УДК 517.929.7

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА В КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕДАХ МЕТОДАМИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Тхабисимова М.М., Бечелова А.Р. *

Кабардино-Балкарский госуниверситет им. Х.М. Бербекова

*__bechelova1956@mail.ru__

Предлагаемая работа посвящена исследованию краевой задачи для модифицированного уравнения влагопереноса в стохастических условиях. Наблюдения показывают, что исходная информация, используемая в модели Аллера, не является детерминированной, а носит вероятностный характер. В работе предложены итерационные методы решения нелинейной задачи Аллера.

Ключевые слова: математическое прогнозирование, корреляционные функции, детерминированные математические модели, итерационный процесс

SOLVING NONLINEAR TRANSFER PROBLEMS IN CONDENSED MEDIA BY SEQUENTIAL APPROXIMATION METHODS

Tkhabisimova M.M., Bechelova A.R.

Kabardino-Balkarian State University

The proposed work is devoted to the study of the boundary value problem for the modified equation of moisture transfer under stochastic conditions. Observations show that the initial information used in the Aller model is not deterministic, but is of a probabilistic nature. The work proposes iterative methods for solving the nonlinear Aller problem.

Keywords: mathematical forecasting, correlation functions, deterministic mathematical models, iterative process

В работе исследуется краевая задача для модифицированного уравнения влагопереноса (уравнения Адлера) в стохастических условиях.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right] + f(x,t); \quad (1)$$

$$u_x(0,t) = \mu_2(t) \quad 0 \le t \le; \quad (2)$$

$$u(l,t) = -\frac{1}{p}\int_0^l u(x,t)dx + \mu_2(t) \quad 0 \le t \le T; \quad (3)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad 0 \le t \le l, \quad (4)$$

где $f(x,t)$ – интенсивность источников влаги;

μ_1, $м_2$ – граничные условия;

$u_0(x)$ – начальное распределение влаги.

Многочисленные данные наблюдений показывают, что значения $f(x, t)$, $\mu_1(t), \mu_2(t), \mu_0(t)$ входящие в модель (1)-(4), являются случайными корреляционными функциями.

Функции, входящие в граничные и начальные условия и в правую часть уравнения, являются случайными и коррелированными. Это означает, что отклонение одной из функций от своего среднего значения (математического ожидания) немедленно приводит к изменению другой. Учитывая это, возникает необходимость решать задачу методом корреляционной теории случайных процессов. Такой подход к прогнозированию уровня грунтовых вод в стохастических условиях впервые был изучен в работе [1].

Таким образом, задача (1)–(4) рассмотрена в стохастических условиях в рамках корреляционной теории случайных процессов.

Определим математическое ожидание решения модифицированного уравнения влагопереноса в виде

$$\bar{f}(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t)}{n}. \tag{5}$$

Рассмотрев задачу (1)–(4) для каждой реализации случайных функций, получим

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \eta\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t}\right] + \bar{f}(x,t); \tag{6}$$

$$\bar{u}_x(0,t) = \overline{\mu_1}(t); \tag{7}$$

$$\bar{u}(l,t) = -\frac{1}{p}\int_0^l \bar{u}(x,t)dx + \bar{\mu}_2(t); \tag{8}$$

$$\bar{u}(x,0) = \bar{u}_0(x).$$

Таким образом, для определения математического ожидания влажности $\bar{u}(x,t)$ достаточно решить детерминированную задачу типа (1)–(4), где в качестве граничных и начальных условий используются математические ожидания случайных функций.

В случае, когда в уравнении (1) коэффициент диффузитивности D(u) существенно зависит от влажности и необходимо либо линеаризовать уравнение (1), либо построить процесс последовательных приближений, сводящей решение нелинейной задачи к решению последовательности линейных задач.

Например, для линейного уравнения можно предложить итерационный процесс вида

$$\frac{\partial u^{k+1}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D(u^k)\frac{\partial u^{k+1}}{\partial x} + \eta\frac{\partial^2 u^{(k+1)}}{\partial x \partial t}\right]. \tag{9}$$

Условие сходимости последовательных приближений (9) требует дополнительного исследования.

При решении нелокальных задач получаются алгебраические системы, не являющиеся трехдиагональными [2]. Поэтому для решения таких систем нельзя применять непосредственно метод прогонки. В этом случае можно использовать метод итерации.

Рассмотрим следующий итерационный процесс для уравнения (1–4).

$$\frac{\partial^{s+1} u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k(x,t)(\partial^{s+1} u)}{\partial t}\right) + \eta(x,t)\frac{\partial^{3^{s+1}}}{\partial x^2 \partial t} + f(x,t); \tag{10}$$

$$\overset{s+1}{u}_x(0,t) = \mu_1(t); \tag{11}$$

$$\overset{s+1}{u}(l,t) = -\frac{1}{p}\int_0^l \overset{s}{u}(x,t)dx + \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T; \tag{12}$$

$$\overset{s+1}{u}_x(0,t) = \mu_0(t), \qquad 0 \le t \le l. \tag{13}$$

Обозначим через $\overset{s+1}{z} = \overset{s+1}{u} - u$,

где

u – решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left|\frac{k(x,t)\partial u}{\partial x}\right|+\eta(x,t)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+f(x,t);$$

$$u_x(0,t)=\mu_1(t);$$

$$u(l,t)=-\frac{1}{p}\int_0^l u(x,t)dx+\mu_2(t),\qquad 0\le t\le T;$$

$$u(x,0)=u_0(x),\qquad 0\le x\le l.$$

Подставляя $\overset{s+1}{\mathbf{u}}=\overset{s+1}{z}-u$ в задачу (1-4) получаем задачу для погрешности $\overset{s+1}{\mathbf{z}}$:

$$\frac{\partial \overset{s+1}{z}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k(x,t)\left(\partial^{s+1}z\right)}{\partial x}\right)+\eta(x,t)\frac{\partial^3 \overset{s+1}{z}}{\partial x^2\partial t};$$

$$\overset{s+1}{z}_x(0,t)=0;$$

$$\overset{s+1}{z}(l,t)=-\frac{1}{p}\int_0^l \overset{s}{z}(x,t)dx,\quad 0\le t\le T;$$

$$\overset{s+1}{z}(x,o)=0,\qquad 0\le t\le l.$$

Для удобства обозначим $\overset{s+1}{z}$ через u, $\overset{s}{z}$ через $\tilde{u}$ и рассмотрим задачу:

$$u_t=(ku_x+\eta u_{xt})_x; \tag{14}$$

$$u_x(0,t)=0;$$

$$u(l,t)=-\frac{1}{p}\int_0^l \tilde{u}(x,t)dx,\quad 0\le t\le T;$$

$$u(x,0)=0,\quad 0\le x\le l, k\ge c_1; r\ge c_2 0.$$

Умножив уравнение (14) скалярно на u_t и принимая во внимание результаты работы [2], получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}[ku_x+\eta u_{xt}]. \tag{15}$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l udx=k(l,t)u_x(l,t)+\eta(l,t)u_{xt}(l,t)-k(0,t)u_x(0,t)-\eta(0,t)u_{xt}(0,t); \tag{16}$$

$$k(l,t)u_x(l,t)+\eta(l,t)u_{xt}(l,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l udx.$$

Подставим полученное выражение в (7) и получим

$$\|u_t\|_0^2+\frac{1}{2}c_1\frac{\partial}{\partial t}\|u_t\|_0^2+\frac{1}{2}c_3\|u_t\|_0^2+c_2\|u_{xt}\|_0^2+\frac{1}{p}\int_0^l\tilde{u}_t dx\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l udx\right]\le 0. \tag{17}$$

Оценим выражение $\frac{1}{p}\int_0^l\tilde{u}_t dx\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l udx$:

$$\frac{1}{p}\int_0^l\tilde{u}_t dx\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l udx=\frac{1}{2}\left(\int_0^l u_t dx\right)^2+\frac{1}{2p^2}\left(\int_0^l\tilde{u}_t dx\right)^2\le\frac{1}{2p^2}\|\tilde{u}_t\|_0^2+\frac{1}{2}\|u_t\|_0^2$$

и проинтегрировав его по τ от 0 до t:

$$\frac{1}{2}\int_0^l\|u_t\|_0^2+\frac{1}{2}c_1\|u_x\|_0^2+\frac{1}{2}c_3\int_0^l\|u_x\|_0^2\,d\tau+\frac{1}{2}c_2\int_0^l\|u_{xt}\|_0^2 d\tau\le\frac{l}{2p^2}\int_0^l\|\tilde{u}_t\|_0^2\,d\tau;$$

$$\|u_t\|_{2Qt}^2\le M\|\tilde{u}\|_{2Qt}^2;$$

$$\left\|\overset{s+1}{z_t}\right\|_{2Qt}^2\le M\left\|\overset{s}{z_t}\right\|_{2Qt}^2.$$

Из этой оценки следует, что имеет место сходимость при $\mathrm{M}<1$.

Таким образом, на каждой итерации нелокальную задачу можно свести к системе алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, которая решается обычным методом прогонки.

Для решения нелинейной краевой задачи предлагается метод последовательных приближений.

$$\frac{\partial \overset{s+1}{W}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D\left(\overset{s}{W}\right)\frac{\partial \overset{s+1}{W}}{\partial x} + A\frac{\partial^2 \overset{s+1}{W}}{\partial x \partial t}\right] + f\left(\overset{s}{W}, x, t\right). \quad (18)$$

$$\left[D\left(\overset{s}{W}\right)\frac{\partial \overset{s+1}{W}}{\partial x} + A\frac{\partial^2 \overset{s+1}{W}}{\partial x \partial t}\right]\Bigg|_{\substack{x=0 \\ x=l}} = \begin{cases}\mu_1(t) \\ \mu_2(t)\end{cases}. \quad (19)$$

$\overset{s+1}{W}(x, 0) = \varphi_0(x)$,

$s = 0, 1, 2, \ldots, \infty$.

Таким образом, в работе предложены итерационные методы решения нелинейной задачи Аллера, построена и исследована стохастическая модель для модифицированного уравнения влагопереноса и предложен алгоритм ее численной реализации.

Библиография

1. Аллер М.М. Термодинамика почвенной влаги. Л. Гидрометиздат, 1966. 325 с.
2. Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. М. Наука, 1976. 353 с.
3. Янгарбер В.А. Сеточная схема для решения модифицированного уравнения влагопереноса // Доклады ВАСХНИЛ. 1966. № 8. С. 46-48.
4. Тхабисимова М.М., Кудаева Ф.Х., Бечелова А.Р., Карданова М.Р. Решение задач влагопереноса в рамках корреляционной модели методами теории случайных процессов // Сб. XVII Межд. конф. Российская наука в современном мире. М., 2018. С. 146-149.
5. Темботова М.М. Методы решения нелокальных краевых задач для модифицированного уравнения влагопереноса с детерминированными и случайными данными: автореф. канд. физ.-мат. наук., Нальчик. 1999. 25 с.