

## ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАЗЛИЧНЫХ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ DATA SCIENCE И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОТОТИПИРОВАНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

И. Е. Старостин

Московский государственный технический университет гражданской авиации, Москва, Россия  
starostinigo@yandex.ru

**Аннотация.** *Актуальность и цели.* Построение математических моделей систем различной физической и химической природы является важнейшим этапом разработки методик проектирования и эксплуатации упомянутых систем. В настоящее время существуют методы Data Science, посвященные сбору и обработке данных с последующим построением математических моделей. Для построения упомянутых моделей необходимо задать их класс. Основными требованиями к математическим моделям систем различной физической и химической природы являются их точность и адекватность (не противоречивость физическим и химическим законам). Для построения класса удовлетворяющих упомянутым требованиям математических моделей систем был предложен в рамках механики, электродинамики и современной неравновесной термодинамики метод математического прототипирования энергетических процессов. В соответствии с упомянутым методом могут быть получены в виде системы дифференциальных уравнений полные математические модели различных физических и химических систем с точностью до экспериментально исследуемых постоянных коэффициентов. Затем полученные полные модели преобразовываются в упрощенные аналитические модели с точностью до постоянных коэффициентов, которые обучаются на экспериментальных данных. Методике построения моделей, применимых для решения практических задач, на базе методов Data Science и метода математического прототипирования энергетических процессов посвящена настоящая работа. *Материалы и методы.* Синтез в виде дифференциальных уравнений полной модели динамики физических и химических процессов осуществляется на базе метода математического прототипирования энергетических процессов и методов динамического программирования. Построение упрощенных аналитических моделей, применимых для решения практических задач, осуществляется путем вычислительного эксперимента на базе полной модели с дальнейшим применением методов идентификации, символьной регрессии, машинного обучения. *Результаты.* Предложенная методика позволяет строить точные и адекватные модели, применимые для решения практических задач в приемлемые сроки. *Выводы.* Предложенная методика построения математических моделей может быть положена в основу программно-технологической платформы цифровых двойников, потребляющей приемлемые вычислительные ресурсы.

**Ключевые слова:** метод математического прототипирования энергетических процессов, Data Science, машинное обучение, динамическое программирование

**Для цитирования:** Старостин И. Е. Построение аналитических моделей различных физико-химических систем методами Data Science и математического прототипирования энергетических процессов // Надежность и качество сложных систем. 2025. № 3. С. 36–44. doi: 10.21685/2307-4205-2025-3-4

## CONSTRUCTION OF ANALYTICAL MODELS OF VARIOUS PHYSICAL AND CHEMICAL SYSTEMS BY METHODS OF DATA SCIENCE AND MATHEMATICAL PROTOTYPING OF ENERGY PROCESSES

I.E. Starostin

Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia  
starostinigo@yandex.ru

**Abstract.** *Background.* Construction of mathematical models of systems of various physical and chemical nature is the most important stage in the development of methods for designing and operating the above-mentioned systems. Currently, there are Data Science methods dedicated to collecting and processing data with subsequent construction of

mathematical models. To construct the above-mentioned models, it is necessary to specify their class. The main requirements for mathematical models of systems of various physical and chemical nature are their accuracy and adequacy (consistency with physical and chemical laws). To construct a class of mathematical models of the above-mentioned systems that satisfy the above-mentioned requirements, a method of mathematical prototyping of energy processes was proposed within the framework of mechanics, electrodynamics and modern non-equilibrium thermodynamics. In accordance with the above-mentioned method, complete mathematical models of various physical and chemical systems with an accuracy of up to experimentally studied constant coefficients can be obtained in the form of a system of differential equations. Then, the obtained complete models are transformed into simplified analytical models with an accuracy of up to constant coefficients, which are trained on experimental data. This work is devoted to the methodology of constructing models applicable for solving practical problems based on Data Science methods and the method of mathematical prototyping of energy processes. *Materials and methods.* Synthesis in the form of differential equations of a complete model of the dynamics of physical and chemical processes is carried out on the basis of the method of mathematical prototyping of energy processes and methods of dynamic programming. Construction of simplified analytical models applicable to solving practical problems is carried out by means of a computational experiment based on a complete model with further application of methods of identification, symbolic regression, machine learning. *Results.* The proposed methodology allows to build accurate and adequate models applicable for solving practical problems within acceptable timeframes. *Conclusions.* The proposed methodology for constructing mathematical models can be used as the basis for a software and technology platform for digital twins that consumes acceptable computing resources.

**Keywords:** method of mathematical prototyping of energy processes, Data Science, machine learning, dynamic programming

**For citation:** Starostin I.E. Construction of analytical models of various physical and chemical systems by methods of Data Science and mathematical prototyping of energy processes. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh sistem = Reliability and quality of complex systems*. 2025;(3):36–44. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-4205-2025-3-4

## Введение

Построение математических моделей (ММ) систем различной физической и химической природы является важнейшим этапом проектирования и эксплуатации упомянутых систем [1–4]. В общем случае для построения ММ любых систем из экспериментальных данных (ЭД) могут быть использованы методы Data Science [5, 6], методы системного анализа [7]. В соответствии с упомянутыми методами осуществляются постановка цели исследования, сбор данных с последующей их обработкой и исследованием, далее – построение ММ исследуемой системы с последующей практической реализацией построенной ММ [5–7]. Упомянутые ММ ищутся в заданных классах ММ [7, 8] методами, упомянутыми в работах [7–10]. Основными требованиями, предъявляемыми к ММ систем различной физической и химической природы, являются необходимая точность (не ниже заданной точности) и адекватность (не противоречивость законам физики) [7].

Для построения удовлетворяющих упомянутым требованиям классов ММ систем, характеризующихся протеканием в них физических и химических процессов (ФХП) различной природы, автором был предложен в рамках современной неравновесной термодинамики, механики и электродинамики метод математического прототипирования энергетических процессов (ММПЭП) [11–16]. Отсюда построенные ММПЭП в виде системы дифференциальных уравнений (ДУ) ММ динамики различных ФХП не противоречат общим физическим законам (законам сохранения, началам термодинамики, и т.д.), а также физическим особенностям протекания процессов в рассматриваемом объекте [11–16]. Для решения упомянутых практических задач (ПЗ) [1–4] полученные ММПЭП модели системы преобразовываются к упрощенным аналитическим ММ, применимым для решения упомянутых ПЗ, которые обучаются на соответствующих ЭД [13].

Цель настоящей работы – разработка единого подхода синтеза ММ систем различной физической и химической природы на основе ММПЭП и методов Data Science.

## Материалы и методы

В рамках ММПЭП состояние системы в текущий момент времени однозначно (независимо от ее предыстории) характеризуется ее координатами состояния, изменяющимися в результате протекания ФХП внутри системы и внешних потоков в нее в рамках законов сохранения (рис. 1) [11, 12]. Причиной и необходимым условием протекания различных ФХП являются термодинамические силы, определяемые через потенциалы взаимодействия с учетом законов сохранения (рис. 1) [11, 12]. Независимо от термодинамических сил детали динамики ФХП определяются кинетическими свойствами системы (рис. 1), «шкалой» которых является кинетическая матрица [11, 12]. В результате протекания

ФХП (кроме процессов теплообмена) выделяются некомпенсированные теплоты, которые распределяются по температурам (в общем случае неравновесных) в системе в соответствии с долями распределения некомпенсированных теплот (рис. 1) [11, 12]. Приращения внутренних энергий в системе связано с приращением температур через приведенные теплоемкости [12], а с прочими координатами состояния – через приведенные тепловые эффекты (рис. 1) [12].

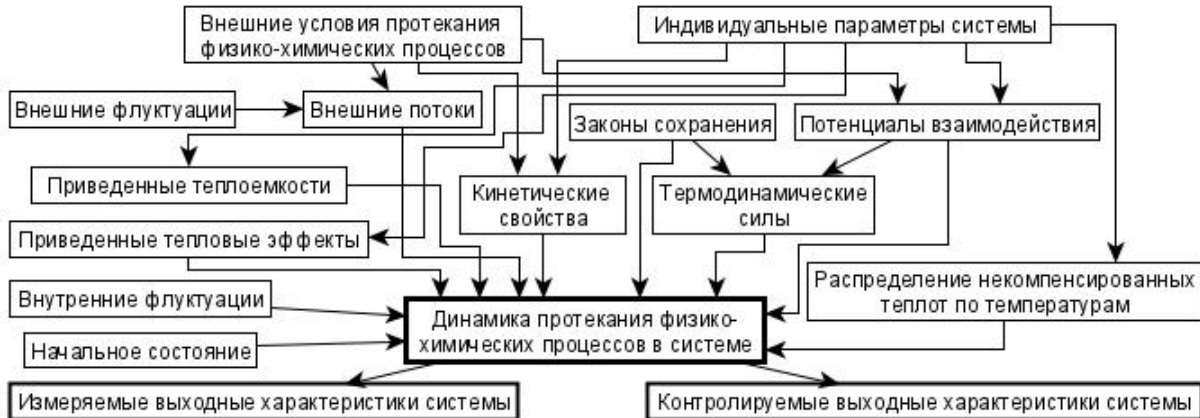


Рис. 1. Факторы, определяющие протекание процессов различной физической и химической природы

Динамика процессов в рассматриваемой системе определяет динамику ее измеряемых характеристик (ИХ) и контролируемых характеристик (КХ) (рис. 1) [11, 12]. Для реализации в численном виде ММ, полученных ММПЭП, необходимо с точностью до экспериментально исследуемых постоянных коэффициентов задать функции состояния (табл. 1) [12].

Таблица 1

Функции состояния для свойств веществ и процессов

Свойства вещества или процесса	Задание свойства вещества или процесса
Диссипативная матрица	Задается через [14]: – обратимые составляющие; – приведенные необратимые составляющие; – выбор фильтров положительности необратимых составляющих на основе разложения диссипативной матрицы на ее обратимые и необратимые составляющие с положительной фильтрацией необратимых составляющих
Доли распределения некомпенсированных теплот	Задается через [16]: – приведенные доли распределения некомпенсированной теплоты; – выбор фильтров положительности долей распределения некомпенсированной теплоты на основе нормализации отфильтрованных через положительные фильтра упомянутых приведенных долей распределения некомпенсированных теплот
Потенциалы взаимодействия	Задается в соответствии с первым и вторым началом термодинамики через [15]: – частные производные приведенной энтропии по координатам состояния; – задается через частные производные приведенных внутренних энергий по координатам состояния
Приведенные теплоемкости	
Приведенные тепловые эффекты	
Матрица баланса	Задается в соответствии с законами сохранения через независимые составляющие

Как видно из табл. 1, для задания приведенных в ней функций состояния необходимо задать функции состояния независимых составляющих (ФСНС) упомянутых функций наряду с функциями внешних потоков и флуктуаций, которые также можно отнести к ФСНС (табл. 2) [15]. На упомянутые ФСНС могут быть наложены ограничения, обусловленные физикой конкретной системы, однако общезначимых ограничений не накладывается [15]. Благодаря этому ФСНС могут быть построены

из ЭД известными методами теории идентификации [8, 15], символьной регрессии [10, 15], машинного обучения [9, 15]. При этом ММ, полученные ММПЭП, не противоречащие законам физики, могут воспроизвести любой режим работы систем различной физической и химической природы [11, 12, 15]. ФЧНС могут быть заданы, например, в виде аппроксимационных полиномов [17], а также прочих регрессионных моделей машинного обучения [9, 10].

Таблица 2

Задание независимых составляющих функций для характеристик систем

Независимые составляющие функций системы	Задание независимой составляющей функции системы
Обратимые составляющие диссипативной матрицы	Задается с точностью до экспериментально исследуемых параметров функция от координат состояния системы
Приведенные необратимые составляющие диссипативной матрицы	
Приведенные доли распределения некомпенсированной теплоты	
Приведенная энтропия	
Приведенные внутренние энергии	
Независимые составляющие матрицы баланса	Задается с точностью до экспериментально исследуемых параметров функция в общем случае от времени и от координат состояния системы
Внешние потоки	
Флуктуации	Задаются функции от случайных параметров

Из рис. 1 видно, что по экспериментальным данным измеряемых характеристик оцениваются параметры ФЧНС, которые подразделяются на индивидуальные, меняющиеся от экземпляра к экземпляру системы, так и общие, одинаковые для всех экземпляров систем рассматриваемого класса, начальное состояние системы, затем по оцененным значениям упомянутых величин получаем динамику системы в требуемых ее режимах, а по ней – динамику ее ИХ и КХ [11, 12].

Однако для определения из ЭД входящих в ФЧНС постоянных параметров необходимо достаточно большое число ЭД [11–16]. Это обуславливает проблему сбора ЭД [5, 18], а также проблему идентификации большого числа параметров ММ [8, 18], что приводит к необходимости локального упрощения полученной ММПЭП системы ДУ и ее численно-аналитического преобразования [13, 18]. Построение преобразованной аналитической ММ заключается в задании аналитического выражения общего решения системы ДУ полученных ММПЭП, коэффициенты которого ищутся из упомянутых ДУ (рис. 2) [13]. Полученное аналитическое общее решение ДУ наряду с функциями для ИХ и КХ системы является ее ММ, применимой для решения ПЗ (рис. 2) [13]. Приведенные на рис. 2 функции для параметров аналитической модели динамики рассматриваемой системы строятся одновременно с функциями для параметров ДУ системы полученных ММПЭП [13].



Рис. 2. Получение преобразованной аналитической модели системы

Для построения ФСНС из ЭД целесообразно применить регрессионные методы [16], в частности методы индуктивного порождения регрессионных моделей [10], позволяющие, разбив область определения искомых функций на подобласти, получить упрощенные функции в каждой такой области с последующим объединением упрощенных функций в полную функцию в искомой области определения [10]. В рассматриваемом случае, как видно из рис. 1, каждой совокупности таких подобластей соответствующих областей определения ФСНС соотносится совокупность участков кривых динамики ИХ и КХ системы (рис. 3) [18].

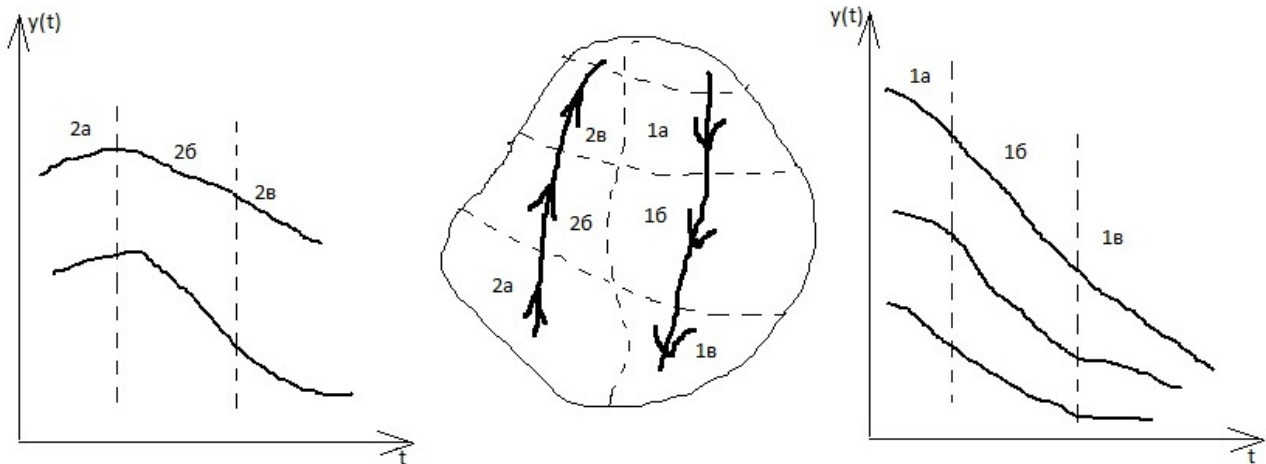


Рис. 3. Области упрощения функций состояния и соответствующие им динамики.  
Буквенно-цифровые обозначения областей упрощения соответствуют буквенно-цифровым обозначениям соответствующих участков совокупностей кривых динамик измеряемых параметров

С помощью ФСНС и ММПЭП объясняются соответствующие участки динамик ИХ, а исходя из последовательного следования участков упрощения ФСНС друг за другом, мы восстановим упрощенные ФСНС на соответствующих областях упрощения (рис. 3) [18]. Далее в соответствии с методами индукционного порождения регрессионных моделей [10] мы строим ФСНС во всем фазовом пространстве [10, 18]. Аналогично строится и полное аналитическое выражение динамики состояния рассматриваемой системы [18] – аналитическое выражение общего решения системы ДУ, полученных ММПЭП. Такой подход существенно упрощает построение аналитических моделей, так как для аналогичных областей упрощения динамики строятся аналогично по полученным один раз соотношениям [7, 18].

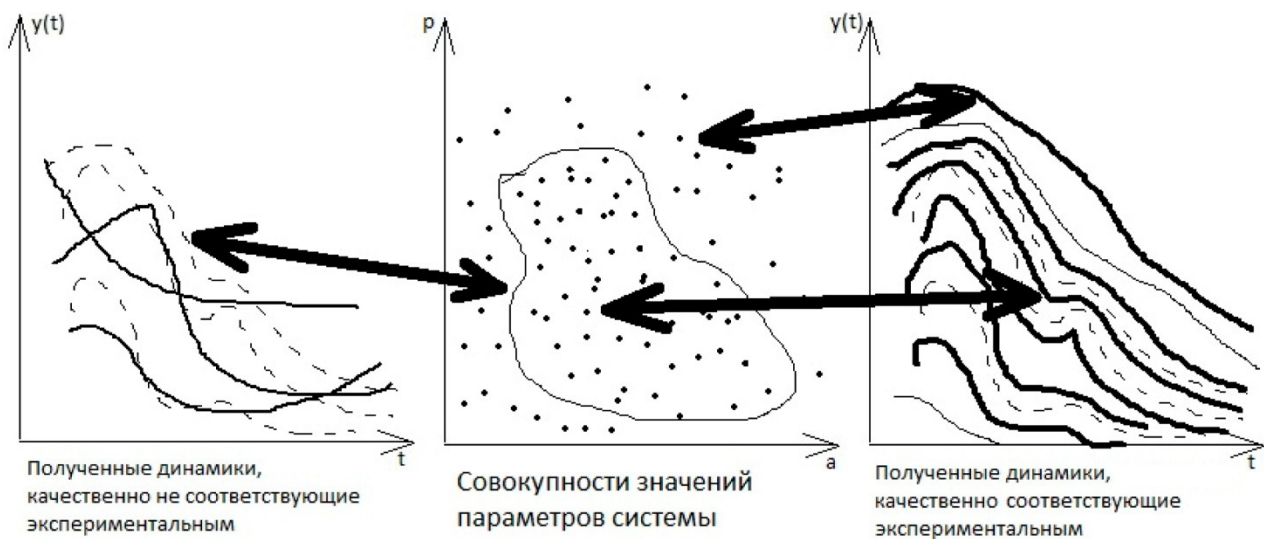


Рис. 4. Оценка областей значений параметров функций системы. Тонкой сплошной линией отделена область таких совокупностей параметров и соответствующих им рассчитанных по полной модели динамик, в которой рассчитанные динамики измеряемых параметров (на рисунке показаны толстыми сплошными линиями) соответствуют эксперименту. Пунктиром показаны экспериментальные динамики

В упомянутых областях упрощения ФСНС могут быть оценены области значений коэффициентов упрощенных ФСНС, а значит, и области значений коэффициентов ФСНС [18]. С этой целью целесообразно использовать методы Монте-Карло, в соответствии с которыми генерируются параметры ФСНС, рассчитываются в соответствии с ММ полученных ММПЭП, соответствующие динамики ИХ системы и отсеиваются те совокупности значений упомянутых параметров, при которых рассчитанные динамики ИХ не соответствуют статистике испытаний экземпляров рассматриваемой системы (рис. 4). На оставшихся динамиках ИХ строим преобразованную ММ, применимую для решения ПЗ (рис. 2) [13].

В полученную ММ, применимую для решения ПЗ (рис. 2), входят как аналитическое выражение общего решения ДУ полученных ММПЭП, так и упрощенные уравнения ММПЭП, полученные путем локального упрощения ФСНС [13]. Такое аналитическое выражение может быть построено путем разведочного анализа данных [6, 19] динамик, полученных в соответствии с приведенной на рис. 4 схемой, на предмет установившихся и переходных участков, участков возрастания/убывания, выпуклости/вогнутости, пересечения/непересечения фазовых кривых [13], которые и закладываются в упомянутое аналитическое выражение [13]. Это гарантирует корректность ММ, применимой для решения ПЗ (рис. 2) [13]. Таким образом, в соответствии со схемой, показанной на рис. 4, необходимо получить такое количество динамик состояния системы, которое будет полностью отражать вышеприведенные качественные особенности упомянутых динамик, а также перекрестные связи между опорными точками динамик системы в различных ее режимах работы (с точностью до взаимно-независимых опорных точек) [13]. И на этом множестве динамик состояния системы строить упомянутые ММ системы, применимые для решения ПЗ (рис. 2) [13].

Упомянутое множество динамик строится путем генерации совокупностей значений общих параметров системы, затем для каждой такой совокупности значений генерируем совокупности индивидуальных параметров системы и ее начальных состояний. На каждой такой совокупности динамик системы, полученных из ДУ на базе ММПЭП, для сгенерированной совокупности индивидуальных параметров системы и ее начального состояния, соответствующих конкретной совокупности значений общих параметров, вышеописанным путем строим ММ, применимую для решения ПЗ (рис. 2), выбрав и протестировав алгоритм ее обучения. Выбранный алгоритм обучения должен одинаково хорошо строить ММ, применимые для решения ПЗ (рис. 2), на всех совокупностях значений общих параметров.

Упрощение ДУ полученных ММПЭП, входящих в ММ, применимую для решения ПЗ (рис. 2), строится путем выбора областей фазового пространства системы, через которые проходят построенные в соответствии с показанной на рис. 4 схемой ее динамики, с последующим заданием упрощений ФСНС в выбранных областях фазового пространства. Полученная ММ, как нетрудно видеть из рис. 2, являющаяся физически информированной моделью машинного обучения [20], обучается на ЭД с последующим ее применением для решения ПЗ.

## Результаты

Единая методика построения ММ систем различной физической и химической природы, применимых для решения различных ПЗ, на базе методов Data Science и ММПЭП имеет вид:

1. Выполняется постановка задачи построения ММ, применимой для решения ПЗ (рис. 2), в соответствии с требованиями заказчика: требуемая точность и допустимая сложность ММ, ее входные и выходные параметры [5, 7].
2. Выполняется сбор входных и соответствующих им выходных ЭД искомой ММ [5, 7].
3. Выполняется необходимая подготовка ЭД [5]: приводятся данные к требуемым единицам измерения, выполняется масштабирование и интеграция ЭД.
4. Выполняется исследование (объяснение) ЭД [5]:
  - 4.1. Разбивается динамика ИХ на участки, синтезируется ММПЭП (рис. 1, табл. 1) система ДУ динамики рассматриваемой системы и ее ИХ и КХ путем построения локально упрощенных ФСНС, опираясь на соответствующие участки динамик ИХ системы по схеме, показанной на рис. 3.
  - 4.2. Методами индукционного порождения регрессионных моделей строится ФСНС.
5. Выполняется аугментация ЭД:
  - 5.1. Оценивается из ЭД область значений параметров ДУ, полученных ММПЭП, по схеме, показанной на рис. 4.
  - 5.2. В полученной области значений вышеупомянутых параметров генерируется совокупность значений общих параметров и для каждой такой совокупности значений генерируется совокупность индивидуальных значений параметров системы и ее начального состояния.

5.3. Для сгенерированных совокупностей параметров рассчитывается в соответствии с ММ полученной ММПЭП, динамика системы и ее ИХ и КХ.

6. На множествах сгенерированных динамик состояния системы и ее ИХ и КХ, соответствующих совокупностям значений общих параметров, строится структура ММ, применимой для решения ПЗ (рис. 2) и отрабатываются алгоритмы обучения из ЭД этой ММ.

7. Обучается на обучающих ЭД полученная ММ, применимая для решения ПЗ, и проверяется на тестовых данных. При необходимости в соответствии с предыдущими шагами и корректируется полученная ММ, применимая для решения ПЗ.

В соответствии с полученной методикой строятся физически информированные ММ машинного обучения, не противоречащие законам физики, для обучения которых требуется относительно небольшой объем ЭД [20].

### Обсуждение

Получаемые в соответствии с упомянутой методикой ММ, применимые для решения ПЗ, характеризуются простотой. Приведенная в ней аугментация ЭД необходима для анализа качественного характера динамик ФХП и перекрестных связей между динамиками процессов, что гарантирует физическую информированность ММ и ее обучаемость за приемлемое время [20].

### Заключение

Предложенная методика построения ММ, применимых для ПЗ, систем различной физической и химической природы может быть положена в математическую основу программно-технологической платформы цифровых двойников. А полученные ММ, применимые для решения ПЗ, могут быть положены в основу математического ядра цифровых двойников.

### Список литературы

1. Юревич Е. И. Основы проектирования техники. СПб. : Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2012. 135 с.
2. Барзилович Е. Ю. Модели технического обслуживания сложных систем. М. : Высш. шк., 1982. 231 с.
3. Колодежный Л. П., Чернодаров А. В. Надежность и техническая диагностика. М. : Изд-во ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, 2010. 452 с.
4. Бессекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического управления. СПб. : Профессия, 2003. 768 с.
5. Cielen D., Meysman A. D. V., Mohamed A. Introducing data science. Shelter Island, New York, USA : Manning Publications, 2017. 336 p.
6. Grus J. Data Science from Scratch. Beijing ; Boston ; Farnham ; Sebastopol ; Tokyo : O'Reilly, 2021. 416 p.
7. Антонов А. В. Системный анализ. М. : Высш. шк., 2004. 454 с.
8. Eykhoff P. Systems identification: parameters and state estimation. Eindhoven, Netherlands : University of technology, 1975. 680 p.
9. Flach P. Machine Learning. The Art and Science of Algorithms that Make Sense of Data. Cambridge : Cambridge University Press, 2015. 400 p.
10. Стрижов В. В. Методы индуктивного порождения регрессионных моделей. М. : Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, 2008. 56 с.
11. Старостин И. Е., Степанкин А. Г. Программная реализация методов современной неравновесной термодинамики и система симуляции физико-химических процессов SimulationNonEqProcSS v.0.1.0. Бобассен, Маврикий : Lambert academic publishing, 2019. 127 с.
12. Старостин И. Е., Халютин С. П., Париевский В. В. Виды и формы представления основных уравнений метода математического прототипирования энергетических процессов // Электропитание. 2022. № 4. С. 4–14.
13. Старостин И. Е., Гавриленков С. И. Архитектура математического ядра цифровых двойников различных физико-химических систем на базе метода математического прототипирования энергетических процессов // Надежность и качество сложных систем. 2024. № 4. С. 160–168. doi: 10.21685/2307-4205-2024-4-17
14. Старостин И. Е. Корректное задание функций состояния для диссипативной матрицы, входящей в уравнения метода математического прототипирования энергетических процессов // Надежность и качество сложных систем. 2025. № 1. С. 28–35. doi: 10.21685/2307-4205-2025-1-4
15. Старостин И. Е., Гавриленков С. И. Задание функций состояния для потенциалов взаимодействия, приведенных теплоемкостей и приведенных тепловых эффектов, входящих в уравнения метода математического прототипирования энергетических процессов // Надежность и качество сложных систем. 2025. № 1. С. 36–43. doi: 10.21685/2307-4205-2025-1-5

16. Старостин И. Е. К вопросу применения методов символьной регрессии для построения цифрового двойника различных физико-химических систем на базе метода математического прототипирования энергетических процессов // Труды Международного симпозиума Надежность и качество. 2025. Т. 1. С. 68–74.
17. Дзядзык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функции полиномами. М. : Наука, 1977. 512 с.
18. Ланцов В. Н. Методы понижения порядка моделей сложных систем. Владимир : Изд-во ВлГУ, 2017. 84 с.
19. Bruce P., Bruce A. *Practical Statistics for Data Scientists*. Beijing ; Boston ; Farnham ; Sebastopol ; Tokio : O'Reilly, 2018. 304 с.
20. Garleo G. [et al.]. Machine learning and the physical sciences // *Reviews of Modern Physics*. 2019. № 91. P. 045002. doi: 10.1103/RevModPhys.91.045002

### References

1. Yurevich E.I. *Osnovy proyektirovaniya tekhniki = Fundamentals of engineering design*. Saint Petersburg: Sankt-Peterburgskiy gosudarstvennyy politekhnicheskii universitet, 2012:135. (In Russ.)
2. Barzilovich E.Yu. *Modeli tekhnicheskogo obsluzhivaniya slozhnykh system = Models of maintenance of complex systems*. Moscow: Vyssh. shk., 1982:231. (In Russ.)
3. Kolodezhnyy L.P., Chernodarov A.V. *Nadezhnost' i tekhnicheskaya diagnostika = Reliability and technical diagnostics*. Moscow: Izd-vo VVA im. prof. N.E. Zhukovskogo i Yu.A. Gagarina, 2010:452. (In Russ.)
4. Bessekerskiy V.A., Popov E.P. *Teoriya sistem avtomaticheskogo upravleniya = Theory of automatic control systems*. Saint Petersburg: Professiya, 2003:768. (In Russ.)
5. Cielen D., Meysman A.D.V., Mohamed A. *Introducing data science*. Shelter Island, New York, USA: Manning Publications, 2017:336.
6. Grus J. *Data Science from Scratch*. Beijing; Boston; Farnham; Sebastopol; Tokyo: O'Reilly, 2021:416.
7. Antonov A.V. *Sistemnyy analiz = System analysis*. Moscow: Vyssh. shk., 2004:454. (In Russ.)
8. Eykhoff P. *Systems identification: parametrs and state estimation*. Eindhoven, Netherlands: University of technology, 1975:680.
9. Flach P. *Machine Learning. The Art and Science of Algorithms that Make Sense of Data*. Cambridge: Cambridge University Press, 2015:400.
10. Strizhov V.V. *Metody induktivnogo porozhdeniya regressionnykh modeley = Methods of inductive generation of regression models*. Moscow: Vychislitel'nyy tsentr im. A.A. Dorodnitsyna RAN, 2008:56. (In Russ.)
11. Starostin I.E., Stepankin A.G. *Programmnaya realizatsiya metodov sovremennoy neravnovesnoy termodinamiki i sistema simulyatsii fiziko-khimicheskikh protsessov SimulationNonEqProcSS v.0.1.0. BoBassen = Software implementation of modern nonequilibrium thermodynamics methods and a system for simulating physico-chemical processes SimulationNonEqProcSS v.0.1.0. BoBassin*. Mavrikiy: Lambert academic publishing, 2019:127. (In Russ.)
12. Starostin I.E., Khalyutin S.P., Pariyevskiy V.V. Types and forms of representation of the basic equations of the method of mathematical prototyping of energy processes. *Elektropitaniye = Power supply*. 2022;(4):4–14. (In Russ.)
13. Starostin I.E., Gavrilentov S.I. Architecture of the mathematical core of digital twins of various physico-chemical systems based on the method of mathematical prototyping of energy processes. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system = Reliability and quality of complex systems*. 2024;(4):160–168. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-4205-2024-4-17
14. Starostin I.E. Correct assignment of state functions for a dissipative matrix included in the equations of the method of mathematical prototyping of energy processes. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system = Reliability and quality of complex systems*. 2025;(1):28–35. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-4205-2025-1-4
15. Starostin I.E., Gavrilentov S.I. Setting state functions for interaction potentials, reduced heat capacities and reduced thermal effects included in the equations of the method of mathematical prototyping of energy processes. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system = Reliability and quality of complex systems*. 2025;(1):36–43. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-4205-2025-1-5
16. Starostin I.E. On the issue of applying symbolic regression methods to build a digital twin of various physico-chemical systems based on the method of mathematical prototyping of energy processes. *Trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma Nadezhnost' i kachestvo = Proceedings of the International Symposium Reliability and Quality*. 2025;1:68–74. (In Russ.)
17. Dzyadzyk V. K. *Vvedeniye v teoriyu ravnomernogo priblizheniya funktsii polinomami = Introduction to the theory of uniform approximation of a function by polynomials*. Moscow: Nauka, 1977:512. (In Russ.)
18. Lantsov V.N. *Metody ponizheniya poryadka modeley slozhnykh system = Methods of lowering the order of models of complex systems*. Vladimir: Izd-vo VIGU, 2017:84. (In Russ.)
19. Bruce P., Bruce A. *Practical Statistics for Data Scientists*. Beijing; Boston; Farnham; Sebastopol; Tokio: O'Reilly, 2018:304.
20. Garleo G. et al. Machine learning and the physical sciences. *Reviews of Modern Physics*. 2019;(91):045002. doi: 10.1103/RevModPhys.91.045002



**Информация об авторах / Information about the authors**

**Игорь Евгеньевич Старостин**

доктор технических наук, профессор,  
профессор кафедры электротехники  
и авиационного электрооборудования,  
Московский государственный технический  
университет гражданской авиации  
(Россия, г. Москва, Кронштадтский бульвар, 20)  
E-mail: starostinigo@yandex.ru

**Igor E. Starostin**

Doctor of technical sciences, professor, professor  
of the sub-department of electrical engineering  
and aviation electrical equipment,  
Moscow State Technical University of Civil Aviation  
(20 Kronshtadtskiy boulevard, Moscow, Russia)

**Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов /**

**The author declares no conflicts of interests.**

**Поступила в редакцию/Received 17.05.2025**

**Поступила после рецензирования/Revised 18.06.2025**

**Принята к публикации/Accepted 02.07.2025**