

КОРРЕКТНОЕ ЗАДАНИЕ ФУНКЦИЙ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ДИССИПАТИВНОЙ МАТРИЦЫ, ВХОДЯЩЕЙ В УРАВНЕНИЯ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОТОТИПИРОВАНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

И. Е. Старостин

Московский государственный технический университет гражданской авиации, Москва, Россия
starostinigo@yandex.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Математическое моделирование процессов различной физической и химической природы – важнейший этап решения задач проектирования и эксплуатации различных физико-химических систем. Важнейшими требованиями к математическим моделям являются адекватность (т.е. не противоречивость физическим законам) и возможность задания требуемой точности (при наличии достаточного числа экспериментальных данных). Для построения математических моделей, удовлетворяющих упомянутым требованиям, автором был предложен в рамках механики, электродинамики и современной неравновесной термодинамики метод математического прототипирования энергетических процессов – единый подход моделирования процессов различной физической и химической природы. Для получения упомянутым методом уравнений динамики физических и химических процессов необходимо задать функции состояния для свойств веществ и процессов, в том числе и диссипативной матрицы, с точностью до экспериментально исследуемых коэффициентов. Диссипативная матрица должна быть положительно определенной (или невырожденной неотрицательной определенной в случае наличия в системе инерционности). Поэтому функция состояния диссипативной матрицы априори должна удовлетворять условию положительной определенности. Настоящая работа посвящена построению функций состояния диссипативной матрицы, удовлетворяющей условию положительной определенности (или невырожденности и неотрицательной определенности). *Материалы и методы.* Синтез уравнений динамики физических и химических процессов осуществляется на базе метода математического прототипирования энергетических процессов. Функции состояния для диссипативной матрицы строятся с использованием методов равномерного приближения функций и методов символьной регрессии. *Результаты.* Задание функций состояния диссипативной матрицы, входящей в уравнения метода математического прототипирования энергетических процессов, гарантирующих положительную определенность (или неотрицательную определенность с невырожденностью) диссипативной матрицы, гарантирует корректность задания упомянутых функций. *Выводы.* Предложенные в настоящей работе методы задания функций состояния для диссипативной матрицы, входящей в уравнения метода математического прототипирования энергетических процессов, позволяют сформировать класс корректных функций состояния для диссипативных матриц.

Ключевые слова: метод математического прототипирования энергетических процессов, диссипативная матрица, аппроксимация, символьная регрессия

Для цитирования: Старостин И. Е. Корректное задание функций состояния для диссипативной матрицы, входящей в уравнения метода математического прототипирования энергетических процессов // Надежность и качество сложных систем. 2025. № 1. С. 28–35. doi: 10.21685/2307-4205-2025-1-4

CORRECT ASSIGNMENT OF STATE FUNCTIONS FOR THE DISSIPATE MATRIX INCLUDED IN THE EQUATIONS OF THE METHOD OF MATHEMATICAL PROTOTYPING OF ENERGY PROCESSES

I.E. Starostin

Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia
starostinigo@yandex.ru

Abstract. *Background.* Mathematical modeling of processes of various physical and chemical nature is the most important stage in solving problems of design and operation of various physical and chemical systems. The most important requirement for mathematical models is adequacy (i.e. consistency with physical laws) and the possibility of

setting the required accuracy (given a sufficient number of experimental data). To construct mathematical models that meet the above requirements, the author proposed a method of mathematical prototyping of energy processes within the framework of mechanics, electrodynamics and modern non-equilibrium thermodynamics – a unified approach to modeling processes of various physical and chemical nature. To obtain the above method for the equations of the dynamics of physical and chemical processes, it is necessary to set the state functions for the properties of substances and processes, including the dissipative matrix, with an accuracy of up to the experimentally studied coefficients. The dissipative matrix must be positive definite (or non-degenerate non-negative definite in the case of inertia in the system). Therefore, the state functions of a dissipative matrix must a priori satisfy the condition of positive definiteness. This work is devoted to the construction of state functions of a dissipative matrix that satisfy the condition of positive definiteness (or non-degeneracy and non-negative definiteness). *Materials and methods.* The synthesis of equations of the dynamics of physical and chemical processes is carried out on the basis of the method of mathematical prototyping of energy processes. The state functions for the dissipative matrix are constructed using the methods of uniform approximation of functions and methods of symbolic regression. *Results.* The assignment of the state functions of the dissipative matrix included in the equations of the method of mathematical prototyping of energy processes, guaranteeing positive definiteness (or non-negative definiteness with non-degeneracy) of the dissipative matrix guarantees the correctness of the assignment of the mentioned functions. *Conclusions.* The methods proposed in this paper for specifying state functions for a dissipative matrix included in the equations of the method of mathematical prototyping of energy processes make it possible to form a class of correct state functions for dissipative matrices.

Keywords: method of mathematical prototyping of energy processes, dissipative matrix, approximation, symbolic regression

For citation: Starostin I.E. Correct assignment of state functions for the dissipative matrix included in the equations of the method of mathematical prototyping of energy processes. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh sistem = Reliability and quality of complex systems*. 2025;(1):28–35. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-4205-2025-1-4

Введение

Математические модели (ММ), воспроизводящие реальное поведение систем различной физической и химической природы, имеют важное значение для решения практических задач проектирования и эксплуатации технических систем [1–4], разработки медицинских методов [5], прогноза погоды [6], безопасности в чрезвычайных ситуациях [7] и т.д. Анализ физических и химических процессов в исследуемых системах имеет важное значение для построения математических моделей систем различной физической и химической природы, допускающих экстраполяцию на режимы работы системы, при которых имеется мало экспериментальных данных или последние отсутствуют вовсе [8]. Для анализа различных физико-химических процессов автором был предложен на основе механики, электродинамики, современной неравновесной термодинамики метод математического прототипирования энергетических процессов (ММПЭП) [9–15] – единый подход моделирования систем различной физической и химической природы. Благодаря этому модели полученные ММПЭП являются корректными, т.е. не противоречащими общим физическим законам (законам сохранения, началам термодинамики, механики, электродинамики и т.д.), а также физическим особенностям протекания процессов в различных системах [9–15].

Для реализации системы уравнений ММПЭП в численном виде необходимо с точностью до постоянных коэффициентов, исследуемых экспериментально, задать функции состояния для положительно определенной диссипативной матрицы и свободной энергии [9, 12–15]. Упомянутые функции состояния сколь угодно точно могут быть заданы в виде функциональных полиномов (аппроксимационная теорема Вейерштрасса [16]) [9, 12–14]. При этом функциональные разложения для диссипативной матрицы должны априори гарантировать ее положительную определенность (условие корректности функциональных разложений диссипативной матрицы), что гарантирует корректность модели [9, 12, 13]. Настоящая статья посвящена заданию корректных функциональных разложений диссипативной матрицы.

Материалы и методы

Синтез ММ системы в соответствии с ММПЭП осуществляется путем задания координат состояния $\mathbf{x}$ – величин, однозначно характеризующих состояние системы независимо от ее предыстории, с последующим определением потенциалов взаимодействия [9, 12, 14, 15]. Затем задаются координаты процессов, для которых определяются динамические силы – причины и необходимые условия протекания процессов различной физической и химической природы (рис. 1) [9, 12, 14, 15]. Независимо от динамических сил полная картина динамики системы определяется кинетическими

свойствами, «шкалой» которых является положительно определенная диссипативная матрица (рис. 1) [9, 12, 14, 15]. Приведенные факторы определяют динамику физических и химических процессов в системе, которая в свою очередь определяет динамику измеряемых и контролируемых параметров (рис. 1) [9, 12].

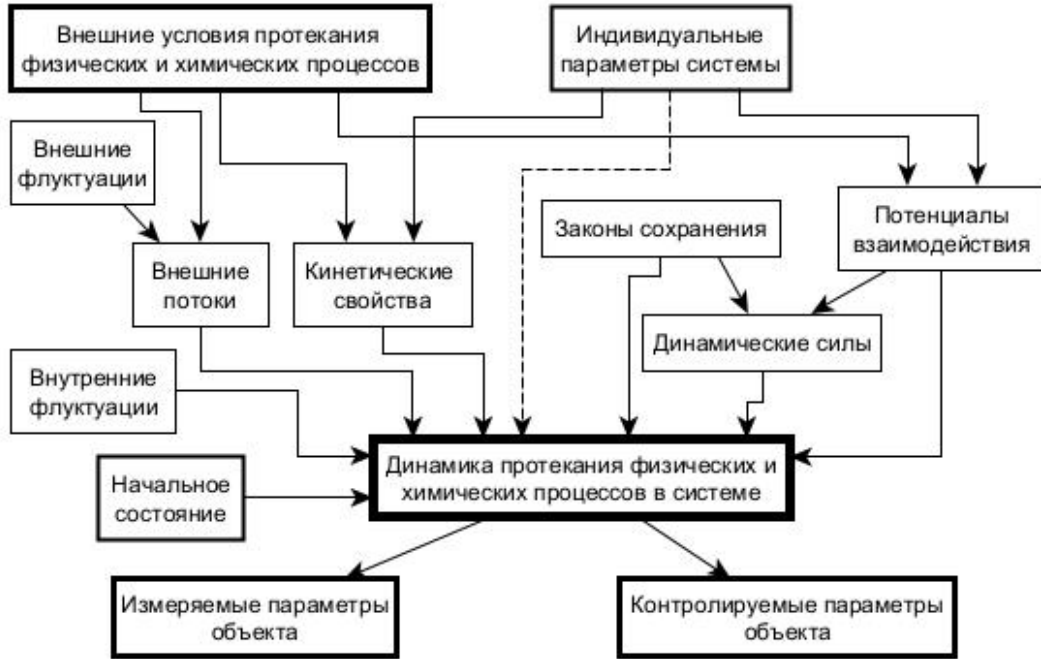


Рис. 1. Факторы, определяющие динамику физических и химических процессов

Функция состояния для положительно определенной диссипативной матрицы $A(x)$ задается в соответствии со следующим формализмом [9, 12, 13]:

1. Задаем разложение диссипативной матрицы $A(x)$ по положительно определенным матрицам $A_r(x)$, $r = \overline{1, N}$ (где N – число членов разложения по матрицам $A_r(x)$, $r = \overline{1, N}$) в виде

$$A(x) = \sum_{r=1}^N \gamma_r^T(x) A_r(x) \gamma_r(x), \quad (1)$$

где $\gamma_r(x)$, $r = \overline{1, N}$ – некоторые матрицы коэффициентов разложения диссипативной матрицы $A(x)$ по положительно определенным матрицам $A_r(x)$, $r = \overline{1, N}$.

2. Каждая положительно определенная матрица $A_r(x)$, $r = \overline{1, N}$ представляется в блочном виде

$$A_r(x) = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{l_{i,r},r}(x) & \alpha_{l_{i,r},r}(x) A_{m_r-l_{i,r},r}(x) \\ A_{m_r-l_{i,r},r}(x) \beta_{l_{i,r},r}(x) & A_{m_r-l_{i,r},r}(x) \end{pmatrix}, \quad r = \overline{1, N},$$

$$A_{m_r-l_{i,r},r}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{l_{i+1,r},r}(x) & \alpha_{l_{i+1,r},r}(x) A_{m_r-l_{i+1,r},r}(x) \\ A_{m_r-l_{i+1,r},r}(x) \beta_{l_{i+1,r},r}(x) & A_{m_r-l_{i+1,r},r}(x) \end{pmatrix},$$

$$i = 1, m_r^{(l)} - 1, A_{m_r^{(l)},r}(x) = A_{m_r^{(l)},r}(x), \sum_{i=1}^{m_r^{(l)}} l_{i,r} = m_r, \quad r = \overline{1, N}.$$

3. Определяем приведенные обратимые составляющие $\bar{a}_{l_{i,r},r}(x)$ положительно определенных матриц $A_r(x)$, $r = \overline{1, N}$:

$$\bar{\alpha}_{l_i, r}(\mathbf{x}) = (\alpha_{l_i, r}(\mathbf{x}) \mathbf{A}_{m_r - l_i, r}(\mathbf{x}) + \beta_{l_i, r}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}_{m_r - l_i, r}^T(\mathbf{x})) (\mathbf{A}_{m_r - l_i, r}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_{m_r - l_i, r}^T(\mathbf{x}))^{-1}, \quad i = 1, m_r^{(i)} - 1, \quad r = \overline{1, N}.$$

4. Определяем матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{l_i, r}(\mathbf{x})$, $i = 1, m_r^{(i)} - 1$, $r = \overline{1, N}$:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{l_i, r}(\mathbf{x}) = \Lambda_{l_i, r}(\mathbf{x}) + \bar{\alpha}_{l_i, r}(\mathbf{x}) \mathbf{A}_{m_r - l_i, r}(\mathbf{x}) \bar{\alpha}_{l_i, r}^T(\mathbf{x}), \quad i = 1, m_r^{(i)} - 1, \quad r = \overline{1, N}.$$

5. Для всех положительно определенных матриц $\Lambda_{l_i, r}(\mathbf{x})$, $i = 1, m_r^{(i)}$, $r = \overline{1, N}$, порядок которых больше 1, применяем итерации 1 – 4 настоящего алгоритма за исключением упомянутых матриц, описывающих электрические цепи. Последние задаются через положительные сопротивления [17], для которых задаются априори положительные функции состояния. Для остальных матриц $\Lambda_{l_i, r}(\mathbf{x})$, $i = 1, m_r^{(i)}$, $r = \overline{1, N}$, порядок которых равен 1 (положительных чисел), являющихся необратимыми составляющими [12, 15], задаем априори положительные функции состояния.

6. Задаем функции состояния для элементов матриц $\gamma(\mathbf{x})$ с индексами и элементов матриц обратимых составляющих $\alpha(\mathbf{x})$, $\beta(\mathbf{x})$ с индексами [12, 15].

Любая симметричная положительно определенная матрица может быть разложена в виде (1) по положительно-определенным матрицам первого порядка (положительным числам) [18]. Аналогично любую несимметричную матрицу можно разложить на симметричную и антисимметричную (а значит, на симметричную и кососимметричную положительно определенные матрицы), получив также представление (1) [12, 18].

Следует отметить, что приведенный формализм справедлив также и для невырожденных неотрицательно определенных диссипативных матриц [12, 13]. Неотрицательно определенные диссипативные матрицы встречаются в системах, содержащих инерционности, например, в механических системах, в электрических цепях, содержащих индуктивные элементы [12, 17].

На функции состояния элементов матриц $\alpha(\mathbf{x})$, $\beta(\mathbf{x})$ и $\gamma(\mathbf{x})$ с соответствующими индексами ограничений не накладывается [12], поэтому они могут быть заданы в виде функциональных разложений (по аппроксимационной теореме Вейерштрасса [16]) [9, 13]:

$$\alpha(\mathbf{x}) = \alpha^{(0)}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{N_a} c_k^{(a)} \Delta \alpha_k(\mathbf{x}), \quad \beta(\mathbf{x}) = \beta^{(0)}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{N_\beta} c_k^{(\beta)} \Delta \beta_k(\mathbf{x}), \quad (2)$$

$$\gamma(\mathbf{x}) = \gamma^{(0)}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{N_\gamma} c_k^{(\gamma)} \Delta \gamma_k(\mathbf{x}), \quad (3)$$

где $\alpha^{(0)}(\mathbf{x})$, $\beta^{(0)}(\mathbf{x})$, $\gamma^{(0)}(\mathbf{x})$ – базовые составляющие, вбирающие в себя все качественные особенности зависимости свойств веществ и процессов от состояния системы, а $\Delta \alpha_k(\mathbf{x})$, $k = \overline{1, N_a}$, $\Delta \beta_k(\mathbf{x})$, $k = \overline{1, N_\beta}$, $\Delta \gamma_k(\mathbf{x})$, $k = \overline{1, N_\gamma}$ – довесочные составляющие, уточняющие базовые составляющие $\alpha^{(0)}(\mathbf{x})$, $\beta^{(0)}(\mathbf{x})$, $\gamma^{(0)}(\mathbf{x})$ соответственно. Рассмотрим теперь необратимые составляющие $\Lambda(\mathbf{x})$ с индексами, представив их в виде

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \theta(\bar{\Lambda}(\mathbf{x})), \quad \theta(\bar{\Lambda}) > 0, \quad \frac{d\theta(\bar{\Lambda})}{d\bar{\Lambda}} > 0, \quad \bar{\Lambda} \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

где $\theta(\bar{\Lambda})$ – некоторая функция шкалы необратимой составляющей диссипативной матрицы, а $\bar{\Lambda}(\mathbf{x})$ с соответствующими индексами – приведенная необратимая составляющая. Как видно из выражения (4), на приведенные необратимые составляющие $\bar{\Lambda}(\mathbf{x})$ с индексами ограничений не наложено, а также в силу монотонности функции $\theta(\bar{\Lambda})$ величины $\Lambda > 0$ и $\bar{\Lambda} \in \mathbb{R}$ связаны между собой взаимно-однозначно [16]. Поэтому задание функции $\Lambda(\mathbf{x}) > 0$ с использованием (4) эквивалентно заданию для приведенной необратимой составляющей $\bar{\Lambda}(\mathbf{x})$ функциональных разложений, аналогичных (2) и (3):

$$\bar{\Lambda}(\mathbf{x}) = \bar{\Lambda}^{(0)}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{N_{\bar{\Lambda}}} c_k^{(\bar{\Lambda})} \Delta \bar{\Lambda}_k(\mathbf{x}), \quad (5)$$

где $\bar{\Lambda}^{(0)}(\mathbf{x})$ – базовая составляющая, вбирающая в себя все качественные особенности зависимости необратимой соответствующей составляющей $\Lambda(\mathbf{x})$ диссипативной матрицы от состояния системы, а $\Delta \bar{\Lambda}_k(\mathbf{x})$, $k = \overline{1, N_{\bar{\Lambda}}}$ – довесочные составляющие, уточняющие базовую составляющую $\bar{\Lambda}^{(0)}(\mathbf{x})$. Нетрудно видеть, что задание составляющих диссипативной матрицы в виде (2)–(5) позволит вобрать в себя особенности физических и химических процессов в рассматриваемой системе, гарантируя при этом положительность необратимых составляющих диссипативной матрицы, а значит, положительную ее определенность [9, 13].

Рассмотрим следующие виды функций (4) шкал диссипативных составляющих диссипативной матрицы:

– экспоненциальная шкала:

$$\theta(\bar{\Lambda}) = \Lambda_{\min} + \Lambda^* \exp(\lambda \bar{\Lambda}), \quad \Lambda_{\min} \geq 0, \quad \Lambda^* > 0, \quad \lambda > 0, \quad (6)$$

где $\Lambda_{\min}$ – некоторое минимальное значение положительной диссипативной составляющей $\Lambda(\mathbf{x})$;

Λ^* – экспоненциальный коэффициент; λ – коэффициент экспоненциального возрастания;

– логарифмическо-экспоненциальная шкала:

$$\theta(\bar{\Lambda}) = \Lambda_{\min} + \frac{\Lambda^*}{\lambda} \ln(1 + \exp(\lambda \bar{\Lambda})), \quad \Lambda_{\min} \geq 0, \quad \Lambda^* > 0, \quad \lambda > 0, \quad (7)$$

где $\Lambda_{\min}$ – некоторое минимальное значение положительной диссипативной составляющей $\Lambda(\mathbf{x})$;

Λ^* – коэффициент пропорциональности; λ – коэффициент нелинейности;

– сигмоидальная шкала:

$$\theta(\bar{\Lambda}) = \Lambda_{\min} + \frac{\Lambda_{\max} - \Lambda_{\min}}{1 + \exp(-\lambda \bar{\Lambda})}, \quad \Lambda_{\min} \geq 0, \quad \Lambda_{\max} > \Lambda_{\min}, \quad \lambda > 0, \quad (8)$$

где $\Lambda_{\min}$, $\Lambda_{\max}$ – некоторые минимальное и максимальное значения положительной диссипативной составляющей $\Lambda(\mathbf{x})$; λ – сигмоидальный коэффициент;

– линейно-сигмоидальная шкала:

$$\theta(\bar{\Lambda}) = \Lambda_{\min} + \frac{\Lambda^*}{\lambda} \ln \left(\frac{1 + \exp(\lambda \bar{\Lambda})}{1 + \exp(\lambda(\bar{\Lambda} - \bar{\Lambda}_{\text{сд}}))} \right), \quad \bar{\Lambda}_{\text{сд}} = \frac{\Lambda_{\max} - \Lambda_{\min}}{\Lambda^*}, \quad \Lambda_{\min} \geq 0, \quad \Lambda_{\max} > \Lambda_{\min}, \quad \Lambda^* > 0, \quad \lambda > 0, \quad (9)$$

где $\Lambda_{\min}$, $\Lambda_{\max}$ – некоторые минимальное и максимальное значения положительной диссипативной составляющей $\Lambda(\mathbf{x})$; Λ^* – коэффициент пропорциональности; λ – коэффициент нелинейности.

Как нетрудно видеть из уравнений (6)–(9), соответствующие функции шкал диссипативных составляющих положительные в силу положительности экспоненты, а также подлогарифмического выражения, большего единицы. Действительно, в случае (9) имеем

$$\frac{1 + \exp(\lambda \bar{\Lambda})}{1 + \exp(\lambda(\bar{\Lambda} - \bar{\Lambda}_{\text{сд}}))} - 1 = \frac{(1 - \exp(-\lambda \bar{\Lambda}_{\text{сд}})) \exp(\lambda \bar{\Lambda})}{1 + \exp(\lambda(\bar{\Lambda} - \bar{\Lambda}_{\text{сд}}))} > 0.$$

Также из уравнений (6)–(9) видно, что соответствующие функции шкал диссипативных составляющих монотонно возрастают с ростом $\bar{\Lambda}$ в силу монотонной возрастаемости функций $\exp(x)$ и $\ln(x)$. Действительно, в случае (9):

$$\frac{d}{d\bar{\Lambda}} \left(\frac{1}{\bar{\lambda}} \ln \left(\frac{1 + \exp(\bar{\lambda}\bar{\Lambda})}{1 + \exp(\bar{\lambda}(\bar{\Lambda} - \bar{\Lambda}_{\text{сд}}))} \right) \right) = \frac{(1 - \exp(-\bar{\lambda}\bar{\Lambda}_{\text{сд}})) \exp(\bar{\lambda}\bar{\Lambda})}{(1 + \exp(\bar{\lambda}\bar{\Lambda}))(1 + \exp(\bar{\lambda}(\bar{\Lambda} - \bar{\Lambda}_{\text{сд}})))} > 0.$$

Таким образом, заданные в виде (6)–(9) функции шкал диссипативных составляющих диссипативных матриц удовлетворяют условиям (4). Рассмотрим более подробно свойства упомянутых функций шкал.

Функция шкал необратимых составляющих диссипативной матрицы, заданная в виде уравнений (6), (7), принимает значения в интервале $(\Lambda_{\min}, +\infty)$ и, соответственно, применима для задания необратимых составляющих диссипативной матрицы, не ограниченных сверху; а функции шкал необратимых составляющих, заданные в виде уравнений (8), (9), принимают значения в интервале $(\Lambda_{\min}, \Lambda_{\max})$ и, соответственно, применима для задания ограниченных сверху диссипативных составляющих. Более того, согласно уравнению (7) имеем

$$\theta(\bar{\Lambda}) = \Lambda_{\min} + \frac{\Lambda^*}{\bar{\lambda}} \ln(1 + \exp(\bar{\lambda}\bar{\Lambda})) = \Lambda_{\min} + \frac{\Lambda^*}{\bar{\lambda}} \ln(1 + \exp(-\bar{\lambda}\bar{\Lambda})) + \Lambda^* \bar{\Lambda},$$

т.е. в пределе при $\bar{\Lambda} \rightarrow +\infty$ заданная в виде (7) функция шкалы $\theta(\bar{\Lambda}) \rightarrow \Lambda^* \bar{\Lambda}$, т.е. к прямой пропорциональности. Таким образом, благодаря заданной в виде (7) функции шкалы необратимых составляющих диссипативной матрицы становится возможным задание приведенной составляющей, максимально передающей качественное поведение диссипативной составляющей. Это целесообразно для использования в выражении (5) положительных базисной и довесочных составляющих и при наложении ограничения положительности коэффициентов разложения (например, в случае использования полиномов Бернштейна [19]). Аналогичное касается и функции (8).

Функции шкал необратимых составляющих диссипативной матрицы, в частности обладающие свойствами соответствующих функций (6)–(9), могут быть также заданы и с использованием других функций.

Результаты

Итак, задание обратимых и необратимых составляющих диссипативной матрицы в виде (2)–(5) гарантирует корректное задание функции состояния для диссипативной матрицы по приведенному в настоящей работе формализму. А значит, гарантирует синтез корректных уравнений динамики процессов в системе при условии корректности задания функций состояния для прочих свойств веществ и процессов. Более того, выражения (2), (3), (5) могут быть заданы в любом базисе, что дает возможность задания класса гарантированно корректных моделей, в котором методами теории идентификации по экспериментальным данным строится модель [20]. В заданный класс моделей зашиваются и физические особенности конкретного класса систем (путем задания (2), (3), (5)).

Обсуждение

Корректное задание предложенным в настоящей статье способом диссипативной матрицы дает возможность корректного задания на основе ММПЭП класса уравнений динамики процессов различной физической и химической природы в рассматриваемой системе. Это дает основу единой методики синтеза цифровых двойников систем различной физической и химической природы [11]. Причем математическая основа цифровых двойников – либо аналитическая модель, получаемая путем численно-аналитического преобразования уравнений ММПЭП, либо сами уравнения ММПЭП (либо исходные, либо локально-упрощенные). Для получения аналитической модели достаточно ММПЭП получить качественный характер динамики процессов и проанализировать перекрестные связи [11]. Это дает возможность, задав класс аналитических моделей, методами теории идентификации [20] строить аналитическую модель [11].

Заключение

Использование ММПЭП с предложенным формализмом построения диссипативной матрицы для построения моделей систем различной физической и химической природы позволяет построить

класс корректных моделей рассматриваемой системы, сводя построение модели к известным методам теории идентификации.

Список литературы

1. Юревич Е. И. Основы проектирования техники. СПб. : Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2012. 135 с.
2. Барзилович Е. Ю. Модели технического обслуживания сложных систем. М. : Высш. шк., 1982. 231 с.
3. Колодежный Л. П., Чернодаров А. В. Надежность и техническая диагностика. М. : Изд-во ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, 2010. 452 с.
4. Бессекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического управления. СПб. : Профессия, 2003. 768 с.
5. Гайдес М. А. Общая теория систем (системы и системный анализ). Винница : Глобус-Пресс, 2005. 210 с.
6. Хромов С. П., Петросянц М. А. Метеорология и климатология. М. : Изд-во Московского университета, 2006. 582 с.
7. Акимов В. А. Научные основы общей теории безопасности // Технологии гражданской безопасности. 2017. Т. 14, № 4. С. 4–9.
8. Антонов А. В. Системный анализ. М. : Высш. шк., 2004. 454 с.
9. Khalyutin S. P., Starostin I. E., Agafonkina I. V. Generalized Method of Mathematical Prototyping of Energy Processes for Digital Twins Development // *Energies*. 2023. № 16. P. 1933–1958. doi: 10.3390/en16041933
10. Старостин И. Е. Построение на основе интерполяции моделей различных физических и химических систем методом математического прототипирования энергетических процессов // Надежность и качество сложных систем. 2024. № 1. С. 49–59. doi: 10.21685/2307-4205-2024-1-6
11. Старостин И. Е., Гавриленков С. И. Архитектура математического ядра цифровых двойников различных физико-химических систем на базе метода математического прототипирования энергетических процессов // Надежность и качество сложных систем. 2024. № 4. С. 160–168. doi: 10.21685/2307-4205-2024-4-17
12. Starostin I. E., Bykov V. I. Kinetic theorem of modern non-equilibrium thermodynamics. Raley, Noth Caroline, USA : Open Science Publishing, 2017. 229 p.
13. Starostin I. E., Khalyutin S. P., Bykov V. I. Setting the State functions for the properties of substances and processes in a differential form // *The Complex Systems*. 2022. № 1. P. 4–16.
14. Эткин В. А. Энергодинамика (синтез теорий переноса и преобразования энергии). СПб. : Наука, 2008. 409 с.
15. Эткин В. А. Эргодинамическая теория эволюции биологических систем // Информационные процессы, системы и технологии. 2022. № 1. С. 12–24.
16. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Продолжение курса. М. : Изд-во Московского университета, 1967. 350 с.
17. Старостин И. Е., Халютин С. П., Докин К. К. Метод математического прототипирования энергетических процессов для электрических цепей // *Электропитание*. 2022. № 1. С. 41–49.
18. Канатников А. Н., Крищенко А. П. Линейная алгебра : учеб. для вузов. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. 336 с.
19. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. М. : Изд-во академии наук СССР, 1952. Т. 1. 582 с.
20. Eykhoff P. Systems identification: parameters and state estimation. Eindhoven, Netherlands : University of technology, 1975. 680 p.

References

1. Yurevich E.I. *Osnovy proektirovaniya tekhniki = Fundamentals of engineering design*. Saint Petersburg: Sankt-Peterburgskiy gosudarstvennyy politekhnicheskiy universitet, 2012:135. (In Russ.)
2. Barzilovich E.Yu. *Modeli tekhnicheskogo obsluzhivaniya slozhnykh system = Models of maintenance of complex systems*. Moscow: Vyssh. shk., 1982:231. (In Russ.)
3. Kolodezhnyy L.P., Chernodarov A.V. *Nadezhnost' i tekhnicheskaya diagnostika = Reliability and technical diagnostics*. Moscow: Izd-vo VVA im. prof. N.E. Zhukovskogo i Yu.A. Gagarina, 2010:452. (In Russ.)
4. Bessekerskiy V.A., Popov E.P. *Teoriya sistem avtomaticheskogo upravleniya = Theory of automatic control systems*. Saint Petersburg: Professiya, 2003:768. (In Russ.)
5. Gaydes M.A. *Obshchaya teoriya sistem (sistemy i sistemnyy analiz) = General theory of systems (systems and system analysis)*. Vinnitsa: Globus-Press, 2005:210. (In Russ.)
6. Khromov S.P., Petrosyants M.A. *Meteorologiya i klimatologiya = Meteorology and climatology*. Moscow: Izd-vo Moskovskogo universiteta, 2006:582. (In Russ.)
7. Akimov V.A. Scientific foundations of the general theory of safety. *Tekhnologii grazhdanskoy bezopasnosti = Technologies of civil safety*. 2017;14(4):4–9. (In Russ.)
8. Antonov A.V. *Sistemnyy analiz = System analysis*. Moscow: Vyssh. shk., 2004:454. (In Russ.)
9. Khalyutin S.P., Starostin I.E., Agafonkina I.V. Generalized Method of Mathematical Prototyping of Energy Processes for Digital Twins Development. *Energies*. 2023;(16):1933–1958. doi: 10.3390/en16041933

10. Starostin I.E. Building models of various physical and chemical systems based on interpolation by mathematical prototyping of energy processes. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system = Reliability and quality of complex systems*. 2024;(1):49–59. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-4205-2024-1-6
11. Starostin I.E., Gavrilin S.I. Architecture of the mathematical core of digital twins of various physico-chemical systems based on the method of mathematical prototyping of energy processes. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system = Reliability and quality of complex systems*. 2024;(4):160–168. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-4205-2024-4-17
12. Starostin I.E., Bykov V.I. *Kinetic theorem of modern non-equilibrium thermodynamics*. Raley, North Carolina, USA: Open Science Publishing, 2017:229.
13. Starostin I.E., Khalyutin S.P., Bykov V.I. Setting the State functions for the properties of substances and processes in a differential form. *The Complex Systems*. 2022;(1):4–16.
14. Etkin V.A. *Energodinamika (sintez teoriy perenosa i preobrazovaniya energii) = Ergodynamics (synthesis of theories of energy transfer and transformation)*. Saint Petersburg: Nauka, 2008:409. (In Russ.)
15. Etkin V.A. Ergodynamic theory of the evolution of biological systems. *Informatsionnye protsessy, sistemy i tekhnologii = Information processes, systems and technologies*. 2022;(1):12–24. (In Russ.)
16. Il'in V.A., Sadovnichiy V.A., Sendov B.I.Kh. *Matematicheskiy analiz. Prodolzhenie kursa = Mathematical analysis. Continuation of the course*. Moscow: Izd-vo Moskovskogo universiteta, 1967:350. (In Russ.)
17. Starostin I.E., Khalyutin S.P., Dokin K.K. Method of mathematical prototyping of energy processes for electric circuits. *Elektroplitanie = Power supply*. 2022;(1):41–49. (In Russ.)
18. Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P. *Lineynaya algebra: ucheb. dlya vuzov = Linear algebra textbook for universities*. Moscow: Izd-vo MG TU im. N.E. Bauman, 2002:336. (In Russ.)
19. Bernshteyn S.N. *Sobranie sochineniy = Collected works*. Moscow: Izd-vo akademii nauk SSSR, 1952;1:582. (In Russ.)
20. Eykhoff P. *Systems identification: parameters and state estimation*. Eindhoven, Netherlands: University of technology, 1975:680.

Информация об авторах / Information about the authors

Игорь Евгеньевич Старостин

доктор технических наук, профессор,
профессор кафедры электротехники
и авиационного электрооборудования,
Московский государственный технический
университет гражданской авиации
(Россия, г. Москва, Кронштадтский бульвар, 20)
E-mail: starostinigo@yandex.ru

Igor E. Starostin

Doctor of technical sciences, professor, professor
of the sub-department of electrical engineering
and aviation electrical equipment,
Moscow State Technical University of Civil Aviation
(20 Kronshtadtskiy boulevard, Moscow, Russia)

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов /

The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 15.12.2024

Поступила после рецензирования / Revised 25.12.2024

Принята к публикации / Accepted 15.01.2025