DOI 10.15507/2079-6900.26.202403.280-293 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.928

О частичной неустойчивости нулевого решения нелинейных систем по первому приближению

П. А. Шаманаев

ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Российская Федерация)

Аннотация. Получены достаточные условия неустойчивости относительно части переменных нулевого решения нелинейной системы по линейному приближению. Приведены результаты, когда правая часть исследуемой системы представлена как в наиболее общем виде, так и в виде векторного полинома. В качестве первого приближения взята линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей, которая может иметь собственные значения с нулевыми вещественными частями, причем алгебраические и геометрические кратности этих собственных значений могут не совпадать. Подход основан на установлении некоторого соответствия между решениями исследуемой системы и ее линейного приближения. В случае, если такое соответствие существует, начинающиеся в достаточно малой окрестности нуля решения таких систем обладают некоторыми одинаковыми покомпонентными асимптотическими свойствами. В настоящей работе в качестве такого свойства выступает неустойчивость по отношению к части переменных. Приведены условия, когда свойства неустойчивости нулевого решения одной системы сохраняются при переходе к другой системе. Приведен пример неустойчивости по отношению к части переменных нулевого решения нелинейной системы, матрица линейного приближения которой содержит по одному положительному, отрицательному и нулевому собственному значению, причем алгебраическая и геометрическая кратности нулевого собственного значения не совпадают.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, частичная неустойчивость, равномерная локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность, первое приближение

Для цитирования: Шаманаев П. А. О частичной неустойчивости нулевого решения нелинейных систем по первому приближению // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 3. С. 280–293. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.280-293

Об авторе:

Шаманаев Павел Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0135-317X, korspa@yandex.ru

Original article

MSC2020 34D20

On the partial instability of the zero solution of nonlinear systems to the first approximation

P. A. Shamanaev

National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)

Abstract. Sufficient conditions for instability with respect to a part of the variables of the zero solution of a nonlinear system in the linear approximation are obtained. The results are presented when the right-hand of the system under study is presented both in the most general form and in the form of a vector polynomial. The results are given for the cases when the right-hand of the system under study is presented both in the most general form and in the form of a vector polynomial. As a first approximation, a linear system of ordinary differential equations with a constant matrix is taken, whose eigenvalues may have zero real parts. Moreover, algebraic and geometric multiplicities of these eigenvalues may not coincide. The approach is based on establishing some correspondence between the solutions of the system under study and its linear approximation. If such correspondence exists, solutions of such systems starting in a sufficiently small neighborhood of zero have some identical component-wise asymptotic properties. In particular, this article focuses on solution instability with respect to some variables, which is one of such properties. Conditions are given for the case when the instability properties of the zero solution of one system are preserved upon transition to another system. The paper gives an example of instability with respect to a part of variables of the zero solution of a nonlinear system, whose linear approximation matrix contains one positive, one negative and one zero eigenvalue, and algebraic and geometric multiplicities of the zero eigenvalue do not coincide.

Keywords: ordinary differential equations, partial instability, uniform local componen-twise asymptotic equivalence, first approximation

For citation: *P. A. Shamanaev.* On the partial instability of the zero solution of nonlinear systems to the first approximation. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 26:3(2024), 280–293. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.280-293

About the author:

Pavel A. Shamanaev, Ph. D. in Phys. and Math., Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0135-317X, korspa@yandex.ru

1. Введение

Основы теории устойчивости по отношению к части переменных (частичной устойчивости) изложены в работах [1–5].

Исследованию частичной устойчивости нулевого решения по линейному приближению посвящены работы [6–7], в том числе и в критическом случае (см. [7–11]).

Настоящая работа посвящена исследованию частичной неустойчивости нулевого решения и является продолжением исследований, изложенных в работах [12–15]. Описанный в этих работах подход основан на установлении покомпонентной асимптотической эквивалентности между исследуемой системой и ее первым приближением [16], [17]. При выполнении некоторых дополнительных условий соответствующие решения этих систем будут обладать одинаковыми покомпонентными асимптотическими свойствами. В частности, показано, что если нулевое решение первого приближения является частично неустойчивым, то этим же свойством будет обладать и нулевое решение исследуемой системы.

2. Равномерно локально покомпонентно асимптотическая эквивалентность и частичная неустойчивость

Рассмотрим множество Ξ всех систем обыкновенных дифференциальных уравнений [15]

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{2.1}$$

где $x \in R^n$, $f \in C^{(0,1)}([T,+\infty) \times R^n, R^n)$, $T \geq 0$, $f(t,0) \equiv 0$.

Обозначим через $x(t : t_0, x^{(0)})$ решение с начальными данными $(t_0, x^{(0)})$ системы (2.1) и будем считать, что у всех систем из множества Ξ существует совокупность решений, определенных при всех $t \geq t_0 \geq T$ и $x^{(0)} \in D \subseteq R^n$. Здесь D — некоторая область пространства R^n, содержащая окрестность нуля.

Пусть [15]

$$\frac{dy}{dt} = g(t,y), \tag{2.2}$$

есть некоторая другая система из множества Ξ, а $y(t : t_0, y^{(0)})$ — ее решение с начальными данными $(t_0, y^{(0)})$.

Для систем (2.1) и (2.2) определим через $x_i(t : t_0, x^{(0)})$ и $y_i(t : t_0, y^{(0)})$ — i-е компоненты соответствующих решений.

Положим $U, V \subseteq D$ — некоторые области, содержащие окрестность нуля, $M_0 \subseteq N = \{1, ..., n\}$.

Определение 2.1 ([15]). *Системы* (2.1) *и* (2.2) *будем называть равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентными относительно функций* $\mu_i(t)$, $i \in M_0$, *если выполняются следующие условия:*

1) при любом фиксированном $t_0 \geq T$ *между множествами начальных точек систем* (2.1) *и* (2.2) *существует непрерывное в нулевой точке отображение*

$$P(x^{(0)}) = y^{(0)}, \quad P(0) = 0, \tag{2.3}$$

где $x^{(0)} \in U$, $y^{(0)} \in V$, *такое, что для* i*-х компонент решений систем* (2.1) *и* (2.2) *выполняются равенства*

$$x_i(t : t_0, x^{(0)}) = y_i(t : t_0, y^{(0)}) + \mu_i(t)\delta_i(t, t_0, x^{(0)}), \tag{2.4}$$

здесь $i \in M_0$, $\mu_i \in C([T,+\infty), R^+)$, $\delta_i \in C^{(0,0,1)}([t_0,+\infty) \times [T,+\infty) \times R^n, R)$*;*

2) в равенстве (2.4) *функции* $\delta_i(t, t_0, x^{(0)})$, $i \in M_0$, *ограничены при всех* $t \geq t_0$ *и стремятся к нулю при* $||x^{(0)}|| \to 0$, $x^{(0)} \in U$ *равномерно по* $t \in [t_0,+\infty)$*;*

3) в равенстве (2.4) *функции* $\delta_i(t, t_0, x^{(0)})$, $i \in M_0$, *стремятся к нулю при* $t \to +\infty$ *равномерно по* $x^{(0)} \in U$.

Для равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем сформулируем достаточные условия, которые сохраняют свойство частичной неустойчивости нулевого решения при переходе от одной системы к другой.

Л е м м а 2.1. *Пусть системы* (2.1) *и* (2.2) *являются равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентными относительно функций* $\mu_i(t)$, $i \in M_0$*. Тогда, если в сколь угодно малой проколотой окрестности нуля* V *существуют области* V_i, $i \in M_0$, *такие, что для всех* $y^{(0)} \in V_i \subset V$ *и функций* $\mu_i(t)$, $i \in M_0$, *таких что*

$$\mu_i(t) \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \tag{2.5}$$

выполняются соотношения

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{y_i(t : t_0, y^{(0)})}{\mu_i(t)} = q_i(t_0, y^{(0)}) \neq 0, \tag{2.6}$$

где $q_i \in C([T, +\infty) \times R^n, R)$ *то нулевые решения систем* (2.1), (2.2) *неустойчивы по каждой из переменных* x_i, y_i, $i \in M_0$, *соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем проводить доказательство неустойчивости нулевых решений систем (2.1) и (2.2) по каждой из переменных x_i, y_i, $i \in M_0$, соответственно, при каждом фиксированном $i \in M_0$.

Из определения верхнего предела и соотношения (2.6) следует, что для любого достаточно малого $\varepsilon_0 > 0$ существует момент времени $t_1 > t_0$, начиная с которого выполняется неравенство

$$\frac{y_i(t : t_0, y^{(0)})}{\mu_i(t)} < q_i(t_0, y^{(0)}) + \varepsilon_0 \quad \text{при всех } t > t_1 \tag{2.7}$$

и существует подпоследовательность $\{t_k\}$, $k = 1, 2, ...$ такая, что

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{y_i(t_k : t_0, y^{(0)})}{\mu_i(t_k)} = q_i(t_0, y^{(0)}) \quad \text{при } t_k \to +\infty.$$

Откуда следует, что для любого достаточно малого $\varepsilon_0 > 0$ найдется номер $k_0 \in \mathbb{N}$ и момент времени $t_2 > t_0$, такие что для всех $k > k_0$ выполняется неравенство

$$q_i(t_0, y^{(0)}) - \varepsilon_0 < \frac{y_i(t_k : t_0, y^{(0)})}{\mu_i(t)} \quad \text{при} \quad t_k > t_2. \tag{2.8}$$

Не ограничивая общности будем считать, что проколотая окрестность V_i состоит из таких точек y, что $||y|| < \delta$, $\delta > 0$ – достаточно малое число. Зафиксируем t_0 и разобьем область V_i на два подмножества:

$$V^+_{i,\,t_0} = \left\{ y^{(0)} : y^{(0)} \in V_i,\ q_i(t_0, y^{(0)}) > 0 \right\},$$
$$V^-_{i,\,t_0} = \left\{ y^{(0)} : y^{(0)} \in V_i,\ q_i(t_0, y^{(0)}) < 0 \right\}.$$

Из соотношения (2.6) следует, что хотя бы одно из множеств $V^+_{i,\,t_0}$, $V^-_{i,\,t_0}$ будет непустым.

Пусть $V^+_{i,\,t_0}$ – непустое подмножество и $y^{(0)} \in V^+_{i,\,t_0}$. Выбирая достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, получим неравенство $q_i(t_0, y^{(0)}) - \varepsilon_0 > 0$. Учитывая (2.5), для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$ и любого достаточно малого $\delta > 0$ можно выбрать момент времени $t^* > t_2$ и $y^* \in V^+_{i,\,t_0}$ такие, что

$$(q_i(t_0, y^*) - \varepsilon_0)\mu_i(t^*) \geq \varepsilon. \tag{2.9}$$

Тогда из оценок (2.8) и (2.9) следует, что в момент времени $t^* > t_2$ и $y^* \in V^+_{i,\,t_0}$ будет справедливо неравенство

$$y_i(t^* : t_0, y^*) \geq \varepsilon. \tag{2.10}$$

Пусть теперь $V^-_{i,\,t_0}$ – непустое множество и $y^{(0)} \in V^-_{i,\,t_0}$. Выбирая достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, получим неравенство $q_i(t_0, y^{(0)}) + \varepsilon_0 < 0$. Учитывая соотношение (2.5), для фиксированного $\varepsilon > 0$ и любого достаточно малого $\delta > 0$ можно выбрать момент времени $t^{**} > t_2$ и $y^{**} \in V^-_{i,\,t_0}$ такие, что

$$(q_i(t_0, y^{**}) + \varepsilon_0)\mu_i(t^{**}) < -\varepsilon. \tag{2.11}$$

С учётом оценок (2.7) и (2.11) в момент времени $t^{**} > t_2$ и $y^{**} \in V^-_{i,\,t_0}$ получим

$$y_i(t^{**} : t_0, y^{**}) \leq -\varepsilon. \tag{2.12}$$

Полагая $\bar{t} = \max\{t^*, t^{**}\}$, из неравенств (2.10) и (2.12) следует, что для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$ и любого достаточно малого $\delta > 0$ можно выбрать момент времени $\bar{t}$ и $y^{(0)} \in V_i$ такие, что

$$|y_i(\bar{t} : t_0, y^{(0)})| \geq \varepsilon. \tag{2.13}$$

Откуда и следует неустойчивость нулевого решения системы (2.2) по переменной y_i.

Для доказательства неустойчивости нулевого решения $x \equiv 0$ системы (2.1) по переменной x_i запишем равенство (2.4) в виде

$$\frac{x_i(t : t_0, x^{(0)}) - y_i(t : t_0, y^{(0)})}{\mu_i(t)} = \delta_i(t, t_0, x^{(0)})$$

и найдем верхний предел при $t \to +\infty$ от обеих частей равенства. Учитывая соотношение (2.6) и условие 3) определения , из последнего равенства получим

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{x_i(t : t_0, x^{(0)})}{\mu_i(t)} = q_i(t_0,\, y^{(0)}). \tag{2.14}$$

Определяя множества

$$U^+_{i,\,t_0} = \left\{x^{(0)} : x^{(0)} \in U,\ Px^{(0)} \in V_i,\ q_i(t_0, Px^{(0)}) > 0\right\},$$
$$U^-_{i,\,t_0} = \left\{x^{(0)} : x^{(0)} \in U,\ \ Px^{(0)} \in V_i,\ q_i(t_0, Px^{(0)}) < 0\right\},$$

проведем доказательство неустойчивости нулевого решения системы (2.2) по переменной x_i аналогично доказательству неустойчивости нулевого решения системы (2.2) по переменной y_i.

Действительно, из определения верхнего предела и соотношения (2.14) следует, что для любого достаточно малого $\varepsilon_0 > 0$ существует момент времени $t_1 > t_0$, начиная с которого выполняется неравенство

$$\frac{x_i(t:t_0,x^{(0)})}{\mu_i(t)} < q_i(t_0,Px^{(0)}) + \varepsilon_0 \quad \text{при всех } t > t_1 \tag{2.15}$$

и существует подпоследовательность $\{t_k\}$, $k=1,2,...$, такая, что $t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ и для любого достаточно малого $\varepsilon_0 > 0$ найдется номер $k_0 \in \mathbb{N}$ и момент времени $t_2 > t_0$ такие, что для всех $k > k_0$ выполняется неравенство

$$q_i(t_0,Px^{(0)}) - \varepsilon_0 < \frac{x_i(t_k:t_0,x^{(0)})}{\mu_i(t)} \quad \text{при} \;\; t_k > t_2. \tag{2.16}$$

Пусть $x^{(0)} \in U^+_{i,\,t_0}$. Тогда выбирая достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, получим неравенство $q_i(t_0,Px^{(0)}) - \varepsilon_0 > 0$. Учитывая (2.5) и (2.16), для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$ и любого достаточно малого $\delta > 0$ можно выбрать момент времени $t^* > t_2$ и $x^* \in U^+_{i,\,t_0}$ такие, что

$$x_i(t^*:t_0,x^*) \geq (q_i(t_0,Px^*) - \varepsilon_0)\mu_i(t^*) > \varepsilon. \tag{2.17}$$

Пусть теперь $x^{(0)} \in U^-_{i,\,t_0}$. Выбирая достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, получим неравенство $q_i(t_0,Px^{(0)}) + \varepsilon_0 < 0$. Учитывая соотношения (2.5) и (2.15), для фиксированного $\varepsilon > 0$ и любого достаточно малого $\delta > 0$ можно выбрать момент времени $t^{**} > t_2$ и $x^{**} \in U^-_{i,\,t_0}$ такие, что

$$x_i(t^{**}:t_0,x^{**}) \leq (q_i(t_0,Px^{**}) + \varepsilon_0)\mu_i(t^{**}) < -\varepsilon. \tag{2.18}$$

Из неравенств (2.17) и (2.18) следует неустойчивость нулевого решения системы (2.1) по переменной x_i.

Доказательство завершено.

Замечание 2.1. *Лемма 2.1 останется справедливой, если в соотношении* (2.6) *верхний предел заменить на нижний предел*

$$\varliminf_{t\to+\infty} \frac{y_i(t:t_0,y^{(0)})}{\mu_i(t)} = q_i(t_0,y^{(0)}) \neq 0. \tag{2.19}$$

3. Достаточные условия частичной неустойчивости нулевого решения по первому приближению

Сформулируем достаточные условия частичной неустойчивости нулевого решения нелинейных систем из множества Ξ на основании леммы 2.1.

Рассмотрим нелинейную систему [15]

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t,x), \tag{3.1}$$

где $x \in R^n$, A – постоянная $(n\times n)$-матрица, $f \in C^{(0,1)}([T,+\infty)\times R^n, R^n)$, $f(t,0) \equiv 0$,

$$|f_j(t,x_1,...,x_n)| \leq \psi_j(t,|x_1|,...,|x_n|) \qquad \forall\, x \in U \subseteq D,\; j=\overline{1,n}, \tag{3.2}$$

здесь $\psi_j \in C([T,+\infty)\times U_+,[0,+\infty))$, $U_+ = \{x: \; x\in U,\; x_i \geq 0,\; i=\overline{1,n}\}$, $\psi_j(t,0,...,0) \equiv 0$, причем $\psi_j(t,|x_1|,...,|x_n|) \leq \psi_j(t,|\tilde{x_1}|,...,|\tilde{x_n}|)$, $|x_i| \leq |\tilde{x_i}|$, $x,\tilde{x} \in U$, $t \in [T,+\infty)$.

Первое приближение системы (3.1) имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \tag{3.3}$$

где $y \in R^n$.

Пусть матрица A имеет $r \leq n$ различных собственных значений $\lambda_1, ..., \lambda_r$, вещественные части которых обозначим

$$\Lambda_1 = \mathrm{Re}\,\lambda_1,\ ...,\ \Lambda_r = \mathrm{Re}\,\lambda_r.$$

Тогда, учитывая оценки (24.29) и (24.31) из работы [18], для элементов i-й строки ($i = \overline{1,n}$) нормированной фундаментальной матрицы $Y(t-t_0)$ системы (3.3) будут справедливы оценки [15]

$$|y_{i1}(t-t_0)| \leq D_0 e^{\hat{\Lambda}_{i1}(t-t_0)} Q_{i1}(t-t_0), ..., |y_{in}(t-t_0)| \leq D_0 e^{\hat{\Lambda}_{in}(t-t_0)} Q_{in}(t-t_0),\ t \geq t_0, \tag{3.4}$$

$$|y_{i1}(t-t_0)| \leq D_0 e^{\check{\Lambda}_{i1}(t-t_0)} q_{i1}(t-t_0), ..., |y_{in}(t-t_0)| \leq D_0 e^{\check{\Lambda}_{in}(t-t_0)} q_{in}(t-t_0),\ t \leq t_0, \tag{3.5}$$

в которых $D_0 > 0$ – некоторая константа, $\hat{\Lambda}_{i1}$, ..., $\hat{\Lambda}_{in}$, $\check{\Lambda}_{i1}$, ..., $\check{\Lambda}_{in} \in \{\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_r\}$; $Q_{i1}(t-t_0), ..., Q_{in}(t-t_0), q_{i1}(t-t_0), ..., q_{in}(t-t_0)$ — некоторые полиномы относительно $t-t_0$. Степени этих полиномов меньше алгебраических кратностей собственных значений, вещественные части которых равны $\hat{\Lambda}_{i1}$, ..., $\hat{\Lambda}_{in}$, $\check{\Lambda}_{i1}$, ..., $\check{\Lambda}_{in}$ соответственно.

Пусть [15]

$$\beta_i \stackrel{def}{=} \hat{\Lambda}_{ij_i^*} = \max\{\hat{\Lambda}_{i1}, ..., \hat{\Lambda}_{in}\}, \qquad \alpha_i \stackrel{def}{=} \check{\Lambda}_{ik_i^*} = \min\{\check{\Lambda}_{i1}, ..., \check{\Lambda}_{in}\}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.6}$$

Тогда b_i и a_i, $i = \overline{1,n}$, определим как степени полиномов $Q_{ij_i^*}(t-t_0)$ и $q_{ik_i^*}(t-t_0)$ соответственно.

Учитывая формулы (3.6) и определения чисел b_i и a_i, оценки (3.4) и (3.5) примут вид [15]

$$|y_{ij}(t-t_0)| \leq D_0 e^{\beta_i(t-t_0)} \rho^{b_i}(t-t_0), \quad t \geq t_0,\ j = \overline{1,n}, \tag{3.7}$$

$$|y_{ij}(t-t_0)| \leq D_0 e^{\alpha_i(t-t_0)} \rho^{a_i}(t-t_0), \quad t \leq t_0,\ j = \overline{1,n}, \tag{3.8}$$

где $i = \overline{1,n}$,

$$\rho^{\nu}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } |t| < 1, \\ |t|^{\nu}, & \text{если } |t| \geq 1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Полагая $M_0 = N$, определим функции [15]

$$\mu_i(t) = D_0 e^{\beta_i(t-t_0)} \rho^{b_i}(t-t_0), \quad t \geq t_0, \tag{3.10}$$

здесь $i = \overline{1,n}$, и введем множества $N_i = \{j : y_{ij}(t-t_0) \equiv 0, \text{ при всех } t,\ t_0 \geq T\}$, $K_i = N \backslash N_i$, $i = \overline{1,n}$.

Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 3.1. *Пусть для любого $t_0 \geq T$ существует полуинтервал $[0, c)$, $c > 0$, такой, что для всех $c_0 \in [0, c)$ выполняются такие условия:*

А) при всех $j \in K_i$, $i = \overline{1,n}$ сходятся интегралы

$$I_{ij}(c_0) = \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\alpha_i(s-t_0)}\rho^{a_i}(s)\psi_j(s, c_0 e^{\beta_1(s-t_0)}\rho^{b_1}(s), ..., c_0 e^{\beta_n(s-t_0)}\rho^{b_n}(s))ds, \quad (3.11)$$

Б) справедливы неравенства

$$\sum_{j\in K_i} I_{ij}(c_0) < c_0, \quad i = \overline{1,n}. \quad (3.12)$$

Тогда, если для функции $\mu_i(t)$ и компоненты $y_i(t : t_0, y^{(0)})$ решения системы (3.3) *справедливы соотношения* (2.5) *и* (2.6) *леммы 2.1, соответственно, то нулевое решение системы* (3.1) *неустойчиво по переменной x_i.*

Доказательство. В работе [15] показано, что при выполнении условий А и Б теоремы 3.1 системы (3.1) и (3.3) являются равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентными относительно функций $\mu_i(t)$, $i = \overline{1,n}$.

Тогда, применяя лемму 2.1 к системам (3.1) и (3.3), получим, что нулевые решения этих систем неустойчивы по каждой из переменных x_i, y_i, $i \in M_0$, соответственно.

Доказательство завершено.

Рассмотрим частный случай системы (3.1), когда $f(t,x)$ есть векторный полином по x. В этом случае система (3.1) примет вид [15]

$$\frac{dx}{dt} = Ax + P(t,x), \quad (3.13)$$

где

$$P(t,x) = \begin{pmatrix} P_1(t,x), \\ \ldots, \\ P_n(t,x) \end{pmatrix}, \; P_j(t,x) = \sum_{|p_j|=2}^{\sigma} d_j^{(p_j)}(t)x^{p_j}, \; x^{p_j} = x_1^{p_{j1}}x_2^{p_{j2}}\ldots x_n^{p_{jn}}, \; \sigma \geq 2,$$

$$d_j^{(p_j)} \in C([T,+\infty), R), \quad p_j = (p_{j1}, ..., p_{jn}), \quad |p_j| = p_{j1} + \ldots + p_{jn}, \quad j = \overline{1,n}. \quad (3.14)$$

Теорема 3.2. *Пусть сходятся интегралы*

$$I_{ij}^{(p_j)} = \int\limits_{t_0}^{+\infty} \rho^{a_i + p_{j1}b_1 + \ldots + p_{jn}b_n}(s)\; e^{(-\alpha_i + p_{j1}\beta_1 + \ldots + p_{jn}\beta_n)(s-t_0)}\; |d_j^{(p_j)}(s)|ds, \quad (3.15)$$

по всем наборам $p_j = (p_{j1}, ..., p_{jn})$, i, $j = \overline{1,n}$.

Тогда, если для функции $\mu_i(t)$ и компоненты $y_i(t : t_0, y^{(0)})$ решения системы (3.3) *справедливы соотношения* (2.5) *и* (2.6) *леммы 2.1, соответственно, то нулевое решение системы* (3.1) *неустойчиво по переменной x_i.*

Доказательство.

В работе [15] показано, что при сходимости интегралов (3.15) теоремы 3.2 выполняются условия А и Б теоремы 3.1, и, следовательно, системы (3.13) и (3.3) являются равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентными относительно функций $\mu_i(t)$.

Далее, применяя лемму 2.1 к системам (3.13) и (3.3), получим, что нулевые решения этих систем неустойчивы по каждой из переменных x_i, y_i, $i \in M_0$, соответственно. Доказательство завершено.

Следствие 3.1. *Пусть коэффициенты $d_j^{(p_j)}(t)$ векторного полинома $P(t,x)$ в формуле* (3.14) *постоянны:*

$$d_j^{(p_j)}(t) \equiv d_j^{(p_j)} \quad \text{при всех} \ \ t \geq T \tag{3.16}$$

и для всех наборов $p_j = (p_{j1}, ..., p_{jn})$, $j = \overline{1,n}$, и выполняются неравенства

$$\gamma_{ij}^{(p_j)} \equiv -\alpha_i + p_{j1}\beta_1 + ... + p_{jn}\beta_n < 0, \quad j \in K_i, \ i = \overline{1,n}. \tag{3.17}$$

Тогда, если для функции $\mu_i(t)$ и компоненты $y_i(t : t_0, y^{(0)})$ решения системы (3.3) *справедливы соотношения* (2.5) *и* (2.6) *леммы 2.1, соответственно, то нулевое решение системы* (3.1) *неустойчиво по переменной x_i.*

Доказательство.

В работе [15] показано, что при выполнении условий (3.16) и (3.17) следствия интегралы 3.1 сходятся (3.15) теоремы 3.2, и, следовательно, системы (3.13) и (3.3) являются равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентными относительно функций $\mu_i(t)$.

Далее, с учетом формулы (3.16) применяя лемму 2.1 к системам (3.13) и (3.3), получим, что нулевые решения этих систем неустойчивы по каждой из переменных x_i, y_i, $i \in M_0$, соответственно.

Доказательство завершено.

В качестве примера рассмотрим задачу о частичной неустойчивости нулевого решения нелинейной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2 x_2 x_3, \\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1^3 x_2 x_4, \\ \dot{x}_3 = x_1 x_3, \\ \dot{x}_4 = 2x_4 + x_1 x_2, \end{cases} \tag{3.18}$$

Тогда система первого приближения имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = 0, \\ \dot{y}_4 = 2y_4, \end{cases} \tag{3.19}$$

имеет следующие различные собственные значения:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 2,$$

причем алгебраические кратности λ_1 и λ_3 равны по 1, для λ_2 алгебраическая и геометрическая кратности равны 2 и 1 соответственно.

Проверим условия следствия 3.1 для системы (3.18). Для этого вычислим нормированную в точке t_0 фундаментальную матрицу линейного приближения (3.19)

$$Y(t-t_0)=\begin{pmatrix} e^{-(t-t_0)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t-t_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2(t-t_0)} \end{pmatrix}.$$

Тогда в оценках (3.7), (3.8) для элементов строк фундаментальной матрицы $Y(t-t_0)$ в качестве параметров α_i, β_i, $i=\overline{1,4}$, можно взять

$$\beta_1=\alpha_1=-1, \quad \beta_i=\alpha_i=0,\ i=2,3, \quad \beta_4=\alpha_4=2,$$

а в качестве параметров b_i, a_i, $i=\overline{1,4}$, –

$$b_i=a_i=0, \quad i=1,3,4, \quad b_2=a_2=1.$$

Следовательно, согласно формулам (3.10), функции $\mu_i(t)$, при $t\geq t_0$ имеют вид

$$\mu_1(t)=e^{-(t-t_0)}, \quad \mu_2(t)=\rho(t-t_0), \quad \mu_3(t)=1, \quad \mu_4(t)=e^{2(t-t_0)}. \tag{3.20}$$

Здесь $D_0=1$. Далее, представляя нелинейную часть системы (3.18) по формулам (3.14) находим, что

$$p_1=(2,1,1,0), \quad p_2=(3,1,0,1), \quad p_3=(1,0,1,0), \quad p_4=(1,1,0,0).$$

Подставляя полученные значения в формулы (3.17), и учитывая, что для приведенного примера $K_1=\{1\}$, $K_2=\{2,3\}$, $K_3=\{3\}$, $K_4=\{4\}$ имеем

$$\gamma_{11}^{(p_1)}=\gamma_{22}^{(p_2)}=\gamma_{23}^{(p_2)}=\gamma_{33}^{(p_3)}=-1<0, \quad \gamma_{44}^{(p_4)}=-3<0.$$

Следовательно, неравенства (3.17) справедливы и следуя доказательству следствия 3.1 заключаем, что системы (3.18) и (3.19) являются равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентными относительно функций $\mu_i(t)$.

Проверим выполнение условий леммы 2.1. Так как условие (2.5) выполняется только для $\mu_2(t)$ и $\mu_4(t)$, то будем находить пределы (2.6) только для компонент

$$y_2(t\colon t_0,y^{(0)})=y_2^{(0)}+(t-t_0)y_3^{(0)}, \quad y_4(t\colon t_0,y^{(0)})=e^{2(t-t_0)}y_4^{(0)}.$$

Учитывая формулы (3.20), найдем пределы (2.6)

$$q_2(t_0,y^{(0)})=y_3^{(0)}, \quad q_4(t_0,y^{(0)})=y_4^{(0)}.$$

Тогда, для компонент $y_2(t:t_0,y^{(0)})$ и $y_4(t:t_0,y^{(0)})$ в сколь угодно малой проколотой окрестности нуля V в качестве областей V_2 и V_4 можно взять области, для точек которых выполняются неравенства $y_3^{(0)}\neq 0$ и $y_4^{(0)}\neq 0$, соответственно.

Таким образом, для $i=2,\,4$ соотношения (2.6) леммы 2.1 выполнены, и, следовательно, нулевое решение системы (3.18) неустойчиво по переменным x_2 и x_4.

4. Заключение

В настоящей работе на основании равномерной локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности получены достаточные условия частичной неустойчивости нулевого решения нелинейной системы по первому приближению в случае, когда матрица первого приближения может содержать собственные значения с нулевыми вещественными частями, причем алгебраические и геометрические кратности этих собственных значений могут не совпадать.

Полученные результаты могут быть применены к исследованию неустойчивости по всем переменным нулевого решения нелинейных систем.

Список литературы

1. Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1963. 116 с.

2. Малкин И. Г. Об устойчивости движения в смысле Ляпунова // Математический сборник, 1938. Т. 3(45). № 1. С. 47–101.

3. Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестник Московского университета, сер. Математика. Механика. Астрономия. Физика. Химия. 1957. № 4. С. 9–16.

4. Румянцев В. В., Озиранер А. С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.

5. Воротников В. И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 288 с.

6. Озиранер А. С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 659–665.

7. Прокопьев В. П. Об устойчивости движения относительно части переменных в критическом случае одного нулевого корня // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 422–426.

8. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.

9. Озиранер А. С. Об устойчивости движения в критическом случаях // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 415–421.

10. Щенников В. Н. О частичной устойчивости в критическом случае 2k чисто мнимых корней // Дифференциальные и интегральные уравнения: Методы топологической динамики: сб. ст. Горький: Горьк. гос. ун-т им. Н. И. Лобачевского. 1985. С. 46–50.

11. Щенников В. Н. Исследование устойчивости по части переменных дифференциальных систем с однородными правыми частями // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20, № 9. С. 1645–1649.

12. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Достаточные условия локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложение к устойчивости по части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т. 19, № 1. С. 102–115. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.19.2017.01.102-115

13. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Достаточные условия полиустойчивости по части переменных нулевого решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал Средневолжского математического общества. 2018. Т. 20, № 3. С. 304–317. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.20.201803.304-317

14. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Исследование устойчивости положения равновесия системы динамики биоценоза в условиях межвидового взаимодействия // Вестник Мордовского университета. 2018. Т. 28, № 3. С. 321–332. DOI: https://doi.org/10.15507/0236-2910.028.201803.321-332

15. Шаманаев П. А. Об устойчивости нулевого решения относительно части переменных по линейному приближению// Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19, № 3. С. 374–390. DOI: https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.306

16. Воскресенский Е. В. Асимптотические методы: теория и приложения. Саранск: Изд-во Средне-Волжского матем. об-ва, 2000. 300 с.

17. Воскресенский Е. В. Методы сравнения в нелинейном анализе. Саранск: Изд-во Саратовск. ун-та, 1990. 224 с.

18. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.

Поступила 21.05.2024; доработана после рецензирования 10.07.2024; принята к публикации 28.08.2024

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

References

1. A. M. Lyapunov, *Issledovanie odnogo iz osobennykh sluchaev zadachi ob ustoichivosti dvizheniya [Study of one of the special cases of the problem of stability of motion]*, Leningr. State University Press, Leningrad, 1963 (In Russ.), 116 p.

2. I. G. Malkin, “Über die Slabilität der Bewegung im Sinne von Liapounoff.”, *Mat. Sbornik*, **45**:1 (1938), 47–101 (In Russ.).

3. V. V. Rumyantsev, “Ob ustoychivosti dvizheniya po otnosheniyu k chasti peremennykh [On motion stability with respect to a part of variables]”, *Vestnik of Moscow University. Series. Mathematics. Mechanics. Astronomy. Physics. Chemistry*, 1957, no. 4, 9-16 (In Russ.).

4. V. V. Rumyantsev, A. S. Oziraner, *Ustoichivost i stabilizatsiya dvizheniya po otnosheniyu k chasti peremennykh [Stability and stabilization of motion with respect to a part of variables]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russ.), 253 p.

5. V. I. Vorotnikov, *Ustojchivost dinamicheskih sistem po otnosheniyu k chasti peremennyh [Stability of dynamical systems with respect to a part of variables]*, Nauka, M., 1991 (In Russ.), 288 p.

6. A. S. Oziraner, "Ob asimptoticheskoy ustoychivosti i neustoychivosti otnositelno chasti peremennykh [On asymptotic stability and instability with respect to a part of the variables]", *Applied Mathematics and Mechanics [J. Appl. Math. Mech.]*, **37**:4 (1973), 659-665 (In Russ.).

7. V. P. Prokopiev, "Ob ustoychivosti dvizheniya otnositel'no chasti peremennykh v kriticheskom sluchae odnogo nulevogo kornya [On the stability of motion with respect to a part of variables in the critical case of one zero root]", *Applied Mathematics and Mechanics [J. Appl. Math. Mech.]*, **39**:3 (1975), 422-426 (In Russ.).

8. I. G. Malkin, "Teoriya ustoychivosti dvizheniya [Theory of stability of motion]", 1966 (In Russ.), 533 p.

9. A. S. Oziraner, "Ob ustoychivosti dvizheniya v kriticheskom sluchayakh [On stability of motion in critical cases]", *Applied Mathematics and Mechanics*, **39**:3 (1975), 415-421 (In Russ.).

10. V. N. Shchennikov, "O chastichnoy ustoychivosti v kriticheskom sluchae 2k chisto mnimykh korney [On partial stability in the critical case of 2k purely imaginary roots]", *Differential and integral equations: Methods of topological dynamics. Gor'kiy: Gor'kiy state university named after N. I. Lobachevsky*, 1985., 46-50 (In Russ.).

11. V. N. Shchennikov, "Issledovanie ustoychivosti po chasti peremennykh differentsial'nykh sistem s odnorodnymi pravymi chastyami [Investigation of the stability with respect to a part of the variables of differential systems with homogeneous right-hand sides]", *Differential Equations*, **20**:9 (1984.), 1645-1649.

12. P. A. Shamanaev, O. S. Yazovtseva, "The sufficient conditions of local asymptotic equivalence of nonlinear systems of ordinary differential equations and its application for investigation of stability respect to part of variables", *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **19**:1 (2017), 102-115. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.19.2017.01.102-115 (In Russ.).

13. P. A. Shamanaev, O. S. Yazovtseva, "The sufficient conditions for polystability of solutions of nonlinear systems of ordinary differential equations", *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **20**:3 (2018), 304-317. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.20.201803.304-317 (In Russ.).

14. P. A. Shamanaev, O. S. Yazovtseva, "Studying the equilibrium state stability of the biocenosis dynamics system under the conditions of interspecies interaction", *Vestnik Mordovskogo universiteta [Mordovia University Bulletin journal]*, **28**:3 (2018), 321-332. DOI: https://doi.org/10.15507/0236-2910.028.201803.321-332 (In Russ.).

15. P. A. Shamanaev, "On the stability of the zero solution with respect to a part of variables in linear approximation", *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **19**:3 (2023), 374-390. DOI: https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.306 (In Russ.).

16. E. V. Voskresenskiy, *Asimptoticheskie metody: teoriya i prilozheniya [Asymptotic methods: theory and applications]*, Middle Volga Mathematical Society Publ., Saransk, 2000 (In Russ.), 300 p.

17. E. V. Voskresenskiy, *Metody sravneniya v nelineynom analize [Comparison methods in nonlinear analysys]*, Saratovsky University Press, Saratov, 1990 (In Russ.), 224 p.

18. B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemytskii, *Teoriya pokazatelei Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoichivosti [Theory of Lyapunov Exponents and Its Applications to Stability Problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Submitted 21.05.2024; Revised 10.07.2024; Accepted 28.08.2024

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.