

УДК 517.984.5

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-33-54

EDN: TPUIIY

СПЛАЙНЫ, БИГАРМОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР И ПРИБЛИЖЕННОЕ СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ

М. БЕН-АРЦИ

Institute of Mathematics, The Hebrew University, Иерусалим, Израиль

Аннотация. Бигармонический оператор играет центральную роль в широком спектре физических моделей, таких как теория упругости и формулировка функции потока уравнений Навье—Стокса. Его спектральная теория была тщательно изучена. В частности, одномерный случай (на интервале) служит базовой моделью задачи Штурма—Лиувилля высокого порядка. Потребность в соответствующих численных симуляциях привела к многочисленным работам. Этот обзор фокусируется на дискретном бигармоническом исчислении. Основным объектом этого исчисления является компактный дискретный бигармонический оператор (ДБО) высокого порядка. ДБО строится в терминах дискретной эрмитовой производной. Отмечается удивительно сильная связь между кубическими сплайн-функциями (на интервале) и ДБО. В частности, ядро обратного дискретного оператора (с точностью до масштабирования) равно сеточной оценке ядра $\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^4\right]^{-1}$. Этот факт влечет за собой вывод о том, что собственные значения ДБО сходятся (с «оптимальной» скоростью $O(h^4)$) к непрерывным. Другим следствием является справедливость *принципа сравнения*. Хорошо известно, что для уравнения четвертого порядка не существует принципа максимума. Однако имеет место положительность как для непрерывного, так и для дискретного бигармонического уравнения, а это означает, что в обоих случаях ядра сохраняют порядок.

Ключевые слова: кубические сплайны, эрмитова производная, дискретный бигармонический оператор, собственные значения, ядро Грина.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. С удовольствием выражаем благодарность Жану-Пьеру Круазилло, Далии Фишелов и Гаю Катриэлю за весьма плодотворные дискуссии.

Для цитирования: М. Бен-Арци. Сплайны, бигармонический оператор и приближенное собственное значение // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 1. С. 33–54. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-33-54>

1. ВВЕДЕНИЕ

Целью данной статьи является обзор некоторых недавних результатов, касающихся удивительной связи между кубическими сплайн-функциями и дискретным приближением одномерного бигармонического оператора.

Оператор $\left(\frac{d}{dx}\right)^4$ на интервале $[0, 1]$, безусловно, является простейшим мыслимым примером эллиптического одномерного оператора четвертого порядка. Как таковая, его спектральная теория очень хорошо изучена [10, гл. 5] или [14]. В классической терминологии его изучение обозначается как «теория Штурма—Лиувилля четвертого порядка». В более общем смысле можно рассмотреть

спектральную структуру операторов вида $\left(\frac{d}{dx}\right)^4 + \frac{d}{dx}\left(A(x)\frac{d}{dx}\right) + B(x)$. Для таких операторов было доказано в [8], что изоспектральное множество (коэффициентов $A(x)$, $B(x)$) является бесконечномерным вещественно-аналитическим многообразием (при условии, что спектр является простым).

Эллиптические операторы четвертого порядка, и в частности бигармонический оператор, играют важную роль в различных физических моделях, таких как теория упругости, формулировка функции потока уравнений Навье—Стокса [4] или квази-геострофические течения в океане [21].

Существует обширная литература, посвященная различным дискретным приближениям к решениям уравнений четвертого порядка. Поскольку в этом обзоре мы сосредоточимся на *одномерной задаче на собственные значения*, мы будем ссылаться только на исследования, которые тесно связаны с этой проблемой.

Численная оценка собственных значений была фундаментальной целью в развитии численного анализа и, как таковая, предметом многочисленных исследований. В качестве показательных примеров можно упомянуть метод выборки «типа Шеннона» в [7], «матричные методы» в [24], методы конечных элементов в [2] и 7-диагональный метод конечных разностей в [9]. Целью этих работ было получение собственных значений непрерывного оператора с помощью подходящей процедуры аппроксимации.

Здесь мы выделяем приближение «высокого порядка» собственных значений одномерного бигармонического оператора. Однако подход, адаптированный здесь, основан на «дискретной эллиптической теории», как недавно было изложено в [5]. Он включает в себя построение дискретных эллиптических операторов, которые, как можно показать, обладают классическими эллиптическими свойствами, такими как коэрцитивность и регулярность. Фундаментальным дискретным оператором здесь является *дискретный бигармонический оператор* (ДБО) δ_x^4 (см. (2.9)). Идея состоит в том, чтобы рассматривать этот ДБО как конечномерное *операторное* приближение к $\left(\frac{d}{dx}\right)^4$ и сделать вывод, что собственные значения последнего являются пределами (при измельчении сетки) собственных значений первого.

Хорошо известно, что сходимость конечномерных приближений к бесконечномерному, неограниченному дифференциальному оператору не влечет за собой сходимости соответствующих спектров. Поэтому требуется более глубокая связь между дискретными и непрерывными операторами. Мост между двумя операторами достигается с помощью классических кубических сплайн-функций.

Базовым инструментом дискретного эллиптического исчисления является *дискретная эрмитова производная* на интервале, которая дает точную аппроксимацию четвертого порядка производной гладкой функции. Она стала краеугольным камнем в построении ДБО [15] и ее расширения до полной задачи Штурма—Лиувилля четвертого порядка [5].

Структура данной обзорной статьи следующая.

В разделе 2 мы напомним определения дискретных конечно-разностных операторов и, в частности, вводим эрмитову производную и дискретный бигармонический оператор δ_x^4 .

В пункте 3.1 мы напомним базовую (классическую) конструкцию кубических сплайн-функций на интервале.

В пункте 3.2 мы впервые устанавливаем равенство эрмитовой производной и производной интерполяционного кубического сплайна. Это фундаментальный факт, связывающий два нелокальных приближения четвертого порядка производной.

Затем представлена связь между дискретным бигармоническим оператором δ_x^4 и интерполирующей кубической сплайн-функцией. Фактически, это главная цель данной статьи. Напомним, что кубические сплайны являются функциями C^2 с конечными скачками производных третьего порядка в точках сетки. Основной результат здесь (предложение 3.2) состоит в том, что размеры этих скачков определяются ДБО, действующим на значения сетки. Мы не смогли найти такой результат в «литературе по сплайнам», возможно, из-за того, что ДБО там явно не рассматривается.

Эта связь позволяет нам вспомнить в разделе 4 результаты о положительности для непрерывных и дискретных операторов четвертого порядка (см. предложение 4.1 и предложение 4.2).

Напомним, что для оператора четвертого порядка не существует принципа максимума-минимума, так что свойство «сохранения порядка» может служить заменой в некоторых случаях.

В разделе 5 мы сначала приводим явный вид ядра (функции Грина) непрерывного оператора. В первом случае это ядро действует в $L^2(0,1)$. Затем мы представляем его расширение на отрицательное пространство Соболева $H^{-2}(0,1)$. Это пространство включает все конечные меры и, в частности, все сеточные функции (идентифицированные как линейные комбинации дельта-функций в узлах сетки). Используя связь с кубическими сплайн-функциями, получаем замечательный результат: дискретная резольвента (а именно, ядро $(\delta_x^4)^{-1}$) является просто сеточной оценкой непрерывного ядра с точностью до масштабирования. Действительно, это можно рассматривать как альтернативное, очень естественное определение компактного дискретного бигармонического оператора.

Наконец, раздел 6 посвящен предмету данного обзора, а именно, взаимосвязи между *собственными значениями* непрерывных и дискретных операторов. Связь между дискретными и непрерывными ядрами подразумевает, что дискретные собственные значения фактически получаются с помощью метода Нистрома [26].

Именно вышеупомянутая связь между ядрами влечет за собой не только простую сходимость дискретных собственных значений к непрерывным, но и то, что эта сходимость происходит с «оптимальной» скоростью четвертого порядка (теорема 6.1). Хотя мы не приводим полных деталей доказательства, мы указываем, как этот результат получается путем объединения двух ингредиентов:

1. Подходящая адаптация (лемма 6.1) более общей абстрактной теоремы о сходимости [18,20]. Однако мы решили предоставить самодостаточное, гораздо более простое доказательство, которое строится на аналитической теории конечномерных возмущений, изложенной в классической книге Като [17].
2. Возможность оценки разностей непрерывных и дискретных операторов, включая оптимальные скорости сходимости, в терминах разностей их соответствующих ядер, см. предложение 6.2.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Снабдим интервал $\Omega = [0,1]$ равномерной сеткой

$$x_j = jh, \quad 0 \leq j \leq N, \quad h = \frac{1}{N}.$$

Аппроксимация осуществляется сеточными функциями $\mathbf{v}$, определенными на $\{x_j, 0 \leq j \leq N\}$. Пространство этих сеточных функций обозначим через l_h^2 . Для их компонент используем либо $\mathbf{v}_j$, либо $\mathbf{v}(x_j)$.

Для каждой гладкой функции $f(x)$ мы определяем связанную с ней сеточную функцию

$$f_j^* = f(x_j), \quad 0 \leq j \leq N. \quad (2.1)$$

Дискретное скалярное произведение l_h^2 определяется как

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_h = h \sum_{j=0}^N \mathbf{v}_j \mathbf{w}_j,$$

а соответствующая норма

$$|\mathbf{v}|_h^2 = h \sum_{j=0}^N \mathbf{v}_j^2. \quad (2.2)$$

Для линейных операторов $\mathcal{A} : l_h^2 \rightarrow l_h^2$ мы используем $|\mathcal{A}|_h$ для обозначения нормы оператора. Дискретная sup-норма определяется как

$$|\mathbf{v}|_\infty = \max_{0 \leq j \leq N} \{|\mathbf{v}_j|\}. \quad (2.3)$$

Дискретное однородное пространство сеточных функций определяется как

$$l_{h,0}^2 = \{\mathbf{v}, \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_N = 0\}. \quad (2.4)$$

Учитывая $\mathbf{v} \in l_{h,0}^2$, введем основные (центральные) операторы конечных разностей

$$\begin{aligned} (\delta_x \mathbf{v})_j &= \frac{1}{2h}(\mathbf{v}_{j+1} - \mathbf{v}_{j-1}), \quad 1 \leq j \leq N-1, \\ (\delta_x^2 \mathbf{v})_j &= \frac{1}{h^2}(\mathbf{v}_{j+1} - 2\mathbf{v}_j + \mathbf{v}_{j-1}), \quad 1 \leq j \leq N-1, \end{aligned} \quad (2.5)$$

Краеугольным камнем нашего подхода к операторам конечных разностей является введение *эрмитовой производной* [5] $\mathbf{v} \in l_{h,0}^2$, которая заменит δ_x . Она будет служить не только для аппроксимации (до четвертого порядка точности) производных первого порядка, но и в качестве фундаментального строительного блока при построении аппроксимаций конечных разностей для производных более высокого порядка.

Сначала мы введем оператор Симпсона

$$(\sigma_x \mathbf{v})_j = \frac{1}{6}\mathbf{v}_{j-1} + \frac{2}{3}\mathbf{v}_j + \frac{1}{6}\mathbf{v}_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq N-1. \quad (2.6)$$

Обратите внимание на операторное отношение (действительно в $l_{h,0}^2$)

$$\sigma_x = I + \frac{h^2}{6}\delta_x^2, \quad (2.7)$$

так что σ_x является «приближением к тождеству».

Эрмитова производная $\mathbf{v}_x$ теперь определяется как

$$(\sigma_x \mathbf{v}_x)_j = (\delta_x \mathbf{v})_j, \quad 1 \leq j \leq N-1. \quad (2.8)$$

Замечание 2.1. В определении (2.8) необходимо указать значения $(\mathbf{v}_x)_j$, $j = 0, N$, чтобы левая часть имела смысл (для $j = 1, N-1$). Если не указано иное, в дальнейшем мы будем предполагать, что $\mathbf{v}_x \in l_{h,0}^2$, а именно

$$(\mathbf{v}_x)_0 = (\mathbf{v}_x)_N = 0.$$

В частности, линейное соответствие $l_{h,0}^2 \ni \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_x \in l_{h,0}^2$ корректно определено, но δ_x имеет нетривиальное ядро.

Дискретный бигармонический оператор (ДБО) задается выражением (при $\mathbf{v}, \mathbf{v}_x \in l_{h,0}^2$)

$$\delta_x^4 \mathbf{v} = \frac{12}{h^2}[\delta_x \mathbf{v}_x - \delta_x^2 \mathbf{v}]. \quad (2.9)$$

Погрешность усечения ДБО составляет $O(h^4)$ во внутренних точках, но только $O(h)$ в точках вблизи границы [4, предложение 10.8]. Однако полная («оптимальная») точность четвертого порядка достигается обратным оператором (см. (2.15) ниже). Это фундаментальный факт в настоящем исследовании.

Далее мы вводим замену четвертого порядка для оператора δ_x^2 (см. [4, уравнение (10.50)(с)]),

$$(\tilde{\delta}_x^2 \mathbf{v})_j = 2(\delta_x^2 \mathbf{v})_j - (\delta_x \mathbf{v}_x)_j, \quad 1 \leq j \leq N-1. \quad (2.10)$$

Обратите внимание, что в соответствии с замечанием 2.1 оператор $\tilde{\delta}_x^2$ определен на сеточных функциях $\mathbf{v} \in l_{h,0}^2$, так что также $\mathbf{v}_x \in l_{h,0}^2$.

Связь между двумя операторами разности для производной второго порядка определяется соотношением

$$-\tilde{\delta}_x^2 = -\delta_x^2 + \frac{h^2}{12}\delta_x^4. \quad (2.11)$$

Замечание 2.2. Очевидно, что операторы δ_x , δ_x^2 , δ_x^4 зависят от h , но для простоты записи эта зависимость явно не указывается.

Тот факт, что бигармонический дискретный оператор δ_x^4 является положительным (в частности, симметричным), доказан в [4, леммы 10.9, 10.10]. Следовательно, его обратный оператор $(\delta_x^4)^{-1}$ также является положительным. Фактически, он удовлетворяет свойству сильной коэрцитивности, что также установлено в вышеупомянутой ссылке.

Другой способ (ближе к эрмитовому подходу) определения операторов конечных разностей $\tilde{\delta}_x^2$ и δ_x^4 заключается в использовании «полиномиального подхода» [4, пункт 10.3] следующим образом.

Пусть $q(x)$ — многочлен четвертого порядка, такой что

$$q(x_j) = \mathbf{v}_j, \quad q(x_{j\pm 1}) = \mathbf{v}_{j\pm 1}, \quad q'(x_{j\pm 1}) = (\mathbf{v}_x)_{j\pm 1}.$$

Тогда

$$(\tilde{\delta}_x^2 \mathbf{v})_j = q''(x_j), \quad (\delta_x^4 \mathbf{v})_j = q^{(4)}(x_j). \quad (2.12)$$

Дискретный бигармонический оператор дает очень точное приближение к непрерывному оператору («оптимальная точность 4-го порядка»), как видно из следующего утверждения [4, теорема 10.19].

Утверждение 2.1. Пусть $f(x) \in C^4(\Omega)$, $\Omega = [0, 1]$. Пусть $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^4 u(x) = f(x) \quad (2.13)$$

с однородными граничными условиями

$$u(0) = \frac{d}{dx}u(0) = u(1) = \frac{d}{dx}u(1) = 0. \quad (2.14)$$

Тогда

$$|u^* - (\delta_x^4)^{-1} f^*|_\infty = O(h^4). \quad (2.15)$$

Замечание 2.3. Запись « $O(h^4)$ » здесь означает, что существует константа $C > 0$, зависящая только от f , такая, что для всех целых чисел $N > 1$

$$|u^* - (\delta_x^4)^{-1} f^*|_\infty \leq Ch^4, \quad h = \frac{1}{N}.$$

Заметим, что сеточные функции в этой оценке определены на сетке с (переменным) размером ячейки h .

3. СПЛАЙНЫ, ЭРМИТОВЫ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИСКРЕТНЫЙ БИГАРМОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР

3.1. Необходимые сведения о кубических сплайнах. В этом подразделе мы напомним основные факты о кубических сплайнах, которые будут иметь важное значение в данном исследовании.

Как и в разделе 2, рассмотрим интервал $\Omega = [0, 1]$ с равномерной сеткой

$$x_j = jh, \quad 0 \leq j \leq N, \quad h = \frac{1}{N}.$$

Зафиксируем вектор $\mathbf{f} = \{f_j\}_{j=0}^N$ так, что $f_0 = f_N = 0$, а именно $\mathbf{f} \in l_{h,0}^2$ (см. (2.4)), и рассмотрим семейство

$$\mathcal{A} = \{u \in H_0^2(\Omega), \quad u_j = f_j, \quad j = 0, 1, \dots, N\}.$$

Пространство $H_0^2(\Omega)$ представляет собой пространство функций, имеющих первую и вторую (дистрибутивную) производные в $L^2(\Omega)$ и обращающихся в нуль вместе со своими производными первого порядка в конечных точках.

Хорошо известно, что норму в $H_0^2(\Omega)$ можно определить как

$$\|u\|_{H_0^2(\Omega)}^2 = \int_0^1 |u''(x)|^2 dx,$$

и в дальнейшем мы будем использовать эту норму.

Мы рассматриваем функционал

$$I(u) = \int_0^1 |u''(x)|^2 dx, \quad u \in H_0^2(\Omega).$$

Нас интересует минимизатор этого функционала на множестве $\mathcal{A}$.

Утверждение 3.1. Функционал имеет единственный минимизатор на $\mathcal{A}$, который мы обозначаем как s_f ,

$$I(s_f) < I(g), \quad s_f \neq g \in \mathcal{A}.$$

Доказательство этого классического факта может быть получено стандартными методами вариационного исчисления [13, 23]. Чисто алгебраическое доказательство можно найти в [1, теорема 3.4.3] или [11, гл. IV]. Читатель также может найти доказательство следующего утверждения в этих последних ссылках.

Утверждение 3.2.

1. s_f — кубический полином в каждом интервале $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, N-1$.
2. $s_f \in C_0^2(\Omega)$.
3. Предыдущие два свойства, дополненные ограничениями $s_f(x_j) = f_j$, $j = 1, \dots, N-1$, и $s_f(x_0) = s'_f(x_0) = s_f(x_N) = s'_f(x_N) = 0$, определяют s_f однозначно.

Определение 3.1. Функция s_f называется *кубическим сплайном* (первого типа), соответствующим ограничениям

$$s_f(x_j) = f_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad s_f(x_0) = s'_f(x_0) = s_f(x_N) = s'_f(x_N) = 0.$$

Утверждение 3.3. Рассмотрим векторы $f = \{f_j\}_{j=0}^N$ такие, что $f_0 = f_N = 0$, а именно $f \in l_{h,0}^2$ (см. (2.4)). Тогда отображение $f \mapsto s_f \in H_0^2(\Omega)$ является взаимно однозначным и линейным.

Замечание 3.1. Свойство положительности кубического сплайна установлено в следствии 4.1 ниже.

3.2. Кубические сплайны и дискретный бигармонический оператор. Используем здесь обозначения раздела 2.

Пусть $u \in l_{h,0}^2$ — сеточная функция, обращающаяся в нуль в конечных точках, а $s_u \in H_0^2(\Omega)$ — соответствующая сплайн-функция (утверждение 3.3).

Мы используем такое же обозначение $u_j = u(x_j)$.

Пусть u_x — эрмитова производная u , и в конечных точках положим

$$u_x(x_0) = s'_u(x_0) = 0, \quad u_x(x_N) = s'_u(x_N) = 0. \quad (3.1)$$

Замечательный факт о равенстве эрмитовой производной и производной сплайн-функции сформулирован в следующем предложении (доказательство см. в [6]).

Предложение 3.1. Для всех внутренних узлов выполняется $s'_u(x_j) = u_x(x_j)$, $1 \leq j \leq N-1$.

Аналогично $u \in l_{h,0}^2$, пусть $v \in l_{h,0}^2$ будет сеточной функцией, равной нулю в конечных точках, и пусть s_v будет соответствующей сплайн-функцией. В конечных точках мы снова накладываем граничные условия (3.1).

Утверждение 3.4. Отображение $(u, v) \rightarrow \int_0^1 s''_u(x) s''_v(x) dx$ является скалярным произведением на $l_{h,0}^2$.

Доказательство. Ввиду утверждения 3.3 отображение является билинейным. Более того, если $\int_0^1 |s''_u(x)|^2 dx = 0$, то $s''_u \equiv 0$, и поскольку $s_u \in H_0^2$, то также $s_u \equiv 0$, что влечёт $u = 0$. $\square$

Обозначим через $\delta_x^4 u$ действие ДБО на u (см. (2.9)). Глубокая связь между $\delta_x^4 u$ и производными s_u дается в следующем предложении (см. доказательство в [6]).

Предложение 3.2. Пусть $u, u_x, v, v_x \in l_{h,0}^2$.

1. Дискретное скалярное произведение $\delta_x^4 u$ и v удовлетворяет условию

$$(\delta_x^4 u, v)_h = \int_0^1 s''_u(x) s''_v(x) dx. \quad (3.2)$$

2. Скачок производных третьего порядка кубических сплайнов в узлах определяется выражением

$$s_u'''(x_j^+) - s_u'''(x_j^-) = h(\delta_x^4 u)_j, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (3.3)$$

Замечание 3.2. В литературе (например, [1, 11]) можно найти различные выражения для скачка производных третьего порядка кубического сплайна. Однако уравнение (3.3) дает новое выражение, которое можно интерпретировать как «производную четвертого порядка» функции в узле.

3.3. Сравнение конечно-элементных и ДБО-подходов к $\left(\frac{d}{dx}\right)^4 u(x) = f(x)$. Связь ДБО с кубическими сплайн-функциями, выраженная в предложении 3.2, поднимает вопрос о связи между «дискретным функциональным исчислением» и конечно-элементными подходами к аппроксимации непрерывного бигармонического уравнения. В последующем обсуждении мы проясним различие между ними.

Если кубические сплайны взять в качестве «базисных функций», то вариационная формулировка с использованием методологии конечных элементов [19, 23] означает, что мы ищем сеточную функцию u , которая удовлетворяет

$$\int_0^1 s_u''(x) s_v''(x) dx = \int_0^1 s_{f*}(x) s_v(x) dx, \quad \text{для всех сеточных функций } v \in l_{h,0}^2. \quad (3.4)$$

С другой стороны, используемый здесь дискретный функциональный подход подразумевает, что мы ищем сеточную функцию u , которая удовлетворяет условию

$$(\delta_x^4 u, v)_h = (f^*, v)_h \quad \text{для всех сеточных функций } v \in l_{h,0}^2. \quad (3.5)$$

В то время как левые части в уравнениях (3.4) и (3.5) равны (предложение 3.2), это в общем случае неверно для правых частей. Это показывает, что, несмотря на связь между ДБО и кубическими сплайнами, изложенную выше, схема ДБО не эквивалентна конечно-элементному методу, основанному на этих сплайнах.

4. Положительность

Хорошо известно, что (в общем случае) не существует принципа максимума для эллиптических частных дифференциальных операторов порядка выше двух. Для бигармонического уравнения в многомерных областях существуют версии этого принципа, которые включают оценки градиента решения, см. [22] и приведенную там библиографию. При граничных условиях Дирихле (единственных, которые здесь рассматриваются) *свойство сохранения положительности* означает, что $\Delta^2 u \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$. На самом деле это *свойство области*. Принцип максимума подразумевает сохранение положительности, но, конечно, не наоборот.

В одномерном случае общее исследование линейных дифференциальных неравенств дано в [25]. В многомерном случае (исключая одномерный случай) мы ссылаемся на [16] и приведенную там библиографию.

В нашем одномерном случае мы имеем следующее предложение. Помимо того, что оно само по себе представляет интерес, оно мотивирует требование, чтобы дискретные аппроксимации обладали тем же свойством (которому удовлетворяет ДБО, см. предложение 4.2 ниже). Доказательство этого свойства в дискретном случае, в свою очередь, подразумевает свойство положительности кубических сплайнов (следствие 4.1 ниже).

Предложение 4.1. Пусть

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^4 u(x) = f(x),$$

где $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$. Тогда справедлив следующий принцип сравнения: если $f(x) \geq 0$, $x \in \Omega$, то также $u(x) \geq 0$, $x \in \Omega$.

Доказательство. Предположим противное, что для некоторого $y \in (0, 1)$ мы имеем $u(y) < 0$. Мы можем предположить, что y является точкой минимума для u , так что

$$u'(y) = 0, \quad u''(y) \geq 0.$$

Поскольку u' обращается в нуль в конечных точках, мы заключаем, что существуют точки

$$\xi \in (0, y), \quad \eta \in (y, 1),$$

такие что

$$u''(\xi) = u''(\eta) = 0.$$

Пусть

$$\begin{aligned} a &= \inf \left\{ \xi \in \Omega, \quad u''(\xi) = 0 \right\}, \\ b &= \sup \left\{ \eta \in \Omega, \quad u''(\eta) = 0 \right\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Рассмотрим функцию $v(x) = u''(x)$. Она удовлетворяет в интервале $[a, b]$ неравенству

$$v''(x) = f(x) \geq 0,$$

а также $v(a) = v(b) = 0$ и $v(y) \geq 0$. Стандартный принцип максимума теперь дает

$$v(x) \equiv 0, \quad x \in [a, b],$$

следовательно, также $u'(x) \equiv u'(y) = 0$, $x \in [a, b]$.

Если $a > 0$, то получаем противоречие, так как существует точка $\xi \in (0, a)$ с $u''(\xi) = 0$. Аналогично в случае $b < 1$. Мы заключаем, что $u'(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$, следовательно, $u(x) \equiv u(y) < 0$, $x \in [0, 1]$. Однако это противоречит граничному условию $u(0) = u(1) = 0$. $\square$

Замечание 4.1. В разделе 5 ниже мы выводим выражение для резольвентного ядра (5.3). Поскольку легко видеть, что ядро неотрицательно, мы получаем еще одно доказательство предложения 4.1.

4.1. Положительность дискретного бигармонического оператора. Теперь покажем, что то же свойство положительности справедливо и для дискретного бигармонического оператора.

Предложение 4.2. Пусть

$$\delta_x^4 u = f,$$

где $u, u_x \in l_{h,0}^2$. Тогда справедлив следующий принцип сравнения: если $f_j \geq 0$, $0 \leq j \leq N$, то также $u_j \geq 0$, $0 \leq j \leq N$.

Доказательство. Предположим противное, что $u_{j_0} < 0$ для некоторого индекса $1 \leq j_0 \leq N-1$.

Пусть $s_u \in C_0^2(\Omega)$ будет соответствующей сплайн-функцией. Поскольку $s_u(x_{j_0}) = u_{j_0} < 0$, то отсюда следует, что существует минимальная точка $y \in \Omega$, такая что

$$s_u(y) = \min \{s_u(x), x \in \Omega\} < 0.$$

Имеем, что

$$s'_u(y) = 0, \quad s''_u(y) \geq 0. \tag{4.2}$$

Поскольку s'_u обращается в нуль в конечных точках, мы заключаем, что существуют точки

$$\xi \in (0, y), \quad \eta \in (y, 1),$$

такие, что

$$s''_u(\xi) = s''_u(\eta) = 0.$$

Пусть

$$\begin{aligned} a &= \inf \left\{ \xi \in \Omega, \quad s''_u(\xi) = 0 \right\}, \\ b &= \sup \left\{ \eta \in \Omega, \quad s''_u(\eta) = 0 \right\}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Пусть $w(x) = s''_u(x)$. Функция w непрерывна и линейна в интервалах сетки. Ввиду предложения 3.2 получаем, в смысле распределений,

$$w'' = h \sum_{j=1}^{N-1} f_j \delta_{x_j} \geq 0, \tag{4.4}$$

где δ_y — мера Дирака в точке y .

Поскольку $w(a) = w(b) = 0$, стандартный принцип максимума дает

$$w(x) \equiv 0, \quad x \in [a, b],$$

следовательно,

$$s'_u(x) \equiv s'_u(y) = 0, \quad x \in [a, b],$$

и в частности $s'_u(a) = s'_u(b) = 0$.

Как и в доказательстве предложения 4.1, мы заключаем, что $a = 0$ и $b = 1$, и, следовательно,

$$s_u(x) \equiv s_u(y) < 0, \quad x \in [0, 1],$$

что противоречит граничным условиям. $\square$

Следствие 4.1. Пусть u удовлетворяет условиям предложения 4.2, а s_u — соответствующая сплайн-функция. Тогда

$$s_u(x) \geq 0, \quad x \in [0, 1].$$

Доказательство. Предположение о существовании точки $y \in (0, 1)$ такой, что $s_u(y) < 0$, приводит к противоречию; это следует из доказательства предложения 4.2. $\square$

5. НЕПРЕРЫВНОЕ И ДИСКРЕТНОЕ РЕЗОЛВЕНТНОЕ ЯДРО

Оператор $\mathcal{L} = d^4/dx^4$ с однородными граничными условиями ($\phi \in D(\mathcal{L}) \Rightarrow \phi(0) = \phi'(0) = \phi(1) = \phi'(1) = 0$) является положительно определенным (в частности, самосопряженным) с областью определения $D(\mathcal{L}) = H^4([0, 1]) \cap H_0^2([0, 1])$. Теперь рассмотрим ядро $\mathcal{L}^{-1}$, а именно, функцию Грина бигармонической задачи

$$\mathcal{L}u = \left(\frac{d}{dx}\right)^4 u(x) = f(x), \quad (5.1)$$

где $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$. Стандартное вычисление приводит к следующему утверждению.

Утверждение 5.1. Решение (5.1) задается выражением

$$u(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy, \quad (5.2)$$

где

$$K(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6}(1-x)^2 y^2 [2x(1-y) + x - y], & y < x, \\ \frac{1}{6}x^2 (1-y)^2 [2y(1-x) + y - x], & x < y. \end{cases} \quad (5.3)$$

Доказательство. По общей теории мы получаем, что в смысле распределений для каждого фиксированного y как функции от x

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^4 K(x, y) = \delta_y,$$

где δ_y — мера Дирака в точке y . Кроме того, $K(x, y)$ симметрична относительно x, y и удовлетворяет однородным граничным условиям (как функция от x). $\square$

5.1. Расширение ядра до $H^{-2}(\Omega)$. Областью определения $\left(\frac{d}{dx}\right)^4$ как самосопряженного оператора в $L^2(\Omega)$, подчиненного однородным граничным условиям, является $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$. При расширении (в смысле распределений) области определения до $H_0^2(\Omega)$, оператор отображает ее в двойственное пространство $H^{-2}(\Omega)$ (см. [13, гл. 5]). С другой стороны, общая теория (или прямое рассмотрение выражения (5.3)) гарантирует, что для каждого фиксированного $x \in \Omega$, мы имеем $K(x, \cdot) \in H_0^2(\Omega)$. Из этого следует, что уравнение (5.2) можно распространить на все $u \in H_0^2(\Omega)$ (или, альтернативно, на все $f \in H^{-2}(\Omega)$) следующим образом:

$$u(x) = \langle K(x, y), f(y) \rangle, \quad (5.4)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — спаривание $(H_0^2(\Omega), H^{-2}(\Omega))$.

Как следует из уравнения (3.3), действие оператора $\left(\frac{d}{dx}\right)^4$ на сплайны задается комбинацией дельта-функций Дирака в узлах x_j , а именно, его можно записать в виде равенства сеточных функций

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^4 s_u = h\delta_x^4 u.$$

Правая часть в этом уравнении представляет собой конечную меру, и мы помним, что в силу теоремы вложения Соболева все конечные меры содержатся в $H^{-2}(\Omega)$.

Таким образом, уравнение (5.4) принимает здесь вид

$$u_j = h \sum_{i=1}^{N-1} K(x_i, x_j)(\delta_x^4 u)_i, \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (5.5)$$

Следствие 5.1. Дискретный оператор $(\delta_x^4)^{-1} : l_{h,0}^2 \rightarrow l_{h,0}^2$ задан матрицей $\left\{K_{i,j}^h\right\}_{1 \leq i,j \leq N-1}$, определенной по формуле

$$K_{i,j}^h = hK(x_i, x_j), \quad 1 \leq i, j \leq N-1, \quad (5.6)$$

где $K(x, y)$ — это резольвентное ядро $\left(\frac{d}{dx}\right)^4$, как в уравнении (5.3).

6. НЕПРЕРЫВНЫЕ И ДИСКРЕТНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

В этом разделе мы переходим к основной цели этой статьи, а именно, рассмотрению сходимости дискретных собственных значений (ДБО) к собственным значениям непрерывного оператора $\left(\frac{d}{dx}\right)^4$. Продолжая обсуждение из пункта 3.3, важно провести различие между нашим подходом «дискретного функционального исчисления» и тесно связанным подходом конечных элементов. Для последнего мы ссылаемся на обширный обзор [3].

В методе конечных элементов, если задан размер сетки $h = \frac{1}{N}$, собственное значение μ_h и связанная с ним собственная функция $s_{u_h}(x)$ получаются с помощью уравнения (сравним с уравнением (3.4))

$$\int_0^1 s_{u_h}''(x) s_v''(x) dx = \mu_h \int_0^1 s_{u_h}(x) s_v(x) dx \quad \text{для всех сеточных функций } v \in l_{h,0}^2. \quad (6.1)$$

С другой стороны, в подходе, используемом здесь, мы ищем собственное значение λ_h и сеточную функцию $u_h \in l_{h,0}^2$, которые удовлетворяют

$$(\delta_x^4 u_h, v)_h = \lambda_h (u_h, v)_h \quad \text{для всех сеточных функций } v \in l_{h,0}^2. \quad (6.2)$$

В то время как левые части равны, ввиду предложения 3.2, это неверно в общем случае для правых частей. По этой причине мы не можем ссылаться на хорошо развитую теорию спектрального приближения в конечно-элементной теории [3], чтобы получить сходимость собственных значений в нашей постановке.

6.1. Непрерывный оператор. Оператор $\mathcal{L}$, представленный в разделе 5, имеет компактную резольвенту, а ядро K оператора $\mathcal{L}^{-1}$ приведено в утверждении 5.1. Спектр оператора $\mathcal{L}$ состоит из возрастающей последовательности положительных простых собственных значений, которую мы обозначаем как $\{0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots\}$.

Поскольку эти собственные значения играют важную роль в дальнейшем, мы приводим ниже подробности их получения, повторяя доказательство леммы 5.5.4 из [10].

Пусть $\phi \in H^4([0, 1]) \cap H_0^2([0, 1])$ будет действительной собственной функцией

$$\frac{d^4}{dx^4} \phi = \lambda \phi, \quad \lambda \in \{0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k \dots\}.$$

Очевидно, эта функция должна иметь вид

$$\phi(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) + C \operatorname{ch}(\beta x) + D \operatorname{sh}(\beta x), \quad (6.3)$$

где β — действительное число, а $\beta^4 = \lambda$.

Условия $\phi(0) = \phi'(0) = 0$ явно влекут

$$A = -C, \quad B = -D,$$

и $\phi(1) = 0$ дает

$$A(\cos \beta - \operatorname{ch} \beta) = -B(\sin \beta - \operatorname{sh} \beta). \quad (6.4)$$

Оставшееся условие $\phi'(1) = 0$ дает

$$-B(\cos \beta - \operatorname{ch} \beta) = A(-\sin \beta - \operatorname{sh} \beta).$$

Перемножая два уравнения и применяя стандартные тождества, получаем

$$\cos \beta \operatorname{ch} \beta = 1, \quad (6.5)$$

которое следует рассматривать как уравнение, определяющее дискретные собственные значения.

Изменяя β на $-\beta$, мы можем оставить A, C без изменений, но поменять знаки B, D . Следовательно, для $-\beta < 0$ (решение (6.5)) мы получаем ту же собственную функцию (6.3), что и для $\beta > 0$, и мы можем рассматривать только положительные β .

Таким образом, мы получаем полный набор собственных функций (для $\beta > 0$, решая (6.5))

$$\phi(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) - A \operatorname{ch}(\beta x) - B \operatorname{sh}(\beta x), \quad (6.6)$$

где A, B удовлетворяют (6.4).

Для того чтобы оценить расположение собственных значений, достаточно рассмотреть положительные решения (6.5). Следующее утверждение легко проверить.

Утверждение 6.1. Уравнение (6.5) имеет следующую последовательность положительных решений:

$$\begin{cases} \beta_0 \in (3\pi/2, 2\pi), \\ \beta_k^{(1)} \in (2k\pi, (2k+1/2)\pi), & k = 1, 2, \dots, \\ \beta_k^{(2)} \in ((2k+3/2)\pi, (2(k+1)\pi), & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (6.7)$$

Соответствующие собственные значения $\lambda_0 = \beta_0^4$, $\lambda_k^{(1)} = (\beta_k^{(1)})^4$, $\lambda_k^{(2)} = (\beta_k^{(2)})^4$ являются простыми.

Обозначим через $\{\phi_1, \dots, \phi_k \dots\}$ ортонормированный набор связанных собственных функций.

6.2. Оценки собственных значений. Упростим приведенную выше запись и обозначим через $\{0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots\}$ (бесконечную) последовательность собственных значений оператора $\mathcal{L} = \left(\frac{d}{dx}\right)^4$.

При условии $h = \frac{1}{N}$ пусть

$$\Lambda_h = \{0 < \lambda_{h,1} \leq \lambda_{h,2} \leq \dots \leq \lambda_{h,N-1}\}$$

будет конечной последовательностью собственных значений δ_x^4 .

Обозначим через Γ сумму

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-1},$$

и пусть

$$\Gamma_h = \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_{h,i}^{-1}.$$

Предложение 6.1. Существует константа $C > 0$, не зависящая от h , такая что

$$|\Gamma - \Gamma_h| \leq Ch^4. \quad (6.8)$$

Доказательство. Введем (бесконечный) набор обратных величин собственных значений $\mathcal{L}$, а именно, собственных значений ядра $K(x, y)$ (см. (5.3))

$$\Lambda^{-1} = \{\lambda_1^{-1} > \lambda_2^{-1} > \dots > \lambda_k^{-1} \dots > 0\}, \quad (6.9)$$

в то время как

$$\Lambda_h^{-1} = \{\lambda_{h,1}^{-1} \geq \lambda_{h,2}^{-1} \geq \dots \geq \lambda_{h,N-1}^{-1} > 0\} \quad (6.10)$$

— набор собственных значений $(\delta_x^4)^{-1}$, соответствующих дискретному ядру K^h (см. (5.6)).

По стандартной формуле следа следует, что

$$\Gamma = \int_0^1 K(x, x) dx, \quad \Gamma_h = h \sum_{i=1}^{N-1} K(x_i, x_i). \quad (6.11)$$

Поскольку $K(x, x) = \frac{1}{3}x^3(1-x)^3$, числовые значения Γ и C можно легко вычислить, и оказывается, что

$$\Gamma = \frac{1}{420}. \quad (6.12)$$

С другой стороны

$$\Gamma_h = \frac{h}{3} \sum_{i=1}^{N-1} (ih)^3 (1-ih)^3 = \frac{1}{420} + \frac{1}{180}h^4 - \frac{1}{126}h^6, \quad (6.13)$$

так что (6.8) доказано (и даже с явной константой). $\square$

Замечание 6.1. Заметим, что Γ_h — это дискретное трапецевидное приближение к интегралу для Γ . По стандартной оценке для формулы трапеций получаем

$$|\Gamma - \Gamma_h| \leq Ch^2 \quad (6.14)$$

с константой $C = \frac{1}{12} \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \left(\frac{d}{dx} \right)^2 K(x, x) \right| = \frac{1}{96}$.

Оценка четвертого порядка (6.8) очевидно является результатом особых свойств ядра K .

«Коллективная» оценка (6.8) не подразумевает, что оценка вида $\lambda_i^{-1} - \lambda_{h,i}^{-1} = O(h^4)$ верна для любого фиксированного значения индекса i . Однако следующее предложение дает более слабое утверждение в этом направлении. Оно играет ключевую роль в окончательной, более сильной теореме 6.1 ниже.

Предложение 6.2. Для любого фиксированного целого числа $i \geq 1$ существуют положительные константы $C, h_0 > 0$ такие, что для любого $0 < h = \frac{1}{N} < h_0$ имеем

$$\text{dist} \{ \lambda_i^{-1}, \Lambda_h^{-1} \} \leq Ch^4, \quad (6.15)$$

где Λ_h^{-1} — набор обратных величин, введенных в (6.10).

Доказательство. Пусть $\phi_i(x) \in H_0^2(\Omega)$ — нормализованная собственная функция $\left(\frac{d}{dx} \right)^4$, соответствующая λ_i . Вспомним, что $\phi_i \in C^\infty$ и $\left(\frac{d}{dx} \right)^4 \phi_i = \lambda_i^{-1} \phi_i$. Следовательно,

$$\lambda_i^{-1} \phi_i(x) = \int_0^1 K(x, y) \phi_i(y) dy, \quad x \in \Omega.$$

Для простоты обозначим через $\{x_j = jh, 0 \leq j \leq N\}$ точки сетки, опуская очевидную зависимость от h .

Пусть $\phi_i^* = \{\phi_i(x_0), \dots, \phi_i(x_k), \dots, \phi_i(x_N)\}$ будет соответствующей сеточной функцией.

Ввиду утверждения 2.1 и следствия 5.1 имеем для всех $0 \leq k \leq N$

$$\left| \lambda_i^{-1} \phi_i(x_k) - h \sum_{j=0}^N K(x_k, x_j) \phi_i(x_j) \right| \leq Ch^4,$$

где здесь и ниже $C > 0$ — константа, зависящая только от ϕ_i , которая меняется от одной оценки к другой. Используя обозначения из (5.6), это можно переписать как

$$\left| \lambda_i^{-1} \phi_i^*(x_k) - \sum_{j=0}^N K_{k,j}^h \phi_i^*(x_j) \right| \leq Ch^4, \quad (6.16)$$

то есть

$$\left| (\lambda_i^{-1} - (\delta_x^4)^{-1}) \phi_i^* \right|_h \leq Ch^4.$$

С другой стороны, гладкость нормализованного ϕ_i дает

$$|\phi_i^*|_h \geq 1 - Ch.$$

Последние две оценки влекут следующую оценку нормы оператора:

$$\left| (\lambda_i^{-1} - (\delta_x^4)^{-1})^{-1} \right|_h \geq \frac{1 - Ch}{Ch^4} \geq Ch^{-4} \quad (6.17)$$

при $h < h_0$. Стандартный результат относительно резольвент самосопряженных операторов теперь дает

$$\text{dist} \{ \lambda_i^{-1}, \Lambda_h^{-1} \} = \left| (\lambda_i^{-1} - (\delta_x^4)^{-1})^{-1} \right|_h^{-1},$$

что завершает доказательство предложения. $\square$

Замечание 6.2. Предложение 6.2 показывает, что в любой окрестности λ_i^{-1} существует дискретное собственное значение $\lambda_{h,k}^{-1}$ при условии, что $h > 0$ достаточно мало. Отметим, однако, что мы не можем утверждать, что даже наибольшее собственное значение $(\mathcal{L}^{-1}) \lambda_1^{-1}$ является пределом при $h \rightarrow 0$ наибольшего дискретного собственного значения $\lambda_{h,1}^{-1} (\delta_x^4)^{-1}$.

Замечание 6.3. Ввиду следствия 5.1 дискретные собственные значения в Λ_h^{-1} получаются «методом Нистрома» [26], а именно, собственные значения дискретизированного ядра. Тот факт, что для любого фиксированного целого числа $i \geq 1$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{dist} \{ \lambda_i^{-1}, \Lambda_h^{-1} \} = 0,$$

следует из [26, теорема 3]. Предложение 6.2 устанавливает «оптимальную» скорость $O(h^4)$ для этой сходимости.

6.3. Первое собственное значение. Наша цель — сходимость отдельных собственных значений. Начнем с общих рассуждений и применим их для первого собственного значения.

Выберем для $\phi \in \{\phi_1, \dots, \phi_k \dots\}$ нормализованную собственную функцию $\mathcal{L}$ с соответствующим собственным значением $\lambda \in \{0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots\}$.

Применим оператор $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}\phi = \lambda\phi, \quad \lambda \in \{0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k \dots\} \dots,$$

получаем

$$\frac{d^8}{dx^8} \phi = \lambda^2 \phi.$$

Поскольку ϕ нормализован, то имеем

$$\left\| \frac{d^8}{dx^8} \phi \right\|_{L^2[0,1]} = \lambda^2, \quad (6.18)$$

и продолжая таким образом, мы видим, что все производные ϕ ограничены некоторой степенью λ , и поэтому в приведенных ниже оценках мы имеем общую константу $C > 0$, зависящую только от λ .

Пусть ϕ^* — соответствующая сеточная функция, $\phi^*(x_i) = \phi(x_i)$, $0 \leq i \leq N$.

Пусть $\mathbf{v} \in l_{h,0}^2$ удовлетворяет

$$\delta_x^4 \mathbf{v} = \lambda \phi^*,$$

где также $\mathbf{v}_x \in l_{h,0}^2$.

Из точности четвертого порядка (2.15) мы знаем, что

$$|\mathbf{v} - \phi^*|_\infty \leq Ch^4, \quad (6.19)$$

где C не зависит от $N = h^{-1}$, но, конечно, зависит от ϕ .

Из этого следует, что

$$\delta_x^4 \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} + \mathbf{w}, \quad |\mathbf{w}|_h \leq Ch^4. \quad (6.20)$$

Поскольку ϕ нормализовано, погрешность усечения при интегрировании методом трапеций дает

$$|\phi^*|_h^2 = h \sum_{i=1}^{N-1} [\phi_i^*]^2 = \|\phi\|_{L^2[0,1]}^2 + O(h^2) = 1 + O(h^2), \quad (6.21)$$

следовательно,

$$|1 - |\mathbf{v}|_h^2| \leq Ch^2. \quad (6.22)$$

Пусть $\bar{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|_h}$, тогда из (6.20) следует

$$\delta_x^4 \bar{\mathbf{v}} = \lambda \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{w}}, \quad |\bar{\mathbf{w}}|_h \leq Ch^4. \quad (6.23)$$

Что касается первого собственного значения, то теперь мы можем показать, что $\lambda_{h,1}$ может превышать λ_1 не более чем на $O(h^4)$.

Утверждение 6.2. Пусть λ_1 будет первым собственным значением $\mathcal{L}$ ($\lambda_1 = \beta_0^4$ из (6.7)). Тогда существует константа $C > 0$, зависящая от собственной функции ϕ_1 , но не от h , такая, что

$$\lambda_{h,1} \leq \lambda_1 + Ch^4. \quad (6.24)$$

Доказательство. Рассмотрим (6.23) с $\lambda = \lambda_1$. По вариационному принципу минимума для первого собственного значения мы знаем, что

$$\lambda_{h,1} = \min_{|\mathbf{z}|_h=1} (\delta_x^4 \mathbf{z}, \mathbf{z})_h,$$

следовательно,

$$\lambda_{h,1} \leq (\delta_x^4 \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}})_h \leq \lambda_1 + Ch^4, \quad (6.25)$$

что доказывает утверждение. $\square$

Замечание 6.4. Точное первое собственное значение $\lambda_1 = 500.5639017404$. Численные расчеты фактически показывают, что $\lambda_{h,1} \leq \lambda_1$, и что $\lambda_{h,1}$ увеличивается с уменьшением h , как показано на рис. 1. Это остается открытой проблемой.

Замечание 6.5. Обратим внимание, что в утверждении 6.2 отсутствует соответствующий нижний предел, а именно, что $\lambda_{h,1}$ больше $\lambda_1 - O(h^4)$. Это очевидно из численных результатов, показанных на рис. 2. Доказательство этого факта отложено до теоремы 6.1 ниже, где мы показываем, что сходимость всех дискретных собственных значений к соответствующим непрерывным является «оптимальной», а именно, со скоростью $O(h^4)$.

6.4. Сходимость дискретных собственных значений $\lambda_{h,k}$, $k \geq 1$. Теперь рассмотрим сходимость всех дискретных собственных значений к их непрерывным аналогам.

Численное моделирование показывает, что если мы зафиксируем индекс k , то

$$|\lambda_k - \lambda_{h,k}| \leq Ch^4 \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

где $C > 0$ завит от k . Это показано на рис. 3 (для $N = 16$) и рис. 4 (для $N = 64$). Мы благодарим Жана-Пьера Круазилля за оба рисунка. Таким образом, даже очень грубое разрешение дает превосходное приближение собственных значений.

При рассмотрении сходимости *всех собственных значений* оказывается, что нельзя использовать подход, основанный на методе Рэлея—Ритца. Мы рассмотрим здесь совершенно другой подход, который даст не только сходимость ко всем собственным значениям, но и, более того, оптимальную скорость сходимости $O(h^4)$.

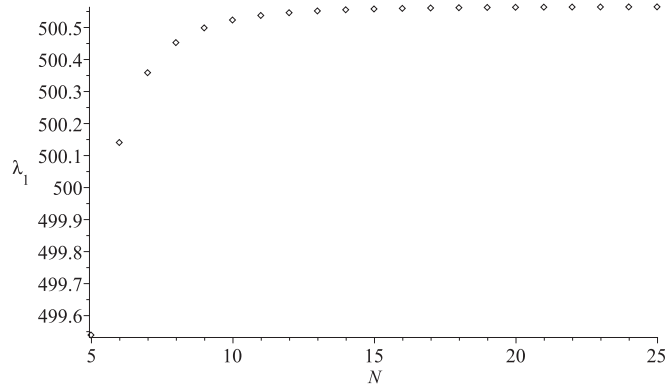


Рис. 1. Первое дискретное собственное значение как функция количества точек сетки на $[0, 1]$.

FIG. 1. First discrete eigenvalue as a function of the number of grid points in $[0, 1]$.

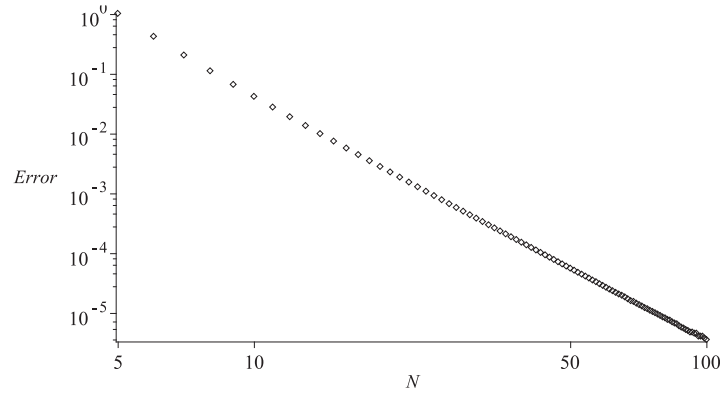


Рис. 2. Логарифмический график погрешности первого дискретного собственного значения $\lambda_1 - \lambda_{h,1}$ как функции числа N точек сетки в $[0, 1]$. Наклон равен -4 , что указывает на скорость сходимости $O(N^{-4}) = O(h^4)$.

FIG. 2. Log-log graph of the error of first discrete eigenvalue $\lambda_1 - \lambda_{h,1}$ as function of the number N of grid points in $[0, 1]$. The slope is -4 , indicating a convergence rate $O(N^{-4}) = O(h^4)$.

Введем кусочно-постоянное ядро $K_h(x, y)$ по формуле

$$K_h(x, y) = K(x_i, y_j), \quad x \in \left(x_i - \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}\right), \quad y \in \left(y_j - \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}\right), \quad 0 \leq i, j \leq N. \quad (6.26)$$

Очевидно, что для $i = 0$ конечная точка $x_0 - \frac{h}{2}$ заменяется на x_0 , и аналогично для других конечных точек.

Обозначим через $\mathcal{L}_h^{-1}$ оператор (на $L^2[0, 1]$), ядром которого является K_h . Очевидно, что этот оператор компактен и положительно определен. Фактически, следующее утверждение говорит о том, что он имеет только конечное число положительных собственных значений (конечно, зависящих от h).

Утверждение 6.3. Множество собственных значений $\mathcal{L}_h^{-1}$ — это конечное множество Λ_h^{-1} , определенное в (6.10).

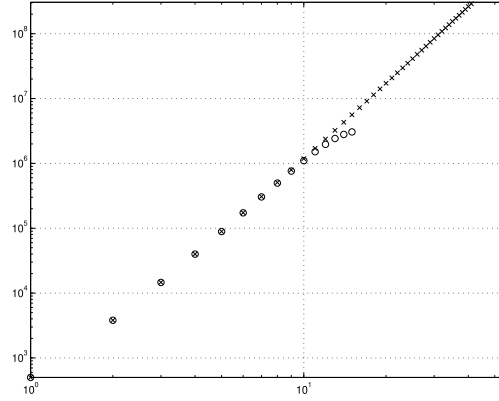


Рис. 3. График собственных значений в логарифмическом масштабе: k — горизонтальный, $\lg \lambda_k (\times)$, $\lg \lambda_{h,k} (\circ)$, $h = \frac{1}{N} = \frac{1}{16}$ — вертикальный.

FIG. 3. Graph of eigenvalues in logarithmic scale: k — horizontal, $\log \lambda_k (\times)$, $\log \lambda_{h,k} (\circ)$, $h = \frac{1}{N} = \frac{1}{16}$ — vertical.

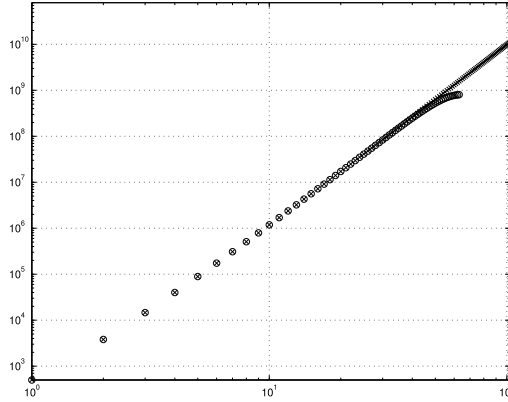


Рис. 4. График собственных значений в логарифмическом масштабе: k — горизонтальный, $\lg \lambda_k (\times)$, $\lg \lambda_{h,k} (\circ)$, $h = \frac{1}{N} = \frac{1}{64}$ — вертикальный.

FIG. 4. Graph of eigenvalues in logarithmic scale: k — horizontal, $\log \lambda_k (\times)$, $\log \lambda_{h,k} (\circ)$, $h = \frac{1}{N} = \frac{1}{64}$ — vertical.

Доказательство. Пусть $u \in L^2[0, 1]$ — собственная функция $\mathcal{L}_h^{-1}$. Таким образом, для некоторого $\mu > 0$ имеем

$$\mu u(x) = \int_0^1 K_h(x, y) u(y) dy, \quad x \in [0, 1].$$

В частности, u является кусочно-постоянной

$$u(x) = u(x_i), \quad x \in \left(x_i - \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}\right), \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Следовательно (с K^h как в следствии 5.1),

$$\mu u(x_i) = \sum_{j=0}^N K_{i,j}^h u(x_j), \quad 0 \leq i \leq N, \quad (6.27)$$

где включены граничные значения $u(x_0) = u(x_N) = 0$.

Таким образом, μ является собственным значением $(\delta_x^4)^{-1}$, следовательно, $\mu = \lambda_{h,k}^{-1}$ для некоторого $1 \leq k \leq N-1$. $\square$

Теперь приступим к установлению сходимости всех дискретных собственных значений к соответствующим непрерывным. Фактически, следующая лемма является частным случаем теоремы Маркуса [20, следствие 5.3] о разностях собственных значений самосопряженных операторов. Подобная общая теорема была доказана (гораздо позже) Като [18]. Однако общность теоремы Като требовала «расширенного перечисления» собственных значений, добавляя значения граничных точек существенных спектров.

Для удобства читателя мы приводим здесь простое доказательство леммы, следуя доказательству (конечномерной) теоремы 6.11 в [17, раздел II.6].

Лемма 6.1. Пусть $h = \frac{1}{N}$, и пусть

$$\Lambda^{-1} = \{\lambda_1^{-1} > \lambda_2^{-1} > \dots > \lambda_k^{-1} \dots > 0\},$$

$$\Lambda_h^{-1} = \{\lambda_{h,1}^{-1} \geq \lambda_{h,2}^{-1} \geq \dots \geq \lambda_{h,N-1}^{-1} > 0\}$$

— множества, введенные в (6.9), (6.10), соответственно.

Тогда существует константа $C > 0$, не зависящая от h , такая что

$$\sum_{k=1}^{N-1} |\lambda_k^{-1} - \lambda_{h,k}^{-1}|^2 + \sum_{k=N}^{\infty} \lambda_k^{-2} \leq \int_0^1 \int_0^1 |K(x, y) - K_h(x, y)|^2 dx dy \leq Ch^2. \quad (6.28)$$

Доказательство. Обратим внимание, что оба оператора $\mathcal{L}^{-1}$, $\mathcal{L}_h^{-1}$ являются положительными операторами Гильберта—Шмидта (следовательно, компактными).

При $t \in [0, 1]$ введем оператор

$$\mathcal{L}_{t,h}^{-1} = (1-t)\mathcal{L}^{-1} + t\mathcal{L}_h^{-1},$$

который также является компактным, положительным и самосопряженным оператором. В частности, его спектр состоит из убывающей последовательности положительных собственных значений

$$\left\{ \mu_1^{-1}(t) \geq \mu_2^{-1}(t) \geq \dots \geq \mu_{N-1}^{-1}(t) \geq \mu_N^{-1}(t) \geq \dots \mu_{N+p}^{-1}(t) \geq \dots > 0 \right\}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Ввиду обсуждения в [17, гл. VII.3.2], функции $\mu_k^{-1}(t)$, $1 \leq k < \infty$, являются непрерывными, кусочно-аналитическими по t и удовлетворяют равенствам

$$\mu_k^{-1}(0) = \lambda_k^{-1}, \quad 1 \leq k < \infty, \quad (6.29)$$

и

$$\mu_k^{-1}(1) = \begin{cases} \lambda_{h,k}^{-1}, & 1 \leq k < N, \\ 0, & k \geq N. \end{cases} \quad (6.30)$$

Кроме того, существует (для каждого фиксированного $t \in [0, 1]$) соответствующий набор ортонормированных функций (в $L^2(0, 1)$)

$$\{\phi_1(x; t), \phi_2(x; t), \dots, \phi_N(x; t), \dots, \phi_k(x; t), \dots\}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Выберем индекс $k \geq 1$. Собственное значение $\mu_k^{-1}(t)$ непрерывно (по $t \in [0, 1]$) и кусочно-аналитично с конечным числом особенностей. Соответствующая собственная функция $\phi_k(x; t)$ кусочно-аналитична по t с тем же конечным числом особенностей. Таким образом, уравнение

$$\left[(1-t)\mathcal{L}^{-1} + t\mathcal{L}_h^{-1} - \mu_k^{-1}(t) \right] \phi_k(x; t) = 0 \quad (6.31)$$

можно продифференцировать по t (исключая особенности), тогда получим

$$\left[\mathcal{L}_h^{-1} - \mathcal{L}^{-1} - \frac{d}{dt} \mu_k^{-1}(t) \right] \phi_k(x; t) + \left[(1-t)\mathcal{L}^{-1} + t\mathcal{L}_h^{-1} - \mu_k^{-1}(t) \right] \frac{d}{dt} \phi_k(x; t) = 0. \quad (6.32)$$

Взяв скалярное произведение с $\phi_k(x; t)$, заключаем, что

$$\frac{d}{dt}\mu_k^{-1}(t) = \left((\mathcal{L}_h^{-1} - \mathcal{L}^{-1})\phi_k(x; t), \phi_k(x; t) \right)_{L^2(0,1)}, \quad t \in [0, 1]. \quad (6.33)$$

Интегрируя это уравнение и принимая во внимание (6.29) и (6.30), получаем

$$\int_0^1 \left((\mathcal{L}_h^{-1} - \mathcal{L}^{-1})\phi_k(x; t), \phi_k(x; t) \right)_{L^2(0,1)} dt = \begin{cases} \lambda_{h,k}^{-1} - \lambda_k^{-1}, & 1 \leq k < N, \\ -\lambda_k^{-1}, & k \geq N. \end{cases} \quad (6.34)$$

Самосопряженный оператор $\mathcal{A} = \mathcal{L}_h^{-1} - \mathcal{L}^{-1}$ является оператором Гильберта—Шмидта, следовательно, компактен. Пусть $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots\}$ — последовательность его ненулевых собственных значений (повторенных в соответствии с кратностью) с соответствующей ортонормированной последовательностью собственных функций $\{\chi_1(x), \chi_2(x), \dots\} \subseteq L^2(0, 1)$.

Так как $\phi_k(x; t) = \sum_{j=1}^{\infty} (\phi_k(x; t), \chi_j(x))_{L^2(0,1)} \chi_j(x)$, уравнение (6.34) влечет за собой

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{j,k} \gamma_j = \begin{cases} \lambda_{h,k}^{-1} - \lambda_k^{-1}, & 1 \leq k < N, \\ -\lambda_k^{-1}, & k \geq N, \end{cases} \quad (6.35)$$

где $\sigma_{j,k} = \int_0^1 (\phi_k(x; t), \chi_j)^2_{L^2(0,1)} dt$, $1 \leq j, k < \infty$.

Из ортонормальности функций (по x) имеем

$$0 \leq \sigma_{j,k} \leq 1, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{j,k} \leq 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{j,k} \leq 1.$$

Пусть Φ — вещественная выпуклая функция на вещественной прямой, причем $\Phi(0) = 0$. Из неравенства Йенсена получаем

$$\Phi\left(\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{j,k} \gamma_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{j,k} \Phi(\gamma_j), \quad k = 1, 2, \dots,$$

и суммирование по k дает

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{j,k} \gamma_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(\gamma_j). \quad (6.36)$$

В частности, взяв $\Phi(\xi) = \xi^2$ и принимая во внимание (6.35), получаем

$$\sum_{k=1}^{N-1} |\lambda_k^{-1} - \lambda_{h,k}^{-1}|^2 + \sum_{k=N}^{\infty} \lambda_k^{-2} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^2.$$

Сумма в правой части — это квадрат нормы Гильберта—Шмидта $\mathcal{A}$, которая равна $\int_0^1 \int_0^1 |K(x, y) - K_h(x, y)|^2 dx dy$, что доказывает (6.28). $\square$

Замечание 6.6. Обратим внимание, что (6.28) дает, в частности, равномерную оценку

$$\sum_{k=1}^{N-1} |\lambda_k^{-1} - \lambda_{h,k}^{-1}|^2 \leq Ch^2. \quad (6.37)$$

Эта оценка верна одновременно для *всех* $N - 1$ собственных значений. Зафиксировав индекс k , мы получим, в частности,

$$\frac{|\lambda_k - \lambda_{h,k}|}{\lambda_{h,k}} \leq C \lambda_k h. \quad (6.38)$$

Ввиду утверждения 6.1 имеем $\lambda_k \approx k^4$. Таким образом, (6.38) дает только сходимость $O(h)$.

ТАБ. 1. Первые 4 собственных значения (верхний ряд) и их численные аппроксимации с использованием сетки из $N = 10$ –60 узлов.ТАБ. 1. First 4 eigenvalues (top row) and their numerical approximations using a grid of $N = 10$ –60 nodes.

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
точное собственное значение / exact eigenvalue	500.563902	3803.537080	14617.630131	39943.799006
$N = 10$	500.521885	3800.689969	14567.617771	39493.816015
$N = 20$	500.561614	3803.398598	14615.468848	39926.599754
$N = 30$	500.563462	3803.511145	14617.236978	39940.722654
$N = 40$	500.563764	3803.529031	14617.509451	39942.881883
$N = 50$	500.563845	3803.533813	14617.581402	39943.430972
$N = 60$	500.563874	3803.535512	14617.606815	39943.623511

Однако, как видно из таб. 1, даже при небольшом количестве точек сетки первые дискретные собственные значения очень хорошо приближают непрерывные. Мы доказываем в теореме 6.1 ниже, что сходимость действительно «оптимальна».

Теперь приступим к доказательству «оптимальной» оценки.

Теорема 6.1 (оптимальная скорость сходимости дискретных собственных значений).

Зафиксируем целое число $k \geq 1$ и рассмотрим дискретное собственное значение $\lambda_{h,k}$ как функцию $h = \frac{1}{N}$, $N = k + 1, k + 2, \dots$. Тогда существует константа $C > 0$, зависящая только от k , такая, что

$$|\lambda_k - \lambda_{h,k}| \leq Ch^4, \quad 0 < h < h_0. \quad (6.39)$$

Доказательство. Зафиксируем k . Если $j \neq k$, то из (6.37) получим

$$|\lambda_{h,j}^{-1} - \lambda_k^{-1}| \geq \left| \lambda_j^{-1} - \lambda_k^{-1} \right| - \left| \lambda_j^{-1} - \lambda_{h,j}^{-1} \right| \geq \left| \lambda_j^{-1} - \lambda_k^{-1} \right| - C^{\frac{1}{2}}h.$$

Следовательно, если $\eta = \min_{j \neq k} \left| \lambda_j^{-1} - \lambda_k^{-1} \right|$, то для $h < h_0 = \frac{1}{2}\eta C^{-\frac{1}{2}}$ имеем

$$j \neq k \Rightarrow |\lambda_{h,j}^{-1} - \lambda_k^{-1}| \geq \frac{1}{2}\eta.$$

В сочетании с предложением 6.2 мы заключаем, что единственный элемент Λ_h^{-1} , который может быть «близок» к λ_k^{-1} , это $\lambda_{h,k}^{-1}$, при этом

$$|\lambda_k^{-1} - \lambda_{h,k}^{-1}| \leq Ch^4,$$

тем самым завершается доказательство теоремы. $\square$

Замечание 6.7. Обратим внимание, что в доказательстве теоремы 6.1 мы опирались на специальные свойства ядра из предложения 6.2. Без использования такой информации мы получили бы «субоптимальные» оценки. Например, (6.28) подразумевает

$$\sum_{k=N}^{\infty} \lambda_k^{-2} \leq CN^{-2},$$

что не является оптимальным ввиду утверждения 6.1. Сравните также с оценкой в (6.8), которую можно записать как

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-1} - \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_{h,i}^{-1} \right| \leq Ch^4.$$

Замечание 6.8. Скорость сходимости $O(h^4)$, как указано в теореме 6.1, можно сравнить с методом коллокационной аппроксимации [12]. В последнем случае достижение аналогичной скорости сходимости требует построения интерполирующей C^3 кусочно-полиномиальной функции пятого порядка, а затем использования коллокации в гауссовых точках. Результаты здесь были получены с использованием дискретизированного ядра (обратного оператора). Благодаря наблюдаемой связи между этим ядром и классическими (C^2) кубическими сплайнами, аппроксимирующие собственные значения фактически являются собственными значениями производной четвертого порядка (распределения) интерполирующего кубического сплайна в точках сетки (предложение 3.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L. The Theory of Splines and Their Applications. — New York–London: Academic Press, 1967.
2. Andrew A. L., Paine J. W. Correction of finite element estimates for Sturm–Liouville eigenvalues// Numer. Math. — 1986. — 50. — С. 205–215.
3. Babuška I., Osborn J. Eigenvalue problems// В сб.: «Handbook of Numerical Analysis, Vol. II». — Amsterdam, etc.: Elsevier, 1991. — С. 641–787.
4. Ben-Artzi M., Croisille J.-P., Fishelov D. Navier–Stokes Equations in Planar Domains. — London : Imperial College Press, 2013.
5. Ben-Artzi M., Croisille J.-P., Fishelov D., Katzir R. Discrete fourth-order Sturm–Liouville problems// IMA J. Numer. Anal. — 2018. — 38. — С. 1485–1522.
6. Ben-Artzi M., Katriel G. Spline functions, the biharmonic operator and approximate eigenvalues// Numer. Mathematik. — 2019. — 141. — С. 839–879.
7. Boumenir A. Sampling for the fourth-order Sturm–Liouville differential operator// J. Math. Anal. Appl. — 2003. — 278. — С. 542–550.
8. Caudill Jr. L. F., Perry P. A., Schueller A. W. Isospectral sets for fourth-order ordinary differential operators// SIAM J. Math. Anal. — 1998. — 29. — С. 935–966.
9. Chawla M. M. A new fourth-order finite-difference method for computing eigenvalues of fourth-order two-point boundary-value problems// IMA J. Numer. Anal. — 1983. — 3. — С. 291–293.
10. Davies E. B. Spectral Theory and Differential Operators. — Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
11. C. de Boor A Practical Guide to Splines-Revised Edition. — New York: Springer, 2001.
12. de Boor C., Swartz B. Collocation approximation to eigenvalues of an ordinary differential equation: The principle of the thing// Math. Comp. — 1980. — 35. — С. 679–694.
13. Evans L. C. Partial Differential Equations. — Providence: Am. Math. Soc., 1998.
14. Everitt W. N. The Sturm–Liouville problem for fourth-order differential equations// Q. J. Math. — 1957. — 8. — С. 146–160.
15. Fishelov D., Ben-Artzi M., Croisille J.-P. Recent advances in the study of a fourth-order compact scheme for the one-dimensional biharmonic equation// J. Sci. Comput. — 2012. — 53. — С. 55–79.
16. Grunau H.-C., Robert F. Positivity and almost positivity of biharmonic Green’s functions under Dirichlet boundary conditions// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2010. — 196. — С. 865–898.
17. Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. — New York: Springer, 1980.
18. Kato T. Variation of discrete spectra// Commun. Math. Phys. — 1987. — 111. — С. 501–504.
19. Lou Z. M., Bialecki B., Fairweather G. Orthogonal spline collocation methods for biharmonic problems// Numer. Math. — 1998. — 80. — С. 267–303.
20. Markus A. S. The eigen- and singular values of the sum and product of linear operators// Russ. Math. Surv. — 1964. — 19. — С. 91–120.
21. Munk W. H. On the wind-driven ocean circulation// J. Meteorol. — 1950. — 7. — С. 80–93.
22. Pipher J., Verchota G. A maximum principle for biharmonic functions in Lipschitz and C^1 domains// Comment. Math. Helv. — 1993. — 68. — С. 384–414.
23. Prenter P. M. Splines and Variational Methods. — New York: Wiley, 1975.
24. Rattana A., Böckmann C. Matrix methods for computing eigenvalues of Sturm–Liouville problems of order four// J. Comp. Applied Math. — 2013. — 249. — С. 144–156.
25. Schröder J. On linear differential inequalities// J. Math. Anal. Appl. — 1968. — 22. — С. 188–216.
26. Spence A. On the convergence of the Nyström method for the integral equation eigenvalue problem// Numer. Math. — 1975. — 25. — С. 57–66.

Matania Ben-Artzi

Institute of Mathematics, The Hebrew University, Иерусалим, Израиль

E-mail: mbartzi@math.huji.ac.il

UDC 517.984.5

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-33-54

EDN: TPUIIY

Splines, biharmonic operator and approximate eigenvalue

M. Ben-Artzi

Institute of Mathematics, The Hebrew University, Jerusalem, Israel

Abstract. The biharmonic operator plays a central role in a wide array of physical models, such as elasticity theory and the streamfunction formulation of the Navier–Stokes equations. Its spectral theory has been extensively studied. In particular the one-dimensional case (over an interval) serves as the basic model of a high order Sturm–Liouville problem. The need for corresponding numerical simulations has led to numerous works. This review focuses on a discrete biharmonic calculus. The primary object of this calculus is a high-order compact discrete biharmonic operator (DBO). The DBO is constructed in terms of the discrete Hermitian derivative. The surprising strong connection between cubic spline functions (on an interval) and the DBO is recalled. In particular the kernel of the inverse of the discrete operator is (up to scaling) equal to the grid evaluation of the kernel of $\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^4\right]^{-1}$. This fact entails the conclusion that the eigenvalues of the DBO converge (at an “optimal” $O(h^4)$ rate) to the continuous ones. Another consequence is the validity of a *comparison principle*. It is well known that there is no maximum principle for the fourth-order equation. However, a positivity result is recalled, both for the continuous and the discrete biharmonic equation, claiming that in both cases the kernels are order preserving.

Keywords: cubic splines, Hermitian derivative, discrete biharmonic operator, eigenvalues, Green’s kernel.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. It is a pleasure to thank Jean-Pierre Croisille, Dalia Fishelov and Guy Katriel for very fruitful discussions.

For citation: M. Ben-Artzi, “Splines, biharmonic operator and approximate eigenvalue,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. 71, No. 1, 33–54. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-33-54>

REFERENCES

1. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, and J. L. Walsh, *The Theory of Splines and Their Applications*, Academic Press, New York–London, 1967.
2. A. L. Andrew and J. W. Paine, “Correction of finite element estimates for Sturm–Liouville eigenvalues,” *Numer. Math.*, 1986, **50**, 205–215.
3. I. Babuška and J. Osborn, “Eigenvalue problems,” In: *Handbook of Numerical Analysis, Vol. II*, Elsevier, Amsterdam, etc., pp. 641–787, 1991.
4. M. Ben-Artzi, J.-P. Croisille, and D. Fishelov, *Navier–Stokes Equations in Planar Domains*, Imperial College Press, London, 2013.

5. M. Ben-Artzi, J.-P. Croisille, D. Fishelov, and R. Katzir, “Discrete fourth-order Sturm-Liouville problems,” *IMA J. Numer. Anal.*, 2018, **38**, 1485–1522.
6. M. Ben-Artzi and G. Katriel, “Spline functions, the biharmonic operator and approximate eigenvalues,” *Numer. Mathematik*, 2019, **141**, 839–879.
7. A. Boumenir, “Sampling for the fourth-order Sturm-Liouville differential operator,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, **278**, 542–550.
8. L. F. Caudill Jr., P. A. Perry, and A. W. Schueller, “Isospectral sets for fourth-order ordinary differential operators,” *SIAM J. Math. Anal.*, 1998, **29**, 935–966.
9. M. M. Chawla, “A new fourth-order finite-difference method for computing eigenvalues of fourth-order two-point boundary-value problems,” *IMA J. Numer. Anal.*, 1983, **3**, 291–293.
10. E. B. Davies, *Spectral Theory and Differential Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
11. C. de Boor, *A Practical Guide to Splines-Revised Edition*, Springer, New York, 2001.
12. C. de Boor and B. Swartz, “Collocation approximation to eigenvalues of an ordinary differential equation: The principle of the thing,” *Math. Comp.*, 1980, **35**, 679–694.
13. L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Am. Math. Soc., Providence, 1998.
14. W. N. Everitt, “The Sturm-Liouville problem for fourth-order differential equations,” *Q. J. Math.*, 1957, **8**, 146–160.
15. D. Fishelov, M. Ben-Artzi, and J.-P. Croisille, “Recent advances in the study of a fourth-order compact scheme for the one-dimensional biharmonic equation,” *J. Sci. Comput.*, 2012, **53**, 55–79.
16. H.-C. Grunau and F. Robert, “Positivity and almost positivity of biharmonic Green’s functions under Dirichlet boundary conditions,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2010, **196**, 865–898.
17. T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, New York, 1980.
18. T. Kato, “Variation of discrete spectra,” *Commun. Math. Phys.*, 1987, **111**, 501–504.
19. Z. M. Lou, B. Bialecki, and G. Fairweather, “Orthogonal spline collocation methods for biharmonic problems,” *Numer. Math.*, 1998, **80**, 267–303.
20. A. S. Markus, “The eigen- and singular values of the sum and product of linear operators,” *Russ. Math. Surv.*, 1964, **19**, 91–120.
21. W. H. Munk, “On the wind-driven ocean circulation,” *J. Meteorol.*, 1950, **7**, 80–93.
22. J. Pipher and G. Verchota, “A maximum principle for biharmonic functions in Lipschitz and C^1 domains,” *Comment. Math. Helv.*, 1993, **68**, 384–414.
23. P. M. Prenter, *Splines and Variational Methods*, Wiley, New York, 1975.
24. A. Rattana and C. Böckmann, “Matrix methods for computing eigenvalues of Sturm-Liouville problems of order four,” *J. Comp. Applied Math.*, 2013, **249**, 144–156.
25. J. Schröder, “On linear differential inequalities,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1968, **22**, 188–216.
26. A. Spence, “On the convergence of the Nyström method for the integral equation eigenvalue problem,” *Numer. Math.*, 1975, **25**, 57–66.

Matania Ben-Artzi

Institute of Mathematics, The Hebrew University, Jerusalem, Israel

E-mail: mbartzi@math.huji.ac.il