

УДК 519.8

doi: 10.53816/23061456_2025_9–10_50

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВЫПОЛНЕНИЯ КОМПЛЕКСА РАБОТ, МОДЕЛИРУЕМЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СЕТЕВЫХ ГРАФИКОВ

METHOD FOR DETERMINING PROBABILITIES OF PERFORMING A WORK PACKAGE MODELED USING NETWORKS

*Д-р техн. наук Е.П. Минаков, канд. техн. наук Р.П. Власов,
канд. техн. наук М.А. Александров, В.М. Лизан*

D.Sc. E.P. Minakov, Ph.D. R.P. Vlasov, Ph.D. M.A. Aleksandrov, V.M. Lizan

Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского

В статье рассматривается метод определения вероятностей выполнения комплекса работ, моделируемых с использованием сетевых графиков. Авторы предлагают подход, основанный на мультипликативной функции вероятности, который позволяет выявлять вероятностно-критический путь и анализировать резервы вероятностей выполнения работ. Описан четырехсекторный метод для расчета наименьших и наибольших вероятностей свершения событий, а также резервов вероятностей. Приведены примеры расчетов и сравнение критических путей по времени и вероятности, демонстрирующие их возможное несовпадение. Метод апробирован в вычислительных экспериментах и может быть использован для управления комплексами работ в организационно-технических системах.

Ключевые слова: сетевые графики, вероятностно-критический путь, вероятность выполнения работ, резервы вероятностей, управление проектами, организационно-технические системы, мультипликативная функция, четырехсекторный метод.

The article discusses the method of determining the probabilities of performing a set of works modeled using networks. The authors propose an approach based on the multiplicative probability function, which allows you to identify the probabilistic-critical path and analyze the reserves of the probabilities of performing work. Described is a four-sector method for calculating the lowest and highest probabilities of events, as well as probability reserves. Examples of calculations and comparison of critical paths in time and probability are given, demonstrating their possible mismatch. The method is tested in computational experiments and can be used to control work complexes in organizational and technical systems.

Keywords: networks, probabilistic-critical path, probability of work performance, probability reserves, project management, organizational and technical systems, multiplicative function, four-sector method.

Введение

В настоящее время сетевые модели нашли широкое распространение как в космических войсках (КВ), так и в других видах (родах) Вооруженных

Сил Российской Федерации при решении задач планирования и управления процессами функционирования различных организационно-технических систем (ОТС). Теоретические основы их построения и использования нашли отражение в рам-

ках так называемого сетевого метода, в основу которого положено изображение плана действий (мероприятий) в виде размеченного графа (как говорят еще, сетевого графа, сетевого графика, сети), на котором весь комплекс операций расчленяется на отдельные, четко определенные работы, отображаемые в их логической взаимосвязи и последовательности выполнения [1] (рис. 1).

Как правило работам на сетевых графиках сопоставляются затраты времени или ресурсов, а оцениванию важнейшего показателя эффективности выполнения комплекса работ — соответствующей вероятности уделяется недостаточное внимание. При этом, как правило, существует возможность рассмотрения выполнения каждой работы как независимое от других работ случайное событие. Это делает актуальным разработку подхода, а именно математических зависимостей и метода определения вероятностей выполнения комплекса работ, выполняемых с использованием сетевых графиков.

Базовый тезаурус

В сетевом методе к настоящему времени сложился свой специфический тезаурус, основными понятиями которого являются работа, событие, путь, критический путь и ряд других [2]. Однако некоторые понятия в рамках рассматриваемого подхода требуют уточнения.

Под работой в этом случае понимают любое действие, являющееся результатом выполнения заданной последовательности операций, выполняемое, как правило, группой специалистов с использованием необходимых технических средств в ходе выполнения комплекса работ, связанное с затратами времени и/или ресурсов и

происходящее с некоторой вероятностью. В отдельных случаях под работами может подразумеваться простая связь — дуга сетевого графика, не связанная с какими-либо затратами. Такая работа называется фиктивной, а вероятность ее выполнения принимается равной единице (рис. 2).

Как принято в сетевом моделировании событие является промежуточным или окончательным результатом выполнения (завершения) одной или нескольких работ, который позволяет приступить к последующим работам, и не имеет длительности, не сопровождается затратами ресурсов или изменением вероятности.

На рисунках в статье события изображаются кружками, работы — сплошными стрелками (дугами), фиктивные работы — пунктирными стрелками (рис. 2). Принятые при этом понятия начального, конечного, исходного, завершающего события сети и пути кодировки работ, правила составления сетевых графиков, критерий свершения события не требуют уточнения [3].

В общем случае каждой дуге графа может быть сопоставлен вектор

$$\lambda_{ij} = \langle p_{ij}^1, p_{ij}^2, \dots, p_{ij}^n, \dots, p_{ij}^N, t_{ij}^1, t_{ij}^2, \dots, t_{ij}^m, \dots, t_{ij}^M \rangle,$$

где n и m — идентификаторы характеристики работы (i, j) (времени, расхода ресурсов, вероятностных характеристик и т.д.).

Длина любого пути может определяться:

— как аддитивная функция

$$T = \sum_{m=1}^M t_{ij}^m;$$

— как мультипликативная функция

$$P = \prod_{n=1}^N p_{ij}^n.$$

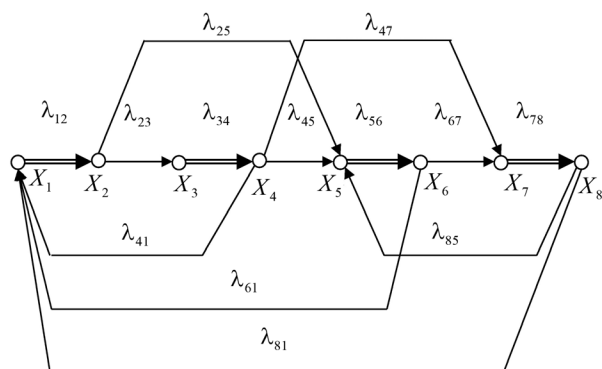


Рис. 1. Граф выполнения мероприятий

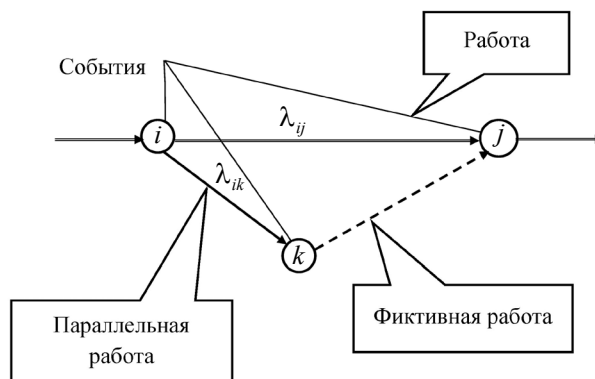


Рис. 2. Сетевой график выполнения работы

Примером аддитивной функции может служить время выполнения комплекса работ.

В соответствии со сделанным допущением о независимости работ сетевого графика вероятность их выполнения по любому пути определяется как произведение соответствующих вероятностей работ и является мультипликативной функцией.

В результате составления и анализа сетевого графа выявляется такой путь, произведение вероятностей работ по которому будет минимальным и называемым вероятностно-критическим путем. Все работы, лежащие на критическом пути, называются вероятностно-критическими и выделяются на сетевом графике специальным образом (рис. 1, 2).

Любой путь, не являющийся вероятностно-критическим, имеет «резерв» по вероятности выполнения комплекса работ, который равен разности между его вероятностью и вероятностью вероятностно-критического пути. Как следствие этого, все или часть работ на путях, не являющихся вероятностно-критическими, также обладают «резервами» по вероятности их выполнения [4]. Это дает возможность маневрировать внутренними ресурсами групп специалистов и технических средств за счет уменьшения в пределах «резервов» вероятностей выполнения работ, что позволяет управлять комплексом работ по вероятностной мере их выполнения.

Метод расчета вероятностей событий сетевых графиков применения организационно-технических систем

Для выявления вероятностно-критического пути, «резервов» вероятностей выполнения работ и некоторых других параметров можно использовать четырехсекторный метод, включающий определение:

- 1) наименьших вероятностей свершения события — $p_p(i)$, где i — идентификатор (например, номер) события;
- 2) наибольших вероятностей свершения события — $p_n(i)$;
- 3) «резервов» вероятностей свершения события — $P(i)$ (рис. 3).

Определение указанных параметров осуществляется в приведенной последовательности алгоритмически с использованием приведенных ниже формул.

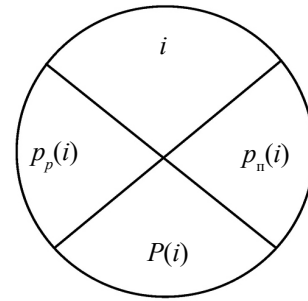


Рис. 3. Четырехсекторный метод выявления вероятностно-критического пути

Расчет наименьших вероятностей свершения события производится в направлении от исходного события сети к завершающему. Вероятность свершения исходного события сети является началом отсчета вероятностей и принимается равной единице. Вероятность выполнения фиктивной работы также принимается равной единице [5]. Формула для расчета наименьших вероятностей свершения событий имеет вид:

$$p_p(j) = \min_i \{p_p(i) p(i, j)\},$$

где $p(i, j)$ — вероятность выполнения работы (i, j) .

Наименьшая вероятность свершения завершающего события сети определяет минимальную вероятность выполнения всего комплекса работ, моделируемых сетевым графиком, то есть вероятность вероятностно-критического пути.

Расчет наибольших вероятностей свершения события производится путем последовательного перехода от завершающего к исходному событию. Наибольшая вероятность свершения завершающего события принимается равной его наименьшей вероятности свершения, то есть вероятности вероятностно-критического пути. Формула для наибольших вероятностей свершения событий имеет вид:

$$p_n(i) = \max_j \{p_n(j) / p(i, j)\}.$$

Расчет «резервов» вероятностей свершения события, любого i -го события, сводится к определению частного от деления наименьшей и наибольшей вероятностей его свершения:

$$P(i) = p_n(i) / p_p(i).$$

Важно отметить, что «резерв» вероятностей свершения события показывает, на какую предельно допустимую величину можно уменьшить вероятность его свершение, не вызывая при этом увеличения вероятности свершения завершающего события сети [6, 7].

Анализ параметров сетевых графиков по вероятностям наступления событий и выполнения работ

Анализ параметров сетевых графиков включает два этапа:

- 1) выявление вероятностно-критического пути;
- 2) определение «резервов» вероятностей выполнения работ.

Существует два признака, по которым можно судить о вероятностной критичности пути:

- 1) событие, обладающее единичным «резервом» вероятности свершения, находится на вероятностно-критическом пути;
- 2) работа (i, j) принадлежит вероятностно-критическому пути тогда, и только тогда, когда для нее выполняется условие:

$$(p_{\pi}(j)/p_p(i))/p(i, j) = 1.$$

При определении «резервов» вероятностей выполнения работ различают два вида «резервов»: полный и свободный.

Полный «резерв» вероятности выполнения работы — $P(i, j)$ определяется по формуле:

$$P(i, j) = (p_{\pi}(j)/p_p(i))/p(i, j).$$

Он показывает, во сколько раз можно уменьшить вероятность выполнения работы (i, j) , не изменяя при этом вероятность вероятностно-критического пути. Если полный «резерв» вероятности выполнения одной из работ использовать полностью, то будут аннулированы полные «резервы» вероятностей выполнения других работ.

Это позволяет сформировать правило управления: исполнитель отдельной работы не должен распоряжаться полным «резервом» вероятности выполняемой им работы. Полный «резерв» вероятности выполнения каждой работы должен находиться в распоряжении руководителя всего комплекса работ.

Свободный «резерв» вероятности выполнения работы — $r(i, j)$ рассчитывается по формуле:

$$r(i, j) = (p_p(j)/p_p(i))/p(i, j).$$

Он показывает, во сколько раз уменьшить вероятность выполнения отдельной работы, не изменяя наименьших вероятностей свершения событий последующих работ. Свободный «резерв» вероятностей выполнения образуется только у работ, непосредственно предшествующих событию, в котором пересекаются пути, на которых они расположены. Использование свободного «резерва» вероятности выполнения какой-либо одной работы не приводит к изменению величин полных и свободных «резервов» вероятностей, следующих за ней работ.

Уместно отметить, что для аддитивной функции (например, времени) свободный резерв всегда меньше полного резерва, а для мультипликативной функции вероятности — наоборот: $r(i, j) \geq P(i, j)$.

Это позволяет сформировать правило управления: свободный «резерв» вероятности выполнения работы может находиться в распоряжении непосредственного исполнителя этой работы [8].

Пример определения вероятностей выполнения комплекса работ, проводимых с использованием сетевых графиков

Пусть сетевой график выполнения комплекса работ ОТС имеет вид, приведенный на рис. 4.

Для апробации метода определения вероятностей выполнения комплекса работ, выполняемых с использованием сетевых графиков и сравнения результатов были разработаны две программы в MS Excel [9], организованы и проведены вычислительные эксперименты по сетевому моделированию показателей вероятностных и временных параметров сетевого графика на рис. 4.

В табл. 1 приведены исходные данные по вероятностям выполнения и временам выполнения работ. В табл. 2 для всех событий комплекса работ приведены полученные значения наименьших вероятностей и наиболее ранних сроков свершения событий.

В табл. 3 для всех событий комплекса работ приведены полученные значения наибольших

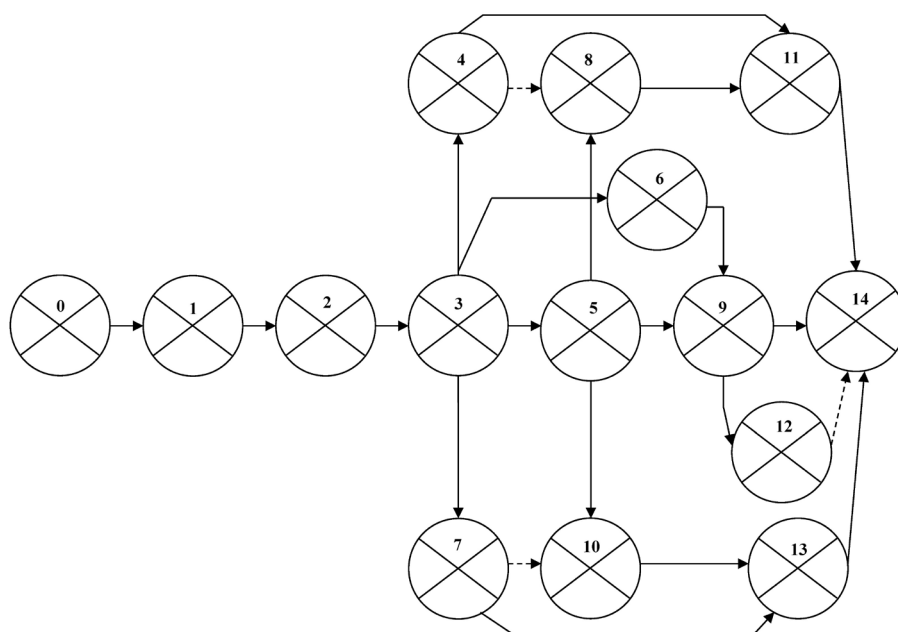


Рис. 4. Сетевой график выполнения комплекса работ организационно-технических систем

Таблица 1

Исходные данные по вероятностям выполнения и временам выполнения работ

Работа	(0, 1)	(1, 2)	(2, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	(3, 7)	(4, 11)	(5, 8)	(5, 9)
Вероятность	0,4	0,4	0,7	0,7	0,5	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1
Время	4	4	7	7	5	1	2	3	1	1
Работа	(5, 10)	(6, 9)	(7, 13)	(8, 11)	(9, 12)	(9, 14)	(10, 13)	(11, 14)	(13, 14)	
Вероятность	0,5	0,4	0,1	0,7	0,1	0,2	0,2	0,33	0,55	
Время	5	4	1	7	1	2	2	3	5	

Таблица 2

Полученные значения наименьших вероятностей и наиболее ранних сроков свершения событий

Событие	0	1	2	3	4	5	6	7
Вероятность	1	0,4	0,16	0,112	0,0784	0,056	0,0112	0,0224
Время	0	4	8	15	22	20	16	17
Событие	8	9	10	11	12	13	14	
Вероятность	0,0056	0,00448	0,0224	0,00392	0,000448	0,00448	0,000448	
Время	22	21	25	29	22	27	32	

Таблица 3

Полученные значения наибольших вероятностей и наиболее поздних сроков свершения событий

Событие	14	13	12	11	10	9	8	7
Вероятность	0,000448	0,0008145	0,000448	0,0013576	0,0040727	0,00448	0,0019394	0,008145
Время	32	27	32	29	25	30	22	25
Событие	6	5	4	3	2	1	0	
Вероятность	0,0112	0,0448	0,004525	0,112	0,16	0,4	1	
Время	26	20	22	15	8	4	0	

вероятностей и наиболее поздних сроков свершения событий.

В табл. 4 приведены резерв вероятностей и времен свершения событий.

Как и следовало ожидать значения величин «резервов» вероятностей свершения событий меньше, либо равны единице. Равенство величин этих «резервов» служит признаком нахождения событий на вероятностно-критического пути [10].

В табл. 5 приведены результаты определения полных резервов вероятностей и времен выполнения работ.

Из приведенных в табл. 5 данных видно, что полные «резервы» вероятности выполнения работы всегда должны быть меньше единицы.

В табл. 6 приведены результаты определения свободных резервов вероятностей и времен выполнения работ.

Из данных табл. 5 и 6 видно:

1) свободные «резервы» вероятности выполнения работы всегда должны быть меньше единицы;

2) свободные «резервы» вероятности выполнения работы всегда больше их полных «резервов» вероятности выполнения.

Из анализа приведенных результатов следует, что как априорно и предполагалось, критические пути по времени и по вероятности выполнения комплекса работ могут не совпадать.

Заключение

Приведенный в статье инструментарий апробирован в ходе вычислительных экспериментов и позволяет определять вероятностно-критические пути на сетевых графиках выполнения комплексов различных работ.

Таблица 4

Резерв вероятностей и времён свершения событий

Событие	0	1	2	3	4	5	6	7
Вероятность	1	1	1	1	0,1010101	0,8	1	0,181818
Время	0	0	0	0	0	0	10	8
Событие	8	9	10	11	12	13	14	
Вероятность	0,34632	1	0,181818	0,34632	1	0,181818	1	
Время	0	9	0	0	10	0	0	

Таблица 5

Результаты определения полных резервов вероятностей и времён выполнения работ

Работа	(0, 1)	(1, 2)	(2, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	(3, 7)	(4, 11)	(5, 8)	(5, 9)
Вероятность	1	1	1	0,10101	0,8	1	0,181818	0,10101	0,34632	0,8
Время	0	0	0	0	0	10	8	4	1	9
Работа	(5, 10)	(6, 9)	(7, 13)	(8, 11)	(9, 12)	(9, 14)	(10, 13)	(11, 14)	(13, 14)	
Вероятность	0,145455	1	0,045455	0,34632	1	0,5	0,181818	0,34632	0,181818	
Время	0	10	9	0	10	9	0	0	0	

Таблица 6

Результаты определения свободных резервов вероятностей и времён выполнения работ

Работа	(0, 1)	(1, 2)	(2, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	(3, 7)	(4, 11)	(5, 8)	(5, 9)
Вероятность	1	1	1	1	1	1	1	0,291667	1	0,8
Время	0	0	0	0	0	10	8	4	1	9
Работа	(5, 10)	(6, 9)	(7, 13)	(8, 11)	(9, 12)	(9, 14)	(10, 13)	(11, 14)	(13, 14)	
Вероятность	0,8	1	0,25	1	1	0,5	1	0,34632	0,181818	
Время	0	10	9	0	10	9	0	0	0	

Полученные результаты показывают, что, как априорно и предполагалось, критические пути по времени и по вероятности выполнения комплекса работ могут не совпадать.

Можно утверждать, что при управлении комплексами различных работ, «резервы» вероятностей выполнения работ можно использовать для уменьшения этих вероятностей без изменения длины вероятностно-критических путей.

Список источников

1. Минаков Е.П., Шафигуллин И.Ш., Зубачев А.М. Методы исследования эффективности применения организационно-технических систем космического назначения. СПб.: ВКА им. А.Ф. Можайского, 2016. 242 с.

2. W. Yu, P. Guo, Q. Wang et al. On a periodic capital injection and barrier dividend strategy in the compound Poisson risk model: mathematics. 2020. Vol. 8. No 4. 511 p.

3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Операционное исчисление. Теория устойчивости: задачи и примеры с подробными решениями: учеб. пособие. Изд. 3-е, испр. и доп. М.: Едиториал УРСС, 2003. 176 с.

4. Аверкиев Н.Ф., Власов Р.П., Богачев С.А. и др. Баллистические основы проектирования ракет-носителей и спутниковых систем. СПб.: ВКА им. А.Ф. Можайского, 2017. 302 с.

5. Kulkarni V.G. Introduction to Modeling and Analysis of Stochastic Systems. New York: Springer, 2011. 414 p.

6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978. 831 с.

7. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. М.: ОГИЗ, 1948. 556 с.

8. Pinedo M. Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems. 5th ed. New York: Springer, 2016. 670 p.

9. Winston W.L., Goldberg J.B. Operations Research: Applications and Algorithms. 4th ed. Belmont: Thomson Brooks/Cole, 2004. 1414 p.

10. Hillier F.S., Lieberman G.J. Introduction to Operations Research. 10th ed. New York: McGraw-Hill, 2015. 1120 p.

References

1. Minakov E.P., Shafigullin I.Sh., Zubachev A.M. Methods for studying the effectiveness of the use of organizational and technical systems for space purposes. St. Petersburg: VKA named after A.F. Mozhaysky, 2016. 242 p.

2. W. Yu, P. Guo, Q. Wang et al. On a periodic capital injection and barrier dividend strategy in the compound Poisson risk model: mathematics. 2020. Vol. 8. No 4. 511 p.

3. Krasnov M.L., Kiselev A.I., Makarenko G.I. Operational calculus. Stability theory: Problems and examples with detailed solutions: the tr. manual. 3rd ed., rev. and exp. Moscow: Editorial URSS, 2003. 176 p.

4. Averkiev N.F., Vlasov R.P., Bogachev S.A. et al. Ballistic basis of design for launch vehicles and satellite systems. St. Petersburg: VKA named after A.F. Mozhaisky, 2017. 302 p.

5. Kulkarni V.G. Introduction to Modeling and Analysis of Stochastic Systems. New York: Springer, 2011. 414 p.

6. Korn G, Korn T. Handbook of Mathematics for Scientists and Engineers. M.: Nauka, 1978. 831 p.

7. Bronstein I.N., Semendyaev K.A. Handbook of Mathematics for Engineers and Students of VTUZOV. M.: OGIZ, 1948. 556 p.

8. Pinedo M. Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems. 5th ed. New York: Springer, 2016. 670 p.

9. Winston W.L., Goldberg J.B. Operations Research: Applications and Algorithms. 4th ed. Belmont: Thomson Brooks/Cole, 2004. 1414 p.

10. Hillier F.S., Lieberman G.J. Introduction to Operations Research. 10th ed. New York: McGraw-Hill, 2015. 1120 p.