуру можно рассматривать, как четыре параллельно расположенных цепочки. В случае, если вектор внешнего магнитного поля перпендикулярен плоскости структуры, то получаем рассмотренный выше случай для одной цепочки: динамика и трансформация всех четырех цепочек будут подобны одной. На Рис. 5.5 представлен результат моделирования коллективной динамики периодической структуры, когда вектор напряженности внешнего магнитного поля лежит в той же плоскости, что и сама структура. Как видно из приведенных на Рис. 5.5 слайдах, происходит сложная трансформация первоначальной структуры с перемешиванием частиц и образованием повторяющихся конфигураций. При этом так же, как и для всех выше рассмотренных структур, происходит вращение всей системы вокруг оси симметрии. Пространственную периодическую структуру можно рассматривать, как набор последовательно расположенных вдоль оси  $OX$  с определенным шагом двумерной периодической системы. При этом вектор напряженности внешнего магнитного поля для одних слоев структуры будет направлен перпендикулярно плоскости, в которой они лежат, а для других слоев структуры будет параллелен им. Коллективная динамика такой пространственной структуры должна иметь характерные особенности коллективной динамики цепочечной и двумерной структур, приведенные выше.



**Рис. 5.5.** Характерные фазы динамической структуры из 16 вращающихся частиц: *a)* начальная структура ( $\hat{t} = 0$  с); *b), e)* повторяющиеся фазы динамической структуры ( $\hat{t} = 2450, 3780$  с); *c), d), f)* фазы перестройки динамической структуры ( $\hat{t} = 2800, 3150, 4200$  с)

**Fig 5.5.** Characteristic phases of the dynamic structure of 16 rotating particles: *a)* initial structure ( $\hat{t} = 0$  s); *b), e)* repeating phases of the dynamic structure ( $\hat{t} = 2450, 3780$  s); *c), d), f)* phases of dynamic structure restructuring ( $\hat{t} = 2800, 3150, 4200$  s)

Во всех рассмотренных случаях коллективная динамика вращающихся частиц существенно отличается от динамики поступательно перемещающихся частиц [19]. Так, для системы в виде цепочки частиц при любой ее ориентации относительно вектора приложенной внешней силы, коллективная динамика приводит к ее разрушению на отдельные частицы. Еще одно отличие можно продемонстрировать на примере системы из пяти частиц, расположенных в вершинах пятиугольника. Если помимо приложенного момента добавить и действие внешней силы с модельным значением  $F^{(e)} = 1 \text{ г}/(\text{см}\cdot\text{с})$ , действующей на каждую частицу вдоль оси  $OY$ , то результаты численного моделирования показывают распад такой системы в результате гидродинамического взаимодействия. Однако увеличением величины приложенного момента можно стабилизировать структуру так, чтобы она, вращаясь вокруг некоторой оси, поступательно перемещалась, не разрушаясь. Такая динамика качественно согласуется с экспериментами по динамике подобных структур на межфазной поверхности жидкость-газ [6].

Что касается допущения о постоянстве приложенного к частицам момента со стороны внешнего поля, то, как указывалось выше, оно может быть использовано при условии малого отклонения угловых скоростей частиц от некоторой средней величины (угловой скорости вращения поля). Проведенные вычисления подтвердили этот результат: во всех рассмотренных случаях отклонение угловых скоростей от среднего значения не превышали нескольких процентов.

## 6. Заключение

Проведено численное моделирование коллективной динамики дипольных частиц, вращающихся в вязкой жидкости. Вращение дипольных частиц генерируется внешним переменным полем. В качестве исходной системы принято равновесное состояние, в котором она находится в отсутствие внешнего поля. В этом случае частицы могут объединяться в структуры в результате дипольного взаимодействия между частицами. Рассмотрены три такие структуры: прямолинейная цепочка, замкнутая цепочка и плоская периодическая система частиц. В качестве основного механизма, отвечающего за коллективную динамику системы вращающихся частиц, принят механизм гидродинамического взаимодействия. Результаты численного моделирования коллективной динамики рассмотренных систем вращающихся частиц показывают формирование характерной динамической структуры для каждого из трех возможных их первоначальных равновесных состояний. Полученные результаты подтверждают гипотезу, что вращение частиц формирует динамическую структуру за счет гидродинамического механизма. Коллективная динамика системы вращающихся частиц, вызванная действием приложенного момента, качественно отличается от динамики, вызванной действием внешней силы. В первом случае формируемая динамическая структура группирует частицы, а во втором, наоборот, рассеивает их по объему. Такое различие в коллективной динамике в этих двух случаях внешнего воздействия связано с отличиями в генерируемой этими воздействиями гидродинамики окружающей жидкости. Полученные результаты могут быть использованы для управления образованием структур в системе жидкость-частицы во внешнем переменном однородном поле.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arigaa K., Nishikawa M., Mori T., Takey J., Shrestha L.K., Hill J.P. Self-assembly as a key player for materials nanoarchitectonics // Science and Technology of Advanced Materials. 2019. Vol. 20. No. 1. P. 51-95. DOI: <https://doi.org/10.1080/14686996.2018.1553108>
2. Shields C. W., Velev D. The Evolution of Active Particles: Toward Externally Powered Self-Propelling and Self-Reconfiguring Particle Systems // Chem. 2017. Vol. 3, Issue 4. P. 539-559. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chempr.2017.09.006>
3. Robertson B., Stark H., Kapral R. Collective orientational dynamics of pinned chemically-propelled nanorotors // CHAOS. 2018. No. 28. 045109. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5018297>
4. Aubret A., Youssef M., Sacanna S., Palacci J. Targeted assembly and synchronization of self-spinning microgears // Nature Physics. 2018. Vol. 14. P. 1114-1118. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41567-018-0227-4>
5. Wang W., Duan W., Ahmed S., Sen A., Mallouk T.E. From one to many: Dynamic assembly and collective behavior of self-propelled colloidal motors // Acc. Chem. Res. 2015. No. 48. P.1938-1946. DOI: <https://doi.org/10.1021/acs.accounts.5b00025>
6. Wang Q., Yang L., Wang B., Yu Y., Yu J., Zhang L. Collective Behavior of Reconfigurable Magnetic Droplets via Dynamic Self-Assembly // ACS Appl. Mater. Interfaces. 2019. Vol. 11. No. 1. P. 1630-1637. DOI: <https://doi.org/10.1021/acsami.8b17402>
7. Kokot G., Kolmakov G. V., Aranson I. S., Snezhko A. Dynamic self-assembly and self-organized transport of magnetic micro-swimmers // Scientific Reports. 2017. Vol. 7. 14726. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-017-15193-z>
8. Snezhko A. Complex collective dynamics of active torque-driven colloids at interfaces // Current Opinion in Colloid and Interface Science. 2016. No. 21. P. 65-75. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cocis.2015.11.010>
9. Liljeström V., Chen C., Dommersnes P., Fossum J.O., Gröschel A.H. Active structuring of colloids through field-driven self-assembly // Current Opinion in Colloid and Interface Science. 2019. Vol. 40. P. 25-41. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cocis.2018.10.008>
10. Арансон И.С. АКТИВНЫЕ КОЛЛОИДЫ // Успехи физических наук. 2013. Т. 183. No 1. С. 87-102. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0183.201301f.0087>
11. Manikas K., Vogiatzis G.G., Hütter M., Anderson P.D. Structure formation in suspensions under uniform electric or magnetic field // Multiscale and Multidisciplinary Modeling, Experiments and Design. 2021. Vol. 4. P. 77-97. DOI: <https://doi.org/10.1007/s41939-021-00091-9>
12. Koessel F.R., Jabbari-Farouji S. Emergent pattern formation of active magnetic suspensions in an external field // New J. Phys. 2020. Vol. 22. 103007. DOI: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/abb64d>

13. Ma Z., Yang M., Ni R. Dynamic Assembly of Active Colloids: Theory and Simulation // *Adv. Theory Simul.* 2020. Vol. 3. 2000021. DOI: <https://doi.org/10.1002/adts.202000021>
14. Telezki V., Klumpp S. Simulations of structure formation by confined dipolar active particles // *Soft Matter.* 2020. Vol. 16. 10537. DOI: <https://doi.org/10.1039/d0sm00926a>
15. Miyamoto T., Imai M., Uchida N. Hydrodynamic synchronization and collective dynamics of colloidal particles driven along a circular path // *Phys. Rev. E.* 2019. Vol. 100, No. 3. 032607. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.032607>
16. Driscoll M., Delmotte B. Leveraging collective effects in externally driven colloidal suspensions: experiments and simulations // *Current Opinion in Colloid and Interface Science.* 2019. Vol. 40. P. 42-57. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cocis.2018.10.002>
17. Мартынов С. И., Ткач Л. Ю. О механизме перемещения агрегатов частиц в вязкой жидкости в переменном однородном внешнем поле // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2019. Т. 5. № 3. С. 505-515. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0044466919030128>
18. Мартынов С. И. Гидродинамическое взаимодействие частиц // *Известия РАН. Механика жидкости и газа,* 1998. № 2. С. 112-119.
19. Баранов В. Е., Мартынов С. И. Влияние гидродинамического взаимодействия на скорость осаждения большого числа частиц в вязкой жидкости // *Известия РАН. Механика жидкости и газа.* 2004. № 1. С. 152-164.
20. Мартынов С. И., Ткач Л. Ю. Моделирование динамики агрегатов частиц в вязкой жидкости // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2015. Т. 55. № 2. С. 109-118. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044466915020143>
21. Коновалова Н. И., Мартынов С. И. Моделирование динамики частиц в быстропеременном потоке вязкой жидкости // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2012. Т. 52. № 12. С. 2247-2259.
22. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Электродинамика сплошных сред.* М.: Наука, 1982. 620 с.
23. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. *Сборник задача по электродинамике.* М.: Наука, 1970. 488 с.
24. Landecker P. B., Villani D. D., Yung K. W. An analytic solution for the torque between two magnetic dipoles // *Magnetic and Electrical Separation.* 1998. Vol. 10. P. 29-33. DOI: <https://doi.org/10.1155/1999/97902>
25. Шутый А. М. Равновесные значения и динамика суммарного магнитного момента систем магнитных диполей // *ЖЭТФ.* 2010. Т. 137, вып. 2. С. 277-286.

*Поступила 24.02.2024; доработана после рецензирования 07.05.2024;  
принята к публикации 29.05.2024*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## REFERENCES

1. K. Arigaa, M. Nishikawa, T. Mori, et al., “Self-assembly as a key player for materials nanoarchitectonics”, *Science and Technology of Advanced Materials*, **20**:1 (2019), 51–95. DOI: <https://doi.org/10.1080/14686996.2018.1553108>
2. C. W. Shields, D. Velez, “The evolution of active particles: toward externally powered self-propelling and self-reconfiguring particle systems”, *Chem.*, 2017, no. 4, 539–559. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chempr.2017.09.006>
3. B. Robertson, H. Stark, R. Kapral, “Collective orientational dynamics of pinned chemically-propelled nanorotors”, *CHAOS*, 2018, no.28, 045109. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5018297>
4. A. Aubret, M. Youssef, S. Sacanna, J. Palacci, “Targeted assembly and synchronization of self-spinning microgears”, *Nature Physics*, **14** (2018), 1114–1118. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41567-018-0227-4>
5. W. Wang, W. Duan, S. Ahmed, A. Sen, T. E. Mallouk, “From one to many: Dynamic assembly and collective behavior of self-propelled colloidal motors”, *Acc. Chem. Res.*, **48** (2015), 1938–1946. DOI: <https://doi.org/10.1021/acs.accounts.5b00025>
6. Q. Wang, L. Yang, B. Wang, Y. Yu, J. Yu, L. Zhang, “Collective behavior of reconfigurable magnetic droplets via dynamic self-assembly”, *ACS Appl. Mater. Interfaces*, **11**:1 (2019), 1630–1637. DOI: <https://doi.org/10.1021/acsami.8b17402>
7. G. Kokot, G. V. Kolmakov, I. S. Aranson, A. Snezhko, “Dynamic self-assembly and self-organized transport of magnetic micro-swimmers”, *Scientific Reports*, **7** (2017), 14726. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-017-15193-z>
8. A. Snezhko, “Complex collective dynamics of active torque-driven colloids at interfaces”, *Current Opinion in Colloid and Interface Science*, 2016, no. 21, 65–75. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cocis.2015.11.010>
9. V. Liljeström, C. Chen, P. Dommersnes, J. O. Fossum, A. H. Gröschel, “Active structuring of colloids through field-driven self-assembly”, *Current Opinion in Colloid and Interface Science*, **40** (2019.), 25–41. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cocis.2018.10.008>
10. I. S. Aranson, “Active colloids”, *Physics-Uspokhi*, **183**:1 (2013.), 87–10 (In Russ). DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0183.201301f.0087>
11. K. Manikas, G. G. Vogiatzis, M. Hütter, P. D. Anderson, “Structure formation in suspensions under uniform electric or magnetic field”, *Multiscale and Multidisciplinary Modeling, Experiments and Design*, **4** (2021), 77–97. DOI: <https://doi.org/10.1007/s41939-021-00091-9>
12. F. R. Koessel, S. Jabbari-Farouji, “Emergent pattern formation of active magnetic suspensions in an external field”, *New J. Phys.*, **22** (2020), 103007. DOI: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/abb64d>

13. Z. Ma, M. Yang, R. Ni, “Dynamic Assembly of Active Colloids: Theory and Simulation”, *Adv. Theory Simul*, **3** (2020), 2000021. DOI: <https://doi.org/10.1002/adts.202000021>
14. V. Telezki, S. Klumpp, “Simulations of structure formation by confined dipolar active particles”, *Soft Matter*, **16** (2020), 10537. DOI: <https://doi.org/10.1039/d0sm00926a>
15. T. Miyamoto, M. Imai, N. Uchida, “Hydrodynamic synchronization and collective dynamics of colloidal particles driven along a circular path”, *Phys. Rev. E*, **100**:3 (2019), 032607. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.032607>
16. M. Driscoll, B. Delmotte, “Leveraging collective effects in externally driven colloidal suspensions: experiments and simulations”, *Current Opinion in Colloid and Interface Science*, **40** (2019), 42–57. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cocis.2018.10.002>
17. S. I. Martynov, L. Yu. Tkach, “Mechanism of moving particle aggregates in a viscous fluid subjected to a varying uniform external field”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **59**:3 (2019), 475–483 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.1134/S0044466919030128>
18. S. I. Martynov, “Hydrodynamic interaction of particles”, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of fluid and gas*, 1998, no. 2, 112–119 (In Russ.).
19. V. E. Baranov, S. I. Martynov, “The influence of hydrodynamic interaction on the rate of sedimentation of a large number of particles in a viscous fluid”, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of fluid and gas*, 2004, no. 1, 152–164 (In Russ.).
20. S. I. Martynov, L. Yu. Tkach, “Simulation of Particle Aggregate Dynamics in a Viscous Fluid”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **55**:2 (2015), 282–290. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044466915020143>
21. N. I. Konovalova, S. I. Martynov, “Simulation of Particle Dynamics in a Rapidly Varying Viscous Flow”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **52**:12 (2012), 1672–1690. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044466915020143>
22. L. D. Landau, E. M. Lifshits, *Electrodynamics of continuous media*, Nauka Publ., Moscow, 1982 (In Russ.), 620 p.
23. V. V. Batygin, I. N. Toptygin, *Collection of problems on electrodynamics*, Nauka Publ., Moscow, 1970 (In Russ.), 488 p.
24. P. B. Landecker, D. D. Villani, K. W. Yung, “An analytic solution for the torque between two magnetic dipoles”, *Magnetic and Electrical Separation*, **10** (1998), 29–33. DOI: <https://doi.org/10.1155/1999/97902>
25. A. M. Shutyy, “Equilibrium values and dynamics of the total magnetic moment of systems of magnetic dipoles”, *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, **137**:2 (2010), 277–286 (In Russ.).

*Submitted 24.02.2024; Revised 07.05.2024; Accepted 29.05.2024*

*The authors has read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.