

# ОБЩЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

---

Научная статья

УДК 37.026; 373.51; 372.851

<https://doi.org/10.23951/2307-6127-2023-6-7-20>

## Особенности конструирования образовательного пространства учебной темы (на примере математики)

*Эмануила Григорьевна Гельфман<sup>1</sup>, Анна Геннадьевна Подстригич<sup>2</sup>,  
Денис Олегович Андаев<sup>3</sup>*

<sup>1, 2, 3</sup> *Томский государственный педагогический университет, Томск, Россия*

<sup>1</sup> *[mina.gelfman@yandex.ru](mailto:mina.gelfman@yandex.ru)*

<sup>2</sup> *[anpodstrigich@mail.ru](mailto:anpodstrigich@mail.ru)*

<sup>3</sup> *[denis-den97@mail.ru](mailto:denis-den97@mail.ru)*

### **Аннотация**

Актуальность работы обусловлена тем, что математика как особый язык науки и коммуникации является культурным феноменом современного цифрового общества, а учебные тексты по математике как условие реализации осмысленного образования учащихся, рефлексивного самоопределения педагогов и построения развивающего образовательного пространства становятся предметом исследования различных наук, в том числе психодидактики. Методологической базой послужили описательный и системный анализ эмпирических фактов при изучении роли учебного текста и образовательного пространства учебной темы в создании развивающей образовательной среды, направленной на осмысленное освоение обучающимися математики. Использовался сравнительный метод при анализе учебных текстов с позиции их особенностей и свойств, способствующих созданию развивающей образовательной среды в процессе изучения математики. Анализируется и характеризуется современный учебный текст, трансформация содержания образования и важная роль, которая отводится образовательному пространству учебной темы. Проведя исследование и проанализировав полученные данные, делается вывод, что специальным образом построенное образовательное пространство учебной темы становится частью развивающей образовательной среды, оно влияет на достижение глубокого уровня понимания учащимся учебного материала, участвуя в формировании системы понятий, фактов, способов действий, мышления, восприятия мира и себя в пространстве.

**Ключевые слова:** *учебный текст, образовательное пространство темы, развивающая образовательная среда, осмысленное образование*

**Для цитирования:** Гельфман Э. Г., Подстригич А. Г., Андаев Д. О. Особенности конструирования образовательного пространства учебной темы (на примере математики) // Научно-педагогическое обозрение (Pedagogical Review). 2023. Вып. 6 (52). С. 7–20. <https://doi.org/10.23951/2307-6127-2023-6-7-20>

# GENERAL EDUCATION

---

Original article

## Design features of the educational topic learning environment (on the example of mathematics)

*Emanuel G. Gelfman<sup>1</sup>, Anna G. Podstrigich<sup>2</sup>, Denis O. Andaev<sup>3</sup>*

*<sup>1, 2, 3</sup> Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation*

*<sup>1</sup> mina.gelfman@yandex.ru*

*<sup>2</sup> anpodstrigich@mail.ru*

*<sup>3</sup> denis-den97@mail.ru*

### **Abstract**

The relevance of the work is due to the fact that mathematics, as a special language of science and communication, is a cultural phenomenon of the modern digital society, and educational texts in mathematics, as a condition for the implementation of meaningful education for students, reflective self-determination of teachers and the design of a developmental learning environment, become the subject of research in various academic areas, including psychodidactics. The methodological base was a descriptive and systematic analysis of empirical facts in the study of the role of the educational text and the learning space of the educational topic in creating a developmental learning environment aimed at the meaningful mastering of mathematics by students. A comparative method was used in the analysis of educational texts from the standpoint of their features and properties that contribute to the creation of a developmental learning environment in the process of studying mathematics. The authors analyse and describe the modern educational text, the transformation of the education content and the crucial role of the learning environment in the process of mastering the educational topic. Having conducted the study and the analysis of the obtained data, the authors come to the conclusion that a specially designed educational topic learning environment is likely to become part of the developmental learning environment. Moreover, it seems to affect the achievement of a deep level of understanding the educational material by students and influences the system of concepts, facts, methods of action, thinking, perception of the world and the individual in the relevant environment.

**Keywords:** *educational text, learning environment of the educational topic, developmental learning environment, conscious learning*

**For citation:** Gelfman E. G., Podstrigich A. G., Andaev D. O. Design features of the educational topic learning environment (on the example of mathematics) [Osobennosti konstruirovaniya obrazovatel'nogo prostranstva uchebnoy temy (na primere matematiki)]. *Nauchno-pedagogicheskoye obozreniye – Pedagogical Review*, 2023, vol. 6 (52), pp. 7–20. <https://doi.org/10.23951/2307-6127-2023-6-7-20>

Образовательное пространство – это специальным образом выстраиваемая образовательная среда, которая играет решающее значение в развитии личностного потенциала учеников, учителей и всех участников образовательного процесса. С одной стороны, образовательная среда как сложная саморазвивающаяся система непосредственным образом влияет на качество образовательного процесса, с другой стороны, она создается всеми участниками данного процесса.

В настоящее время существуют разные подходы к определению понятий «образовательная среда» и «образовательное пространство», при этом во всех исследованиях подчеркивается, что среда оказывает важнейшее воздействие на формирование и развитие личности (В. И. Панов, В. В. Рубцов, В. И. Слободчиков, А. В. Хуторской, В. А. Ясвин и др.).

Компонентами образовательного пространства являются не только стены и парты, предметы и инструменты, компьютеры и интернет, физические, имитационные и социальные модели. Основу образовательного пространства составляет содержание обучения, а именно учебные тексты (в са-

мом широком смысле данного понятия), сконструированные на основе психодидактического подхода в образовании [1]. Это необходимо учитывать при планировании и создании современного развивающего образовательного пространства, определяющего процесс формирования учебной деятельности и становления универсальных учебных действий обучающихся.

Образовательное пространство может не стать образовательной средой – «личным пространством», личной образовательной историей, ресурсным потенциалом личностного, интеллектуального развития, реализацией личных смыслов (предпочтений, намерений, целей) и обогащения ментального опыта (когнитивного, метакогнитивного и интенционального компонентов интеллекта) каждого отдельного участника учебного процесса. Существенным обстоятельством создания личностно-развивающей образовательной среды становится не столько предметно-пространственная составляющая ее часть, сколько учебно-содержательная.

Следуя словам классика «...я никогда не говорил своим ученикам о „смысле“ музыки; если таковой и существует, во мне он не нуждается. И напротив, я всегда придавал большое значение тому, чтобы мои ученики умели как следует отсчитывать восьмые и шестнадцатые. Будешь ли ты учителем, ученым или музыкантом – благоговей перед „смыслом“, но не воображай, будто его можно преподать» (Г. Гессе «Игра в бисер»), важно понимать, что только средствами учебного предмета, через освоение конкретных предметных знаний, методов и способов действий возможно приблизиться к достижению глубинных смыслов (пониманию изучаемого материала) и построению целостной картины мира.

При этом учебный текст необходимо рассматривать как обогащенную (насыщенную разными смыслами) среду, в которой происходит или может произойти самостоятельное образовательное движение. Средствами учебного текста специальным образом выстраиваемое пространство учебной темы становится средой для развития личностного потенциала ученика и педагога и характеризуется разнообразием, вариативностью, избыточностью, открытостью, проблемностью, провокативностью, интегративностью, междисциплинарностью и т. п. Необходимо создание специальных образовательных материалов, обеспечивающих возможность включения индивидуальных возможностей у обучающихся и педагогов, возможность активного использования индивидуального ментального опыта и функционального восприятия, ведения с самим собой внутреннего диалога, самостоятельного освоения учебной деятельности.

Проанализируем и сравним между собой учебные тексты, представленные на первых страницах двух учебных пособий для 7-го класса и призванные ввести учащихся в мир алгебры, познакомиться с новым разделом математики и новым для них языком алгебры.

«...В 7 классе вы будете изучать одночлены, многочлены, функции, научитесь читать графики реальных зависимостей и строить графики функций. Вы научитесь выполнять тождественные преобразования: сложение, вычитание, умножение и деление многочленов, разложение многочленов на множители и многое другое. Это даст вам возможность решать разнообразные не только математические задачи. Вы узнаете о способах решения систем линейных уравнений с двумя переменными. Вы сможете решать текстовые задачи, используя не только уравнения с одной переменной, но и системы уравнений с двумя переменными. Вы познакомитесь со свойствами линейных функций, научитесь строить их графики.

...

В этой главе вы познакомитесь с различными видами числовых промежутков и их обозначениями, а также узнаете, что называется функцией и графиком функции. Научитесь читать графики реальных зависимостей. С этими понятиями вы постоянно будете встречаться не только на уроках математики. Вы узнаете, что с помощью графиков можно получить наглядные представления о некоторых свойствах функций.

Глава 1. Функции

§1. Числовая прямая

Числовая прямая – это прямая, на которой отмечено начало отсчета (точка, соответствующая числу 0), задано направление слева направо стрелкой с одной стороны (это направление называется положительным) и выбран отрезок, длина которого считается равной 1 (он называется единичным отрезком)».

Замечаем, что уже в рубрике «Введение» семиклассникам предъявляются новые понятия: «одночлены», «многочлены», «функции», «системы линейных уравнений с двумя переменными», которые учащимся не понятны, не отсылают к имеющемуся у них опыту. А первая глава начинается с определения понятия числовой прямой, то есть предъявляет знания в готовом виде, и посвящена не исследованию особенностей языка алгебры и привлечению прошлого опыта учащихся, связанного с понятием уравнения, а знакомит с понятием функции, которое не является исторически основополагающим для алгебры.

Именно учебный текст из второго пособия направлен на создание развивающей образовательной среды, обеспечивающей (через эпиграф и метафоры, вопросы и диалоговый характер подачи материала, задачи и проблемные ситуации и т. п.) рождение нового знания и новых смыслов, связанных с изучением алгебры – нового математического аппарата:

«Вы начинаете изучать алгебру. Что нового вам предстоит узнать? Полистайте учебник, и вы сразу заметите его особенности. В нем немного рисунков, мало сплошного текста, но много цифр и букв латинского алфавита. Латиница является важной составной частью языка алгебры. С изучения этого языка и начнется ваше знакомство с алгеброй.

...

В работе вам очень пригодится опыт изучения чисел и операций над числами, приобретенный в 5 и 6 классах. В алгебре понадобится и опыт в решении уравнений. Уравнения описывают различные закономерности окружающей нас природы. Познав эти закономерности, можно объяснить и разрешить самые разнообразные жизненные ситуации.

## ГЛАВА I

### ОТ АРИФМЕТИКИ К АЛГЕБРЕ

Люди, незнакомые с алгеброй, не могут представить себе тех удивительных вещей, которых можно достигнуть при помощи названной науки.

Г. Лейбниц

#### § 1. Решаем задачи с помощью алгебры

Изучение алгебры начнем с решения нескольких задач.

...

Вот какое решение мог бы предложить человек, знающий арифметику и умеющий здраво рассуждать.

...

А теперь посмотрим, как мог бы разобраться в ситуации, описанной в условии задачи, человек, который умеет решать задачи с помощью уравнений.

...

Итак, мы рассмотрели и решили задачу о кроликах с фазанами, несколько задач о площадях фигур. Задачи разные, но в их решении есть нечто общее. Этим общим является использование алгебраических выражений, уравнений и неравенств, то есть применение специального языка – языка алгебры. Продолжим знакомство с этим языком» [2].

Отметим, что эта глава заканчивается беседой «Из истории алгебры», в которой исследуется этимология слов «арифметика», «геометрия», «алгебра», «алгоритм», содержится иллюстративный материал, три способа представления распределительного свойства умножения относительно сложения (словесный, алгебраический, геометрический), забавные истории и др.:

«...Вот к этим-то идеям и пришли арабы. Первыми к идее использования уравнений для решения арифметических задач пришли арабские ученые, а письменно изложил эту идею замечательный среднеазиатский астроном и математик Мухаммед бен Муса аль-Хорезми (по другой версии – Мухаммад ибн Муса аль Хорезми) (787(783) – ок. 850 гг.) в «Краткой книге о восполнении и противопоставлении».

...

В XII в. эту книгу перевели с арабского на латынь – язык средневековой науки в Европе. Так вот, произведение аль-Хорезми называлось «Китабмухтасар аль-джебрва-л-мукабала». Китаб – книга, мухтасар – краткая, аль – артикль, аль-джебр – восполнение, ва – союз “и”, аль мукабала – противопоставление. Слово “аль-джебр” переводчик не стал переводить, а просто записал его латинскими буквами. У него получилось *algebr...*» [2].

Рассматриваются истоки зарождения алгебры с точки зрения различного культурного опыта: арифметического, геометрического, словесно-логического, а также с точки зрения потребности житейского опыта. Исторический текст включается в контекст, связанный с решением задач, в которых возникают алгебраические объекты.

Заметим, что назначение учебных текстов, включающих историю математики, заключается не только в том, чтобы показать, что многих людей интересовала эта наука и их вклад в ее развитие. Такие тексты должны помочь учащимся сопоставить факты истории математики с современными знаниями учащихся. Таким образом выстраивается образовательное пространство учебной темы, в поток информации которой учащийся только погружается, и уже через непрерывный внутренний диалог с самим собой, осознанное взаимодействие и знакомство с окружающим миром новое знание присваивается и фиксируется в «личном пространстве» индивида, а образовательное пространство становится движущей силой – образовательной средой для личностного развития.

Вернемся к характеристике образовательной среды учебной темы, призванной познакомить учащихся с первыми понятиями алгебры.

Систематический курс алгебры – это новый предмет для семиклассников. Они знакомятся с новыми понятиями: одночлены, многочлены, алгебраические дроби и математические действия с ними. Образовательная среда должна создать условия для того, чтобы у учащихся складывалось положительное отношение к изучаемому материалу. Среда должна способствовать установлению связей новых понятий с их прошлым опытом – арифметическим, геометрическим, житейским, помочь овладеть методами работы с новыми объектами [3, 4].

Кроме того, учащиеся должны получить возможность принять участие в конструировании содержания образовательной среды учебной темы [5].

Контент образовательной среды начального курса алгебры должен помочь учащимся осознать, что алгебра – это особый язык познания. Целенаправленное знакомство с этим языком и развитие умения им пользоваться при построении новых объектов алгебры может стать для учащихся основным смыслом, ядром изучения учебного материала.

Такая цель обучения началам алгебры задает логику развертывания учебного материала образовательной среды, где героиней (основным персонажем, метафорой) становится Алгебра.

Знакомство с алгеброй начинается со знакомства с ее языком:

«...Сейчас мы займемся изучением алгебраического языка. Иначе знакомство просто не сможет состояться. Алгебраический язык имеет много общего с языком, на котором мы разговариваем. Но есть у него и существенные отличия. Перечислим основные знаки этого языка: цифры..., переменные..., знаки операций..., скобки, запятая, знаки равенства и неравенства. Из этих знаков, по определенным правилам, образуются слова алгебры – алгебраические выражения...» [2, с. 13].

Дальнейшая работа с алфавитом строится как цепочка смысловых звеньев, направленных на исследование правил получения новых алгебраических выражений. А именно:

– Исследуются алгебраические выражения, в которых используется только одна операция – умножение. Повторяются свойства операции умножения чисел, рассматриваются задачи, которые решаются с ее помощью, включая умножение одинаковых множителей. Обращается внимание на то, что во всех свойствах умножения буквы  $a, b, c$  могут обозначать не только числа, но и любые алгебраические выражения. Изучается понятие степени, выполняются операции со степенями.

«...Алгебра открывает перед вами двери в лабораторный комплекс “Умножение”. Давайте, друзья, поработаем с операцией умножения!

– Вычислите наиболее экономным способом... Какие свойства умножения вы применяли?

– Приведите примеры задач, которые можно решить, используя только умножение.

...

Вы, наверное, заметили, что во всех заданиях речь шла об операции умножения и ее свойствах, кое-где вам встретились буквы. Они были просто “масками” чисел...

...нам предстоит знакомство с тем, как используется умножение для построения новых алгебраических выражений, как при этом применяются основные свойства умножения.

Впрочем, друзья, к делу! Прошу вас в лабораторию “Исследование степеней с натуральным показателем”».

**Задание 2.** Проанализируйте действия над степенями.

$7^2 \cdot 7^3 =$	$a^2 \cdot a^3 =$	
$= (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) =$	$= (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) =$	по определению степени
$= 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 =$	$= a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a =$	по свойству ассоциативности умножения
$= 7^5$	$= a^5$	по определению степени
$7^2 \cdot 7^3 = 7^5$	$a^2 \cdot a^3 = a^5$	

Попробуйте увидеть аналогию в действиях над числами и переменными. Обратите внимание на основания степеней, на связь между показателями степеней.

Какую гипотезу об умножении степеней с одинаковыми основаниями вы могли бы высказать?

Следующая лаборатория называется «Действия над степенями». Учащимся предлагается поработать с отрывком «Сколько весит весь воздух?» из книги Я. И. Перельмана «Занимательная алгебра», проанализировать выполненные в этом тексте вычисления, подметить закономерности и сформулировать гипотезы о свойствах действий над степенями.

Образовательная среда любой темы может включать зоны педагогической поддержки для ее изучения. Поэтому, наряду с проблемным текстом из книги Я. И. Перельмана, образовательное пространство темы «Действия над степенями» включает и такой текст:

«...Если работа по получению правил со степенями вам показалась нелегкой, то обратитесь к заданиям-подсказкам.

К текстам, поддерживающим учебную деятельность учащихся, также относятся тексты, отвечающие на вопросы: какой я, как устроены знания? К таким текстам относятся тексты рубрики «Психологический комментарий» [6, с. 143].

– Исследуются алгебраические выражения, в которых используются только действия умножения и возведения в степень. Изучается понятие «одночлены», вводится действие умножения одночленов.

– Исследуются алгебраические выражения, в которых, кроме умножения и возведения в степень, используется и операция сложения. Повторяются свойства операции сложения чисел, рассма-

Запишите площадь фигуры, изображенной на рис. 14.

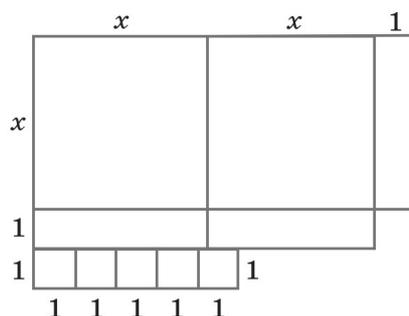


Рис. 14

триваются задачи, которые решаются с ее помощью. Обращается внимание на то, что во всех свойствах сложения буквы  $a$ ,  $b$ ,  $c$  могут обозначать не только числа, но и любые алгебраические выражения. Изучается понятие «многочлены», над ними выполняются операции сложения, вычитания и умножения.

Развивающая среда, в которой вводится понятие многочлена, характеризуется тем, что в ней проявляется стремление выявить мотивацию, мотивы и возможности разных учащихся к изучению учебного материала. При этом учитываются познавательные стили разных учащихся [7, 8].

Например, учащиеся с образным и предметно-практическими стилями кодирования информации могут прийти к понятию многочлена, выполняя задание:

Учащиеся со словесно-символическим стилем кодирования информации могут прийти к понятию многочлена, работая в лаборатории «Сложение одночленов»:

«Предлагаем вам в этой лаборатории поработать с предложенными заданиями. Проанализируйте записи в листочках и ответьте на вопросы.

– Сложение одинаковых одночленов

$$\underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ раз}} = na.$$

...

$$3ab + 3ab + 3ab + 3ab = 4 \cdot 3ab = 12ab;$$

...

Как выполнено сложение одинаковых одночленов?

Какое алгебраическое выражение получилось в результате такого сложения?

– Сложение подобных одночленов

$$\text{а) } 2a + a = 2 \cdot a + 1 \cdot a = (2 + 1)a = 3a;$$

$$\text{б) } 2ab^2x^3 + 4ab^2x^3 = (2 + 4)ab^2x^3 = 6ab^2x^3;$$

$$\text{в) } 2cx^2y + \left(-\frac{1}{3}cx^2y\right) = \left(2 + \left(-\frac{1}{3}\right)\right) cx^2y = \left(1 \frac{2}{3}\right) cx^2y;$$

$$\text{г) } 2ac^2d + (-2ac^2d) = (2 - 2)ac^2d = 0 \cdot ac^2d = 0.$$

Как выполняется сложение подобных одночленов?

Какие свойства операций при этом используются? Какие алгебраические выражения получаются в результате приведения подобных одночленов? Приведите примеры сложения подобных одночленов.

Как вы думаете, всегда ли при сложении одночленов будут получаться одночлены? Если нет, приведите контрпример.

– Сложение неподобных одночленов.

Сложим одночлены  $2ab^2x^3$  и  $6b^3x$ . Записали их последовательно, соединяя знаком сложения  $2ab^2x^3 + 6b^3x$ . Эврика! В результате сложения двух одночленов получилось алгебраическое выражение нового вида! Новые объекты назвали по-русски «многочлены», или полином (от греч. поли – много и номос – часть)».

Таким образом, приведены примеры учебных текстов – лабораторий. В каждой лаборатории учащиеся проходили один и тот же путь познания. Общим было – перенос известных свойств операций в новую ситуацию, использование «алфавита» для построения новых алгебраических выражений. Однако в каждой лаборатории нужно было увидеть то новое, что отличает ее от предыдущей.

То есть такая работа учащихся способствовала созданию у них динамических когнитивных схем учебной деятельности, связанных с появлением новых объектов в алгебре.

В целом этот комплекс текстов носит сценарный характер, что является важнейшей характеристикой развивающей среды обучения [8, 9].

Исследование J. Cai, R. Leikin «Affect in mathematical problem posing: conceptualization, advances, and future directions for research» [10] посвящено обзору работ, в которых ставится вопрос о том, какие задания вызывают устойчивый интерес к предмету, любопытство, удовлетворение своей деятельностью, уверенность в успехе изучения предмета, позитивную самооценку деятельности и т. д. Оно показало, что к таким текстам относятся тексты, содержащие «открытые» задания [11], тексты, в которых учащимся предлагается самим составить новый текст, и учебные тексты провокативного характера.

Рассмотрим алгебраическую операцию «круг»  $\bullet$ , определённую на множестве  $M = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  при помощи следующей таблицы.

$\bullet$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	1	1	1	1	1
3	0	3	6	9	1	1	1	2	2	2
4	0	4	8	1	1	2	2	2	3	3
5	0	5	1	1	2	2	3	3	4	4
6	0	6	1	1	2	3	3	4	4	5
7	0	7	1	2	2	3	4	4	5	6
8	0	8	1	2	3	4	4	5	6	7
9	0	9	1	2	3	4	5	6	7	8

Попытайтесь установить способ заполнения этой таблицы. Убедитесь, что задана алгебраическая операция на множестве  $M$ .

Из таблицы можно заметить, что операция коммутативна. А вот свойства ассоциативности у неё нет!

**Задание 4.** Убедитесь, что  $3 \bullet (4 \bullet 5) \neq (3 \bullet 4) \bullet 5$ .

При изучении степеней, одночленов и многочленов учащиеся столкнулись с тем, что действия обладают известными им свойствами (коммутативным, ассоциативным и дистрибутивным). Возникает вопрос: любые ли алгебраические операции обладают такими же свойствами? Этому может быть посвящена специальная беседа в образовательном пространстве темы. Приведем фрагменты такой беседы [2, с. 46].

«У вас может создаться впечатление, что как бы ни вводили операцию над числами, она всегда будет коммутативной и ассоциативной. Не будем спешить с выводом.

...

...Давайте придумаем операцию, действующую на множестве всех натуральных чисел ».

Важным качеством современной образовательной среды является наличие в ней зон разного типа рефлексии. Так, например, в теме «Действия над степенями» учащимся предлагаются несколько текстов, которые мотивируют рефлексивную деятельность.

Развитию рефлексивного опыта в данной теме могут способствовать задания творческой направленности: «Напишите рассказ, сказку или сделайте рисунки на тему “Степень и ее свойства”, “Составьте два варианта проверочной работы разной степени сложности по теме “Степень. Свойства степени”, “Составьте кроссворд, содержащий слова из языка алгебры”».

Это могут быть и прямые вопросы об отношении к изучаемому: «Что было для вас самым важным при изучении темы “Степени и действия над ними”?», «Возникали ли у вас трудности при ее изучении? Как вы с ними справлялись?».

Развитию самооценки могут служить учебные тексты, содержащие вопросы к учащимся о способах их деятельности и способах хранения полученной информации:

- «1) В каких ситуациях применяется запись вида  $a^n$ ?
- 2) Как вы запоминали правила действий со степенями:
  - а) на конкретном числовом примере (например,  $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$ );
  - б) в виде тождества (например,  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ );
  - в) в словесной форме (чтобы умножить степени с одинаковыми основаниями, нужно...);
  - г) используя схемы, рисунки;
  - д) сочинив историю, найдя метафору и так далее?
- 3) Какую информацию и в каком виде вы внесли бы в справочник, желая зафиксировать, что такое степень с натуральным показателем, какие действия и по каким правилам можно выполнять со степенями?»

Еще одним свойством обогащающей развивающей среды является ее открытость. Среда должна предоставить учащимся возможность выбирать разные подходы к получению одного и того же математического понятия.

«...Думаю, пора учиться умножать многочлены. И вы вполне это можете сделать самостоятельно. Вам нравится анализировать и обобщать действия над числами, а в результате находить способы выполнения операций над алгебраическими выражениями? Тогда займитесь заданием на странице... Если же вам по вкусу наглядное представление об операции, то начинайте с задачи о площадях прямоугольников...»

Работая в обогащающей образовательной среде, учащиеся могут соотнести свою точку зрения, свою позицию с позицией авторов, персонажей за счет диалогичности учебного текста. Так, например, некоторые учебные тексты по теме «Алгебраические дроби» представлены в форме деловой игры, участниками которой являются те, которые сегодня изучают этот материал, и их сверстники, которые изучали этот материал раньше. Учащимся предлагается оценить работы сверстников, дополнить их, придумать свои версии.

Образовательная среда учебной темы включает учебные тексты, которые сталкивают учащихся с неожиданной, необычной ситуацией. Разбираясь с интересом с шифрами в тексте «Для тех, кто хочет вести секретную переписку с друзьями» [2], учащиеся незаметно приходят к понятию «подстановки порядка  $n$ ». Они учатся выполнять новые алгебраические операции над новыми объектами, получать новые понятия.

Столкнувшись с надписью  $3 + 1 = 0$ , героиня текста «Ксюша на Кварте, или Взгляд на алгебру с космических высот» [12] вступает в диалог с жителями планет Кванта и Квинта и встречается с



Ядром, основным смыслом при обучении теме «Первые понятия алгебры» для учащихся становится получение объектов алгебры с опорой на личный числовой опыт. Именно числовой опыт является, как говорят в психологии, «точкой приземления» и основой для получения положительного самостоятельного результата учебной деятельности при изучении данной темы.

Дидактическая идея данной темы отражается в специальной конструкции учебных текстов, направляющих на поиск аналогии. Страница текста делится на два столбца: слева представлен числовой опыт учащихся, а справа – новый, аналогичный числовому, алгебраический опыт. Учащимся предлагается, например, задание: «Сравните записи сложения целых чисел и многочленов. В чем проявляется аналогия при сложении чисел и сложении многочленов?».

Использование подобных образных опор в учебном тексте является одной из характеристик современных дидактик [5].

Если обратиться к последней теме курса алгебры основной школы «Числовые последовательности», которая имеет благоприятные предпосылки (функциональность, интегративность, вариативность, избыточность, провокативность и др.) для создания развивающей образовательной среды, то к понятию последовательности обучающиеся могут прийти в процессе решения задачи о заключении трудового договора, которая носит «открытый» и провокативный характер, то есть не предполагает единственного, «правильного» ответа. Решение не очевидно, зависит от срока заключения трудового договора, требует новых знаний (о числовых последовательностях и прогрессиях), но при этом обращение к имеющимся опыту и знаниям (табличный способ задания функциональной зависимости между элементами числовых множеств, натуральный ряд чисел и способ нахождения суммы его  $n$  первых членов, легенда-задача о количестве зерен на шахматной доске и др.) позволяет учащимся выдвинуть гипотезу и приступить к разрешению проблемной ситуации.

Образовательное пространство темы «Числовые последовательности» конструируется таким образом, что все основные знания и методы постепенно осваиваются-открываются учащимися в процессе исследования двух числовых последовательностей, которые возникают в ходе решения «стартового» практико-ориентированного задания и представляют собой соответственно арифметическую и геометрическую прогрессии (особые виды числовых последовательностей). Учебные тексты каждый раз отсылают учащихся к данным конкретным последовательностям, направлены на освоение матрицы изучения общего понятия числовой последовательности и сопровождение проектно-исследовательской деятельности учащихся по самостоятельному изучению свойств арифметической и геометрической прогрессий в процессе создания общеклассного проекта – проекта современного интерактивного учебного пособия по прогрессиям. Именно в проекте взаимосвязи принимают форму семантических сетей, фреймов, комплексных пакетов, сформированных из объектов, понятий, фактов, методов, способов действий.

Отметим, что сама тема носит системообразующий характер – представляет возможность повторить и обобщить весь учебный материал курса алгебры основной школы в виде организации семантических структур, сложных массивов знаний, когнитивных схем учебной деятельности, создания новых текстов, смыслов, формируя тем самым развивающую образовательную среду для каждого ученика.

Образовательная среда рассматривается как предмет и ресурс совместной деятельности участников учебно-воспитательного процесса, в результате которой между отдельными компонентами, учебным содержанием, программами, проектами, субъектами образования, образовательными деятельностями выстраиваются определенные связи и отношения.

При этом основу образовательной среды составляет содержание обучения, а именно учебные тексты, характеризующиеся многозначностью трактовок, диалогичностью, многоплановостью сюжета, интертекстуальностью, избыточностью, междисциплинарностью, интегративностью и др., сконструированные как смысловые, многомерные семантические пространства, в рамках которых

можно мысленно перемещаться в разных направлениях, осмысленно осваивать учебный материал в более широких межпредметных, мировоззренческих и личностных связях.

Учебные тексты, сконструированные на основе психодидактического подхода к обучению, предполагают соединение проекции предметного содержания и проекции соответствующих психологических процессов. Такой подход отражает современные вызовы общества, направленные на создание условий для развития интеллектуальных возможностей каждого из учащихся. Большинство представленных учебных текстов носит авторский характер и прошли успешную апробацию в школьной практике.

В настоящее время возникает проблема определения, за счет чего организовать образовательное пространство учебной темы. Основная задача данного исследования состоит в том, чтобы определить, какова должна быть структура комплексов учебных текстов, входящих в образовательное пространство учебной темы и направленных на создание развивающей образовательной среды для каждого учащегося и педагога.

### Список источников

1. Гельфман Э. Г., Пенская Ю. К., Цымбал С. Н. Психодидактический подход к подготовке будущих учителей математики // Вестник Томского гос. пед. ун-та – TSPU Bulletin. 2017. Вып. 12 (189). С. 100–108.
2. Алгебра: учебник для 7 класса / Э. Г. Гельфман и др. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. 260 с.
3. Гельфман Э. Г., Холодная М. А. Психодидактика школьного учебника: учебное пособие для вузов. М.: Юрайт, 2023. 328 с. Серия: Образовательный процесс.
4. Лепский В. Е. Рефлексивно-активные среды инновационного развития. URL: <https://gtmarket.ru/library/articles/6728/6732> (дата обращения: 18.06.2023).
5. Ключ-Станьска Д. Парадигмы дидактики: Мыслить теоретически о практике / под ред. Н. Д. Корчальной (пер. с польского А. А. Полонникова). М.: Изд-во «Национальное образование», 2022. 320 с.
6. Алгебра. Практикум для 7 класса / Э. Г. Гельфман и др. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. 184 с.
7. Демидова Л. Н. Индивидуальные познавательные стили и характер учебного материала // Дидактика математики: Сегодня и завтра: материалы симпозиума «Итоги и перспективы развития образования на рубеже тысячелетий». Томск: Изд-во ТГПУ, 2000. С. 39–41.
8. Равен Д. Компетентность в современном обществе: выявление, развитие и реализация. М.: Когито-Центр, 2002. 396 с.
9. Дьюи Д. Психология и педагогика мышления. М.: Совершенство, 1997. 208 с.
10. Цай Д., Лейкин Р. Влияние на постановку математических задач: концептуализация, достижения и будущие направления исследований // Образовательные исследования в математике. 2020. С. 1–15. URL: <https://paperity.org/p/258014473/affect-in-mathematical-problem-posing-conceptualization-advances-and-future-directions> (дата обращения: 10.07.2023).
11. Эко У. Роль читателя: исследования по семиотике текста / пер. с англ. и итал. Сергея Серебряного. СПб.: Symposium; М.: Издательство РГГУ, 2007. 501 с.
12. Гельфман Э. Г. Алгебраические дроби: учебное пособие по математике для 7 класса / Э. Г. Гельфман и др. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2000. 240 с.
13. Гельфман Э. Г., Холодная М. А., Подстригич А. Г. Типология развивающих учебных текстов (на примере школьной математики) // Вестник Томского гос. пед. ун-та – TSPU Bulletin. 2019. Вып. 3 (200). С. 27–34.
14. Толстой Л. Н. Арифметика: в 2 ч. М.: Типо-литография т-ва И. Н. Кушнерев и Ко, 2013. 160 с.
15. Лебединцев К. Ф. Преподавание алгебры и начал анализа: пособие для учителей. Киев: Рад. школа, 1984. 248 с.

### References

1. Gel'fman E. G., Penskaya Yu. K., Tsymbal S. N. Psikhodidakticheskiy podkhod k podgotovke budushchikh uchiteley matematiki [Psidactic approach to the preparation of future mathematics teachers]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta – TSPU Bulletin*, 2017, vol. 12 (189), pp. 100–108 (in Russian).

2. *Algebra: uchebnik dlya 7 klassa* [Algebra: A textbook for grade 7]. E. G. Gelfman, et al. Moscow, BINOM. Laboratoriya Znaniy Publ., 2014. 260 p. (in Russian).
3. Gel'fman E. G., Kholodnaya M. A. *Psikhodidaktika shkol'nogo uchebnika: uchebnoye posobiye dlya vuzov* [Psidaktika of a school textbook: Textbook for universities]. Moscow, Yurayt Publ., 2023. 328 p. Series: Educational process (in Russian).
4. Lepskiy V. Ye. *Refleksivno-aktivnyye sredy innovatsionnogo razvitiya* [Reflective and active media of innovative development] (in Russian). URL: <https://gtmarket.ru/library/articles/6728/6732> (accessed 18 June 2023).
5. Klyus-Stan'ska D. *Paradigmy didaktiki: Myslit' teoreticheski o praktike* [Didactics paradigms: Thinking theoretically about practice]. Ed. N. D. Korchalova [transl. from Polish by A. A. Polonnikov]. Moscow, National Education Publ., 2022. 320 p. (in Russian).
6. *Algebra. Praktikum dlya 7 klassa* [Algebra. Workshop for grade 7]. E. G. Gelfman, et al. Moscow, BINOM. Laboratoriya Publ., 2014. 184 p. (in Russian).
7. Demidova L. N. Individual'nyye poznavatel'nyye stili i kharakter uchebnogo materiala [Individual cognitive styles and the nature of the educational material]. *Didaktika matematiki: Segodnya i zavtra: materialy simpoziuma "Itogi i perspektivy razvitiya obrazovaniya na rubezhe tysyacheletiy"* [Didactics of mathematics: today and tomorrow. Materials of the symposium "Results and prospects for the development of education at the turn of millennia"]. Tomsk, Publishing House of TSPU Publ., 2000. Pp. 39–41 (in Russian).
8. Raven D. *Kompetentnost' v sovremennom obshchestve: vyyavleniye, razvitiye i realizatsiya* [Competence in modern society: identification, development and implementation]. Moscow, Kogito-Tsenter Publ., 2002. 396 p. (in Russian).
9. D'yui D. *Psikhologiya i pedagogika myshleniya* [Psychology and pedagogy of thinking]. Translation from English N. M. Nikol'skaya. Moscow, Sovershenstvo Publ., 1997. 208 p. (in Russian).
10. Cai J., Leikin R. Affect in mathematical problem posing: conceptualization, advances, and future directions for research. *Educational Studies in Mathematics*, 2020, pp. 1–15 (in Russian). URL: <https://paperity.org/p/258014473/affect-in-mathematical-problem-posing-conceptualization-advances-and-future-directions> (accessed 10 July 2023).
11. Eko U. *Rol' chitatelya: issledovaniya po semiotike teksta* [The role of the reader: research on the semiotics of the text]. Translation from English and Italian by Sergei Silver. St. Petersburg, Symposium; Moscow, RGGU Publ., 2007. 501 p. (in Russian).
12. Gel'fman E. G. et al. *Algebraicheskiye drobi: uchebnoye posobiye po matematike dlya 7 klassa* [Algebraic fractions: a textbook in mathematics for grade 7]. Tomsk, TSU Publ., 2000. 240 p. (in Russian).
13. Gel'fman E. G., Kholodnaya M. A., Podstrigich A. G. Tipologiya razvivayushchikh uchebnykh tekstov (na primere shkol'noy matematiki) [Typology of developing educational texts (on the example of school mathematics)]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta – TSPU Bulletin*, 2019, vol. 3 (200), pp. 27–34 (in Russian).
14. Tolstoy L. N. *Arifmetika: v 2 chastyakh* [Arithmetics: in 2 parts]. Moscow, Tipo-litografiya t-va I. N. Kushnerev and Ko. Publ., 2013. 160 p. (in Russian).
15. Lebedintsev K. F. *Prepodavaniye algebry i nachal analiza: posobiye dlya uchiteley* [Teaching Algebra and began analysis: manual for teachers]. Kyiv, Rad. shkolas Publ., 1984. 248 p. (in Russian).

**Информация об авторах**

**Гельфман Э. Г.**, доктор педагогических наук, профессор, Томский государственный педагогический университет (ул. Киевская, 60, Томск, Россия, 634061).  
E-mail: mina.gelfman@yandex.ru

**Подстригич А. Г.**, кандидат педагогических наук, доцент, Томский государственный педагогический университет (ул. Киевская, 60, Томск, Россия, 634061).  
E-mail: anpodstrigich@mail.ru

**Андаев Д. О.**, аспирант, Томский государственный педагогический университет (ул. Киевская, 60, Томск, Россия, 634061).  
E-mail: denis-den97@mail.ru

*Information about the authors*

**Gelfman E. G.**, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Tomsk State Pedagogical University (ul. Kiyevskaya, 60, Tomsk, Russian Federation, 634061).

E-mail: mina.gelfman@yandex.ru

**Podstrigich A. G.**, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Mathematics, Theory and Methods of Teaching Mathematics, Tomsk State Pedagogical University (ul. Kiyevskaya, 60, Tomsk, Russian Federation, 634061).

E-mail: anpodstrigich@mail.ru

**Andayev D. O.**, postgraduate student, Tomsk State Pedagogical University (ul. Kiyevskaya, 60, Tomsk, Russian Federation, 634061).

E-mail: denis-den97@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 27.07.2023; принята к публикации 30.10.2023*

*The article was submitted 27.07.2023; accepted for publication 30.10.2023*