Современная математика. Фундаментальные направления. Том 71, № 1 (2025). С. 85–95
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.957
DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-85-95
EDN: TZCNJN

ПРИМЕНЕНИЕ s-ГАРМОНИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ ОСОБЕННОСТЕЙ УРАВНЕНИЙ ЭМДЕНА

Л. Верон

Institut Denis Poisson, Université de Tours, Тур, Франция

Аннотация. Мы используем расширение Каффарелли—Сильвестра на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$ для изучения изолированных особенностей функций, удовлетворяющих дробно-полулинейному уравнению $(-\Delta)^s v + \epsilon v^p = 0$ в проколотой области $\mathbb{R}^N$, где $\epsilon = \pm 1$, $0 < s < 1$ и $p > 1$. Мы получаем априорные оценки и анализируем множество самоподобных решений. Мы даем полное описание возможного поведения решений вблизи особенности.

Ключевые слова: уравнение Эмдена, дробно-полулинейное уравнение, расширение Каффарелли—Сильвестра, самоподобные решения.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *Л. Верон.* Применение s-гармонического расширения к изучению особенностей уравнений Эмдена// Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. **71**, № 1. С. 85–95. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-85-95`

1. Введение

В последние десятилетия появилось много статей, посвященных особому поведению решений следующих классов полулинейных эллиптических уравнений:

$$-\Delta v + \epsilon v^p = 0 \quad \text{в } B_1 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^N, \tag{1.1}$$

где $p > 1$, $\epsilon = \pm 1$ и $v^p = |v|^{p-1} v$. Первые исследования радиальных решений уравнения Лейна—Эмдена ($\epsilon = -1$) принадлежат Дж. Лейну и Р. Эмдену, и довольно хорошее изложение можно найти в [7, с. 84–182]. В этой книге большое место также отведено уравнению Эмдена

$$\Delta v + e^u = 0 \quad \text{в } B_1 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^N. \tag{1.2}$$

Этот дробный аналог этого уравнения не рассматривается в настоящей статье (современное исследование уравнения (1.2) см. в [2]). Уравнение Эмдена—Фаулера ($\epsilon = 1$) было подробно рассмотрено Р. Фаулером в радиальном случае [13]. Дальнейшие исследования принадлежат Зоммерфельду в теории атомов Томаса—Ферми [16, 20]. Случай $p = \dfrac{N+2}{N-2}$ в основном известен из-за его связей с конформной деформацией римановой метрики с $\epsilon = -1$ в рамках положительной кривизны [17] или $\epsilon = 1$ в гиперболическом пространстве [18].

Поведение сингулярных решений (1.1) в N-мерной области зависит от трех критических показателей:

$$p_1 = \frac{N}{N-2}, \quad p_2 = \frac{N+2}{N-2} \text{ при } N \geqslant 3, \qquad p_3 = \frac{N+1}{N-3} \text{ при } N \geqslant 4. \tag{1.3}$$

Основными инструментами анализа поведения решений вблизи изолированной сингулярности являются:

1. Существование универсальной априорной оценки: благодаря конструкции Келлера—Оссермана оценку просто получить при $\epsilon = 1$, гораздо сложнее при $\epsilon = -1$ с помощью метода Бернштейна и неравенства Гарнака, и это только в диапазоне $1 < p < p_2$. Более того, универсальная оценка невозможна, если $p = p_3$.
2. Асимптотическая радиальность при $\epsilon = -1$ и $1 < p \leqslant p_2$ имеет место благодаря работе Каффарелли, Гидаса и Шпрука [4].
3. Существование явных радиальных решений в виде $v(x) = \Lambda_{N,p}|x|^{-\frac{2}{p-1}}$ для $\epsilon = 1$ при условии $1 < p < p_1$ и для $\epsilon = -1$ при условии $p > p_1$.
4. Методы динамических систем при $p \neq p_2$: функция Ляпунова, характеристика возможных предельных множеств и использование теории аналитических функционалов Л. Саймона при $\epsilon = -1$ (см. [2,19]). Для такой задачи уравнение в $B_1 \setminus \{0\}$ преобразуется в эллиптическое уравнение в бесконечном цилиндре $\mathbb{R}_- \times S^{N-1}$ благодаря преобразованию
$$w(t,\sigma) = r^{\frac{2}{p-1}} v(r,\sigma), \quad t = \ln r, \quad \sigma \in S^{N-1}. \tag{1.4}$$
Следовательно, (1.1) превращается в
$$w_{tt} + \Theta_{N,p} w_t + \Delta_{S^{N-1}} w + \Lambda_{N,p} w - \epsilon w^p = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_- \times S^{N-1}, \tag{1.5}$$
где
$$\Theta_{N,p} = N - 2\frac{p+1}{p-1}, \qquad \Lambda_{N,p} = \frac{2}{p-1}\left(\frac{2}{p-1} + 2 - N\right).$$
Роль p_1 и p_2 становится очевидной, поскольку если $p = p_1$, то $\Lambda_{N,p} = 0$, и если $p = p_2$, то $\Theta_{N,p} = 0$. Обращение в нуль этих двух коэффициентов кардинально меняет поведение решений (1.5).

Работы по полулинейной модели (1.1) дали начало многочисленным расширениям, в которых лапласиан заменяется другим оператором диффузии, таким как p-лапласиан, билапласиан или дробный лапласиан. В этой статье мы представляем случай, когда диффузия смещается дробным лапласианом, и подчеркиваем подход, основанный на гармоническом или s-гармоническом расширении. Многие результаты, представленные ниже, были получены в сотрудничестве с Х. Ченом [11].

Если $s \in (0,1)$, дробный Лапласиан $(-\Delta)^s$ в $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ определен на функциях $v \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \cap L^1_{\mu_s}(\mathbb{R}^N)$, где $\mu_s(x) = (1+|x|)^{-N-2s}$, выражением

$$(-\Delta)^s v(x) = c_{N,s} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} \frac{v(x)-v(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy \quad \text{для } x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \tag{1.6}$$

где $c_{N,s} = 2^{2s}\pi^{-\frac{N}{2}} \dfrac{\Gamma(\frac{N+2s}{2})}{\Gamma(1-s)}$. Задача о сингулярности для дробных уравнений Эмдена в проколотой области Ω, содержащей $\overline{B}_1$, имеет вид

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s v + \epsilon v^p &= 0 \quad \text{в } \Omega \setminus \{0\}, \\ v &= 0 \quad \text{в } \Omega^c, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где $\epsilon = \pm 1$ и $\Omega^c = \mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Мы сталкиваемся с тремя критическими значениями показателя степени p:

$$p_{0,s} = 1 + \frac{2s}{N}, \quad p_{1,s} = \frac{N}{N-2s}, \quad p_{2,s} = \frac{N+2s}{N-2s} \quad \text{при } N - 2s > 0. \tag{1.8}$$

В случае $\epsilon = -1$ доказаны следующие расширения оценки Гидаса и Шпрука [15].

Теорема 1.1 (см. [24, 25]). *Пусть $\epsilon = -1$. Если $p_{1,s} < p < p_{2,s}$, любое положительное решение* (1.7) *либо является регулярным, либо удовлетворяет для некоторого универсального $c > 0$ неравенству*

$$c^{-1}|x|^{-\frac{2s}{p-1}} \leqslant v(x) \leqslant c|x|^{-\frac{2s}{p-1}} \quad \forall x \in B_{\frac{1}{2}}. \tag{1.9}$$

Более того, асимптотическая радиальность, как в конструкции Каффарелли, Гидаса и Шпрука [4], также верна в [5].

Теорема 1.2 (см. [5]). *Пусть $\epsilon = -1$. Если $p = p_{2,s}$, то имеет место предыдущий результат и существует радиальное решение $\bar{v}$ уравнения* (1.7) *такое, что*

$$v(x) = \bar{v}(|x|)(1 + o(1)) \quad \textit{при } x \to 0. \tag{1.10}$$

В случае $\epsilon = 1$ несколько результатов были получены Ченом и Вероном [9] при изучении проблемы с мерой μ в правой части

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s v + v^p &= \mu \quad \text{в } \Omega, \\ v &= 0 \quad \text{в } \Omega^c. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Теорема 1.3 (см. [9]). *Если $1 < p < p_{1,s}$, для любой положительной ограниченной меры существует единственное решение v_μ для* (1.11). *Если $\mu = k\delta_0$, то*

$$v_{k\delta_0} = kc_{N,s}|x|^{2s-N}(1 + o(1)) \quad \textit{при } x \to 0. \tag{1.12}$$

Отображение $\mapsto v_{k\delta_0}$ — возрастающее и имеет предел (конечный или бесконечный) $v_{\infty\delta_0}$.

Теорема 1.4 (см. [10]). *При предыдущих предположениях:*

1. *если $0 < p \leqslant p_{0,s}$, то $v_{\infty\delta_0}(x) = \infty$ для всех $x \in \Omega$;*
2. *если $p_{0,s} < p < p_{1,s}$, то $v_{\infty\delta_0}$ является положительным решением задачи*

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s v + v^p &= 0 \quad \textit{в } \Omega \setminus \{0\}, \\ v &= 0 \quad \textit{в } \Omega^c, \end{aligned} \tag{1.13}$$

удовлетворяющим

$$v_{\infty\delta_0} = \Lambda_{N,p,s}|x|^{-\frac{2s}{p-1}}(1 + o(1)), \tag{1.14}$$

где

$$\Lambda_{N,p,s} = \frac{2s}{p-1}\left(\frac{2s}{p-1} + 2s - N\right). \tag{1.15}$$

Если $p \geqslant p_{1,s}$, то для решения (1.11) необходимы емкостные условия на μ, как в случае $s = 1$.

2. Продолжение Каффарелли—Сильвестра

Определение $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ через продолжение гармонических функций является классическим (см., например, [21]). В 2007 году Каффарелли и Сильвестр ввели в [6] обобщение гармонического расширения через вырожденные эллиптические операторы. С этим расширением задача (1.7) наследует следующую форму: в $\mathbb{R}^{N+1}_+ = \left\{\xi = (x, z) : x \in \mathbb{R}^N, z > 0\right\}$ изучение (1.7) заменяется на

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(z^{1-2s}\nabla u) &= 0 \qquad \text{в } \mathbb{R}^{N+1}_+, \\ \partial_{\nu^s} u(\cdot, 0) + \epsilon u(\cdot, 0)^p &= 0 \qquad \text{в } \Omega \setminus \{0\}, \\ u(\cdot, 0) &= 0 \qquad \text{в } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{aligned} \tag{2.1}$$

и

$$v = u(\cdot, 0) \quad \text{в } \mathbb{R}^N,$$

так как

$$(-\Delta)^s v(x) = -\lim_{z\to 0} z^{1-2s} u_z(x, z) := \partial_{\nu^s} u(x, 0). \tag{2.2}$$

Если $s = \dfrac{1}{2}$, задача (2.1) сводится к нелинейной задаче Дирихле—Неймана

$$\begin{aligned} \Delta_\xi u &= 0 && \text{в } \mathbb{R}_+^{N+1}, \\ u_\nu(\cdot,0) + \epsilon u(\cdot,0)^p &= 0 && \text{в } \Omega\setminus\{0\}, \\ u(\cdot,0) &= 0 && \text{в } \mathbb{R}^N\setminus\Omega. \end{aligned} \tag{2.3}$$

В случае $\epsilon = 1$ это уравнение изучается в [3].

Функция u, определенная в $\mathbb{R}_+^{N+1}$, называется *s-гармонической*, если она удовлетворяет условию

$$\operatorname{div}(z^{1-2s}\nabla u) = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{N+1}. \tag{2.4}$$

Следующая теорема дает важный инструмент, доказанный в [11].

Теорема 2.1. *Если $0 < s < 1$, то любая положительная s-гармоническая функция, определенная в $\mathbb{R}_+^{N+1}$, допускает след на $\partial\mathbb{R}_+^{N+1}$, который является борелевской мерой $\mu \geqslant 0$ такой, что*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{d\mu}{(1+|x|)^{N+2s}} < \infty. \tag{2.5}$$

Вторым важным результатом относительно задачи (2.1) является априорная оценка в случае $\epsilon = 1$, $0 < s < 1$ (см. [11]). Метод доказательства объединяет технику blow-up и приведенную выше теорему о следе. Заметим, что в отличие от случая $\epsilon = 1$, $s = 1$, этот результат не может быть получен путем построения локальных суперрешений.

Теорема 2.2. *Если $\epsilon = 1$ и $p > p_{0,s}$, любое положительное решение u уравнения (2.2) с $\Omega = B_1$ удовлетворяет с некоторой универсальной константой $c > 0$ неравенству*

$$u(x,z) \leqslant c\rho^{-\frac{2s}{p-1}} \quad \forall (x,z)) \in \tilde{B}^+_{\frac{1}{2}}, \tag{2.6}$$

где $\rho = \sqrt{|x|^2+z^2}$ и $\tilde{B}^+_{\frac{1}{2}} = \{(x,z)\in\mathbb{R}_+^{N+1} : \rho < 1\}$.

Заметим, что такая оценка невозможна, если $1 < p < p_{0,s}$.

3. Самоподобные решения

Уравнение (2.2) с $\Omega = \mathbb{R}^N$ инвариантно относительно преобразования подобия T_λ ($\lambda > 0$), определяемого формулой

$$T_\lambda[u](x) = \lambda^{\frac{2s}{p-1}} u(\lambda x) \quad \text{для всех } x \neq 0.$$

Рассмотрим сферические координаты в $\mathbb{R}_+^{N+1} := \left\{\xi = (\rho,\sigma) : \rho > 0,\ \sigma\in\mathbb{S}_+^N\right\}$, где

$$\mathbb{S}_+^N = \left\{\sigma = (x,z) = (\sigma'\cos\phi, \sin\phi) : \sigma'\in\mathbb{S}^{N-1}, \phi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

Самоподобные решения (2.1) имеют следующий вид:

$$u(x,z) = u(\rho,\sigma) = \rho^{-\frac{2s}{p-1}}\omega(\sigma) \quad \text{для всех } (\rho,\sigma)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}_+^N. \tag{3.1}$$

Пусть $\mathcal{A}_s$ — вырожденный эллиптический оператор на N-сфере $\mathbb{S}^N$, определяемый формулой

$$\mathcal{A}_s[w] = \frac{1}{\lambda_s(\phi)(\cos\phi)^{N-1}}\left(\lambda_s(\phi)(\cos\phi)^{N-1}\, w_\phi\right)_\phi + \frac{1}{\cos^2\phi}\Delta_{\mathbb{S}^{N-1}} w, \tag{3.2}$$

где

$$\lambda_s(\phi) = (\sin\phi)^{1-2s}.$$

С точностью до поворота и соответствующего выбора сферических переменных функция ω в (3.1) удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_s[\omega] + \Lambda_{N,p,s}\omega &= 0 && \text{в } \mathbb{S}_+^N, \\ \frac{\partial\omega}{\partial\nu^s} + \epsilon|\omega|^{p-1}\omega &= 0 && \text{в } \mathbb{S}^{N-1}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\Lambda_{N,p,s}$ определено в (1.15), а $\dfrac{\partial}{\partial\nu^s}$ — конормальная внешняя производная на $\partial\mathbb{S}^N_+ = \mathbb{S}^{N-1}$, соответствующая $\mathcal{A}_s$, если инвариантная мера dS, полученная изометрическим вложением $\mathbb{S}^N$ в $\mathbb{R}^{N+1}$, равна

$$dS(\sigma) = (\cos\phi)^{N-1} dS'(\sigma')d\phi.$$

Мы называем $\mathcal{E}_\epsilon$ (соответственно, $\mathcal{E}^+_\epsilon$) *множеством решений* (соответственно, *множеством положительных решений*) (3.3). В следующих теоремах, доказанных в [11], мы даем структуру $\mathcal{E}_\epsilon$ и $\mathcal{E}^+_\epsilon$.

Теорема 3.1. *Пусть* $s \in (0,1)$, $\epsilon = 1$ *и* $p > 1$.

1. *Если* $p \geqslant p_{1,s}$, *то* $\mathcal{E}_1 = \{0\}$.
2. *Если* $1 < p \leqslant p_{0,s}$, *то* $\mathcal{E}^+_1 = \{0\}$.
3. *Если* $p_{0,s} < p < p_{1,s}$, *то* $\mathcal{E}^+_1 = \{0, \omega_1\}$, *где* ω_1 — *положительное решение* (3.3).

Доказательство. Используемые методы являются адаптациями $s = 1$ к дробному случаю.

1. Несуществование по монотонности: если $p \geqslant p_{1,s}$, мы умножаем уравнение на ω, интегрируем по $\mathbb{S}^N_+$ с весовой функцией $\lambda_s(\phi)$ и используем тот факт, что $\Lambda_{N,p,s} \leqslant 0$.

2. Существование получается путем минимизации функционала

$$J(w) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{S}^N_+} \Big(w_\phi^2 + \frac{1}{\cos^2\phi}|\nabla' w|^2 - \Lambda_{N,p,s} w^2\Big)\lambda_s(\phi)dS + \frac{1}{p+1}\int\limits_{\mathbb{S}^{N-1}} |\gamma_0(w)|^{p+1} dS'$$

в пространстве $W(\mathbb{S}^N_+)$ функций w таких, что $\mathcal{B}[w,w] < +\infty$, где

$$\mathcal{B}[w,v] = \int\limits_{\mathbb{S}^N_+} \Big(w_\phi v_\phi + \frac{1}{\cos^2\phi}\nabla' w\cdot\nabla' v\Big)\lambda_s(\phi)dS,$$

а γ_0 обозначает оператор следа из $W(\mathbb{S}^N_+)$ в $L^2(\mathbb{S}^{N-1})$, отождествляемый с $w(0,\theta)$.

3. Для доказательства единственности положительных решений предположим, что ω и $\tilde\omega$ — два таких решения. Тогда

$$0 = \int\limits_{\mathbb{S}^N_+}\Big(\frac{\mathcal{A}_s[\omega]}{\omega} - \frac{\mathcal{A}_s[\tilde\omega]}{\tilde\omega}\Big)(\omega^2 - \tilde\omega^2)\lambda_s dS =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{S}^{N-1}} \bigg(\partial_{\phi^s}\omega\Big(\omega - \frac{\tilde\omega^2}{\omega}\Big) - \partial_{\phi^s}\tilde\omega\Big(\tilde\omega - \frac{\omega^2}{\tilde\omega}\Big)\bigg)dS' - \bigg(\mathcal{B}\Big[\omega, \omega - \frac{\tilde\omega^2}{\omega}\Big] - \mathcal{B}\Big[\tilde\omega, \tilde\omega - \frac{\omega^2}{\tilde\omega}\Big]\bigg) = A + B.$$

Технические вычисления A и B дают

$$A = \int\limits_{\mathbb{S}^{N-1}} \bigg[-\omega^p\Big(\omega - \frac{\tilde\omega^2}{\omega}\Big) + \tilde\omega^p\Big(\tilde\omega - \frac{\omega^2}{\tilde\omega}\Big)\bigg] dS' = -\int\limits_{\mathbb{S}^{N-1}} \big(\omega^2 - \tilde\omega^2\big)\big(\omega^{p-1} - \tilde\omega^{p-1}\big)\, dS',$$

тогда $A \leqslant 0$ и

$$B = -\int\limits_{\mathbb{S}^{N-1}} \bigg[\Big(\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\tilde\omega^2}\Big)\big(\omega\tilde\omega_\phi - \tilde\omega\omega_\phi\big)^2 + \frac{1}{\cos^2\phi}\left|\omega\nabla'\tilde\omega - \tilde\omega\nabla'\omega\right|^2\bigg]\lambda_s(\phi)dS',$$

тогда $B \leqslant 0$. Поэтому $\omega = \tilde\omega$. □

Как и в случае $s = 1$, единственность общего решения сохраняется в небольшом диапазоне показателя p, что можно доказать, убедившись, что ω совпадает со своим сферическим средним (см. [11]).

Теорема 3.2. *При предположениях теоремы* 3.1 *относительно* s *и* ϵ, *существует* $p^*_s \in (1, p_{1,s})$ *такое, что если* $p^*_s \leqslant p < p_{1,s}$, *то* $\mathcal{E}_1 = \{0, \omega_1, -\omega_1\}$.

Явное значение p_s^* не является простым, поскольку имеем

$$p_s^* = \frac{N + 2s + \sqrt{N^2 + 4N(1-s) + 4(s^2-1)}}{N - 2s + \sqrt{N^2 + 4N(1-s) + 4(s^2-1)}},$$

но если $s = 1$, мы восстанавливаем оптимальное значение, полученное в [22], которое равно $p_1^* = \dfrac{N+1}{N-1}$.

Доказательство теоремы 3.2 длинное и включает несколько различных шагов, которые мы представим ниже.

Лемма 3.1. *Если $p_{1,s} > p \geqslant p_s^*$, то любой элемент $\mathcal{E}_1$ зависит только от азимутальной переменной ϕ.*

Доказательство. Обозначим через $(\phi, \sigma) \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \times S^{N-1}$ сферические координаты на S_+^N, а через $\bar{\omega}(\phi)$ — функцию, которая является S^{N-1}-средним решения ω, то есть

$$\bar{\omega}(\phi) = \frac{1}{|S^{N-1}|} \int\limits_{S^{N-1}} \omega(\phi, \sigma') dS(\sigma').$$

Усредняя (3.3) по S^{N-1}, мы имеем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_s[\overline{\omega}] + \Lambda_{N,p,s}\overline{\omega} = 0 \qquad & \text{в } \mathbb{S}_+^N, \\ \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \nu^s} + \overline{\omega^p} = 0 \qquad & \text{в } \mathbb{S}^{N-1}, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{A}_s[\overline{\omega}] = \frac{1}{\lambda_s(\phi)(\cos\phi)^{N-1}} \left(\lambda_s(\phi)(\cos\phi)^{N-1}\overline{\omega}_\phi\right)_\phi.$$

Используя неравенство Виртингера, получаем

$$(\Lambda_{N,p,s} + 1 - N) \int\limits_{\mathbb{S}_+^N} (\omega - \overline{\omega})^2 \lambda_s(\phi) dS \geqslant 2^{-p} \int\limits_{\mathbb{S}^{N-1}} |\omega - \overline{\omega}|^{p+1} dS'.$$

Условие на p подразумевает, что $\Lambda_{N,p,s} + 1 - N \leqslant 0$, таким образом, $\omega = \overline{\omega}$. □

Поскольку при условии $p_s^* \leqslant p < p_{1,s}$ решение ω зависит только от переменной ϕ, естественно ввести соответствующее дифференциальное уравнение, которому оно удовлетворяет. В более общем виде мы доказываем методом Коши—Липшица—Пикара следующую лемму.

Лемма 3.2. *Пусть $\Lambda \neq 0$. Тогда для любого $a \neq 0$ существует единственная функция ω_a, удовлетворяющая в $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$*

$$\omega_a(\phi) = a - \Lambda \int\limits_0^\phi (\sin\sigma)^{2s-1}(\cos\sigma)^{1-N} \int\limits_\sigma^{\frac{\pi}{2}} \omega_a(\theta)(\sin\theta)^{1-2s}(\cos\theta)^{N-1} d\theta d\sigma. \tag{3.4}$$

Кроме того, $\omega_a\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = a$ и $\omega_a = a\omega_1$. Наконец, если $a > 0$ и $\Lambda < 0$ (соответственно, $\Lambda > 0$), то ω_a положительна и возрастает (соответственно, убывает).

Доказательство теоремы 3.2. Мы рассматриваем только решения, зависящие от ϕ. Такое решение ω удовлетворяет

$$-\left((\sin\phi)^{1-2s}(\cos\phi)^{N-1}\omega_\phi\right)_\phi = \Lambda_{N,p,s}(\sin\phi)^{1-2s}(\cos\phi)^{N-1}\omega - \lim_{\phi\to 0}(\sin\phi)^{1-2s}\omega_\phi(\phi) + \omega^p(0) = 0. \tag{3.5}$$

Поскольку $\omega_\phi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, равенство (3.5) эквивалентно

$$\omega_a(\phi) = \omega\left(\frac{\pi}{2}\right) - \Lambda_{N,p,s} \int\limits_0^\phi (\sin\sigma)^{2s-1}(\cos\sigma)^{1-N} \int\limits_\sigma^{\frac{\pi}{2}} \omega_a(\theta)(\sin\theta)^{1-2s}(\cos\theta)^{N-1} d\theta d\sigma. \tag{3.6}$$

Тогда $a = \omega\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ — это параметр метода стрельбы. Поскольку $\omega_a = a\omega_1$, задача сводится к поиску $a > 0$ такого, что

$$F^*(a) = -\lim_{\phi\to 0}(\sin\phi)^{1-2s}\omega_{a\,\phi}(\phi) + \omega_a^p(0) = a\left(\lim_{\phi\to 0}(\sin\phi)^{1-2s}\omega_{1\,\phi}(\phi) + a^{p-1}\omega_1^p(0)\right) = 0. \tag{3.7}$$

Результат следует из того, что $a \mapsto a^{-1}F^*(a)$ является непрерывной, возрастающей, отрицательной при $a = 0$ и стремится к бесконечности при $a \to \infty$. □

Аналогичным образом описываем множество $\mathcal{E}_{-1}$.

Теорема 3.3. *Пусть $s \in (0,1)$, $\epsilon = -1$ и $p > 1$.*

1. *Если $p \leqslant p_{1,s}$, то $\mathcal{E}_{-1}^+ = \{0\}$.*
2. *Если $p > p_{1,s}$, то $\mathcal{E}_{-1}^+ = \{0, \omega_2\}$, где ω_2 — положительное решение* (3.3)*, зависящее только от одной переменной.*

Обратите внимание, что утверждение 2 теоремы 3.3 доказывается не методом леммы 3.1, а адаптацией метода движущихся плоскостей [14].

4. Сингулярность решений

Энергетический метод не зависит от значения ϵ. Положим

$$u(\xi) = u(\rho,\sigma) = r^{-\frac{2s}{p-1}}w(t,\sigma), \qquad t = \ln\rho, \tag{4.1}$$

и $w(t,\sigma) = w(t,\sigma',\phi)$. Тогда w удовлетворяет задаче

$$\begin{aligned} w_{tt} + \Theta_{N,p,s}w_t + \Lambda_{N,p,s}w + \mathcal{A}_s[w] = 0 \quad &\text{в } \mathbb{R}\times\mathbb{S}_+^N,\\ \frac{\partial w}{\partial\nu^s} + \epsilon|w|^{p-1}w = 0 \quad &\text{в } \mathbb{R}\times\mathbb{S}^{N-1}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где $\Theta_{N,p,s} = N - 2s\dfrac{p+1}{p-1}$, а $\Lambda_{N,p,s}$ уже определены в (1.15).

$$\frac{\partial w}{\partial\nu^s}(t,\sigma') = -\lim_{\phi\to 0}\big(\sin\phi)^{1-2s}w_\phi(t,\sigma',\phi)\big).$$

Заметим, что $\Theta_{N,p,s} = 0$ тогда и только тогда, когда $p = p_{2,s}$ (консервативный случай). Определим пространство $\mathbf{X} = \left\{\zeta \in C^s(\mathbb{S}_+^N) : \zeta(\cdot,0) \in C^2(\mathbb{S}^{N-1})\right\}$ и предельные множества траектории как $\Gamma_-[w] = \bigcap_{t\leqslant 0}\left(\overline{\bigcup\{w(\tau,\cdot),\tau\leqslant t\}}^{\mathbf{X}}\right)$ (т. е. сингулярность) и $\Gamma_+[w] = \bigcap_{t\geqslant 0}\left(\overline{\bigcup\{w(\tau,\cdot),\tau\geqslant t\}}^{\mathbf{X}}\right)$ (т. е. поведение на бесконечности).

Теорема 4.1. *Предположим, что $s \in (0,1)$, $p \in (1,+\infty)\setminus\{p_{2,s}\}$, $\epsilon = \pm 1$ и пусть $u \in C(\overline{\mathbb{R}_+^{N+1}}\setminus\{(0,0)\}) \cap C^2(\mathbb{R}_+^{N+1})$ будет решением* (2.1) *таким, что*

$$|u(x,z)| \leqslant c\left(|x|^2 + z^2\right)^{-\frac{s}{p-1}} \quad \text{при } 0 < |x| < 1 \quad (\text{или при } |x| > 1) \tag{4.3}$$

для некоторого $c > 0$. Тогда $\Gamma_-[w]$ (соответственно, $\Gamma_+[w]$) является непустым компактным связным подмножеством множества $\mathcal{E}_\epsilon$, определяемым уравнением (3.3).

Доказательство. Энергетический метод стандартен, мы приводим доказательство при $t \to -\infty$ (случай сингулярности). Положим

$$\mathcal{I}_\epsilon[w](t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{S}_+^N}\left(|\nabla' w|^2 - \Lambda_{N,p,s}w^2 - w_t^2\right)d\mu_s - \frac{\epsilon}{p+1}\int\limits_{\mathbb{S}^{N-1}}|w|^p dS'.$$

Тогда w ограничена в $C^2(\overline{\mathbb{S}_+^N}\times(-\infty,-1])$ и выполняется

$$\frac{d}{dt}\mathcal{I}_\epsilon[w](t) = \left(p - \frac{2s(p+1)}{p-1}\right)\int\limits_{\mathbb{S}_+^N}w_t^2 d\mu_s = \Theta_{N,p,s}\int\limits_{\mathbb{S}_+^N}w_t^2 d\mu_s. \tag{4.4}$$

Так как $p \neq p_{2,s}$, то $\Theta_{N,p,s} \neq 0$, и мы имеем оценку затухания

$$\int_{-\infty}^{-1} \int_{\mathbb{S}^N_+} w_t^2 d\mu_s dt < +\infty.$$

Используя равномерную непрерывность, получим, что $w_t(t,.) \to 0$. С помощью оценок регулярности и простых манипуляций получаем, что $w_{tt}(t,.) \to 0$. □

В качестве следствий этого общего результата, с учетом теорем 3.1 и 3.2 получим описание изолированных особенностей положительных решений (2.1).

Следствие 4.1 (уравнения Эмдена—Фаулера). *Пусть* $s \in (0,1)$, $\epsilon = 1$. *Если* $u \in C^1\big(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+} \setminus \{(0,0)\}\big) \cap C^2(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ *удовлетворяет* (2.1) *и* (4.3), $v = u(\cdot, 0)$, *и если* w *определено как* (4.2), *то при* $t \to -\infty$ *выполняется*:

1. *Если* $p \geqslant p_{1,s}$, *то* $w(t,\cdot) \to 0$ *равномерно в* $\mathbb{S}^N_+$, *следовательно, функция* $v \equiv 0$ *и функция* u *являются гладкими.*
2. *Если* $p_{0,s} < p < p_{1,s}$ *и* $u \geqslant 0$, *то* $w(t,\cdot)$ *сходится равномерно в* $\mathbb{S}^N_+$ *либо к* ω_1, *либо к* 0.
3. *Если* $p^*_s \leqslant p < \dfrac{N}{N-2s}$, *то* $w(t,\cdot)$ *сходится равномерно в* $\mathbb{S}^N_+$ *к* $\ell \in \{0, \omega_1, -\omega_1\}$.
4. *Если* $1 < p \leqslant p_{0,s}$, *и* $u \geqslant 0$, *то* $w(t,\cdot) \to 0$ *равномерно в* $\mathbb{S}^N_+$.
5. *Пусть* $1 < p < p_{1,s}$, $u \geqslant 0$. *Если* $w(t,\cdot) \to 0$ *равномерно в* $\mathbb{S}^N_+$, *то существует* $k \in \mathbb{R}_+$ *такое, что*
$$e^{(N-\frac{2s}{p-1})t} w(t,\sigma',\phi) \to k \sin^{2s}(\phi) \quad \text{равномерно в } \mathbb{S}^N_+.$$
Если $k = 0$, *то функция* $w \equiv 0$ *и функция* u *являются гладкими.*

Следствие 4.2 (уравнения Лейна—Эмдена). *Пусть* $s \in (0,1)$, $\epsilon = -1$, $u \in C^1\big(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+} \setminus \{(0,0)\}\big) \cap C^2(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ *неотрицательны и удовлетворяют* (2.1) *и* (4.3), $v = u(\cdot, 0)$. *Пусть* w *определяется как* (4.2). *Если* $p \neq p_{2,s}$, *то при* $t \to -\infty$ *выполняется*:

1. *Если* $p > p_{1,s}$, *то* $w(t,\cdot)$ *сходится в* $L^\infty(\mathbb{S}^N_+)$ *либо к* ω_1, *либо к* 0.
2. *Если* $1 < p \leqslant p_{1,s}$, *то* $w(t,\cdot) \to 0$ *в* $L^\infty(\mathbb{S}^N_+)$.
3. *Если* $p > p_{1,s}$ *и* $w(t,\cdot)$ *сходится к* 0, *то* u *является гладкой функцией в* $\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+}$, *и* v *тоже.*
4. *Если* $1 < p < p_{1,s}$, *то существует* $k \geqslant 0$ *такое, что*
$$e^{(N-\frac{2s}{p-1})t} w(t,\sigma',\phi) \to k(\sin\phi)^{2s} \quad \text{равномерно в } \mathbb{S}^N_+.$$

Тонкой частью доказательства следствия 4.2 является утверждение 3. Мы адаптируем метод, разработанный в [8], чтобы доказать от противного, что существует $\epsilon > 0$ такое, что

$$\lim_{t\to\infty} \|w(t,.)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^N_+)} = 0 \Longrightarrow \exists \epsilon > 0,\ \exists c > 0:\ w(t,\sigma) \leqslant ce^{\epsilon t} \quad \text{при } t \leqslant -1.$$

Затем технический итеративный «каскадный процесс» позволяет улучшить эту оценку до

$$w(t,.) \leqslant ce^{\frac{2s}{p-1}t}.$$

Оставшаяся часть доказательства представляет собой просто анализ типа Фурье с оценками компонент $w(t,.)$ на собственных пространствах $-\Delta_{S^N}$.

В утверждении 2 при $p = p_{1,s}$ скорость убывания $w(t,.)$ может быть уточнена. Если $s = 1$, аналогичный вопрос решен П. Авилесом в [1]. Следующий результат доказан в [12, 23].

Теорема 4.2. *Пусть* $s \in (0,1)$, $\epsilon = -1$, $p = p_{1,s}$ *а функция* u *неотрицательна, принадлежит* $C^1\big(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+} \setminus \{(0,0)\}\big) \cap C^2(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ *и удовлетворяет* (2.1), (4.3). *Тогда либо* u *гладкая, либо*

$$\lim_{x\to 0} |x|^{N-2s}(-\ln|x|)^{\frac{N-2s}{2s}} v(x) = C(N,s)$$

для некоторой явной константы $C(N,s)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aviles P.* Local behavior of solutions of some elliptic equations// Commun. Math. Phys. — 1987. — *108.* — C. 177–192.
2. *Bidaut-Véron M. F., Véron L.* Nonlinear elliptic equations on compact Riemannian manifolds and asymptotics of Emden equations// Invent. Math. — 1991. — *106.* — C. 489–539.
3. *Boukarabila O., Véron L.* Nonlinear boundary value problems relative to harmonic functions// Nonlinear Anal. — 2020. — *201.* — 112090.
4. *Caffarelli L., Gidas B., Spruck J.* Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth// Commun. Pure Appl. Math. — 1989. — *42.* — C. 271–297.
5. *Caffarelli L., Jin T., Sire Y., Xiong J.* Local analysis of solutions of fractional semi-linear elliptic equations with isolated singularities// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2014. — *213.* — C. 245–268.
6. *Caffarelli L., Silvestre L.* An extension problem related to the fractional Laplacian// Commun. Part. Differ. Equ. — 2007. — *32.* — C. 1245–1260.
7. *Chandrasekhar S.* Introduction to Stellar Structure. — Chicago: Univ. Chicago, 1939.
8. *Chen X., Matano H., Véron L.* Anisotropic singularities of solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^2$// J. Funct. Anal. — 1989. — *83.* — C. 50–97.
9. *Chen H., Véron L.* Semilinear fractional elliptic equations involving measures// J. Differ. Equ. — 2014. — *257.* — C. 1457–1486.
10. *Chen H., Véron L.* Weakly and strongly singular solutions of semilinear fractional elliptic equations// Asymp. Anal. — 2014. — *88.* — C. 165–184.
11. *Chen H., Véron L.* Singularities of fractional Emden's equations via Caffarelli–Silvestre extension// J. Differ. Equ. — 2023. — *363.* — C. 472–530.
12. *Chen H., Zhou F., Personal communication* (2023).
13. *Fowler R. H.* Further studies on Emden's and similar differential equations// Q. J. Math. — 1931. — *2.* — C. 259–288.
14. *Gidas B., Ni W., Nirenberg L.* Symmetry and related properties via the maximum principle// Commun. Math. Phys. — 1979. — *68.* — C. 209–243.
15. *Gidas B., Spruck J.* Global and local behaviour of positive solutions of nonlinear elliptic equations// Commun. Pure Appl. Math. — 1981. — *34.* — C. 525–598.
16. *Hille E.* Some aspects of the Thomas–Fermi equation// J. Anal. Math. — 1970. — *23.* — C. 147–170.
17. *Obata M.* The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds// J. Diff. Geom. — 1971. — *6.* — C. 247–258.
18. *Ratto A., Rigoli M., Véron L.* Scalar curvature and conformal deformation of hyperbolic space// J. Funct. Anal. — 1994. — *121.* — C. 15–77.
19. *Simon L.* Isolated singularities of extrema of geometric variational problems// В сб.: «Harmonic Mappings and Minimal Immersions», Springer, Berlin–Heidelberg–New-York, 1985. — C. 206–277.
20. *Sommerfeld A.* Asymptotische integration der differential-gleichung des Thomas–Fermischen atoms// Z. Phys. — 1932. — *78.* — C. 283–308.
21. *Stein E.* Singular Integrals and Differentiability of Functions. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1971.
22. *Véron L.* Singular solutions of some nonlinear elliptic equations// Nonlinear Anal. — 1981. — *5.* — C. 225–242.
23. *Wei J., Wu K.* Local behavior of solutions to a fractional equation with isolated singularity and critical Serrin exponent// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2022. — *42.* — C. 4031–4050.
24. *Yang H., Zou W.* On isolated singularities of fractional semi-linear elliptic equations// Ann. Henri Poincaré. — 2021. — *38.* — C. 403–420.
25. *Yang H., Zou W.* Sharp blow up estimates and precise asymptotic behavior of singular positive solutions to fractional Hardy–Hénon equations// J. Differ. Equ. — 2021. — *278.* — C. 393–429.

Л. Верон
Institut Denis Poisson, Université de Tours, Тур, Франция
E-mail: veronl@univ-tours.fr

UDC 517.957
DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-85-95
EDN: TZCNJN

Applications of the s-harmonic extension to the study of singularities of Emden's equations

L. Véron

Institut Denis Poisson, Université de Tours, Tours, France

Abstract. We use the Caffarelli–Silvestre extension to $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$ to study the isolated singularities of functions satisfying the semilinear fractional equation $(-\Delta)^s v + \epsilon v^p = 0$ in a punctured domain of $\mathbb{R}^N$ where $\epsilon = \pm 1$, $0 < s < 1$ and $p > 1$. We emphasise the obtention of a priori estimates and analyse the set of self-similar solutions. We provide a complete description of the possible behaviour of solutions near a singularity.

Keywords: Emden's equation, semilinear fractional equation, Caffarelli–Silvestre extension, self-similar solutions.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: L. Véron, "Applications of the s-harmonic extension to the study of singularities of Emden's equations," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 1, 85–95. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-85-95

REFERENCES

1. P. Aviles, "Local behavior of solutions of some elliptic equations," *Commun. Math. Phys.*, **108**, 177–192 (1987).
2. M. F. Bidaut-Véron and L. Véron, "Nonlinear elliptic equations on compact Riemannian manifolds and asymptotics of Emden equations," *Invent. Math.*, **106**, 489–539 (1991).
3. O. Boukarabila and L. Véron, "Nonlinear boundary value problems relative to harmonic functions," *Nonlinear Analysis*, **201**, 112090 (2020).
4. L. Caffarelli, B. Gidas, and J. Spruck, "Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth," *Commun. Pure Appl. Math.*, **42**, 271–297 (1989).
5. L. Caffarelli, T. Jin, Y. Sire, and J. Xiong, "Local analysis of solutions of fractional semi-linear elliptic equations with isolated singularities," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **213**, 245–268 (2014).
6. L. Caffarelli and L. Silvestre, "An extension problem related to the fractional Laplacian," *Commun. Part. Differ. Equ.*, **32**, 1245–1260 (2007).
7. S. Chandrasekhar, *Introduction to Stellar Structure*, Univ. Chicago, Chicago (1939).
8. X. Chen, H. Matano, and L. Véron, "Anisotropic singularities of solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^2$," *J. Funct. Anal.*, **83**, 50–97 (1989).
9. H. Chen and L. Véron, "Semilinear fractional elliptic equations involving measures," *J. Differ. Equ.*, **257**, 1457–1486 (2014).
10. H. Chen and L. Véron, "Weakly and strongly singular solutions of semilinear fractional elliptic equations," *Asymp. Anal.*, **88**, 165–184 (2014).
11. H. Chen and L. Véron, "Singularities of fractional Emden's equations via Caffarelli–Silvestre extension," *J. Differ. Equ.*, **363**, 472–530 (2023).
12. H. Chen and F. Zhou, *Personal communication* (2023).

13. R. H. Fowler, "Further studies on Emden's and similar differential equations," *Q. J. Math.*, **2**, 259–288 (1931).
14. B. Gidas, W. Ni, and L. Nirenberg, "Symmetry and related properties via the maximum principle," *Commun. Math. Phys.*, **68**, 209–243 (1979).
15. B. Gidas and J. Spruck, "Global and local behaviour of positive solutions of nonlinear elliptic equations," *Commun. Pure Appl. Math.*, **34**, 525–598 (1981).
16. E. Hille, "Some aspects of the Thomas–Fermi equation," *J. Anal. Math.*, **23**, 147–170 (1970).
17. M. Obata, "The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds," *J. Diff. Geom.*, **6**, 247–258 (1971).
18. A. Ratto, M. Rigoli, and L. Véron, "Scalar curvature and conformal deformation of hyperbolic space," *J. Funct. Anal.*, **121**, 15–77 (1994).
19. L. Simon, "Isolated singularities of extrema of geometric variational problems," In: *Harmonic Mappings and Minimal Immersions*, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York, pp. 206–277 (1985).
20. A. Sommerfeld, "Asymptotische integration der differential-gleichung des Thomas–Fermischen atoms," *Z. Phys.*, **78**, 283–308 (1932).
21. E. Stein, *Singular Integrals and Differentiability of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton (1971).
22. L. Véron, "Singular solutions of some nonlinear elliptic equations," *Nonlinear Analysis*, **5**, 225–242 (1981).
23. J. Wei and K. Wu, "Local behavior of solutions to a fractional equation with isolated singularity and critical Serrin exponent," *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **42**, 4031–4050 (2022).
24. H. Yang and W. Zou, "On isolated singularities of fractional semi-linear elliptic equations," *Ann. Henri Poincaré*, **38**, 403–420 (2021).
25. H. Yang and W. Zou, "Sharp blow up estimates and precise asymptotic behavior of singular positive solutions to fractional Hardy–Hénon equations," *J. Differ. Equ.*, **278**, 393–429 (2021).

Laurent Véron
Institut Denis Poisson, Université de Tours, Tours, France
E-mail: veronl@univ-tours.fr