Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 4 (2023). С. 664–675
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.929
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-664-675
EDN: ZDAWGY

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОНЕЧНЫМИ И БЕСКОНЕЧНЫМИ ОРБИТАМИ ГРАНИЦ

Е. П. Иванова

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

Аннотация. Рассматриваются краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений, содержащих несоизмеримые сдвиги аргументов в старших членах. Показано, что для случая, когда орбиты границы области, сгенерированные множеством сдвигов разностного оператора, конечны, исходная задача аналогична краевой задаче для дифференциально-разностных уравнений с целочисленными сдвигами аргументов. Исследуется также случай бесконечной орбиты границы.

Ключевые слова: дифференциально-разностное уравнение, краевая задача, несоизмеримые сдвиги аргументов.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор выражает благодарность А. Л. Скубачевскому за постановку задачи и интерес к работе. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *Е. П. Иванова.* Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с конечными и бесконечными орбитами границ// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 4. С. 664–675. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-664-675

1. Введение

Рассматриваются краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений

$$A_R u = -\sum_{i,j=1}^{n} (R_{ijQ} u_{x_j})_{x_i} = f(x), \quad x \in Q, \tag{1.1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \notin Q. \tag{1.2}$$

Здесь $R_{ij} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ — разностные операторы, определяемые формулами:

$$R_{ij} u(x) = \sum_{h \in M_{ij}} a_{ijh} u(x+h), \quad a_{ijh} \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

где $M_{ij} \subset M$ — конечное множество сдвигов $h \in \mathbb{R}^n$, $h_0 = 0 \in M$. Координаты векторов h не предполагаются соизмеримыми между собой. То есть нельзя сформировать нетривиальную линейную комбинацию этих векторов с целыми коэффициентами, равную нулевому вектору. Здесь Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial Q \in C^\infty$ или цилиндр $Q = (0, d) \times G$, $G \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\partial G \in C^\infty$, $f \in L_2(Q)$.

Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с целочисленными сдвигами исследовались в работах [2,8] А. Л. Скубачевского. Получены условия сильной эллиптичности, разрешимости и гладкости решений таких задач. В частности, было показано, что в случае невырожденного разностного оператора краевая задача для дифференциально-разностного уравнения эквивалентна задаче с нелокальными краевыми условиями.

В работах [1, 6] Л. Е. Россовского исследовались краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений с растяжениями и сжатиями аргументов. В частности, были получены условия равномерной сильной эллиптичности таких уравнений. Дифференциальные уравнения с несоизмеримыми сжатиями аргументов рассматривались в [6]. Эллиптическое функционально-дифференциальное уравнение, содержащее комбинацию сжатия и сдвигов аргумента, изучено Л. Е. Россовским и А. А. Товсултановым в [7].

Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов обладают рядом особенностей по сравнению с задачами для уравнений с целочисленными сдвигами. Однако в случае, когда орбита границы заданной области, индуцированная сдвигами разностного оператора, состоит из конечного числа компонент, исходная краевая задача может быть исследована аналогичными методами. Для этого строится специальное разбиение области на непересекающиеся подобласти, основанное не на аддитивной группе сдвигов, как в работах А. Л. Скубачевского, а на графе, ассоциированном с множеством сдвигов.

Это разбиение описано в работах автора [3, 4]; оно применяется для исследования гладкости решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами [4] и получения условий сильной эллиптичности [3] (выполнения неравенства Гординга), а также для сведения исходной задачи к нелокальной [5].

В разделе 2 описан способ построения орбиты границы исходной области. Если орбита границы конечна, область может быть разбита на непересекающиеся подобласти, и исходное уравнение сводится к системе дифференциальных уравнений на этих подобластях.

Для случая бесконечной орбиты границы излагается метод определения положительной определенности разностных операторов, использующий цепочки последовательных разбиений области.

В разделе 3 рассматриваются краевые задачи для случая конечной орбиты границы области.

Для этих краевых задач условия сильной эллиптичности, разрешимости и гладкости решений аналогичны условиям для краевых задач с целочисленными сдвигами, полученным в работах А. Л. Скубачевского.

В разделе 4 рассматриваются краевые задачи для случая бесконечной орбиты границы области. Получены условия равномерной сильной эллиптичности дифференциально-разностных операторов для несоизмеримых сдвигов аргументов.

2. Разностные операторы и орбиты границ

Рассмотрим разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$

$$(Ru)(x) = \sum_{h \in M} a_h u(x+h), \tag{2.1}$$

где $a_h \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^n$, M — конечное множество несоизмеримых между собой сдвигов h, $h_0 = 0 \in M$.

Будем рассматривать действия операторов R на функциях $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$u(x) = 0, \quad x \notin Q. \tag{2.2}$$

Для учета однородных краевых условий (2.2) используем операторы I_Q и P_Q, где оператор $I_Q : L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ — оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем вне Q, а оператор $P_Q : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(Q)$ — оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q. Введем также оператор $R_Q = P_Q R I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$.

Замечание 2.1. В работе А. Л. Скубачевского [2] для исследования свойств дифференциально-разностных операторов с соизмеримыми сдвигами и гладкости решений соответствующих краевых задач строится разбиение области Q на непересекающиеся подобласти с использованием аддитивной абелевой группы, порожденной множеством сдвигов M. Для множества, содержащего несоизмеримые сдвиги, такого разбиения не существует.

Будем использовать разбиение, построенное без использования группы и описанное в [3]. Обозначим $\tilde{M} := M \cup (-M)$.

Определение 2.1. Назовем $\mathcal{R}_0$ *регулярным разбиением* области Q на непересекающиеся подобласти Q_r $(r = 1,2,\dots)$, если:

1) $\bigcup\limits_r \overline{Q}_r = \overline{Q}$;
2) для любой Q_{r_1} и $h \in \tilde{M}$ либо найдется Q_{r_2} такое, что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, либо $Q_{r_1} + h \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{Q}$.

Для построения регулярного разбиения введем множества: $S_0 = \partial Q$, $S_1 = \bigcup\limits_{h\in\tilde{M}} (S_0 + h) \bigcap \overline{Q}$, $S_k = \bigcup\limits_{h\in\tilde{M}} (S_{k-1} + h) \bigcap \overline{Q}, \dots$ В силу построения $S_{k-1} \subseteq S_k$. Обозначим $S = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} S_k$.

Определение 2.2. Множество S назовем *орбитой границы* ∂Q под действием сдвигов разностного оператора R.

Возможны 2 случая.

1. На некотором шаге $S_{k+1} = S_k$. Тогда и все $S_{k+p} = S_k$ $(p \geqslant 1)$, и процесс построения орбиты прервется. В этом случае орбита S состоит из конечного числа компонент множества S_k. Будем называть такую орбиту *конечной*.
2. Для любого k имеем $S_{k+1} \neq S_k$. Тогда орбита S состоит из бесконечного числа компонент. Будем называть эту орбиту *бесконечной*.

Замечание 2.2. Для бесконечной орбиты, когда число различных множеств S_k счетно, множество S может быть даже всюду плотным в $\bar{Q}$ (см. [8, пример 3.10]).

Исследуем сначала случай конечной орбиты границы.

Рассмотрим открытое множество $G = \bar{Q} \backslash S$. Оно состоит из конечного числа непересекающихся связных компонент Q_r $(r = 1, 2 \dots)$ и $G = \bigcup\limits_r Q_r$, $S = \bigcup\limits_r \partial Q_r$.

В силу [3, теорема 2.1] справедлива лемма.

Лемма 2.1. *Совокупность всех непересекающихся связных компонент множества G является регулярным разбиением $\mathcal{R}_0$ области Q.*

Разбиению $\mathcal{R}_0$ поставим в соответствие ориентированный граф. Вершины графа — это подобласти Q_r, дуги графа — это сдвиги $h \in M$. Если $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, то вершины графа, ассоциированные с подобластями Q_{r_2}, Q_{r_1}, соединяем ориентированной дугой $h = \langle Q_{r_1}, Q_{r_2} \rangle$. На дугах задана числовая функция $\varphi(h) = a_h$, где a_h — коэффициенты разностного оператора из формулы (2.1). Введем на множестве подобластей (вершин графа) бинарное отношение π: пусть подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathcal{R}_0$ находятся в отношении π, если существует цепь в графе, соединяющая вершины Q_{r_1} и Q_{r_2}. В цепи движение может осуществляться как по направлению дуги, так и против. Это отношение является отношением эквивалентности и порождает разбиение множества $\mathcal{R}_0$ на классы эквивалентности. Обозначим подобласти Q_{sl}, где s — номер класса эквивалентности и l — номер области в этом классе. Каждый класс s в силу ограниченности области Q состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl}.

Обозначим через $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ подпространство функций из $L_2(Q)$, обращающихся в нуль вне $\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ $(l = 1, \dots, N(s))$. Обозначим через $P_s : L_2(Q) \to L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ оператор ортогонального проектирования на $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$. В силу [8, лемма 8.5] пространство $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ является инвариантным подпространством оператора R_Q, при этом $L_2(Q) = \bigoplus\limits_s L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$.

Введем изоморфизм гильбертовых пространств $U_s : L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big) \to L_2^N(Q_{s1})$ по формуле

$$(U_s u)_l(x) = u(x + h_{sl}) \quad (x \in Q_{s1}),$$

где $l = 1, \ldots, N = N(s)$, h_{sl} такое, что $Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl}$ $(h_{s1} = 0)$, $L_2^N(Q_{s1}) = \prod\limits_{l=1}^{N} L_2(Q_{s1})$.

Аналогично доказательству [8, лемма 8.6] можно показать, что оператор $R_s : L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$, заданный формулой $R_s = U_s R_Q {U_s}^{-1}$, является оператором умножения на матрицу R_s порядка $N(s) \times N(s)$, где элементы r^s_{km} этой матрицы вычисляются по формуле

$$r^s_{km} = \begin{cases} a_h, & h = h_{sm} - h_{sk} \in M, \\ 0, & h = h_{sm} - h_{sk} \notin M. \end{cases} \tag{2.3}$$

Если для построения матрицы R_s использовать ассоциированный с разбиением $\mathcal{R}_0$ граф, то для вершин Q_{sk}, Q_{sm}, связанных дугой $h = \langle Q_{sk}, Q_{sm} \rangle$, положим $r^s_{km} = \varphi(h) = a_h$, в противном случае $r^s_{km} = 0$. Введем также операторы $R^* : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$,

$$R^* u(x) = \sum_{h \in M} a_h u(x - h),$$

$R^*_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $R^*_Q = P_Q R^* I_Q$. Оператор R^*_Q является сопряженным к R_Q. Действию оператора R^*_Q будет соответствовать умножение на матрицы R^*_s, где R^*_s — эрмитово сопряженные с R_s матрицы.

Определение 2.3. Самосопряженный оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ будем называть *положительно определенным*, если найдется $c > 0$ такое, что для всех $u \in L_2(Q)$, $u \neq 0$, выполнено неравенство

$$(R_Q u, u)_{L_2(Q)} > c(u, u)_{L_2(Q)}.$$

Здесь $(u, u)_{L_2(Q)}$ — скалярное произведение в пространстве $L_2(Q)$.

В силу [8, лемма 8.7] спектр $\sigma(R_Q)$ оператора R_Q совпадает с объединением спектров всех матриц $\sigma(R_Q) = \bigcup\limits_s \sigma(R_s)$. Отсюда следует лемма.

Лемма 2.2. *Самосопряженный оператор $R_Q + R^*_Q$ положительно определен тогда и только тогда, когда все матрицы $R_{s_\nu} + R^*_{s_\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n_1)$ положительно определены.*

Пример 2.1. Пусть разностный оператор $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ имеет вид

$$Ru(x) = a_0 u(x_1, x_2) + a_\varepsilon (u(x_1 + 1 + \varepsilon, x_2) + u(x_1 - 1 - \varepsilon, x_2)) + + a_1(u(x_1 + 1, x_2) + u(x_1 - 1, x_2)). \tag{2.4}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый иррациональный параметр. Сдвиги $h_\varepsilon = (1 + \varepsilon, 0)$, $h_1 = (1, 0)$ несоизмеримы.

Для некоторого натурального N справедливы неравенства $N\varepsilon < 1$, $(N + 1)\varepsilon > 1$. Обозначим $\theta = 1 - N\varepsilon < \varepsilon$. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $R_Q = P_Q R I_Q$, где $Q = \{(x_1, x_2) | x_1 \in (0, 2), x_2 \in (0, 1)\}$.

Нетрудно убедиться, что $S = S_{N+1}$ и число компонент орбиты границы конечно.

Орбита границы: $S = (\{0, \theta, \varepsilon, \varepsilon + \theta, 2\varepsilon, 2\varepsilon + \theta, \ldots, (N - 1)\varepsilon + \theta, N\varepsilon, 1, 1 + \theta, 1 + \varepsilon, \ldots, 2 - \varepsilon, 2 - \theta, 2\} \times [0, 1]) \cup \partial Q$.

Существует конечное регулярное разбиение $\mathcal{R}_0$ области Q, состоящее из двух классов подобластей.

Первый класс содержит $2N + 2$ подобласти: $Q_{11} = (0, \theta) \times (0, 1)$, $Q_{12} = (\varepsilon, \varepsilon + \theta) \times (0, 1), \ldots,$ $Q_{1,N+1} = (N\varepsilon, 1) \times (0, 1)$, $Q_{1,N+2} = (1, 1 + \theta) \times (0, 1), \ldots, Q_{1,2N+2} = (1 + N\varepsilon, 2) \times (0, 1)$. На этом классе действию оператора R_Q соответствует умножение на блочную матрицу $R_1 = ||R_{ij}||^2_{i,j=1}$, где R_{ij} — матрицы размерности $(N + 1) \times (N + 1)$: $R_{11} = R_{22} = \mathrm{diag}\{a_0\}$, $R_{12} = ||r_{ij}||^{N+1}_{i,j=1}$, $r_{ii} = a_1$, $i = 1, \ldots, N + 1$, $r_{i,i+1} = a_\varepsilon$, $i = 1, \ldots, N$; остальные элементы $r_{ij} = 0$; $R_{21} = R^T_{12}$.

Во втором классе $2N$ подобластей: $Q_{21} = (\theta, \varepsilon) \times (0, 1)$, $Q_{22} = (\varepsilon + \theta, 2\varepsilon) \times (0, 1), \ldots, Q_{2,N} = ((N - 1)\varepsilon + \theta, N\varepsilon) \times (0, 1)$, $\ldots, Q_{2,2N} = (2 - \varepsilon, 2 - \theta)$. Матрица R_2 для этого класса аналогична матрице R_1, имеет размерность $2N \times 2N$ и состоит из $(N \times N)$ блоков R_{ij}.

Пусть $N = 1$. Тогда $S = S_2 = (\{0, \theta, \varepsilon, 1, 2 - \varepsilon, 2 - \theta, 2\} \times [0, 1]) \cup \partial Q$.

Для первого класса $(s = 1)$ подобластей имеем оператор $R_1 : L^4_2(Q_{11}) \to L^4_2(Q_{11})$, где $R_1 = U_1 R_Q {U_1}^{-1}$, $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$. Действию оператора R_1 в силу формулы (2.3) соответствует умножение на матрицу

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & a_1 & a_\varepsilon \\ 0 & a_0 & 0 & a_1 \\ a_1 & 0 & a_0 & 0 \\ a_\varepsilon & a_1 & 0 & a_0 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Для второго класса ($s = 2$) подобластей получим оператор $R_2 : L_2^2(Q_{21}) \to L_2^2(Q_{21})$, где $R_2 = U_2 R_Q {U_2}^{-1}$. Действию этого оператора соответствует умножение на матрицу

$$R_2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Для положительной определенности оператора R_Q в силу леммы 2.2 необходимо и достаточно, чтобы матрицы R_1, R_2 были положительно определенными, т. е. были выполнены условия:

$$a_0 > 0, \quad |a_1| < a_0, \quad a_0|a_\varepsilon| < a_0^2 - a_1^2. \tag{2.7}$$

В случае $N = 2$ матрица R_1 имеет вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & a_1 & a_\varepsilon & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & 0 & a_1 & a_\varepsilon \\ 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & a_1 \\ a_1 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 \\ a_\varepsilon & a_1 & 0 & 0 & a_0 & 0 \\ 0 & a_\varepsilon & a_1 & 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь орбита S границы ∂Q под действием сдвигов разностного оператора R бесконечна. При этом

$$R = R^1 + R^2,$$

$$R^1 u(x) = a_0 u(x) + \sum_{h \in M_1} a_h (u(x+h) + u(x-h)) \quad (a_h \in \mathbb{R}),$$

$$R^2 u(x) = b_0 u(x) + \sum_{p \in M_2} b_p (u(x+p) + u(x-p)) \quad (b_p \in \mathbb{R}),$$

и орбиты границы для каждого из операторов R^1, R^2 конечны.

Введем операторы

$$R_Q = P_Q R I_Q, \quad R_Q^i = P_Q R^i I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q), \quad i = 1, 2.$$

Для оператора R_Q^1 построим регулярное разбиение области Q на подобласти Q_{sl} по методу, описанному выше для случая конечной орбиты. Действию разностного оператора R_Q^1 на подобластях Q_{sl} будет соответствовать умножение на матрицы, определенные формулой (2.3). Через $\lambda_{\min}$ обозначим минимальное собственное значение всего семейства этих матриц $R_{s_\nu}^1$ ($\nu = 1, \dots, n_1$).

Введем контрольные операторы $R^C : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ и $R_Q^C : L_2(Q) \to L_2(Q)$, определенные формулами

$$R^C = R^2 + \lambda_{\min} I, \quad R_Q^C = P_Q R^C I_Q.$$

Здесь $I : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ — тождественный оператор.

Теорема 2.1. *Если оператор R_Q^C является положительно определенным, то оператор R_Q также положительно определен.*

Доказательство. Пусть оператор R_Q^C является положительно определенным, т. е.

$$\left(R_Q^C u, u\right)_{L_2(Q)} \geqslant c_1 (u, u)_{L_2(Q)} \quad (c_1 > 0, \ \forall u \in L_2(Q)). \tag{2.8}$$

Тогда в силу неравенств (2.8),

$$\begin{aligned} (R_Q u, u)_{L_2(Q)} &= ((R_Q^1 + R_Q^2) u, u)_{L_2(Q)} = ((R_Q^1 - \lambda_{\min} I u) + (\lambda_{\min} I u + R_Q^2) u, u)_{L_2(Q)} = \\ &= ((R_Q^1 - \lambda_{\min} I u), u)_{L_2(Q)} + (R_Q^C u, u)_{L_2(Q)} \geqslant (R_Q^C u, u)_{L_2(Q)} \geqslant c_1 (u, u)_{L_2(Q)} \quad (c_1 > 0, \ \forall u \in L_2(Q)). \end{aligned}$$

$\square$

Пример 2.2. Рассмотрим разностный оператор

$$Ru(x) = R^1u(x) + R^2u(x),$$

$$R^1u(x) = a_\tau(u(x_1+\tau, x_2) + u(x_1-\tau, x_2)),$$

$$R^2u(x) = a_0u(x_1, x_2) + a_1(u(x_1+1, x_2) + u(x_1-1, x_2)).$$

Здесь τ — иррациональное, $\dfrac{2}{3} < \tau < 1$. Обозначим $\theta = 2 - 2\tau$, $0 < \theta < \tau$. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $R_Q = P_Q R I_Q$, где $Q = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in (0,2), x_2 \in (0,1)\}$.

Орбита S границы под действием оператора R_Q бесконечна, и невозможно построить регулярное конечное разбиение области Q. Для оператора $R_Q^1 : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $R_Q^1 = P_Q R^1 I_Q$, соответствующее разбиение Q существует и состоит из двух классов подобластей.

Первый класс содержит области: $Q_{11} = (0,\theta) \times (0,1)$, $Q_{12} = (\tau, \tau+\theta) \times (0,1)$, $Q_{13} = (2\tau, 2\tau + \theta) \times (0,1)$. Для этого класса действию разностного оператора R_Q^1 соответствует умножение на матрицу R_1^1:

$$R_1^1 = \begin{pmatrix} 0 & a_\tau & 0 \\ a_\tau & 0 & a_\tau \\ 0 & a_\tau & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее минимальное собственное значение $\lambda^1_{\min} = -\sqrt{2}\,|a_\tau|$.

Второй класс состоит из подобластей: $Q_{21} = (\theta, \tau) \times (0,1)$, $Q_{12} = (\tau+\theta, 2\tau) \times (0,1)$. На этом классе подобластей действию разностного оператора соответствует умножение на матрицу R_2^1:

$$R_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & a_\tau \\ a_\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2_{\min} = -|a_\tau|.$$

Обозначим $\lambda_{\min} := \min(\lambda^1_{\min}, \lambda^2_{\min}) = -\sqrt{2}|a_\tau|$.

Сформируем контрольный оператор R^C:

$$R^Cu(x) = \tilde{a}_0u(x_1, x_2) + a_1(u(x_1+1, x_2) + u(x_1-1, x_2)),$$

где $\tilde{a}_0 = a_0 + \lambda_{\min} = a_0 - \sqrt{2}\,|a_\tau|$. Оператор R_Q^C генерирует разбиение Q на подобласти $G_1 = (0,1) \times (0,1)$, $G_2 = (1,2) \times (0,1)$.

В силу леммы 2.1 оператор R_Q^C положительно определен $\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_0 & a_1 \\ a_1 & \tilde{a}_0 \end{pmatrix} > 0 \Leftrightarrow$$

$$a_0 - \sqrt{2}\,|a_\tau| - |a_1| > 0. \tag{2.9}$$

В силу теоремы 2.1 при выполнении условия (2.9) оператор R_Q также положительно определен.

Предложенный метод может быть обобщен на случай, когда разностный оператор разбивается на сумму нескольких операторов с конечными орбитами границы.

Пусть разностный оператор $R^i : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ имеет вид

$$R^iu(x) = a_0^iu(x) + \sum_{h \in M_i} a_h^i(u(x+h) + u(x-h)) \quad (\, a_h^i \in \mathbb{R}).$$

Здесь M_i $(i = 1,..,N)$ — множества векторов, для каждого из которых отдельно орбита границы области Q конечна. Получим условия положительной определенности оператора $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $R_Q = P_Q R I_Q$, $R = \sum\limits_{i=1}^N R^i$, используя теорему 2.1.

Построим разбиение области Q и соответствующие матрицы, порожденные оператором R_Q^1. Найдем минимальное собственное значение $\lambda^1_{\min}$ для всего этого семейства матриц. Далее мы рассмотрим оператор $R_Q^{C,1} : L_2(Q) \to L_2(Q)$,

$$R_Q^{C,1} = P_Q R^{C,1} I_Q, \quad R^{C,1} = \lambda^1_{\min} I + \sum_{i=2}^N R^i.$$

В силу теоремы 2.1 оператор R_Q положительно определен, если положительно определен оператор $R_Q^{C,1}$. Для исследования положительной определенности оператора $R_Q^{C,1}$ введем оператор $\tilde{R}_Q^2 : L_2(Q) \to L_2(Q)$ по формуле:

$$\tilde{R}_Q^2 = P_Q \tilde{R}^2 I_Q, \quad \tilde{R}^2 = \lambda_{\min}^1 I + R^2.$$

Построим разбиение области Q для оператора $\tilde{R}_Q^2$ и найдем минимальное из собственных значений $\lambda_{\min}^2$ для всех соответствующих матриц.

Далее определяем оператор $R_Q^{C,2} : L_2(Q) \to L_2(Q)$,

$$R_Q^{C,2} = P_Q R^{C,2} I_Q, \quad R^{C,2} = \lambda_{\min}^2 I + \sum_{i=3}^{N} R^i.$$

Из теоремы 2.1 следует, что положительной определенности оператора $R_Q^{C,2}$ достаточно для положительной определенности оператора $R_Q^{C,1}$. По индукции получим: если оператор $R_Q^{C,N-1}$: $L_2(Q) \to L_2(Q)$, определенный формулой

$$R_Q^{C,N-1} = P_Q R^{C,N-1} I_Q, \quad R^{C,N-1} = \lambda_{\min}^{N-1} I + R^N,$$

положительно определен, то исходный оператор R_Q также положительно определен.

3. Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с конечной орбитой границы

Рассмотрим краевую задачу для дифференциально-разностного уравнения

$$A_R u = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(R_{ijQ} u_{x_j}\right)_{x_i} = f(x), \quad x \in Q, \tag{3.1}$$

$$u|_{\partial Q} = 0. \tag{3.2}$$

Здесь Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей ∂Q, $f \in L_2(Q)$. Операторы $R_{ijQ} = P_Q R_{ij} I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, где R_{ij} имеют вид:

$$R_{ij} u(x) = \sum_{h \in M_{ij}} a_{ijh} u(x+h), \quad a_{ijh} \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Здесь $M_{ij} \subseteq M$, где M — конечное множество векторов с несоизмеримыми координатами.

Определение 3.1. *Решением* краевой задачи (3.1)-(3.2) будем называть функцию $u \in \mathring{H}^1(Q)$, если для любого $v \in \mathring{H}^1(Q)$ выполнено интегральное тождество

$$(A_R u, v)_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}, \quad f \in L_2(Q). \tag{3.4}$$

Здесь $\mathring{H}^1(Q)$ — пространство Соболева функций $v \in H^1(Q)$, у которых $v|_{\partial Q} = 0$, где равенство понимается в смысле следов. В пространстве $\mathring{H}^1(Q)$ будем использовать эквивалентное скалярное произведение:

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = \int\limits_Q \nabla u \nabla \bar{v} dx.$$

Определение 3.2. Назовем уравнение (3.1) *сильно эллиптическим* в $\bar{Q}$, если для всех $u \in C_0^\infty(Q)$ выполнено неравенство типа Гординга:

$$\operatorname{Re}\,(A_R u, u)_{L_2(Q)} \geqslant c\,\|u\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}\ , \tag{3.5}$$

где $c > 0$ не зависит от u.

Определение 3.3. Задача (3.1)-(3.2) называется *первой краевой задачей*.

В этом разделе мы будем рассматривать случай конечной орбиты S границы ∂Q.

Необходимые условия и достаточные условия сильной эллиптичности для дифференциально-разностных уравнений с целочисленными сдвигами получены А. Л. Скубачевским [8].

Применим метод разбиения области, изложенный в разделе 2. Для операторов R_{ijQ} построим орбиту границы и регулярное разбиение $\Re_0$ области Q на непересекающиеся подобласти Q_{sk}, где s — номер класса разбиения и $k = 1, \ldots, N = N(s)$ — номер области в этом классе. Оператор $R_{ijs}: L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$, заданный формулой $R_{ijs} = U_s R_{ijQ} U_s{}^{-1}$, является оператором умножения на матрицу R_{ijs} порядка $N(s) \times N(s)$, элементы r_{km}^{ijs} матрицы вычисляются по формуле (2.3).

Следующая теорема доказывается аналогично [2, теорема 3.1].

Теорема 3.1. *Пусть уравнение* (3.1) *сильно эллиптическое в* $\bar{Q}$. *Тогда матрицы*

$$\sum_{i,j=1}^{n} (R_{ijs} + R_{ijs}^*)\xi_i\xi_j \tag{3.6}$$

положительно определены для всех $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ *и* $s = 1, 2, \ldots, n_1$.

Для формулировки достаточных условий сильной эллиптичности в работе [2] используются матрицы A_{ijs}^a. Эти матрицы могут либо совпадать с матрицами R_{ijs}^a, либо иметь бо́льшую размерность и окаймлять матрицы R_{ijs}^a. Предположим, что область Q и операторы таковы, что все матрицы $R_{ijs} = A_{ijs}$. Это выполняется, если найдется область $\Omega \in \mathbb{R}^n$ такая, что $\bar{Q} \subset \Omega$ и матрицы R_{ijs}, построенные для области Ω, совпадают с аналогичными матрицами для области Q. Тогда справедлива теорема, аналогичная [2, теорема 3.2].

Теорема 3.2. *Пусть матрицы*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \big(R_{ijs} + R_{ijs}^*\big)\xi_i\xi_j \tag{3.7}$$

положительно определены для всех $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ *и* $s = 1, 2, \ldots, n_2$. *Тогда уравнение* (3.1) *сильно эллиптическое в* $\bar{Q}$.

С использованием неравенства (3.5) стандартным методом доказывается фредгольмовость и дискретность спектра оператора A_R (см. [8, теорема 10.1]). Также в силу [2, теорема 8.3] оператор A_R является регулярно аккретивным оператором, для которого выполняется гипотеза Т. Като (см. [2]).

Пусть разностные операторы являются самосопряженными: $R_{ij} = R_{ij}^*$. Из [8, теорема 10.1] получим следующую теорему.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.2. *Тогда уравнение* (3.1) *является сильно эллиптическим в* $\bar{Q}$ *и для любой функции* $f \in L_2(Q)$ *краевая задача* (3.1)-(3.2) *имеет единственное решение* $u \in \mathring{H}^1(Q)$.

В работе [4] исследуются гладкость решений краевой задачи (3.1)-(3.2) в подобластях разбиения и вблизи границ.

Теорема 3.4. *Пусть уравнение* (3.1) *является сильно эллиптическим в* Q. *Тогда для любой функции* $f \in L_2(Q)$ *краевая задача* (3.1)-(3.2) *имеет единственное решение* $u \in \mathring{H}^1(Q)$. *При этом, если* $f \in L_2(Q) \bigcap H_{loc}^k(Q_{sl})$ $(s = 1, 2, \ldots,\ l = 1, \ldots, N(s))$, *то* $u \in H_{loc}^{k+2}(Q_{sl})$ $(s = 1, 2, \ldots,$ $l = 1, \ldots, N(s))$.

Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами в случае конечной орбиты границы могут быть сведены к нелокальным задачам так же, как и задачи для уравнений с целочисленными сдвигами аргументов (см. [5]).

Замечание 3.1. Свойства краевых задач для уравнений с несоизмеримыми сдвигами в случае конечной орбиты границы аналогичны свойствам задач с целочисленными сдвигами.

Рассмотрим краевую задачу для дифференциально-разностного уравнения

$$-\Delta(R_Q u(x)) = f(x), \quad x \in Q, \tag{3.8}$$

$$u|_{\partial Q} = 0. \tag{3.9}$$

Оператор $R_Q = P_Q R I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$; $R : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$,

$$Ru(x) = a_0 u(x) + \sum_{h \in M} a_h (u(x+h) + u(x-h)), \quad a_h \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Здесь M — множество векторов с несоизмеримыми координатами, при этом орбита границы под действием сдвигов множества M конечна.

Эта краевая задача является частным случаем задачи (3.1)-(3.2). Из теоремы 3.4 следует

Теорема 3.5. *Пусть оператор R_Q является положительно определенным. Тогда уравнение* (3.8) *является сильно эллиптическим в Q и для любой функции $f \in L_2(Q)$ краевая задача* (3.8)-(3.9) *имеет единственное решение $u \in \mathring{H}(Q)$. При этом, если $f \in L_2(Q) \bigcap H^k_{loc}(Q_{sl})$* $(s = 1, 2, \dots, \ l = 1, \dots, N(s))$, *то $u \in H^{k+2}_{loc}(Q_{sl})$* $(s = 1, 2, \dots, \ l = 1, \dots, N(s))$.

Пример 3.1. Рассмотрим краевую задачу (3.8)-(3.9) для разностного оператора R_Q из примера 2.1 при $N = 1$. Если выполнены условия (2.7), оператор R_Q является положительно определенным, и в силу теоремы 3.5 решение существует и сохраняет гладкость в подобластях разбиения.

4. Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с бесконечной орбитой границы

Рассмотрим краевую задачу (3.1)-(3.2) для случая, когда орбита S границы состоит из бесконечного числа компонент.

Получим условия сильной эллиптичности оператора A_R. Предположим, что разностные операторы $R_{ijQ} = P_Q R_{ij} I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ можно разбить на суммы операторов: $R_{ij} = R^a_{ij} + R^b_{ij}$, $R^a_{ij} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$, $R^b_{ij} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$, которые имеют вид

$$R^a_{ij} u(x) = \sum_{h \in M^1_{ij}} a_{ijh} u(x+h), \quad a_{ijh} \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

$$R^b_{ij} u(x) = \sum_{p \in M^2_{ij}} b_{ijp} x u(x+p), \quad b_{pij} \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Здесь $M^k_{ij} \subseteq M^k$ $(k = 1, 2)$, где M^k — конечные множества векторов, при этом орбиты границы под действием сдвигов только из множества M^1 и только из множества M^2 конечны.

Введем вспомогательный дифференциально-разностный оператор

$$A^a_R u = -\sum_{i,j=1}^{n} (R^a_{ijQ} u_{x_j})_{x_i}, \quad x \in Q. \tag{4.3}$$

Этот оператор имеет конечную орбиту границы. Для его исследования применим метод, изложенный в разделе 2.

Для операторов R^a_{ijQ} построим орбиту границы и соответствующее регулярное разбиение $\mathcal{R}^a_0$ области Q на непересекающиеся подобласти Q_{sk}, где s — номер класса разбиения, а $k = 1, \dots, N = N(s)$ — номер области в этом классе. В силу формулы (1.3) оператор $R^a_{ijs} : L^N_2(Q_{s1}) \to L^N_2(Q_{s1})$, заданный формулой $R^a_{ijs} = U_s R^a_{ijQ} {U_s}^{-1}$, является оператором умножения на матрицу R^a_{ijs} порядка $N(s) \times N(s)$.

Для разностных операторов R^b_{ijQ} построим разбиение $\mathcal{R}^b_0$ области Q на непересекающиеся подобласти $G_{\alpha k}$, где α — номер класса разбиения, а $k = 1, \dots, N = N(\alpha)$ — номер области в этом классе. Оператор $R^b_{ij\alpha} : L^N_2(G_{\alpha 1}) \to L^N_2(G_{\alpha 1})$, заданный формулой $R^b_{ij\alpha} = U_\alpha R^b_{ijQ} {U_\alpha}^{-1}$, является оператором умножения на матрицу $R^b_{ij\alpha}$ порядка $N(\alpha) \times N(\alpha)$.

Как и в предыдущем разделе, будем предполагать, что область Q и разностные операторы таковы, что все матрицы $R_{ijs} = A_{ijs}$.

Теорема 4.1. *Пусть для вектора* $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ *матрицы*

$$K_s = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (R^a_{ijs} + R^{a*}_{ijs}) \xi_i \xi_j - E \sum_{i=1}^{n} k_i \xi_i^2 \tag{4.4}$$

неотрицательно определены для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ *и* $s = 1, 2, \ldots, n_1$. *При этом матрицы*

$$K_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (R^b_{ija} + R^{b*}_{ija}) \xi_i \xi_j + E \sum_{i=1}^{n} k_i \xi_i^2 \tag{4.5}$$

положительно определены для всех $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ *и* $\alpha = 1, 2, \ldots, n_2$.

Тогда уравнение (3.1) *— сильно эллиптическое в* $\bar{Q}$. *Здесь* E *— единичные матрицы размерности* $N(s)$ *или* $N(\alpha)$.

Доказательство этой теоремы приведено в работе [3].

В общем случае, если множество сдвигов M разностного оператора разбивается на несколько (более двух) подмножеств, для каждого из которых орбита конечна, условия сильной эллиптичности можно получить, используя метод, аналогичный методу, описанному в разделе 2.

Пусть $R_{ij} = R^*_{ij}$. Аналогично [8, теорема 10.1] доказывается следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1. *Тогда уравнение* (3.1) *является сильно эллиптическим в* $\bar{Q}$, *и для любой функции* $f \in L_2(Q)$ *краевая задача* (3.1)-(3.2) *имеет единственное решение* $u \in \mathring{H}^1(Q)$.

Рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta(R_Q u(x)) = f(x), \quad x \in Q, \tag{4.6}$$

$$u|_{\partial Q} = 0. \tag{4.7}$$

Оператор $R_Q = P_Q R I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, где $R = R^1 + R^2$, а разностные операторы $R^1 : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ и $R^2 : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ имеют вид:

$$R^1 u(x) = a_0 u(x) + \sum_{h \in M^1} a_h (u(x+h) + u(x-h)), \quad a_h \in \mathbb{R}, \tag{4.8}$$

$$R^2 u(x) = b_0 u(x) + \sum_{p \in M^2} b_p (u(x+p) + u(x-p)), \quad b_p \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Здесь M^k $(k = 1, 2)$ — множества векторов, для каждого из которых в отдельности орбиты границы конечны.

Используя теорему 4.2, получим следующую теорему.

Теорема 4.3. *Пусть оператор* R^C_Q *является положительно определенным. Тогда уравнение* (4.6) *является сильно эллиптическим в* Q *и для любой функции* $f \in L_2(Q)$ *краевая задача* (4.6)-(4.7) *имеет единственное решение* $u \in \mathring{H}^1(Q)$.

Пример 4.1. Рассмотрим краевую задачу (4.6)-(4.7) для разностного оператора R_Q из примера 2.2. Если выполнены условия (2.9), то операторы R^C_Q, R_Q являются положительно определенными, и в силу теоремы 4.3 решение $u \in \mathring{H}^1(Q)$ существует для любой $f \in L_2(Q)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *54*, № 2. — С. 3–138.
2. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *32*, № 2. — С. 261–278.
3. *Ivanova E. P.* On coercivity of differential-difference equations with incommensurable translations of arguments// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2019. — *239*, № 6. — С. 802–816.
4. *Ivanova E. P.* On smooth solutions of differential-difference equations with incommensurable shifts of arguments// Math. Notes. — 2019. — *105*, № 1. — С. 140–144.

5. *Ivanova E. P.* Boundary-value problems for differential-difference equations with incommensurable shifts of arguments reducible to nonlocal problems// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2022. — *265*, № 5. — C. 781–790.
6. *Rossovskii L. E.* Elliptic functional differential equations with incommensurable contractions// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — *12*. — C. 226–239.
7. *Rossovskii L. E., Tovsultanov A. A.* Elliptic functional differential equations with affine transformations// J. Math. Anal. Appl. — 2019. — *480*. — 123403.
8. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and aplications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 1997.

Е. П. Иванова
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия
E-mail: elpaliv@yandex.ru

UDC 517.929
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-664-675
EDN: ZDAWGY

Boundary-value problems for differential-difference equations with finite and infinite orbits of boundaries

E. P. Ivanova

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

Abstract. We consider boundary-value problems for differential-difference equations containing incommensurable shifts of arguments in the higher-order terms. We show that for the case when the orbits of the domain boundary generated by the set of shifts of the difference operator are finite, the original problem is similar to the boundary-value problem for differential-difference equations with integer shifts of arguments. The case of an infinite boundary orbit is also studied.

Keywords: differential-difference equation, boundary-value problem, incommensurable shifts of arguments.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author expresses gratitude to A. L. Skubachevskii for posing the problem and interest in this work. The author declares that no financial support was received.

For citation: E. P. Ivanova, "Boundary-value problems for differential-difference equations with finite and infinite orbits of boundaries," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 4, 664–675. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-664-675

REFERENCES

1. L. E. Rossovskii, "Ellipticheskie funktsional'no-differentsial'nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii" [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, No. 2, 3–138 (in Russian).

2. A. L. Skubachevskii, “Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh differentsial’no-raznostnykh uravneniy i ikh prilozheniya” [Boundary-value problems for elliptic differential-difference equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **32**, No. 2, 261–278 (in Russian).
3. E. P. Ivanova, “On coercivity of differential-difference equations with incommensurable translations of arguments,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2019, **239**, No. 6, 802–816.
4. E. P. Ivanova, “On smooth solutions of differential-difference equations with incommensurable shifts of arguments,” *Math. Notes*, 2019, **105**, No. 1, 140–144.
5. E. P. Ivanova, “Boundary-value problems for differential-difference equations with incommensurable shifts of arguments reducible to nonlocal problems,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2022, **265**, No. 5, 781–790.
6. L. E. Rossovskii, “Elliptic functional differential equations with incommensurable contractions,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, **12**, 226–239.
7. L. E. Rossovskii and A. A. Tovsultanov, “Elliptic functional differential equations with affine transformations,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2019, **480**, 123403.
8. A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and aplications*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

E. P. Ivanova
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia
E-mail: `elpaliv@yandex.ru`