

## СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТАНТ ПОЛИМЕРНО-МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОМПОЗИТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ

Е. Д. Карташова<sup>1</sup>, А. Ю. Муйземнек<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

<sup>1</sup> katrina89@yandex.ru, <sup>2</sup> muyzemnek@yandex.ru

**Аннотация.** *Актуальность и цели.* Отличительной чертой полимерных слоистых композиционных материалов является анизотропия механических свойств всего материала и каждого его слоя. *Материалы и методы.* Это приводит к усложнению процесса проектирования, которое обусловлено необходимостью определения эффективных упругих характеристик полимерного слоистого композиционного материала с учетом его структуры. Целью работы является оценка существующих методов вычисления эффективных упругих характеристик полимерно-металлических композитов на основе матрицы из нейлона и армирующего из нержавеющей стали путем сравнения результатов расчета, полученных различными методами. *Результаты.* В результате исследования установлено, что все инженерные константы согласованы и дальнейшее измельчение сетки не имеет смысла. *Выводы.* Коэффициент Пуассона, полученный на сетки, положителен в то время, как значения, полученные другими методами, отрицательны. Это позволяет сделать вывод о том, что используемая сетка недостаточно подробна.

**Ключевые слова:** полимерно-металлический композиционный материал, нейлон, нержавеющая сталь, эффективные характеристики упругих свойств, модели и методы экспериментальных исследований и расчета

**Для цитирования:** Карташова Е. Д., Муйземнек А. Ю. Сопоставление результатов расчета инженерных констант полимерно-металлических композитов, полученных различными методами // Надежность и качество сложных систем. 2025. № 2. С. 80–88. doi: 10.21685/2307-4205-2025-2-9

## COMPARISON OF THE RESULTS OF CALCULATION OF ENGINEERING CONSTANTS OF POLYMER-METALLIC COMPOSITES OBTAINED BY VARIOUS METHODS

E.D. Kartashova<sup>1</sup>, A.Yu. Muizemnek<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Penza State University, Penza, Russia

<sup>1</sup> katrina89@yandex.ru, <sup>2</sup> muyzemnek@yandex.ru

**Abstract.** *Background.* Distinctive features of polymer layered composite materials are the anisotropy of the mechanical properties of the entire material and each of its layers. *Materials and methods.* This leads to a complication of the design process, which is due to the need to determine the effective elastic characteristics of the polymer layered composite material, taking into account its structure. The aim of the work is to evaluate the existing methods for calculating the effective elastic properties of polymer-metal composites based on a nylon matrix and stainless steel reinforcement by comparing the calculation results obtained by different methods. *Results.* The study found that all engineering constants are consistent and further mesh refinement does not make sense. *Conclusions.* Poisson's ratio obtained on the mesh is positive, while the values obtained by other methods are negative. This allows us to conclude that the mesh used is not detailed enough.

**Keywords:** polymer-metal composite material, nylon, stainless steel, effective characteristics of elastic properties, models and methods of experimental research and calculation

**For citation:** Kartashova E.D., Muizemnek A.Yu. Comparison of the results of calculation of engineering constants of polymer-metallic composites obtained by various methods. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh sistem = Reliability and quality of complex systems.* 2025;(2):80–88. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-4205-2025-2-9

Отличительной чертой полимерных слоистых композиционных материалов является анизотропия механических свойств всего материала и каждого его слоя. При этом упругие свойства и прочность материала различны по толщине детали. Все это приводит к усложнению процесса проектирования, которое обусловлено необходимостью определения эффективных упругих характеристик полимерного слоистого композиционного материала с учетом его структуры. Целью работы является оценка существующих методов вычисления эффективных упругих характеристик полимерно-металлических композитов на основе матрицы из нейлона и армирующего из нержавеющей стали путем сравнения результатов расчета, полученных различными методами. Такая оценка позволит более обоснованно осуществлять выбор вычислительных методов при реализации образовательных программ по различным специальностям и направлениям подготовки в вузах [1, 2].

Примером применения полимерно-металлического слоистого композиционного материала являются широко распространенные в медицине трубки различного диаметра, которые состоят из полимерной матрицы и металлической ткани в качестве армирующей основы. Репрезентативная ячейка (*RVE – representative volume element*) такого композиционного материала и ее характерные размеры показаны на рис. 1.

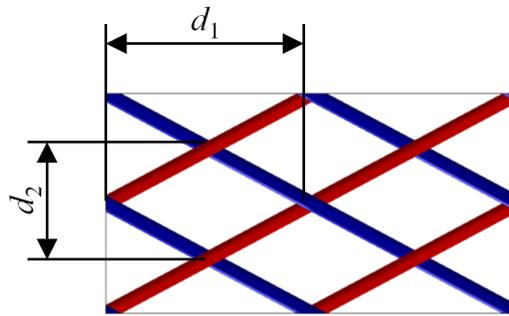


Рис. 1. Репрезентативная ячейка полимерно-металлического слоистого композиционного материала (матрица не показана), характерные размеры

В качестве примера рассмотрим трубку из композиционного материала, репрезентативная ячейка которой имеет следующие размеры:

- наружный диаметр  $d_H = 1,95$  мм;
- внутренний диаметр  $d_{BH} = 1,14$  мм;
- материал матрицы – нейлон;
- материал армирующего – нержавеющая сталь;
- характерный размер оплетки  $d_1 = 1,148$  мм;
- характерный размер оплетки  $d_2 = 0,617$  мм;
- площадь поперечного сечения нити оплетки  $S = 0,004$  мм<sup>2</sup>.

Рассматриваемые полимерно-металлические слоистые композиционные материалы являются ортотропными материалами. Эффективные матрицы жесткости и податливости ортотропного материала определяются девятью независимыми инженерными константами: модулями Юнга  $E_{11}$ ,  $E_{22}$  и  $E_{33}$ , модулями сдвига  $G_{12}$ ,  $G_{23}$  и  $G_{13}$  и коэффициентами Пуассона  $\nu_{21}$ ,  $\nu_{31}$ ,  $\nu_{32}$ . Матрица податливости  $[S]$  ортотропного материала представляется следующим образом [3]:

$$[S] = \begin{bmatrix} 1/E_{11} & -\nu_{21}/E_{22} & -\nu_{31}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_{11} & 1/E_{22} & -\nu_{32}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_{11} & -\nu_{23}/E_{22} & 1/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

На инженерные константы, входящие в выражение (1), наложены следующие ограничения:

- условие симметрии  $\frac{\nu_{ij}}{E_{ii}} = \frac{\nu_{ji}}{E_{jj}}$  (без суммирования);

– ограничения в виде неравенств

$$E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{23}, G_{13} > 0; |v_{12}| < \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{\frac{1}{2}}; |v_{13}| < \left(\frac{E_1}{E_3}\right)^{\frac{1}{2}}; |v_{23}| < \left(\frac{E_2}{E_3}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$1 - v_{12}v_{21} - v_{23}v_{32} - v_{13}v_{31} - 2v_{21}v_{32}v_{13} > 0. \quad (2)$$

Тканый слой из нержавеющей стали в композиционном материале имеет плетение «braided». Поэтому система координат, в которой будут определяться инженерные константы, выбрана таким образом, что первая материальная ось располагается вдоль большей диагонали ромба (см. рис. 1), вторая – вдоль меньшей.

Для описания деформационного поведения нержавеющей стали и нейлона использована изотропная упругая модель. Характеристики физико-механических свойств нержавеющей стали и нейлона, которые использовались в изотропных упругих моделях, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Характеристики физико-механических свойств компонентов

Наименование характеристики	Наименование материала	
	Нейлон	Нержавеющая сталь
Плотность, г/см <sup>3</sup>	1	7,8
Модуль упругости, ГПа	0,252	210
Коэффициент Пуассона	0,37	0,3

### Методы расчета инженерных констант (методы гомогенизации)

Считается, что простые двухфазные композиты состоят из матрицы, которая армирована рядом включений (I). Используем индексы «0» для матрицы и «1» для фазы включений. Объемные доли двух фаз таковы, что  $v_0 + v_1 = 1$ .

Осредненные по объему поля деформаций в RVE, в матричной фазе и фазе включения связаны выражением

$$\langle \varepsilon \rangle_{\omega} = v_0 \langle \varepsilon \rangle_{\omega_0} + v_1 \langle \varepsilon \rangle_{\omega_1}. \quad (3)$$

Любая из рассматриваемых моделей гомогенизации среднего поля (MFH – Mean-field homogenization) может быть определена с помощью так называемых тензоров концентрации деформаций. Они входят в выражение

$$\langle \varepsilon \rangle_{\omega_1} = \mathbf{B}^{\varepsilon} : \langle \varepsilon \rangle_{\omega_0}, \quad \langle \varepsilon \rangle_{\omega_1} = \mathbf{A}^{\varepsilon} : \langle \varepsilon \rangle_{\omega}. \quad (4)$$

Средняя по объему деформация, вычисленная по всем включениям, связана со средней по объему деформацией, вычисленной по матричной фазе, через первый тензор, а со средней по объему деформацией, вычисленной по всему RVE (макродоформацией), через второй тензор. Два тензора концентрации деформаций не являются независимыми. Действительно, второй можно вычислить, зная первый.

Эти результаты действительны для любой модели материала для любой фазы

$$\mathbf{A}^{\varepsilon} = \mathbf{B}^{\varepsilon} : [\mathbf{v}_1 \mathbf{B}^{\varepsilon} + (1 - \mathbf{v}_1) \mathbf{I}]^{-1}. \quad (5)$$

Эти выражения справедливы для всех материалов имеющихся фаз.

Далее рассмотрим двухфазные линейно-упругие композиты. Для любой модели гомогенизации, определяемой тензором концентрации деформации, макрожесткость вычисляется с помощью выражения

$$\bar{\mathbf{C}} = [\mathbf{v}_1 \mathbf{C}_1 : \mathbf{B}^{\varepsilon} + (1 - \mathbf{v}_1) \mathbf{C}_0] : [\mathbf{v}_1 : \mathbf{B}^{\varepsilon} + (1 - \mathbf{v}_1) \mathbf{I}]^{-1}. \quad (6)$$

Используя решение Эшелби [4], задачу определения тензоров концентрации деформации можно решить аналитически. Установлено, что деформация внутри включения (I) однородна и связана с удаленной деформацией следующим образом:

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{H}^e(\mathbf{I}, \mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1) : \mathbf{E}^*, \forall \mathbf{x} \in (\mathbf{I}), \quad (7)$$

где  $\mathbf{H}^e(\mathbf{I}, \mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1)$  – тензор концентрации деформаций единичного включения, определяемый следующим образом:

$$\mathbf{H}^e(\mathbf{I}, \mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1) = \{ \mathbf{I} + \zeta(\mathbf{I}, \mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1) : \mathbf{C}_0^{-1} : (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0) \}^{-1}. \quad (8)$$

Другой тензор, который играет важную роль – это тензор Хилла (тензор поляризации), определяемый как

$$\mathbf{P}^e(\mathbf{I}, \mathbf{C}_0) = \zeta(\mathbf{I}, \mathbf{C}_0) : \mathbf{C}_0^{-1}. \quad (9)$$

Решение задачи об единственном включении является основой изложенных далее MFH-моделей.

Рассмотрим случай композитного материала, состоящего из матричной фазы с жесткостью  $\mathbf{C}_0$ , усиленной несколькими включениями с одинаковой жесткостью  $\mathbf{C}_1$ , которые должны быть до сих пор идентичными с точки зрения материала, формы и ориентации. Линейные перемещения, соответствующие удаленной деформации  $\mathbf{E}$ , прикладываются на границе. В отличие от проблемы одного включения проблема множественного включения не имеет аналитического решения. Однако существует несколько моделей MFH, основанных на разных предположениях. Все они используют решение задачи одиночного включения.

*А. Модель Мори – Танака (M-T).* Эта модель была предложена Мори и Танакой (1973). Она основана на решении Эшелби. Установлено, что тензор концентрации напряжений, связывающий объемное среднее напряжение по всем включениям со средней деформацией матрицы, определяется следующим образом [5]:

$$\mathbf{V}^e = \mathbf{H}^e(\mathbf{I}, \mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1). \quad (10)$$

Этот тензор в точности является тензором концентрации напряжений задачи об одиночном включении. Бенвенистом (1987) дана следующая интерпретация модели Мори – Танаки: каждое включение в реальном RVE ведет себя так, как если бы оно было изолировано в реальной матрице.

*Б. Модель двойного включения (DI).* Модель двойного включения была предложена Нематом, Насером и Хори (1993). Она основана на предположении, что каждое включение (I) жесткости  $\mathbf{C}_1$  окружено в его близком окружении действительным матричным материалом жесткости  $\mathbf{C}_0$ , а вне этих областей имеется эталонный носитель жесткости  $\mathbf{C}_r$ . Модели двойного включения может быть дана следующая интерпретация: реальный RVE ведет себя как композиционный материал, изготовленный из фиктивной эталонной матрицы жесткости  $\mathbf{C}_r$ , в котором находятся включения жесткости  $\mathbf{C}_1$ , покрытые материалом жесткости  $\mathbf{C}_0$ .

### Результаты расчета инженерных констант

Расчет инженерных констант выполнен методом Мори – Танака (M-T) и двойного включения (DI), с использованием базовой и улучшенной моделей нити, и методом спектральных элементов (FFT). Расчет напряженно-деформированного состояния RVE выполнен методом конечных элементов (FEM) и методом спектральных элементов (FFT). Некоторые результаты расчета напряженно-деформированного состояния RVE приведены на рис. 2 и 3. Результаты расчетов приведены для случая растяжения RVE вдоль оси X (рис. 2) на 3 %.

На рис. 2 показаны распределения приведенных по Мизесу напряжений, полученные методом конечных элементов (FEM) на конечно-элементной сетке  $100 \times 150 \times 50$  элементов, и методом спектральных элементов (FFT) на сетках  $100 \times 150 \times 50$ ,  $200 \times 300 \times 100$  и  $300 \times 450 \times 150$  элементов соответственно.

Результаты сопоставления распределений позволяют сделать следующие выводы:

– характер распределения приведенных по Мизесу напряжений на всех рисунках схож – напряжения в нитях армирующего больше, чем в матрице; в местах пересечения волокон армирующего наблюдается концентрация напряжений;

– при уменьшении размеров конечных элементов происходит увеличение максимальных напряжений в местах концентрации напряжений. Значения максимальных напряжений в местах концентрации напряжений, показанных на рис. 2, соответственно равны 4,57, 7,25, 13,3, 16,97 ГПа.

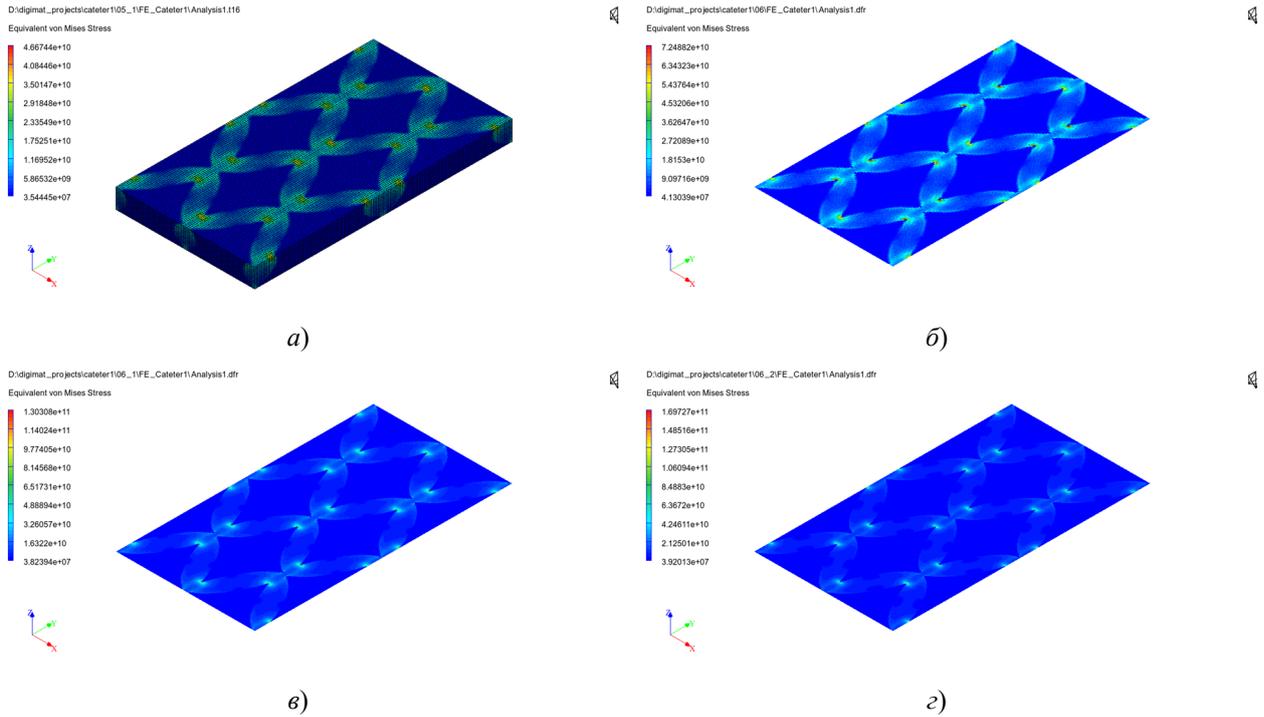


Рис. 2. Распределения приведенных по Мизесу напряжений в RVE (дин/см<sup>2</sup>):  
*a* – FEM; *б*, *в*, *г* – FFT; размеры расчетной области 100×150×50 (*a*, *б*); 200×300×100 (*в*); 300×450×150 (*г*)

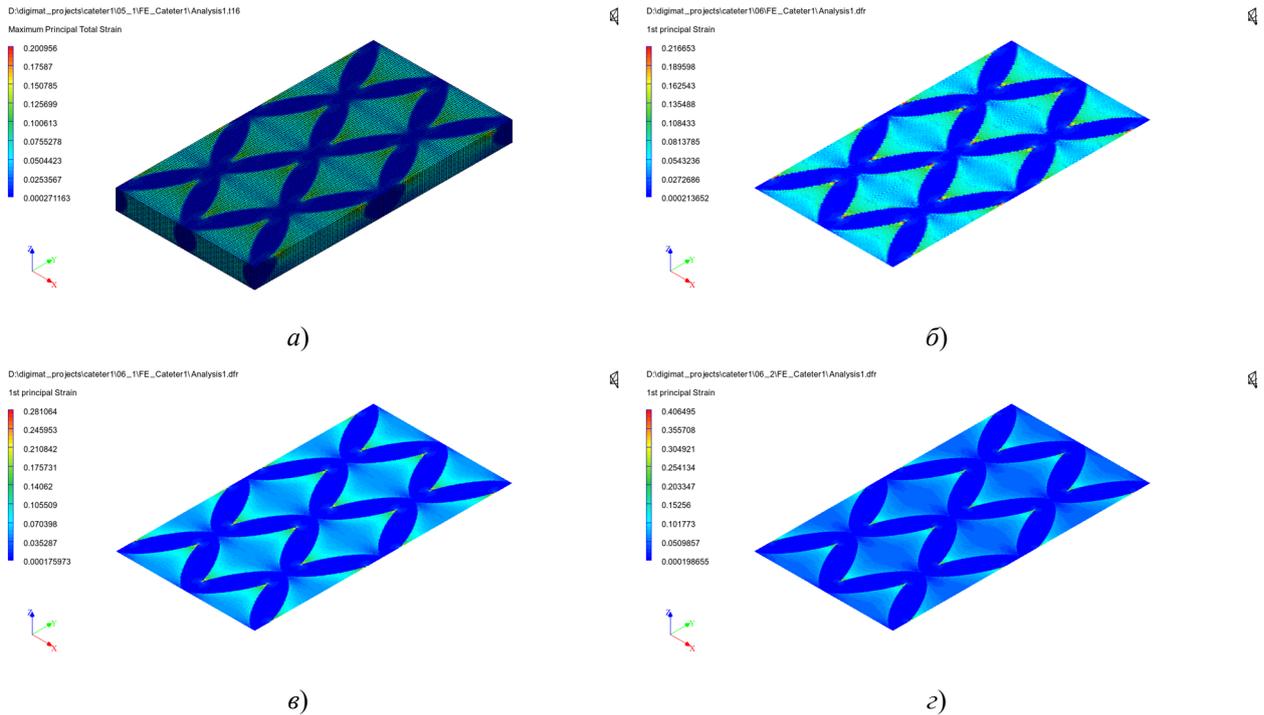


Рис. 3. Распределения первых главных деформаций в RVE:  
*a* – FEM; *б*, *в*, *г* – FFT; размеры расчетной области 100×150×50 (*a*, *б*); 200×300×100 (*в*); 300×450×150 (*г*)

На рис. 3 показаны распределения первых главных деформаций, полученные методом конечных элементов (FEM) на конечно-элементной сетке 100×150×50 элементов и методом спектральных элементов (FFT) на сетках 100×150×50, 200×300×100 и 300×450×150 элементов, соответственно.

Результаты сопоставления распределений позволяют сделать следующие выводы:

– характер распределения первых главных деформаций на всех рисунках схож – первые главные деформации в матрице больше, чем в нитях армирующего; у пересечения волокон армирующего в матрице наблюдается концентрация деформаций;

– при уменьшении размеров конечных элементов происходит увеличение первых главных деформаций в местах концентрации деформаций. Значения первых главных деформаций в местах концентрации деформаций, показанных на рис. 3, соответственно равны 0,2, 0,217, 0,281, 0,406 ГПа.

Влияние размеров сетки на инженерные константы можно оценить по результатам их расчета на сетках различного размера. Результаты расчеты инженерных констант приведены в табл. 3 и 4. В табл. 4 приведены значения инженерных констант, полученных на сетках, имеющих 0,75, 6 и 20,25 млн ячеек соответственно.

Таблица 3

Инженерные константы композита, полученные различными методами

Инженерная константа	Базовая модель		Улучшенная модель нити		
	М-Т	DI	М-Т	DI	FFT
Модуль $E_1$ , ГПа	0,416	0,449	0,417	0,499	0,127
Модуль $E_2$ , ГПа	4,310	4,606	4,681	5,348	0,987
Модуль $E_3$ , ГПа	0,530	0,568	0,474	0,564	0,099
Коэффициент Пуассона $\nu_{12}$	0,290	0,290	0,245	0,246	0,286
Коэффициент Пуассона $\nu_{23}$	-1,117	-1,093	-0,107	-0,072	-0,367
Коэффициент Пуассона $\nu_{31}$	0,502	0,495	0,465	0,459	0,192
Модуль $G_{12}$ , ГПа	9,921	9,928	6,802	6,831	5,117
Модуль $G_{23}$ , ГПа	0,157	0,170	2,794	2,823	0,278
Модуль $G_{13}$ , ГПа	0,150	0,162	0,915	0,944	0,264

Таблица 4

Инженерные константы композита, полученные методом спектральных элементов на сетках различного размера

Инженерная константа	Размеры расчетной области		
	100×150×50	200×300×100	300×450×150
Модуль $E_1$ , ГПа	13,780	12,840	12,650
Модуль $E_2$ , ГПа	102,900	99,400	98,700
Модуль $E_3$ , ГПа	29,490	9,840	9,884
Коэффициент Пуассона $\nu_{12}$	0,287	0,286	0,286
Коэффициент Пуассона $\nu_{23}$	0,044	-0,362	-0,367
Коэффициент Пуассона $\nu_{31}$	0,200	0,187	0,192
Модуль $G_{12}$ , ГПа	51,480	51,200	51,172
Модуль $G_{23}$ , ГПа	10,000	2,786	2,778
Модуль $G_{13}$ , ГПа	5,800	2,644	2,640

### Результаты сопоставления инженерных констант, вычисленных различными методами

Сопоставляемые инженерные константы были рассчитаны методами Мори – Танака (М-Т) и двойного включения (DI), с использованием базовой и улучшенной моделей нити, и методом спектральных элементов (FFT). Полученные различными методами инженерные константы приведены в табл. 3, результаты сопоставления представлены на рис. 4 и 5.

На рис. 4 используются следующие обозначения: Ряд1 – метод Мори – Танака, базовая модель нити; Ряд2 – метод двойного включения, базовая модель нити; Ряд3 – метод Мори – Танака, улучшенная модель нити; Ряд4 – метод двойного включения, улучшенная модель нити; Ряд5 – метод спектральных элементов.

В результате исследования установлено, что методы Мори – Танака и двойного включения дают согласованные результаты при вычислении модулей упругости  $E_{11}$ ,  $E_{33}$  и коэффициентов Пуассона  $\nu_{12}$  и  $\nu_{31}$ , результаты вычисления остальных характеристик упругости менее согласованы. Метод спектральных элементов дает заниженные значения модулей упругости  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $E_{33}$  и модулей сдвига  $G_{12}$ ,  $G_{23}$ ,  $G_{13}$ .

Сопоставляемые инженерные константы были также рассчитаны методом спектральных элементов (FFT). Использовались сетки, имеющие размер 100×150×50, 200×300×100, 300×450×150 соответственно. Инженерные константы, полученные различными методами, приведены в табл. 4, результаты сопоставления представлены на рис. 4. Для сравнения в них приведены значения инженерных констант, полученных методами Мори – Танака и двойного включения с использованием улучшенной модели нити.

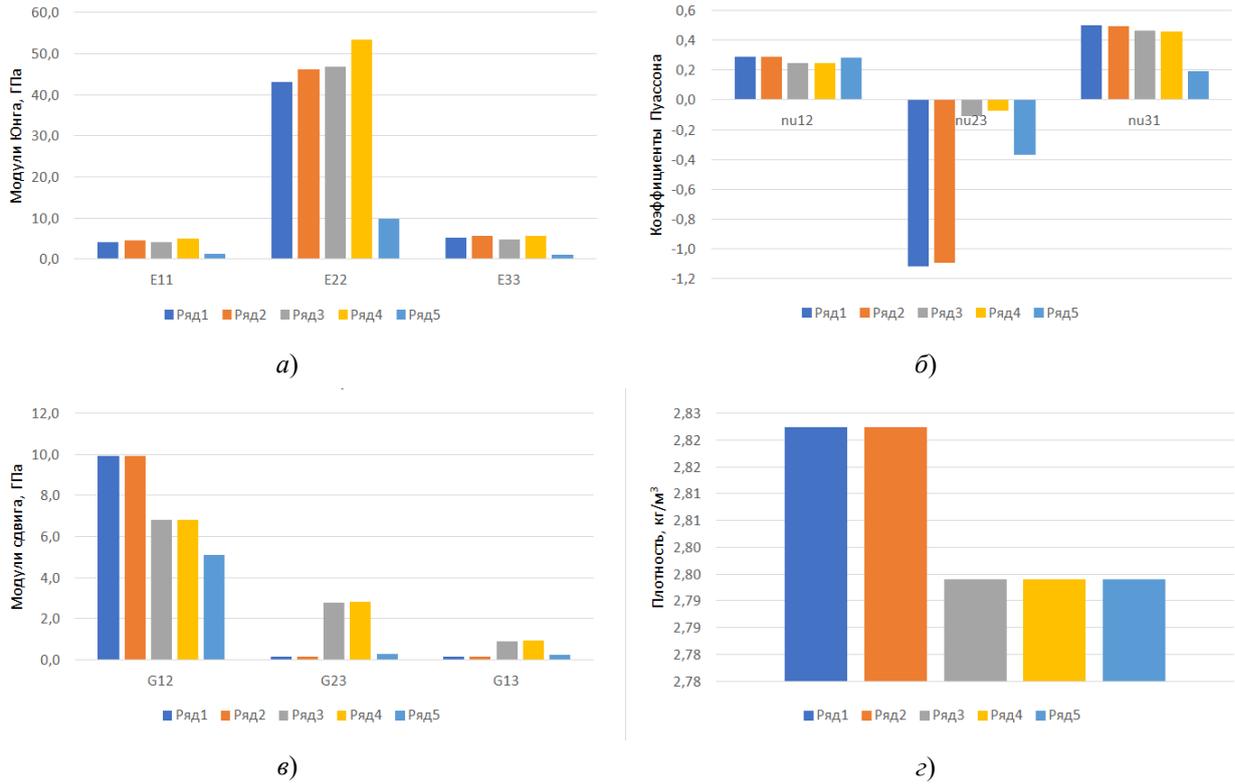


Рис. 4. Сопоставление результатов вычислений инженерных констант: *а* – модулей Юнга; *б* – коэффициентов Пуассона; *в* – модулей сдвига; *г* – плотности

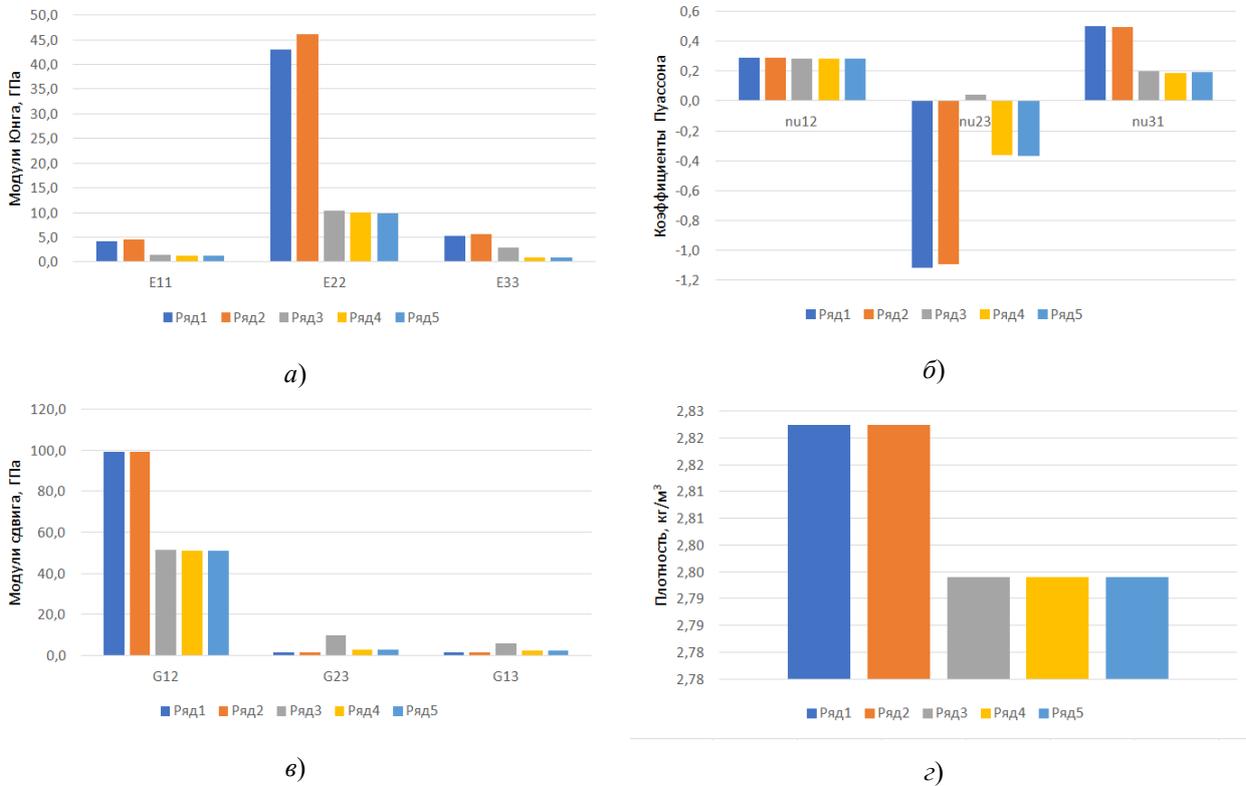


Рис. 5. Сопоставление результатов вычислений инженерных констант при изменении размеров сетки: *а* – модулей Юнга; *б* – коэффициентов Пуассона; *в* – модулей сдвига; *г* – плотности

На рис. 5 используются следующие обозначения: Ряд1 – метод Мори – Танака, улучшенная модель нити; Ряд2 – метод двойного включения, улучшенная модель нити; Ряд3 – метод спектральных

элементов, сетка  $100 \times 150 \times 50$ ; Ряд4 – метод спектральных элементов, сетка  $200 \times 300 \times 100$ ; Ряд5 – метод спектральных элементов, сетка  $300 \times 450 \times 150$ .

В результате исследования установлено, что все инженерные константы, полученные на сетках  $200 \times 300 \times 100$ ,  $300 \times 450 \times 150$  согласованы и дальнейшее измельчение сетки не имеет смысла. Коэффициент Пуассона  $\nu_{12}$ , полученный на сетки  $100 \times 150 \times 50$ , положителен, в то время как значения, полученные другими методами, отрицательны. Это позволяет сделать вывод о том, что используемая сетка недостаточно подробна.

### Заключение

Сопоставление результатов расчета показало, что метод Мори – Танака, использующий улучшенную модель нити, позволяет лучше других методов предсказывать значения эффективных характеристик упругости полимерно-металлических композитов на основе матрицы из нейлона и армирующего из нержавеющей стали.

При расчете инженерных констант для RVE подобного типа следует использовать достаточно мелкие сетки, размер которых превышает  $200 \times 300 \times 100$ . В то же время использование сеток, размер которых превышает  $300 \times 450 \times 150$ , не имеет смысла.

### Список литературы

1. Юрков Н. К., Якимов А. Н. Перспективы смешанного обучения в технических вузах // Труды Международного симпозиума Надежность и качество. 2024. Т. 1. С. 289–291.
2. Карташова Е. Д., Муйземнек А. Ю. Учет технологических дефектов при проектировании изделий из полимерных слоистых композиционных материалов // Труды Международного симпозиума Надежность и качество. 2023. Т. 1. С. 212–216.
3. Digimat 2023.1 MF User's.
4. Eshelby J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 1957. № 241. P. 376–396.
5. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // Acta Metallurgica. 1973. № 21. P. 571–574.

### References

1. Yurkov N.K., Yakimov A.N. Prospects of blended learning in technical universities. *Trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma Nadezhnost' i kachestvo = Proceedings of the International Symposium Reliability and Quality*. 2024;1: 289–291. (In Russ.)
2. Kartashova E.D., Muyzemnek A.Yu. Consideration of technological defects in the design of products made of polymer layered composite materials. *Trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma Nadezhnost' i kachestvo = Proceedings of the International Symposium Reliability and Quality*. 2023;1:212–216. (In Russ.)
3. *Digimat 2023.1 MF User's*.
4. Eshelby J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*. 1957;(241):376–396.
5. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*. 1973;(21):571–574.

### Информация об авторах / Information about the authors

#### Екатерина Дмитриевна Карташова

ассистент кафедры теоретической и прикладной механики и графики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)  
E-mail: katrina89@yandex.ru

#### Ekaterina D. Kartashova

Assistant of the sub-department of theoretical and applied mechanics and graphics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

#### Александр Юрьевич Муйземнек

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики и графики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)  
E-mail: muyzemnek@yandex.ru

#### Aleksandr Yu. Muyzemnek

Doctor of technical sciences, professor, head of the sub-department of theoretical and applied mechanics and graphics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

**Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов /**

**The authors declare no conflicts of interests.**

**Поступила в редакцию/Received 05.04.2025**

**Поступила после рецензирования/Revised 24.04.2025**

**Принята к публикации/Accepted 05.05.2025**