

Фрактальная модель контактного взаимодействия слабонагруженных поверхностей

Виктор Петрович Тихомиров¹, д.т.н.
Михаил Александрович Измеров², д.т.н.

^{1,2} Брянский государственный технический университет, Брянск, Россия

¹ dm-bgtu@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7269-8175>

² m.izmerov@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4170-6184>

Аннотация. Адекватная оценка контактного взаимодействия шероховатых поверхностей при малых номинальных контактных давлениях (до 2 МПа) невозможна без учёта микрогеометрии сопряжённых поверхностей, а сложная картина образования фактических пятен контакта требует применение имитационного моделирования контактного взаимодействия реальных 3D карт инженерных поверхностей или их моделей, которыми являются фрактальные поверхности. Описание фрактальной поверхности требует знания фрактальной размерности профиля D (поверхности $DS = D + 1$) и параметра фрактальной шероховатости G . Эти фрактальные параметры определяют такие структурные особенности модели поверхности, как радиус кривизны верхней части выступа и критерий перехода от пластической деформации выступа к упругой. Контактное взаимодействие фрактальной поверхности с гладкой жёсткой плоской поверхностью предполагает, что вследствие наличия субшероховатости на наноуровне вначале происходит пластическая деформация субмикронеровностей, а затем по мере увеличения нормальной нагрузки происходит формирование упругого пятна контакта. В статье рассматривается случай, когда описание модели поверхности потребовало использование ещё одного параметра – размерности DXY пятен контакта, которое включает число неровностей, находящихся в контакте с площадью, больше выбранной. Известные фрактальные модели Маджумдара-Бхушана и др. предполагают, что размерность поверхности и DXY численно совпадают друг с другом, что не является истиной. В статье дано сравнение результатов моделирования для случаев, когда рассматриваемые фрактальные размерности имеют разные и одинаковые значения, и показана величина ошибки при оценке нагрузочной способности контакта сопряжённых поверхностей.

Ключевые слова: фрактальная размерность, распределение площадей среза неровностей, фактическая площадь контакта, дискретный контакт шероховатых поверхностей

Для цитирования: Тихомиров В.П., Измеров М.А. Фрактальная модель контактного взаимодействия слабонагруженных поверхностей // Научноёмкие технологии в машиностроении. 2025. № 9 (171). С. 41–48. doi: 10.30987/2223-4608-2025-9-29-37

Fractal model of contact interaction for underloaded surfaces

Viktor P. Tikhomirov¹, D. Eng.

Mikhail A. Izmerov², D. Eng.

^{1,2} Bryansk State Technical University, Bryansk, Russia

¹ dm-bgtu@yandex.ru

² m.izmerov@yandex.ru

Abstract. An adequate assessment of the contact interaction of rough surfaces at low nominal contact pressures (up to 2 MPa) is impossible without taking into account the microgeometry of the mating surfaces, and the complex pattern of formation of actual contact spots requires the use of simulated modeling of the contact interaction of real 3D maps of engineering surfaces or their models, which are fractal surfaces. The description of a fractal surface requires knowledge of the fractal dimension of the profile D (surface $DS = D + 1$) and the fractal roughness parameter G . These fractal parameters determine such structural features of the surface model as the radius of curvature of the upper part of the protrusion and the criterion for the transition from plastic deformation

of the protrusion to elastic. The contact interaction of a fractal surface with a smooth, rigid, flat surface suggests that due to the presence of sub-roughness at the nanoscale, plastic deformation of the submicron surfaces occurs first, and then, as the normal load increases, an elastic contact spot forms. The article considers the case when the description of the surface model required the use of another parameter – the dimension D_{XY} of the contact spots, which includes the number of irregularities in contact with an area greater than the selected one. The well-known fractal models of Majumdar-Bhushan (M-B) and others assume that the dimension of the surface and D_{XY} numerically coincide with each other, which is not true. The article provides a comparison of the simulation results for cases when the fractal dimensions under consideration have different and identical values, and shows the magnitude of the error in estimating the load capacity of the contact of the conjugate surfaces.

Keywords: fractal dimension, distribution of roughness shear sections, actual contact area, discrete contact of rough surfaces

For citation: Tikhomirov V.P., Izmerov M.A. Fractal model of contact interaction for underloaded surfaces / Science intensive technology in mechanical engineering. 2025. № 9 (171). P. 41–48. doi: 10.30987/2223-4608-2025-9-41-37

Введение

Известные фрактальные модели [3 – 5] основаны на допущении о том, что для геометрического описания поверхности достаточно знать её фрактальную размерность D и параметр фрактальной шероховатости G . При этом фрактальная размерность является фактором, от которого зависит соотношение между нагрузкой и площадью среза выступа. Для оценки параметров множественного контакта используют размерное распределение площадей среза. Модели [8 – 10] учитывают, что соотношение площади среза и несущей способности пятна контакта зависит от того, в каком состоянии находится деформируемая неровность. Размерное распределение площадей пятен контакта (среза при рассмотрении контакта деформируемой фрактальной поверхности с гладкой твердой поверхностью) связывают с той же фрактальной размерностью, что и для поверхности.

В данной работе рассматривается случай, когда фрактальная размерность D как поверхности, так и фрактальная размерность, входящая в размерное распределение площадей среза D_{XY} , имеют разные значения. Приведена методика определения фрактальной размерности D_{XY} .

Определение фрактальной размерности D_{XY}

Полагаем, что число неровностей, площадь которых больше a , определяется как:

$$N(A > a) = c (a_L/a)^{\frac{D}{2}}, \quad (1)$$

где a_L – наибольшая площадь среза выступа; D – фрактальная размерность (обозначим ее через D_{XY} в случае, когда она отличается от фрактальной размерности профиля).

Распределение площадей среза неровностей фрактальной шероховатой поверхности представлено на рис. 1.

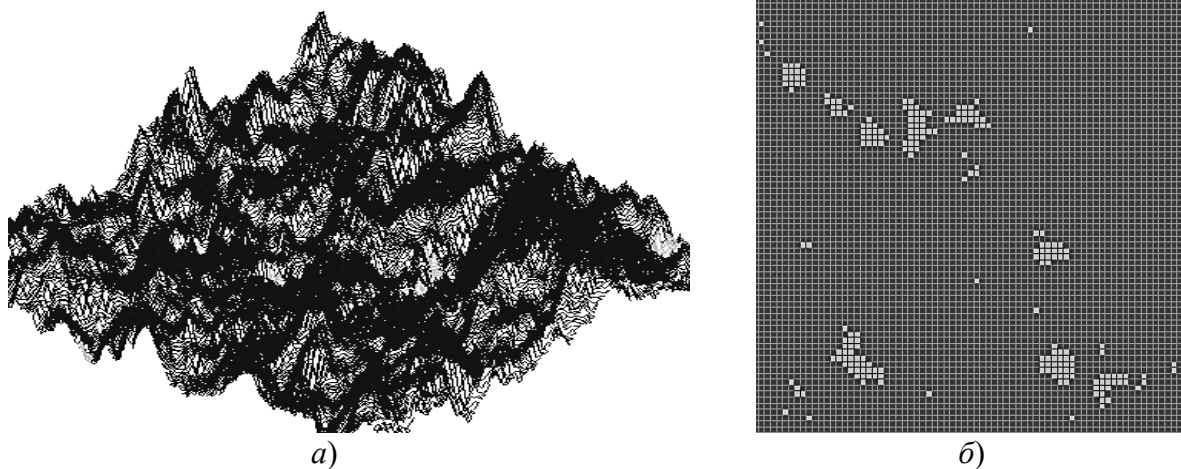


Рис. 1. Фрактальная поверхность и площади среза выступов:
 a – фрактальная поверхность; b – площади среза выступов

Fig. 1. Fractal surface and shear section of asperities:
 a – fractal surface; b – shear section of asperities

Распределение площадей среза шероховатой поверхности плоскостью, параллельной средней плоскости, зависит от структурных особенностей рассматриваемой поверхности. Процедура определения закона распределения площадей среза поверхности потребовала разработать соответствующее программное обеспечение [7] (рис. 2). Анализ площадей среза неровностей на некотором

расстоянии от линии выступов позволяет найти количество площадок, их размеры и количество площадей, превышающих заданное значение $N_i (A > a'_i)$. Разработанное программное обеспечение дает [9] оценку размеров площадей среза (в условных единицах) (рис. 2).

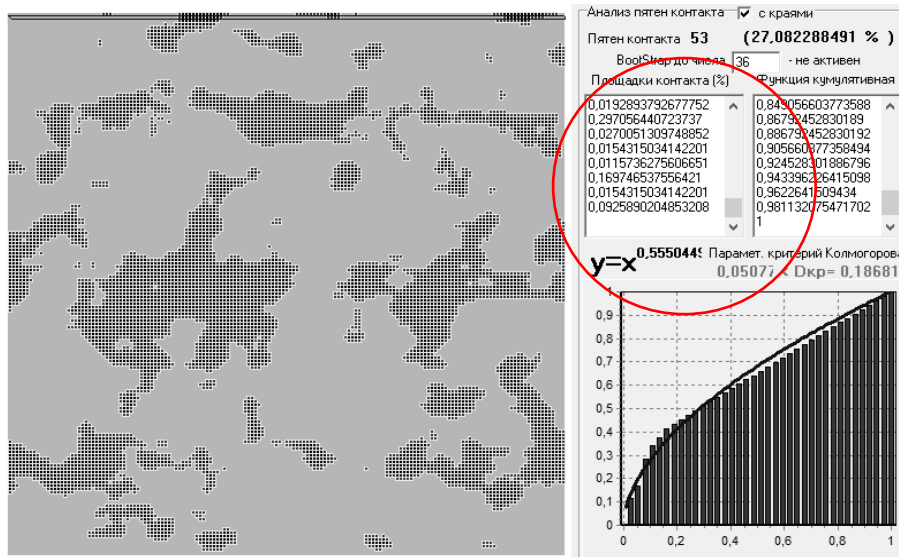


Рис. 2. Распределение площадей среза поверхности

Fig. 2. Distribution of surface shear section

Найденные значения площадей среза неровностей ранжируем в списке Excel по убыванию $\{1,080205; 0,478377; 0,478377; 0,451371; \dots\}^T$. Затем определяем число площадей среза, превышающих заданное значение $N_i (A > a'_i)$. Этому значению соответствует отношение a'_L/a'_i , где a'_L – максимальная площадь среза из рассматриваемого списка ($a'_L = 1,080205$ у. е.). В качестве примера полученные площади среза подвергнем сортировке по убыванию (выделена выборка из 57 данных):

$$N(A > a') = \{3; 5; 10; 15; \dots\}^T; \quad (2)$$

$$\frac{a'_L}{a'} = \{2,3; 2,7; 5,0; 9,3; \dots\}^T. \quad (3)$$

Обозначив через y число площадей среза, а через x – отношение a'_L/a' , выразим их связь в виде графика (рис. 3).

Зависимость числа неровностей

$N(A > a) = f(a_L/a)$ характеризуется степенной зависимостью

$$N(A > a') = 1,9453(a'_L/a')^{0,8705}. \quad (4)$$

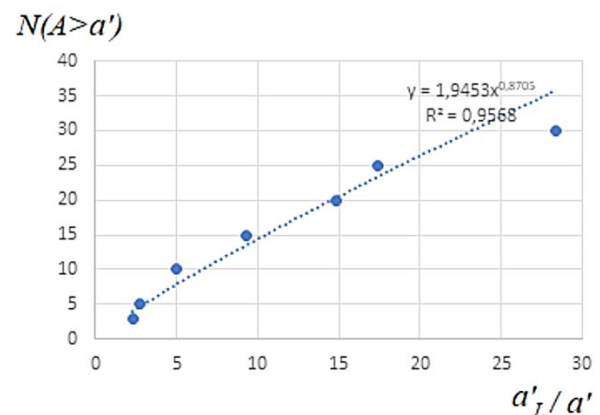


Рис. 3. Зависимость числа площадей среза от отношения максимальной площади среза к рассматриваемой

Fig. 3. Dependence of the number of shear sections on the ratio the maximum shear section to the one under consideration

Тогда $D_{XY} = 2 \cdot 0,8705 = 1,741$.
Следует сказать, что фрактальная размерность профиля (поверхности) для рассматриваемой поверхности равна $D = 1,2868$ ($D_S = D + 1 = 2,2868$).

Профиль фрактальной поверхности описывается функцией Вейерштрасса-Мандельброта:

$$z(x) = G^{D-1} \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi\gamma^n x)}{\gamma^{(2-D)n}}; 1 < D < 2; \gamma = 1,5, \quad (5)$$

где D – фрактальная размерность профиля;
 G – параметр фрактальной шероховатости.

В соответствии с рис. 4, и, учитывая уравнение профиля выступа, запишем:

$$\delta = G^{D-1} (a')^{\frac{(2-D)}{2}}, \quad (6)$$

где $a' = \pi(r')^2$.

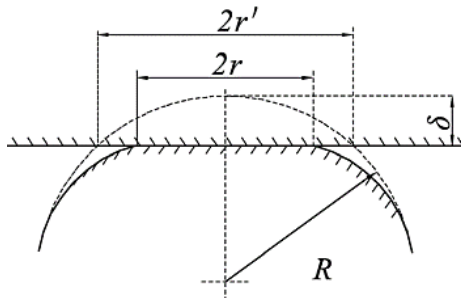


Рис. 4. Контактное взаимодействие сферического выступа с жесткой плоской поверхностью

Fig. 4. Contact interaction of a spheroid asperity with a rigid flat surface

Радиус закругления верхней части выступа равен [9]:

$$R = \frac{(a')^{\frac{D}{2}}}{2\pi G^{D-1}}. \quad (7)$$

Критическая площадь

В качестве критерия перехода от пластического состояния выступа к упругому, согласно [1], примем:

$$\delta_c = \left(\frac{\pi H}{2E}\right)^2 R. \quad (8)$$

С другой стороны:

$$\delta_c = \frac{a'_c}{2\pi R}.$$

Учитывая значение радиуса, найдем:

$$a'_c = \frac{G^2}{\left[\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \frac{H}{E}\right]^{\frac{2}{D-1}}}. \quad (9)$$

Зависимость нормальной нагрузки от площади среза в условиях упругой деформации в соответствии с теорией Герца, имеет вид [9]:

$$F_e(a') = \frac{4}{3\sqrt{2\pi}} E G^{D-1} (a')^{\frac{(3-D)}{2}}, \quad (10)$$

где $E = \left[\frac{(1-\mu_1^2)}{E_1} + \frac{(1-\mu_2^2)}{E_2}\right]^{-1}$, E_1, E_2, μ_1, μ_2 – модули упругости и коэффициенты Пуассона сопряженных поверхностей.

Для пластической деформации выступа соотношение между нагрузкой и площадью среза запишем так:

$$F_p(a') = H a', \quad (11)$$

где H – твердость материала выступа.

В случае упругой деформации связь между площадями среза и пятна контакта определяется соотношением $a' = 2a$. Критерий перехода от пластической деформации выступа к упругой представим соотношением $a'_c = 2a_c$.

В соответствии с [1], запишем:

$$a_c = \left(\frac{2E}{H}\right)^{\frac{2}{D-1}} G^2. \quad (12)$$

Множественный контакт

Контактное взаимодействие определяется следующим соотношением:

$$F = \int_0^{a'_c} H a' n(a') da' + \int_{a'_c}^{a'_L} \frac{4}{3\sqrt{2\pi}} E G^{D-1} (a')^{\frac{(3-D)}{2}} n(a') da'. \quad (13)$$

Размерное распределение площадей среза определяется выражением

$$\frac{dN(A > a')}{da'} = n(a') = c \frac{D_{XY}}{2} (a'_L)^{\frac{D_{XY}}{2}} \psi^{1-\frac{D_{XY}}{2}} (a')^{-\frac{(2+D_{XY})}{2}}; \quad (14)$$

$$0 < a' \leq a'_L. \quad (15)$$

В данном примере $c = 1,9453$.

Запишем нормальную нагрузку после интегрирования в виде:

$$F = \frac{H D_{XY}}{(2 - D_{XY})} (a'_L)^{\frac{D_{XY}}{2}} \psi^{1-\frac{D_{XY}}{2}} (a'_c)^{\frac{(2-D_{XY})}{2}} + \frac{4c}{3\sqrt{2\pi}} E G^{D-1} \frac{D_{XY}}{(3 - D - D_{XY})} \psi^{1-\frac{D_{XY}}{2}} \left[(a'_L)^{\frac{(3-D-D_{XY})}{2}} - (a'_c)^{\frac{(3-D-D_{XY})}{2}} \right]. \quad (16)$$

При $D + D_{XY} = 3$ нормальная нагрузка определяется выражением [9]:

$$F = 3H \psi^{\frac{1}{4}} a_L^{\frac{3}{4}} a_c^{\frac{1}{4}} + \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\pi}} E \sqrt{G} \psi^{\frac{1}{4}} a_L^{\frac{3}{4}} \ln \frac{a_L}{a_c}. \quad (17)$$

Здесь $a_L = \frac{2-D_{XY}}{D_{XY}} \psi^{-(1-D_{XY}/2)} A_r$; $a_c = a'_c/2$.

Фактическую площадь контакта для фрактальных поверхностей найдём как:

$$A_r = \frac{c D_{XY}}{2 - D_{XY}} \psi^{(1-\frac{D_{XY}}{2})} a'_L. \quad (18)$$

Найдём зависимости фактической площади контакта от нормальной нагрузки и сравним результаты для случаев, когда $D = D_{XY}$ и $D \neq D_{XY}$ при следующих исходных данных: $D = 1,459$; $c = 1$; твердость $H = 3000$ МПа. $R_a = 0,8$ мкм; $R_q = R_a \sqrt{\pi/2} = 1,003$ мкм; $D_{XY} = 1,700$;

Зависимости фактической площади контакта от нормальной нагрузки для разных случаев представлены на рис. 5.

В рассматриваемом диапазоне изменения нагрузки приняты одинаковыми фрактальную размерность поверхности и размерность (показатель степени), определяющую размерное распределение площадей среза неровностей фрактальной поверхности $D = D_{XY}$ описывает зависимость с меньшим угловым коэффициентом по сравнению с зависимостью, когда $D \neq D_{XY}$.

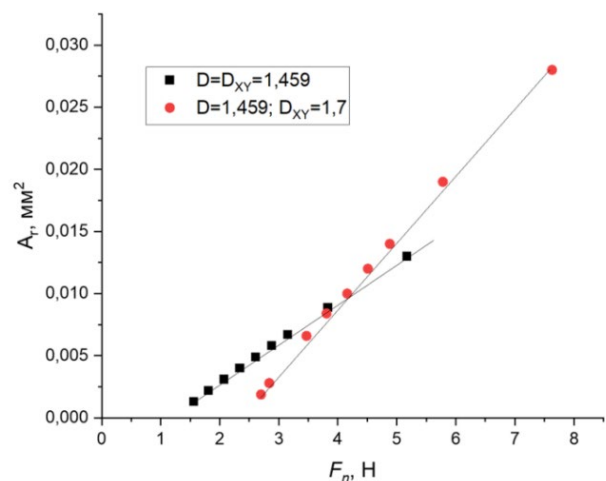


Рис. 5. Зависимости фактической площади контакта от нагрузки для разных случаев

Fig. 5. Dependences of the actual contact area on the load for different cases

Зависимость относительной фактической площади контакта от нормального давления (отношения нагрузки к номинальной площади контакта) представлена на рис. 6. Номинальная площадь контакта определялась [1] как:

$$\frac{A_r}{A_a} = 0,5 \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{R_q\sqrt{2}}\right), \quad (19)$$

где $\operatorname{erfc}(\dots)$ – дополнительная функция ошибки; d – зазор между средней линией профиля фрактальной поверхности и положением гладкого жесткого тела (рис. 7).

Зависимости сближения от нагрузки приведены на рис. 8.

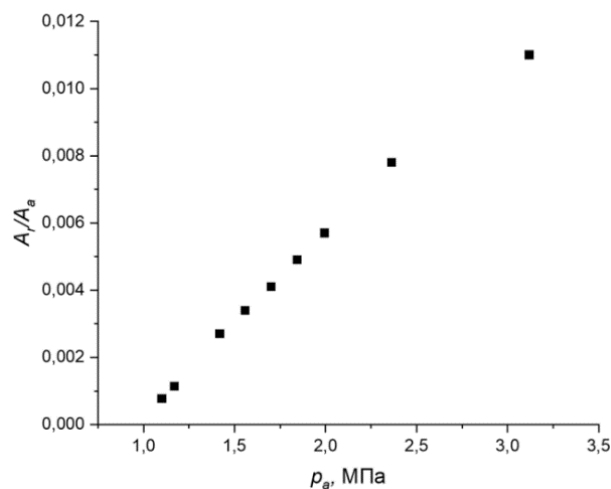


Рис. 6. Зависимость относительной площади контакта от номинального давления

Fig. 6. Dependence of the relative contact area on the nominal pressure

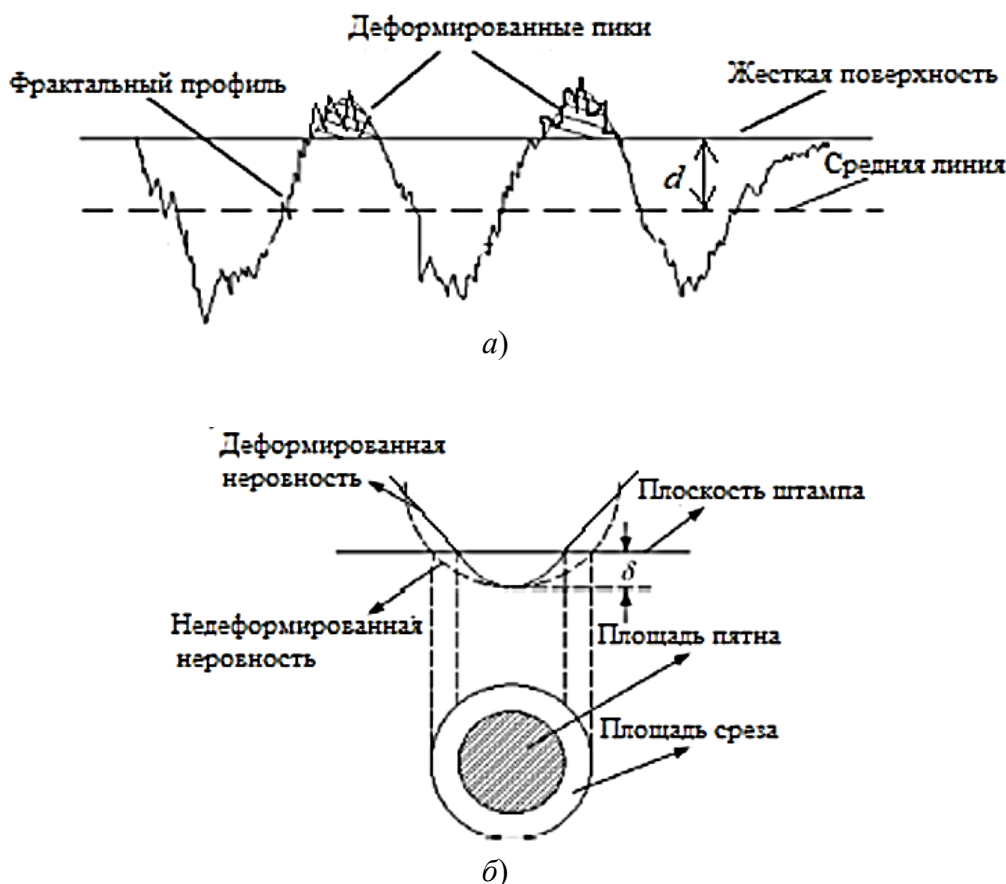


Рис. 7. Деформация неровностей:

a – контакт фрактальной шероховатой поверхности с плоской; b – площади пятна и среза верхней части неровности

Fig. 7. Deformation of irregularities:

a – the contact of a fractal rough surface with a flat one; b – the area of the spot and shearing of the upper part of the rub

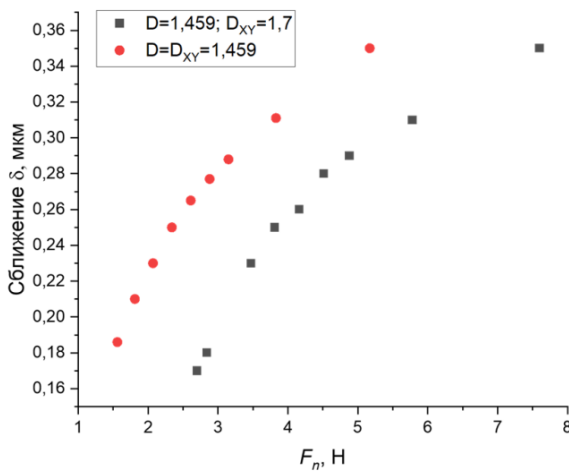


Рис. 8. Зависимости сближения от нормальной нагрузки

Fig. 8. Proximity dependence on normal load

Таким образом можно сделать вывод, что фрактальные модели имеют разное решение контактной задачи для случая одинакового значения фрактальной размерности профиля и распределения пятен контакта, и разного значения.

Обсуждение

Функциональные свойства поверхности определяются ее качеством – физико-механическими свойствами материала и топографическими особенностями. Для оценки эксплуатационных показателей используют те или иные модели исследуемой поверхности и зависимости, характеризующие контактное взаимодействие как единичной неровности, так и множественного контакта. Фрактальные модели отражают слабо нагруженный контакт, когда существенное влияние на параметры контактного взаимодействия оказывают субмикронеровности. Моделирование взаимодействия фрактальных поверхностей дает возможность получить количественные результаты с требуемой точностью. Допущения, принимаемые в модели, должны быть так или иначе обоснованы. Уточненная фрактальная модель, предложенная в статье, отличается от известных фрактальных моделей тем, что размерность D_{XY} (показатель степени в выражении для числа пятен среза на определенном уровне шероховатой поверхности $N(A > a') = c(a_L'/a')^{D_{XY}/2}$) отличается от

фрактальной размерности поверхности. Для обоснования этого допущения было разработано программное обеспечение и представлена методика оценки D_{XY} .

Выводы

1. Рассмотрена модель контактного взаимодействия слабо нагруженного стыка, учитывающая условие, что фрактальная размерность поверхности отличается от показателя степени D_{XY} , определяющей размерное распределение площадей среза неровностей.

2. Предложена методика оценки D_{XY} с использованием разработанного в данной работе программного обеспечения.

3. Уточненная модель потребовала введение размерности (показателя степени) распределения числа площадей среза и нормировочного коэффициента c , аппроксимирующего зависимость $N(A > a) = f(a_L/a)$.

4. Приведено сравнение результатов, полученных с помощью предлагаемой и известной фрактальной модели.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Majumdar A., Bhushan B. Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces // Trans. ASME: J. Tribology. 1990. No.112. P. 205–216.
2. Zhang X., Wang N., Lan G., Wen S., Chen Y. Tangential Damping and its Dissipation Factor Models of Joint Interfaces Based on Fractal Theory with Simulations // Journal of Tribology. 2014. Vol. 136 (011704-1-10)
3. Qiang Z., Xiaoqian C., Yiyong H., Yong C. Fractal modeling of fluidic leakage through metal sealing surfaces // AIP Advances 8. 2018. <https://doi.org/10.1063/1.5023708>
4. Tian H., Zhao C., Zhu D., Qin H. Practical Expressions of Elastoplastic Contact between Rough Surfaces // International Journal of Modeling and Optimization. 2012. Vol. 2. No. 3. P. 179–186.
5. Tikhomirov V.P., Izmerov M.A. Fractal model of contact interaction of nominally flat surfaces // AIP Conference Proceedings. Proceedings international conference "Problems of applied mechanics". 2021. С. 060004.
6. Горохов Д.Б. Контактное взаимодействие фрактальных шероховатых поверхностей деталей машин / Д.Б. Горохов / М.: РГБ, 2005. 148 с.
7. Тихомиров В.П. Нормальная контактная жёсткость фрактальных поверхностей стыкового соединения // В.П. Тихомиров, О.А. Горленко, М.А. Измеров // Качество и жизнь. 2018. № 4 (20). С. 429–433.
8. Маджумдар А. Фрактальная модель упруго-пластического контакта шероховатых поверхностей / А.

Маджумдар, Б. Бхушан // Современное машиностроение. Сер. Б. 1991. № 6. С. 11–23.

9. Тихомиров В.П. Фрактальные модели инженерных поверхностей / В.П. Тихомиров, М.А. Измеров, П.В. Тихомиров // Вестник Брянского государственного технического университета. 2014. № 3. С. 72–80.

10. Тихомиров В.П., Шалыгин М.Г., Измеров М.А., Крутов А.В. Фрактальная размерность дискретного контакта // Научно-технические технологии в машиностроении. 2024. No 1 (151). С. 41–48. doi: 10.30987/2223-4608-2024-41-48

REFERENCES

1. Majumdar A., Bhushan B. Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces // Trans. ASME: J. Tribology. 1990. No. 112. P. 205–216.

2. Zhang X., Wang N., Lan G., Wen S., Chen Y. Tangential Damping and its Dissipation Factor Models of Joint Interfaces Based on Fractal Theory with Simulations // Journal of Tribology. 2014. Vol. 136 (011704-1-10)

3. Qiang Z., Xiaoqian C., Yiyong H., Yong C. Fractal modeling of fluidic leakage through metal sealing surfaces // AIP Advances 8. 2018. <https://doi.org/10.1063/1.5023708>

4. Tian H., Zhao C., Zhu D., Qin H. Practical

Expressions of Elastoplastic Contact between Rough Surfaces // International Journal of Modeling and Optimization. 2012. Vol. 2. No. 3. P. 179–186.

5. Tikhomirov V.P., Izmerov M.A. Fractal model of contact interaction of nominally flat surfaces // AIP Conference Proceedings. Proceedings international conference "Problems of applied mechanics". 2021. С. 060004.

6. Gorokhov D.B. Contact interaction of fractal rough surfaces of machine parts / D.B. Gorokhov / Dissertation of the Candidate of Technical Sciences on spec. 05.02.04. M., RGB, 2005. 148 p.

7. Tikhomirov V.P. Normal contact stiffness of fractal surfaces of butt joints // V.P. Tikhomirov, O.A. Gorlenko, M.A. Izmerov // Quality and life. 2018. № 4 (20). Pp. 429–433.

8. Majumdar, A. Fractal model of elastic–plastic contact of rough surfaces / A. Majumdar, B. Bhushan // Modern mechanical engineering. Ser. B. 1991. No. 6. Pp.11–23.

9. Tikhomirov V.P. Fractal models of engineering surfaces / V.P. Tikhomirov, M.A. Izmerov, P.V. Tikhomirov // Bulletin of the Bryansk State Technical University. 2014. No. 3. Pp. 72–80.

10. Tikhomirov V.P., Shalygin M.G., Izmerov M.A., and Krutov A.V. Fractal Dimension of Discrete Contact // Science-Intensive Technologies in Mechanical Engineering. 2024. No 1 (151). Pp. 41–48. doi: 10.30987/2223-4608-2024-41-48

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 14.10.2024; одобрена после рецензирования 02.12.2024; принята к публикации 06.12.2024

The article was submitted 14.10.2024; approved after reviewing 02.12.2024; assepted for publication 06.12.2024