DOI 10.15507/2079-6900.26.202404.392-403
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 512.554.31

К теореме вложения фильтрованных деформаций градуированных неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли

Кондратьева А. В., Кузнецов М. И.

ННГУ им. Н. И. Лобачевского (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. Для градуированных неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли над совершенным полем характеристики два, соответствующих флагу пространства переменных, доказывается выполнение условия теоремы вложения фильтрованных деформаций. Дается описание группы одномерных гомологий первого члена стандартной фильтрации градуированной неальтернирующей гамильтоновой алгебры Ли. В случае, когда число переменных $n \neq 4$, получена оценка кратности стандартного модуля над ортогональной алгеброй Ли в композиционном ряде группы гомологий относительно естественной структуры модуля над нулевым членом градуировки. Для $n = 4$ оценка справедлива, если множество переменных, согласованных с флагом, содержит переменную высоты больше 1, которая неизотропна относительно неальтернирующей скобки Пуассона, соответствующей неальтернирующей гамильтоновой форме. При вычислении группы гомологий используется канонический вид неальтернирующей гамильтоновой формы, соответствующий ее классу эквивалентности. Найдены мономы алгебры разделенных степеней, входящие в коммутант первого члена фильтрации. При вычислении кратности вхождения стандартного модуля над ортогональной алгеброй Ли в композиционный ряд первого члена градуировки группы гомологий используется структура весов относительно специального максимального тора p-замыкания нулевого члена градуировки в алгебре Ли линейных операторов, действующих на отрицательной части градуировки неальтернирующей гамильтоновой алгебры Ли.

Ключевые слова: совершенное поле характеристики два, неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли, фильтрованные деформации, теорема вложения

Для цитирования: Кондратьева А. В., Кузнецов М. И. К теореме вложения фильтрованных деформаций градуированных неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 4. С. 392–403. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202404.392-403

Об авторах:

Кондратьева Алиса Витальевна, ассистент кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: https://orcid.org/0009-0006-7722-870X, alisakondr@mail.ru

Кузнецов Михаил Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9231-301X, kuznets-1349@yandex.ru

Original article

MSC2020 17B50, 17B70

On an Embedding Theorem for Filtered Deformations of Graded Nonalternating Hamiltonian Lie Algebras

A. V. Kondrateva, M. I. Kuznetsov

National Research Lobachevsky State University (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. It is proved that for graded non-alternating Hamiltonian Lie algebras over a perfect field of characteristic two corresponding to a flag of the variables' space the condition of the embedding theorem of filtered deformations is fulfilled. The group of one-dimensional homology of the first member of the standard filtration for a graded non-alternating Hamiltonian Lie algebra is described. In the case when the number of variables $n \neq 4$, the estimate is obtained for multiplicity of the standard module over an orthogonal Lie algebra in a composition series of the homology group with respect to the natural structure of a module over the null-member of the grading. For $n = 4$ the estimate is true if a set of variables coordinated with the flag contains a variable of height greater than 1 which is non-isotropic with respect to Poisson bracket, corresponding to the non-alternating Hamiltonian form. The homology computation employs the normal shape of non-alternating Hamiltonian form, corresponding to its class of equivalence. The monomials of the divided power algebra included into the commutant of the filtration's first member are found. The multiplicity of the standard module over an orthogonal Lie algebra in a composition series of the first member of grading of the homology group is calculated. This calculation is based on the structure of weights with respect to a special maximal torus of the p-closure of the null-member of the standard grading in the Lie algebra of linear operators acting on the negative part of the grading of a non-alternating Hamiltonian Lie algebra.

Keywords: perfect field of characteristic two, non-altenating Hamiltonian Lie algebras, filtered deformations, embedding theorem

For citation: *A. V. Kondrateva, M. I. Kuznetsov.* On an Embedding Theorem for Filtered Deformations of Graded Nonalternating Hamiltonian Lie Algebras. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 26:4(2024), 392–403. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202404.392-403

About the authors:

Alisa V. Kondrateva, Assistant at the Departments of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky State University (23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod, 603022, Russia), ORCID: https://orcid.org/0009-0006-7722-870X, alisakondr@mail.ru

Michael I. Kuznetsov, D. Sci. (Phys. and Math.), Professor of the Departments of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky State University (23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod, 603022, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9231-301X, kuznets-1349@yandex.ru

1. Введение

Классификация простых конечномерных алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 3$ получена в начале этого века (подробное изложение см.

в [1–3]). Над полями малой характеристики $p = 2, 3$ проблема классификации остается открытой. В связи с этим представляет интерес описание фильтрованных деформаций известных градуированных алгебр Ли L, т. е. фильтрованных алгебр Ли $\mathscr{L}$, таких что ассоциированная градуированная алгебра $gr\,\mathscr{L}$ изоморфна L.

Пусть $\mathscr{L}$ – фильтрованная алгебра Ли, $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{-1} \supset \mathscr{L}_0 \supset \mathscr{L}_1 \supset \ldots$ с ассоциированной градуированной алгеброй $L = L_{-1} + L_0 + L_1 + \ldots$. Согласно теореме вложения [4], для транзитивной алгебры Ли $\mathscr{L}$ с отмеченной подалгеброй $\mathscr{L}_0$ существует минимальное вложение

$$\tau\colon (\mathscr{L}, \mathscr{L}_0) \to (W(\mathscr{F}'), W(\mathscr{F}')_{(0)})$$

Пусть $\tau\colon (L, L_{(0)}) \to (W(\mathscr{F}), W(\mathscr{F})_{(0)})$ – минимальное вложение транзитивной алгебры Ли $(L, L_{(0)})$, где $L_{(0)} = L_0 + L_1 + \ldots$. Известно, что $\mathscr{F} \leqslant \mathscr{F}'$. Достаточные условия совпадения флагов содержатся в теореме вложения фильтрованных деформаций, которая является частным случаем теоремы, доказанной в [4–5].

Теорема вложения фильтрованных деформаций. *Пусть* $L = L_{-1} + L_0 + \ldots$ *– транзитивная градуированная алгебра Ли. Если*

(i) L_{-1} *– неприводимый* L_0*-модуль,*

(ii) $H^1(L_0, L_{-1}) = 0$,

(iii) $mtp(L_{-1}, H_1(L_{(1)})) \leqslant m(\mathscr{F}(L, L_{(0)})) - n$, $n = \dim L_{-1}$,

то для любой фильтрованной деформации $\mathscr{L}$ *алгебры Ли* L *справедливы утверждения:*

(a) $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$,

(b) $Der\,\mathscr{L} \cong N_{\overline{W}(\mathscr{F})}(\tau(\mathscr{L}))$.

Здесь $\tau\colon \mathscr{L} \to W(\mathscr{F})$ *– минимальное вложение,* $\overline{W}(\mathscr{F})$ *– p-замыкание* $W(\mathscr{F})$ *в* $Der\,O(\mathscr{F})$, $mtp(Q, V)$ *– кратность вхождения* L_0*-модуля* Q *в композиционный ряд* L_0*-модуля* V.

В настоящей работе доказывается утверждение, анонсированное в [6] (предложение 2), о том, что для градуированной неальтернирующей гамильтоновой алгебры Ли L, $L = L_{-1} + L_0 + L_1 + \ldots$ выполняется условие (iii) теоремы вложения фильтрованных деформаций при некоторых ограничениях, когда $n = 4$ (Предложение 2.3 настоящей работы). Доказательство основано на вычислении группы $H_1(L_{(1)})$ (предложения 2.1 и 2.2). Отметим, что А. И. Кострикин и И. Р. Шафаревич вычислили группу $H_1(L_{(1)})$ для алгебр Ли L картановских типов W, S, H в случае, когда $p > 3$ (см. [7], глава III, параграф 3, предложение 1).

Всюду в дальнейшем K – совершенное поле характеристики $p = 2$. Пусть $E = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ – векторное пространство над K, $\mathscr{F}\colon E = E_0 \supseteq E_1 \supseteq \ldots \supseteq E_r \supset E_{r+1} = 0$ – флаг E. В работе используются стандартные обозначения для алгебр $O(\mathscr{F})$, $O(n, \overline{m})$, $W(\mathscr{F})$, $W(n, \overline{m})$ ([1, 7]).

Напомним определения, связанные с неальтернирующими гамильтоновыми алгебрами Ли [8–9]. Пусть $R = O(\mathscr{F})$, $W = W(\mathscr{F})$, $S(W)$ – симметрическая биалгебра R-модуля W с копроизведением $\Delta(D) = D \otimes 1 + 1 \otimes D$ для $D \in W$. Двойственная градуированная алгебра $S\Omega = \bigoplus\limits_{i \geqslant 0} S\Omega^i$, $S\Omega^i = \mathrm{Hom}_R(S^i(W), R)$, с умножением $\omega_r \omega_s = (\omega_r \otimes \omega_s) \circ \Delta$, $\omega_r \in S\Omega^r$, $\omega_s \in S\Omega^s$ является алгеброй симметрических дифференциальных форм над R. На $S\Omega$ имеется естественная структура алгебры разделенных степеней. Если $\omega \in S\Omega^1$, то $\omega^{(k)} \in S\Omega^k$, $\omega^{(k)}(D_1, \ldots, D_k) = \omega(D_1) \cdot \ldots \cdot \omega(D_k)$. Внешний дифференциал $d\colon S\Omega^r \to S\Omega^{r+1}$ задается так же, как и для альтернирующих форм. Форма $\omega \in S\Omega^2$ называется неальтернирующей, если $\omega(D, D) \neq 0$ для некоторого $D \in W$.

Пусть $\omega \in S\Omega^2$,

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_{ii} dx_i^{(2)} + \sum_{i<j} \omega_{ij} dx_i dx_j.$$

Здесь $dx_i^{(2)} = (dx_i)^{(2)}$. Положим $\omega_{ji} = \omega_{ij}$, $M = (\omega_{ij})$ – матрица формы ω. Форма называется *невырожденной*, если $\det M$ – обратимый элемент в R. Замкнутая невырожденная неальтернирующая форма $\omega \in S\Omega^2$ называется *неальтернирующей гамильтоновой* формой над R. Через $\omega(0)$ обозначим редукцию формы ω по модулю $\mathfrak{m}$, $\omega \equiv \omega(0) \bmod \mathfrak{m} S\Omega^2$, $a_{ij} = \omega_{ij}(0) \in K$,

$$\omega(0) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} dx_i^{(2)} + \sum_{i<j} a_{ij} dx_i dx_j.$$

Для неальтернирующей гамильтоновой формы ω форма $\omega(0)$ является невырожденной симметрической неальтернирующей билинейной формой на пространстве $V = \langle \partial_1, \ldots, \partial_n \rangle \cong E^*$. Обозначим $M^{-1} = (\overline{\omega}_{ij})$, $M^{-1}(0) = (\overline{a}_{ij})$. Матрица $M^{-1}(0)$ является матрицей двойственной формы $\overline{\omega(0)}$ на пространстве E в базисе $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Обозначим E^0 подпространство всех изотропных векторов E.

Пусть ω – неальтернирующая гамильтонова дифференциальная форма над R,

$$\widetilde{P}(\mathscr{F}, \omega) = \{D \in W(\mathscr{F}) \mid D\omega = 0\}.$$

Векторное поле $D \in \widetilde{P}(\mathscr{F}, \omega)$ однозначно определяется элементом $f \in \widetilde{O}(\mathscr{F})/K$, где $\widetilde{O}(\mathscr{F}) = O(\mathscr{F}) + \langle x_1^{(2^{m_1})}, \ldots, x_n^{(2^{m_n})} \rangle$, $D = D_f = \sum\limits_{i,j} \overline{\omega}_{ij} \partial_i f \partial_j$. Здесь мы предполагаем, что базис $\{x_1, \ldots, x_n\}$ согласован с флагом $\mathscr{F}$, $(m_1, \ldots, m_n) = \overline{m}$ – набор высот неизвестных $x_1, \ldots, x_n$.

Соответствие $f \mapsto D_f$ является изоморфизмом алгебры Ли $\widetilde{P}(\mathscr{F}, \omega)$ и алгебры Ли $\widetilde{O}(\mathscr{F})/K$ со скобкой Пуассона $\{f, g\} = \sum\limits_{i,j} \overline{\omega}_{ij} \partial_i f \partial_j g$. Положим

$$P(\mathscr{F}, \omega) = \{D_f,\ f \in O(\mathscr{F})/K\},$$

$P(\mathscr{F}, \omega)^{(1)}$ – коммутант алгебры Ли $P(\mathscr{F}, \omega)$. Алгебра Ли $\mathscr{L}$, такая что $P(\mathscr{F}, \omega)^{(1)} \subseteq \mathscr{L} \subseteq \widetilde{P}(\mathscr{F}, \omega)$, называется неальтернирующей гамильтоновой алгеброй Ли. Алгебра $\mathscr{L}$ имеет стандартную фильтрацию, индуцированную стандартной фильтрацией алгебры Ли W. Неальтернирующая гамильтонова алгебра Ли L является градуированной подалгеброй в $W(\mathscr{F})$ относительно стандартной градуировки, если $\omega = \omega(0)$ – форма с постоянными коэффициентами.

Для упрощения вычислений предполагаем, что неальтернирующая гамильтонова форма ω имеет канонический вид в терминах Теоремы 2 из [9].

Если $E_1 \not\subset E^0$, то матрица формы имеет вид

$$diag(M_0, \ldots, M_0, M_1, \ldots, M_1, 1_s),$$

где $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и 1_s – единичная матрица размерности s. Количество матриц M_0, M_1 и размерность матрицы 1_s определяется инвариантами.

Если $E_1 \subset E^0$, то канонический вид один и зависит от четности числа переменных:

$$dx_1 dx_2 + \ldots + dx_{n-2} dx_{n-1} + dx_n^{(2)}, \quad \text{если } n = 2t+1;$$
$$dx_1 dx_2 + \ldots + dx_{n-1} dx_n + dx_n^{(2)}, \quad \text{если } n = 2t.$$

Далее для упрощения введем несколько определений.

Назовем пару (x_i, x_j) M_0-парой, если в форму ω входит слагаемое $dx_i dx_j$ и нет других слагаемых с данными индексами. Здесь $|i-j| = 1$. Тогда $\{x_i, h\} = \partial_j h$ и $\{x_j, h\} = \partial_i h$.

Назовем пару (x_i, x_{i+1}) M_1-парой, если в форму ω входят слагаемые $dx_i dx_{i+1} + dx_{i+1}^{(2)}$. Тогда $\{x_i, h\} = \partial_i h + \partial_{i+1} h$ и $\{x_{i+1}, h\} = \partial_i h$. Отметим, что в этом случае важен порядок переменных.

Назовем пару (x_i, x_j) M-парой, если она M_0-пара или M_1-пара.

Назовем x_i чистым квадратом, если в форму ω входит слагаемое $dx_i^{(2)}$ и нет слагаемых $dx_i dx_j$ для некоторого j. Тогда $\{x_i, h\} = \partial_i h$.

Назовем x_i M_1-квадратом, если (x_i, x_{i+1}) – M_1-пара.

Назовем x_i квадратом, если она M_1-квадрат или чистый квадрат.

2. Строение модуля $H_1(L_{(1)})$

Пусть $L = L_{-1} + L_0 + L_1 + \ldots$ – неальтернирующая гамильтонова алгебра Ли, $P(\mathscr{F}, \omega)^{(1)} \subseteq L \subseteq \widetilde{P}(\mathscr{F}, \omega)$, $L_{(1)} = L_1 + L_2 + \ldots$ Докажем, что для алгебры Ли L выполняется условие (iii) теоремы вложения фильтрованных деформаций (см. Введение) о кратности вхождения L_0-модуля L_{-1} в композиционный ряд L_0-модуля $H_1(L_{(1)})$.

Введем обозначения
$$\overline{L}_k = \sum_{i=1}^{k-1} [L_i, L_{k-i}], \quad k > 1.$$

Тогда
$$H_1(L_{(1)}) = L_{(1)} / [L_{(1)}, L_{(1)}] = L_1 + \sum_{k>1} L_k / \overline{L}_k.$$

Если моном $f = x_1^{(h_1)} \ldots x_n^{(h_n)}$ имеет степень $s = h_1 + \ldots + h_n$, то $f \in L_{s-2}$, что следует из определения стандартной градуировки.

Пусть моном $f \in L_{(1)}$, $f = x_1^{(h_1)} \ldots x_n^{(h_n)}$. Очевидным условием того, что f попадает в $[L_{(1)}, L_{(1)}] \subset L_{(2)}$, является $\deg f \geqslant 4$. Обозначим f_i моном f без переменной x_i, т. е. $f_i = \prod_{q \neq i} x_q^{(h_q)}$. Аналогично f_{ij} и т. д.

Отметим, что поскольку скобка Пуассона $\{h, g\}$ представляет собой сумму произведений двух многочленов в разделенных степенях $\partial_i h \partial_j g$, то справедлива следующая лемма.

Л е м м а 2.1. *Если моном f лежит в $[L_{(1)}, L_{(1)}]$, то f раскладывается в произведение многочленов степени не ниже 2. В частности, мономы вида $x_j^{(2^t)}$ и $x_j^{(2^t)} x_s$ не лежат в коммутанте $[L_{(1)}, L_{(1)}]$.*

Если $f = \overline{x} = x_1^{(2^{m_1}-1)} \ldots x_n^{(2^{m_n}-1)} \in L_{(1)}$ и существует квадрат x_i высоты больше 1, то $\{x_i^{(2)} x_j^{(2^{m_j}-1)}, f_j\} = f$ для некоторого $j \neq i$, т. е. $\overline{x} \in [L_{(1)}, L_{(1)}]$. Если же нет квадратов высоты больше 1 ($E_1 \subset E^0$), то из теоремы о простоте (см. [9], теорема 5) следует $\overline{x} \notin [L, L]$, а значит $\overline{x} \notin [L_{(1)}, L_{(1)}]$. Далее считаем, что $f \neq \overline{x}$.

Лемма 2.2. *Пусть $f = x_1^{(h_1)} \ldots x_n^{(h_n)}$ – моном из $L_{(1)}$ и (x_i, x_j) – M-пара. Если $h_i = 0$, $h_j > 0$, то $f \in [L_{(1)}, L_{(1)}]$, за исключением случаев $f = x_s^{(2^t)}$ или $f = x_s^{(2^t)} x_k$.*

Доказательство. Мономы вида $x_s^{(2^t)}$ или $x_s^{(2^t)} x_k$ не лежат в $[L_{(1)}, L_{(1)}]$ в силу Леммы 2.1.

Если $x_j^{(h_j)}$ разложим, а именно $x_j^{(h_j)} = x_j^{(\alpha)} x_j^{(\beta)}$, где $\alpha > \beta \geqslant 1$, $f_j \neq 0$ или $\alpha > \beta \geqslant 2$, то

$$f = \{x_j^{(\alpha+1)}, x_i x_j^{(\beta)} f_j\} \in [L_{(1)}, L_{(1)}].$$

Случай $\alpha > \beta = 1$, $f_j = 0$ исключается, поскольку, если $\alpha = 2^t$, то $f = x_j^{(2^j)} x_j$, а если $\alpha \neq 2^t$, то $x_j^{(h_j)} = x_j^{(\alpha_1)} x_j^{(\beta_1)}$, где $\alpha_1 > \beta_1 \geqslant 2$.

Если $x_j^{(h_j)}$ неразложим (т. е. $h_j = 2^t$) и $h_j \neq 1$, то, поскольку мономы $f = x_j^{(2^t)}$ и $f = x_j^{(2^t)} x_s$ исключаются, $\deg f_j \geqslant 2$. Тогда

$$f = \{x_j^{(2^t+1)}, x_i f_j\} \in [L_{(1)}, L_{(1)}].$$

Если $h_j = 1$, то (поскольку $f \in L_{(2)}$) $\deg f_j \geqslant 3$. Поскольку случай $f_j = x_s^{(2^t)}$ исключается, то моном f_j разложим. Для определенности $f_j = g_1 g_2$, где $\deg g_1 \leqslant \deg g_2$. Тогда

$$f = \{x_i x_j g_1, x_j g_2\} \in [L_{(1)}, L_{(1)}].$$

Доказательство завершено.

Лемма 2.3. *Пусть $f = x_1^{(h_1)} \ldots x_n^{(h_n)}$ – моном из $L_{(1)}$. Если $h_i = 0$, где x_i – квадрат или x_i – часть M_0-пары, то $f \in [L_{(1)}, L_{(1)}]$, за исключением случаев $f = x_s^{(2^t)}$ или $f = x_s^{(2^t)} x_k$.*

Доказательство. Поскольку случаи из Леммы 2.1 исключаются, то моном f разложим в произведение мономов степени не меньше 2. Для определенности $f = g_1 g_2$.

(1) Если x_i – чистый квадрат, то

$$f = \{x_i g_1, x_i g_2\} \in [L_{(1)}, L_{(1)}].$$

(2) Если x_i – M_1-квадрат или x_i – часть M_0-пары (x_i, x_j), то в силу Леммы 2.2 можно считать, что также $h_j = 0$ (в случае M_1-квадрата $j = i + 1$). Тогда

$$f = \{x_i g_1, x_j g_2\} \in [L_{(1)}, L_{(1)}].$$

Доказательство завершено.

Пусть $E_1 \not\subset E^0$. Тогда существует квадрат x_i высоты больше 1. Зафиксируем этот квадрат и рассмотрим различные случаи в зависимости от степени x_i в мономе $f =$

$= x_1^{(h_1)} \dots x_n^{(h_n)}$. В силу Леммы 2.3 можно считать, что x_i входит в моном f, т. е. $h_i > 0$.

(1) Если $x_i^{(h_i)}$ разложим, а именно $x_i^{(h_i)} = x_i^{(\alpha)} x_i^{(\beta)}$, где либо $\alpha > \beta \geqslant 1$, $f_i \neq 0$, либо $\alpha > \beta \geqslant 2$, то

$$\{x_i^{(\alpha+1)}, x_i^{(\beta+1)} f_i\} = f + (\text{если } x_i - M_1\text{-квадрат и } h_{i+1} > 0) + x_i^{(\alpha)} x_i^{(\beta+1)} x_{i+1}^{(h_{i+1}-1)} f_{i,i+1}.$$

Последнее слагаемое также подпадает под пункт (1), но степень x_{i+1} понизилась. Следовательно, через несколько повторений $h_{i+1} = 0$ и второго слагаемого не будет. Случай $\alpha > \beta = 1$, $f_i = 0$ исключается в силу леммы 2.1.

(2) Пусть $x_i^{(h_i)}$ неразложим (т. е. $h_i = 2^t$) и $h_i \neq 1$. Поскольку мономы $f = x_i^{(2^t)}$ и $f = x_i^{(2^t)} x_s$ не рассматриваются (см. Лемму 2.1), то $\deg f_i \geqslant 2$. Тогда

$$\{x_i^{(2^t+1)}, x_i f_i\} = f + (\text{если } x_i - M_1\text{-квадрат и } h_{i+1} > 0) + x_i^{(2^t+1)} x_{i+1}^{(h_{i+1}-1)} f_{i,i+1}$$

Последнее слагаемое подпадает под пункт (1).

(3) Если $h_i = 1$, то $\deg f_i \geqslant 3$ (поскольку $f \in L_{(2)}$), и f_i – разложим (см. Лемму 2.1). Для определенности $f_i = g_1 g_2$, где $\deg g_1 \leqslant \deg g_2$. Тогда

$$\{x_i^{(2)} g_1, x_i g_2\} = f + x_i^{(3)}\{g_1, g_2\} + (\text{если } x_i - M_1\text{-квадрат и в } g_1 \text{ есть } x_{i+1}) + x_i^{(2)} g_2 \{x_i, g_1\}.$$

Второе слагаемое подпадает под пункт (1). Последнее слагаемое подпадает под пункт (2).

Таким образом, если $E_1 \not\subset E^0$, то любой моном $f \in L_{(2)}$, кроме описанных в Лемме 2.1, лежит в $[L_{(1)}, L_{(1)}]$.

Пусть $E_1 \subset E^0$. Тогда есть один канонический вид формы, зависящий от четности числа переменных. Отметим, что если число переменных n – нечетное, то присутствует только один чистый квадрат x_n, а остальные переменные разбиваются на M_0-пары. Если же число переменных n – четное, то присутствует только одна M_1-пара (x_{n-1}, x_n), а остальные переменные разбиваются на M_0-пары.

Сначала рассмотрим случай, когда f не содержит чистый квадрат или f не содержит M_1-пару в максимальных степенях. Максимальная степень для x_i – это $2^{m_i} - 1$. С учетом Леммы 2.3, нужно рассмотреть только случай $h_{n-1} = 1$, $h_n \neq 2^{m_n} - 1$, когда n – четное. Также в силу Леммы 2.2, если $f_{n,n-1} \neq 0$, то $f_{n,n-1}$ содержит минимум одну M_0-пару, т. е. $f_{n,n-1}$ разложим.

(1) Пусть $f_{n,n-1} = g_1 g_2$, где $\deg g_1 \geqslant \deg g_2 \geqslant 1$. Тогда

$$\{x_{n-1} g_1, x_{n-1} x_n^{(h_n+1)} g_2\} = f + x_n^{(h_n+1)} f_{n,n-1} \quad (\deg g_1 \geqslant 2),$$
$$\{x_{n-1} f_{n,n-1}, x_{n-1} x_n^{(h_n+1)}\} = f + x_n^{(h_n+1)} f_{n,n-1} \quad (\deg g_1 = 1).$$

Если $\deg g_1 = \deg g_2 = 1$, то $h_n \geqslant 2$. Второе слагаемое лежит в $[L_{(1)}, L_{(1)}]$ в силу Леммы 2.3.

(2) Пусть $f_{n,n-1} = 0$. Тогда $f = x_{n-1} x_n^{(h_n)}$ и $x_n^{(h_n)}$ разложим (см. Лемму 2.1), т. е. $x_n^{(h_n)} = x_n^{(\alpha)} x_n^{(\beta)}$, где $\alpha > \beta \geqslant 1$.

(2.1) Если $n > 2$, то найдется M_0-пара (x_i, x_j) и $f \in [L_{(1)}, L_{(1)}]$ по Лемме 2.3.

(2.2) Если $n = 2$, $f = x_1 x_2^{(h_2)}$ и h_2 можно представить как $2^t q + 2^{t-1} - 1$, где $t \geqslant 2$, $q \geqslant 1$, то

$$\{x_1 x_2^{(2^t q)}, x_1 x_2^{(2^{t-1})}\} = f + x_2^{(h_2+1)}.$$

Второе слагаемое лежит в $[L_{(1)}, L_{(1)}]$ в силу Леммы 2.3.

(2.3) Если $n = 2$, $f = x_1 x_2^{(h_2)}$, то f лежит в $[L_{(1)}, L_{(1)}]$ только если $x_2^{(h_2)} = x_2^{(\alpha)} x_2^{(\beta)}$, где $\alpha > \beta \geqslant 1$ и $\binom{h_2+1}{\alpha} = 1$. Данное условие возникает, поскольку γf $(\gamma \in K^*)$ появляется исключительно при произведении мономов

$$\{x_1 x_2^{(\alpha)}, x_1 x_2^{(\beta+1)}\} = \binom{h_2}{\alpha} f + \binom{h_2}{\alpha-1} f + \binom{h_2+1}{\alpha} x_2^{(h_2+1)} = \binom{h_2+1}{\alpha}(f + x_2^{(h_2+1)}).$$

Отметим, что если $h_2 = 2^t - 1$, то $\binom{h_2+1}{\alpha} = \binom{2^t}{\alpha}$ не равен нулю только при $\alpha = 0, 2^t$, следовательно, моном $x_1 x_2^{(2^t-1)}$ не лежит в коммутанте.

Предположим далее, что для нечетного числа переменных $h_n = 1$, а для четного числа переменных $h_{n-1} = 1$, $h_n = 2^{m_n} - 1$. В силу Леммы 2.2 и Леммы 2.3 можно считать, что если существует M_0-пара, то обе переменные присутствуют в рассматриваемом мономе f. Поскольку $f \neq \overline{x}$, то существует M_0-пара (x_i, x_j) с $h_j \neq 2^{m_j} - 1$. Зафиксируем эту пару. Отметим, что $\deg f_i \geqslant 2$, поскольку f_i содержит x_j и либо x_n, либо x_{n-1}, x_n.

(3) Если $x_i^{(h_i)}$ разложим, а именно $x_i^{(h_i)} = x_i^{(\alpha)} x_i^{(\beta)}$, $\alpha > \beta \geqslant 1$, то

$$f = \{x_i^{(\alpha+1)}, x_i^{(\beta)} x_j^{(h_j+1)} f_{ij}\}.$$

(4) Если $x_i^{(h_i)}$ неразложим (т. е. $h_i = 2^t$) и $h_i \neq 1$, то

$$f = \{x_i^{(2^t+1)}, x_j^{(h_j+1)} f_{ij}\}.$$

(5) Пусть $h_i = 1$. Тогда $\deg f_i \geqslant 3$. Напомним, что $\deg f_{ij} \geqslant 1$ для нечетного n и $\deg f_{ij} \geqslant 2$ для четного n.

(5.1) Если $\deg f_{ij} \geqslant 2$, то

$$f = \{x_i x_j^{(h_j+1)}, x_i f_{ij}\}.$$

(5.2) Если $f = x_i x_j^{(h_j)} x_n$, $n = 3$ и $m_i > 1$, то

$$f = \{x_j^{(h_j+1)}, x_i^{(2)} x_n\}.$$

(5.3) Если $f = x_i x_j^{(h_j)} x_n$, $n = 3$ и h_j представляется в виде $2^t q + 2^{t-1} - 1$, где $t \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, то

$$f = \{x_i x_j^{(2^t q)}, x_i x_j^{(2^{t-1})} x_n\}.$$

(5.4) Если $f = x_i x_j^{(h_j)} x_n$, $n = 3$, то f лежит в $[L_{(1)}, L_{(1)}]$ только если $x_j^{(h_j)} = x_j^{(\alpha)} x_j^{(\beta)}$, где $\alpha > \beta \geqslant 1$ и $\binom{h_j+1}{\beta} = 1$. Данное условие возникает, поскольку γf $(\gamma \in K^*)$ появляется исключительно при произведении мономов

$$\{x_i x_j^{(\alpha+1)}, x_i x_j^{(\beta)} x_n\} = \binom{h_j}{\beta} f + \binom{h_j}{\beta-1} f = \binom{h_j+1}{\beta} f.$$

Отметим, что если $h_j = 2^t - 1$, то $\binom{h_j+1}{\beta} = \binom{2^t}{\beta}$ не равен нулю только при $\beta = 0, 2^t$, следовательно, моном $x_i x_j^{(2^t-1)} x_n$ не лежит в коммутанте.

Таким образом, если $E_1 \subset E^0$, то любой моном $f \in L_{(2)}$, кроме описанных в Лемме 2.1 и пунктах (2.3) и (5.4), лежит в $[L_{(1)}, L_{(1)}]$.

Исходя из вышесказанного, можно сделать следующий вывод:

Предложение 2.1. *Пусть L – градуированная неальтернирующая гамильтонова алгебра Ли, $P(\mathscr{F},\omega)^{(1)} \subseteq L \subseteq \widetilde{P}(\mathscr{F},\omega)$.*

1. *Если $E_1 \not\subset E^0$, или $E_1 \subset E^0$, $n > 3$, или $E_1 \subset E^0$, $n = 3$, $\dim E_1 = 2$, то имеют место равенства*

$$\overline{L}_k = L_k, \quad k \neq 2^t - 2, 2^t - 1,$$
$$L_k/\overline{L}_k \cong \langle x_j^{(2^t)},\ x_j \in E_t\rangle \cong E_t, \quad k = 2^t - 2,$$
$$L_k/\overline{L}_k \cong \langle x_j^{(2^t)} x_s,\ x_j \in E_t\rangle \cong E_t \otimes L_{-1}, \quad k = 2^t - 1.$$

2. *Если $E_1 \subset E^0$, $n = 3$, $\dim E_1 = 1$, $\omega = dx_1 dx_2 + dx_3^{(2)}$ и для определенности высота $m_2 > 1$, то имеют место равенства*

$$\overline{L}_k = L_k, \quad k = 2^t q + 2^{t-1} - 1 (t \geqslant 1, q \geqslant 1), k \neq 2^t - 2,$$
$$L_k/\overline{L}_k \subseteq \langle \overline{x_1 x_2^{(k)} x_3}\rangle, \quad k \neq 2^t q + 2^{t-1} - 1 (t \geqslant 1, q \geqslant 1), 2^t - 2, 2^t - 1,$$
$$L_k/\overline{L}_k \cong \langle x_2^{(2^t)}\rangle, \quad k = 2^t - 2,$$
$$L_k/\overline{L}_k \cong \langle x_1 x_2^{(2^t)}, x_2^{(2^t+1)}, x_2^{(2^t)} x_3, x_1 x_2^{(2^t-1)} x_3\rangle, \quad k = 2^t - 1.$$

3. *Если $E_1 \subset E^0$, $n = 2$, $\omega = dx_1 dx_2 + dx_2^{(2)}$, то имеют место равенства*

$$\overline{L}_k = L_k, \quad k = 2^t q + 2^{t-1} - 1 (t \geqslant 2, q \geqslant 1),$$
$$L_k/\overline{L}_k \subseteq \langle \overline{x_1 x_2^{(k+1)}}\rangle, \quad k \neq 2^t q + 2^{t-1} - 1 (t \geqslant 2, q \geqslant 1), 2^t - 2, 2^t - 1,$$
$$L_k/\overline{L}_k \cong \langle x_2^{(2^t)}, x_1 x_2^{(2^t-1)}\rangle, \quad k = 2^t - 2,$$
$$L_k/\overline{L}_k \cong \langle x_1 x_2^{(2^t)}, x_2^{(2^t+1)}\rangle \cong L_{-1}, \quad k = 2^t - 1.$$

Таким образом, можно посчитать кратность вхождения L_0-модуля L_{-1} в сумме $\sum\limits_{k>1} L_k/\overline{L}_k$. При выполнении соответствующих условий из Предложения 2.1(1) следует, что для $k = 2^t - 1$, $k > 1$, $L_k/\overline{L}_k \cong E_t \otimes L_{-1}$ и среди оставшихся слагаемых нет фактор-модулей, изоморфных L_{-1}. Получаем, что количество фактор-модулей, изоморфных L_{-1}, равно $\sum\limits_{i>1} \dim E_i = m(\mathscr{F}) - \dim E_1 - n$.

Пусть выполняются условия пункта 2 Предложения 2.1. Отметим, что $\langle x_1 x_2^{(2^t-1)} x_3\rangle$ – неприводимый L_0-модуль и

$$L_k/\langle x_1 x_2^{(2^t-1)} x_3\rangle \cong \langle x_1 x_2^{(2^t)}, x_2^{(2^t+1)}, x_2^{(2^t)} x_3\rangle \cong L_{-1}, \quad k = 2^t - 1.$$

И среди оставшихся слагаемых нет фактор-модулей, изоморфных L_{-1}. Таким образом, количество фактор-модулей, изоморфных L_{-1}, равно $m_2-2=(1+m_2+1)-1-3= = m(\mathscr{F})-\dim E_1-n$.

Пусть выполняются условия пункта 3 Предложения 2.1. Видим, что при $k=2^t-2$ $\dim\langle x_2^{(2^t)}, x_1x_2^{(2^t-1)}\rangle=\dim L_{-1}$, но нет изоморфизма L_0-модулей, т. е. учитываются только случаи $k=2^t-1$. Таким образом, количество фактор-модулей, изоморфных L_{-1}, равно $m_2-2=(1+m_2)-1-2=m(\mathscr{F})-\dim E_1-n$.

Получаем одинаковую формулу для всех случаев. Далее, поскольку

$$L_1/L_1'\cong\langle x_j^{(2)}x_s,\ x_j\in E_1\rangle\cong E_1\otimes L_{-1},$$

где $L_1'=\langle x_ix_jx_k,\ i\neq j\neq k\rangle$, то количество фактор-модулей, изоморфных L_{-1}, равно $m(\mathscr{F})-n$. Осталось проверить нет, ли в L_1' фактор-модуля, изоморфного L_{-1}.

Очевидно, алгебра Ли типа $P(n,\overline{m},\omega)$ содержит алгебру $P(n,\overline{1},\omega)$, которая не зависит от выбранной формы ω и изоморфна алгебре Ли $P(n,\overline{1})$, в которой переменные $\{x_i\}$ образуют ортонормированный базис L_{-1}, а умножение определяется скобкой

$$\{f,g\}=\sum_{i=1}^{n}\partial_i f\partial_i g.$$

П р е д л о ж е н и е 2.2. *Пусть $L_1'=\langle x_ix_jx_k,\ i\neq j\neq k\rangle\subseteq L_1$ и $L_0'= =\langle x_ix_j,\ i\neq j\rangle\subseteq L_0$, где $\{x_i\}$ – ортонормированный базис L_{-1}. Тогда если $n\neq 4$, то композиционный ряд L_0'-модуля L_1' не содержит фактора изоморфного L_{-1}. Если $n=4$, то $L_1'\cong L_{-1}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим p-замыкание $\overline{L_0'}$ идеала L_0' в $gl(L_{-1})$. Согласно [6], $\overline{L_0'}=T+L_0'$, где $T=\langle x_i^{(2)}+x_j^{(2)},\ i,j=1,\ldots,n\rangle$ – тор размерности $n-1$.

Векторы $\{x_i\}$ являются весовыми векторами относительно T. Обозначим вес x_i через ε_i. При этом веса ε_i удовлетворяют единственному соотношению

$$\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n=0.$$

Весовыми векторами L_1' являются $x_ix_jx_k$, имеющие веса $\varepsilon_i+\varepsilon_j+\varepsilon_k$ соответственно. Любой фактор композиционного ряда L_0'-модуля L_1' раскладывается на весовые подпространства с теми же весами. Если композиционный ряд L_1' содержит фактор-изоморфный L_{-1}, то для некоторых i,j,k,s должно выполняться соотношение $\varepsilon_i+\varepsilon_j+\varepsilon_k=\varepsilon_s$ или $\varepsilon_i+\varepsilon_j+\varepsilon_k+\varepsilon_s=0$. Это возможно только при $n=4$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Из Предложения 2.2 следует, что при $n\neq 4$ в L_1' нет L_0'-фактор-модулей изоморфных L_{-1}. Следовательно, нет и L_0-модулей. Если $n=4$, то $L_1'\cong L_{-1}$ как L_0'-модуль.

Пусть $n=4$. Если нет таких $y\in L_{-1}$, что $y^{(2)}\in L_0$, то $L_0=L_0'$. Предположим, что есть $y\in L_{-1}$, такой что $y^{(2)}\in L_0$. Пусть $y=a_1x_1+\ldots+a_4x_4$. Тогда $y^{(2)}= =a_1^2x_1^{(2)}+\ldots+a_4^2x_4^{(2)}+\sum\limits_{i<j}a_ia_jx_ix_j=\overline{y}+y_0$, где $\overline{y}=a_1^2x_1^{(2)}+\ldots+a_4^2x_4^{(2)}$ и $y_0\in L_0'$. С точностью до константы из основного поля изоморфизм L_0'-модулей $\varphi\colon L_1'\to L_{-1}$ задается следующим образом: $\varphi(x_ix_jx_k)=x_s$, где $\{i,j,k,s\}=\{1,2,3,4\}$. Проверяем сохранится ли изоморфизм при умножении на $y^{(2)}$. Для этого достаточно взять $\overline{y}$.

С одной стороны,

$$\{\overline{y},x_1x_2x_3\}=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)x_1x_2x_3.$$

С другой стороны,

$$\{\overline{y}, \varphi(x_1x_2x_3)\} = \{\overline{y}, x_4\} = a_4^2x_4 = a_4^2\varphi(x_1x_2x_3).$$

Получаем, что $a_1^2+a_2^2+a_3^2 = a_4^2$ или $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2 = 0$, что равносильно $\{y, y\} = 0$.

Таким образом, если $E_1 \not\subset E^0$, то L_1' неизоморфен L_{-1} как L_0-модуль и для $n = 4$ не появляется еще одного фактор-модуля, изоморфного L_{-1}, в сумме. Если же $E_1 \subset E^0$, то $L_1' \cong L_{-1}$ как L_0-модуль и количество L_0-модулей может быть равно $m(\mathscr{F}) - n + 1$. В результате мы получаем предложение, анонсированное в [6] (см. [6] предложение 2)

Предложение 2.3. *Кратность L_0-модуля L_{-1} в L_0-модуле $H_1(L_{(1)})$ не превосходит $m(\mathscr{F}) - n$, где $m(\mathscr{F}) = m_1 + \ldots + m_n$, при условии $n \neq 4$ или $n = 4$, $E_1 \not\subset E^0$.*

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, проект FSWR-2023-0034.

Список литературы

1. Strade H. Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. I: Structure theory. de Gruyter Expositions in Mathematics. Vol. 38. Walter de Gruyter & Co. Berlin, 2004. 540 p. DOI: https://doi.org/10.1515/9783110197945

2. Strade H. Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. II: Classifying the absolute toral rank two case. de Gruyter Expositions in Mathematics. Vol. 42. Walter de Gruyter & Co. Berlin, 2009. 385 p.

3. Strade H. Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. III: Completion of the classification. de Gruyter Expositions in Mathematics. Vol. 57. Walter de Gruyter & Co. Berlin, 2013. 239 p.

4. Кузнецов М. И. Усеченные индуцированные модули над транзитивными алгебрами Ли характеристики p // Изв. АН СССР. Сер.матем. 1989. Т. 53, вып. 3. С. 557–589.

5. Кузнецов М. И. Теорема вложения для транзитивных фильтрованных алгебр Ли характеристики p // Изв. вузов. Матем. 1991. № 10. С. 43–45.

6. Кондратьева А. В., Кузнецов М. И. Фильтрованные деформации градуированных неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли // Изв. вузов. Матем. 2024. №. 9. С. 100–105. DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2024-9-100-105

7. Кострикин А. И., Шафаревич И. Р. Градуированные алгебры Ли конечной характеристики // Изв. АН СССР. Сер.матем. 1969. Т. 33, вып. 2. С. 251–322.

8. Кузнецов М. И., Кондратьева А. В., Чебочко Н. Г. О гамильтоновых алгебрах Ли характеристики 2 // Математический журнал (НАН Казахстана). 2016. Т. 16, № 2. С. 54–65.

9. Кондратьева А. В., Кузнецов М. И. Неальтернирующие гамильтоновы формы над алгеброй разделенных степеней в характеристике 2 // Изв. вузов. Матем. 2023. № 6. С. 95–100. DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-6-95-100

10. Kondrateva A. V. Non-alternating Hamiltonian Lie algebras in three variables // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, Issue 12. pp. 2841-2853. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2101.00398

Поступила 20.10.2024; доработана после рецензирования 05.11.2024; принята к публикации 27.11.2024

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. H. Strade, *Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. I: Structure theory. de Gruyter Expositions in Mathematics*, **38**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2004 DOI: https://doi.org/10.1515/9783110197945.

2. H. Strade, *Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. II: Classifying the absolute toral rank two case. de Gruyter Expositions in Mathematics*, **42**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2009.

3. H. Strade, *Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. III: Completion of the classification. de Gruyter Expositions in Mathematics*, **57**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 20013.

4. M. I. Kuznetsov, "Truncated induced modules over transitive Lie algebras of characteristic p", *Math. USSR-Izv.*, **34**:3 (1990), 575–608 (In Russ.).

5. M. I. Kuznetsov, "The embedding theorem for transitive filtered Lie algebras of characteristic p", *Izv. Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, **10** (1991), 43–45 (In Russ.).

6. A. V. Kondrateva, M. I. Kuznetsov, "Filtered deformations of graded non-alternating Hamiltonian Lie algebras", *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, **9** (2024), 100–105. DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2024-9-100-105 (In Russ.).

7. A. I. Kostrikin, I. R. Shafarevich, "Graded Lie algebras of finite characteristic", *Math. USSR-Izv.*, **33**:2 (1969), 251–322 (In Russ.).

8. M. I. Kuznetsov, A. V. Kondrateva, N. G. Chebochko, "On Hamiltonian Lie algebras of characteristic 2", *Mathematical Journal*, **16**:2 (2016), 54–65 (In Russ.).

9. A. V. Kondrateva, M. I. Kuznetsov, "Non-alternating Hamiltonian forms over a divided power algebra in characteristic 2", *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, **67**:6 (2023), 82–87. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X23060038 (In Russ.).

10. A. V. Kondrateva, "Non-alternating Hamiltonian Lie algebras in three variables", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **42**:12 (2021), 2841–2853. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2101.00398.

Submitted 20.10.2024; Revised 05.11.2024; Accepted 27.11.2024

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.