

УДК 517.956.4, 519.633

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-353-369

EDN: FAKSTK

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГАРДНЕРА

С. И. Безродных, С. В. Пикулин

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается вопрос об эффективном решении начально-краевой задачи для уравнения Гарднера — пространственно одномерного нелинейного эволюционного уравнения, описывающего широкий класс дисперсионных автоволновых процессов. В работе предложен численно-аналитический метод, основанный на сочетании явной и неявной схемы дискретизации по времени для различных членов дифференциального оператора. Для решения последовательности вспомогательных линейных задач разработан новый эффективный алгоритм, опирающийся на аналитические представления с использованием явного вида фундаментальной системы решений. Рассмотрен пример численного решения начально-краевой задачи для уравнения Гарднера и проведено сопоставление результата с известным точным решением типа уединенной бегущей волны.

Ключевые слова: уравнение Гарднера, эффективный численно-аналитический метод, функция Грина, явно-неявная схема.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: С. И. Безродных, С. В. Пикулин. Об одном методе решения начально-краевой задачи для уравнения Гарднера // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 3. С. 353–369. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-353-369>

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Начально-краевая задача для уравнения Гарднера. Будем рассматривать начально-краевую задачу для квазилинейного эволюционного уравнения в прямоугольнике $x \in [0, L]$, $t \in [0, T]$, заданного нелинейным оператором $\Xi[u](x, t)$, следующего вида:

$$\Xi[u] := \partial_t u + (\alpha u + \beta u^2) \partial_x u + \gamma \partial_{xxx}^3 u = f(x, t), \quad u = u(x, t), \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, T], \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (1.2)$$

$$u(0, t) = \varphi_0(t), \quad u(L, t) = \psi_0(t), \quad \partial_x u(L, t) = \psi_1(t), \quad (1.3)$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$. При $\beta = 0$ уравнение (1.1) превращается в уравнение Кортевега—де-Фриза [5]. В общем виде уравнение (1.1) может быть сведено к уравнению Кортевега—де-Фриза при помощи преобразования Миуры [20, 21]. Вопросы разрешимости начально-краевых задач для уравнения Кортевега—де-Фриза изучены, например, в работе [17].

Уравнение (1.1), называемое *уравнением Гарднера*, описывает волновые процессы в многокомпонентных стратифицированных жидкостях, в том числе внутренние волны в океане [15, 16], волны перепада уровня на мелкой воде — т. н. боры, или дисперсионные ударные волны [19], волны в конденсированной квантовой жидкости [14], а также ионно-звуковые волны в плазме [22, 24]. Отметим, что различные постановки задач для уравнения (1.1) привлекают внимание специалистов по численному анализу как содержательный пример для верификации различных вычислительных алгоритмов, см. [10], а также [11, 13, 23, 25].

Как правило, при численном решении нелинейных эволюционных уравнений отыскание искомой аппроксимации сводится к серии вспомогательных линейных задач (см., например, [8]). Поэтому при построении таких численных алгоритмов следует использовать адекватную решаемой задаче процедуру приближения нелинейного дифференциального оператора, а также опираться на достаточно точный и эффективный метод решения получаемых вспомогательных линейных задач.

Настоящая работа является продолжением исследований [3, 4] по разработке вычислительных алгоритмов решения начально-краевых нелинейных параболических задач, применимых, в том числе, для уравнений типа Колмогорова—Петровского—Пискунова и Бюргерса. В разделе 2 развита аналитико-численный алгоритм решения начально-краевой задачи (1.1)–(1.3), в основе которого лежит сочетание явной экстраполяции по времени нелинейного слагаемого $(\alpha u + \beta u^2) \partial_x u$ в левой части уравнения (1.1) и неявной аппроксимации его линейных членов в соответствии с модифицированной схемой Кранка—Николсон [12].

Новизна разработанного в разделе 2 численного алгоритма для уравнения (1.1) заключается в предложенном методе решения вспомогательных линейных задач. Решения этих задач мы строим в полуаналитическом виде с использованием явного вида частных решений линейного уравнения и его фундаментальной системы решений. Применяемый метод позволяет эффективно решать возникающие линейные краевые задачи с алгоритмической сложностью $O(K)$, где K — число отрезков дискретизации по пространственной переменной. Отметим также, что близкий подход использовался в работе [2] при решении сингулярно возмущенной краевой задачи, возникающей в теории полупроводниковых приборов [1].

В разделе 3 предложенный метод проиллюстрирован с помощью численной реализации для начально-краевой задачи о распространении солитона «большой амплитуды» (см. [7]) при отрицательном значении коэффициента β в уравнении (1.1). Полученные при сопоставлении численного результата с явным аналитическим решением данные подтверждают высокую точность и эффективность предложенного метода.

1.2. Общая схема вычислительного алгоритма. Зададим равномерную дискретизацию временного отрезка $[0, T]$ с шагом $\tau = T/N$, $N \in \mathbb{N}$ и введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} u_n(x) &\approx u(x, t_n), & x &\in [0, L], & t_n &= n\tau, & n &= 0, \dots, N, \\ F_n(x) &:= (\alpha u_n(x) + \beta u_n^2(x)) \frac{d}{dx} u_n(x), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $u_n(x)$ — искомое приближенное решение задачи (1.1)–(1.3) в момент времени $t = t_n$, причем функция $u_0(x)$ задана начальным условием (1.2). Будем вычислять приближения $u_n(x)$ последовательно при $n = 1, \dots, N$.

Для получения функции $u_1(x)$ из $u_0(x)$ можно воспользоваться любой двухслойной вычислительной схемой, например, явно-неявной схемой на основе приближения Кранка—Николсон [8]. В настоящей работе при сопоставлении численных результатов с явным решением в разделе 3 функция $u_1(x)$ и ее производные по x задаются в качестве известных величин наряду с начальными данными (1.2).

Предполагая, что приближенные значения $u(x, t)$ известны на первых n слоях, т. е. заданы функции

$$u_0(x), \quad u_1(x), \quad \dots, \quad u_n(x),$$

найдем приближение на $(n+1)$ -м слое, т. е. функцию $u_{n+1}(x)$. Для этого будем использовать следующую аппроксимацию нелинейного дифференциального оператора $\Xi[u]$ из (1.1), центрированную в точке $t = t_n + \tau/2$, на основе трехслойной явно-неявной схемы [12, 18]:

$$\begin{aligned} \Xi[u] = \partial_t u + (\alpha u + \beta u^2) \partial_x u + \gamma \partial_{xxx}^3 u \approx & \frac{u_{n+1}(x) - u_n(x)}{\tau} + \frac{3}{2} F_n(x) - \frac{1}{2} F_{n-1}(x) + \\ & + \frac{9}{16} \gamma \frac{d^3}{dx^3} u_{n+1}(x) + \frac{3}{8} \gamma \frac{d^3}{dx^3} u_n(x) + \frac{1}{16} \gamma \frac{d^3}{dx^3} u_{n-1}(x); \end{aligned} \quad (1.5)$$

здесь для нелинейного члена применена явная экстраполяция Адамса–Бэшфорта, а линейное слагаемое со старшей производной приближено по модифицированной схеме Кранка–Николсон [12].

Подставляя приближение (1.5) в уравнение (1.1), получаем уравнение относительно значений искомой аппроксимации $u_{n+1}(x)$ на $(n+1)$ -м слое:

$$\frac{9}{16} \tau \gamma \frac{d^3}{dx^3} u_{n+1}(x) + u_{n+1}(x) = g_{n+1}(x), \quad (1.6)$$

где правая часть определяется по формуле

$$g_{n+1}(x) = u_n(x) - \frac{3}{8} \tau \gamma \frac{d^3}{dx^3} u_n - \frac{1}{16} \tau \gamma \frac{d^3}{dx^3} u_{n-1} - \tau \left(\frac{3}{2} F_n(x) - \frac{1}{2} F_{n-1}(x) \right). \quad (1.7)$$

Используя уравнения вида (1.6), отвечающие индексам n , $n-1$, перепишем выражение (1.7) следующим образом:

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= u_n(x) + \frac{2}{3} (u_n(x) - g_n(x)) + \frac{1}{9} (u_{n-1}(x) - g_{n-1}(x)) + \tau \left(\frac{3}{2} F_n(x) - \frac{1}{2} F_{n-1}(x) \right) = \\ &= \frac{5}{3} u_n(x) + \frac{1}{9} u_{n-1}(x) - \frac{2}{3} g_n(x) - \frac{1}{9} g_{n-1}(x) + \tau \left(\frac{3}{2} F_n(x) - \frac{1}{2} F_{n-1}(x) \right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Отметим, что правая часть (1.7) уравнения (1.6) зависит только от функций, уже вычисленных на предыдущих шагах алгоритма. Кроме того, форма (1.8) представления $g_{n+1}(x)$ исключает явную зависимость этой правой части от старших производных функций $u_j(x)$, $j = 0, \dots, n-1$, хотя их первые производные входят в выражения (1.4) для нелинейных членов $F_n(x)$, $F_{n-1}(x)$.

Уравнение (1.6), (1.8) дополняется краевыми условиями

$$u_{n+1}(0) = \varphi_0(t_{n+1}), \quad u_{n+1}(L) = \psi_0(t_{n+1}), \quad \frac{du}{dx}(L) = \psi_1(t_{n+1}) \quad (1.9)$$

в соответствии с условиями (1.3) исходной задачи.

Таким образом, решение исходной нелинейной задачи (1.1)–(1.3) сведено к последовательному решению линейной задачи (1.6), (1.8), (1.9) с изменяющимися на каждом шаге алгоритма правой частью $g_{n+1}(x)$ и граничными значениями в (1.9). В следующем разделе 2 представлен численно-аналитический метод, позволяющий эффективно вычислять решение основной линейной задачи (1.6), (1.8), (1.9).

2. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОСНОВНОЙ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Для удобства изложения предлагаемого метода решения краевой задачи (1.6), (1.8), (1.9) перепишем уравнение (1.6) в новых обозначениях:

$$\mathcal{L}[y](x) \equiv \frac{1}{\omega^3} \frac{d^3 y}{dx^3} + y(x) = g(x), \quad \omega > 0, \quad x \in [0, L], \quad (2.1)$$

а краевые условия (1.9) — в виде

$$y(0) = \Phi_0, \quad y(L) = \Psi_0, \quad \frac{dy}{dx}(L) = \Psi_1. \quad (2.2)$$

Нетрудно убедиться в том, что следующий набор функций составляет фундаментальную систему решений уравнения (2.1)

$$\mathcal{F}_1(x) := e^{\mu x}, \quad \mathcal{F}_2(x) := e^{\rho x}, \quad \mathcal{F}_3(x) := e^{\bar{\rho} x} \quad (2.3)$$

где $\mu, \rho, \bar{\rho}$ — корни характеристического уравнения $\lambda^3/\omega^3 + 1 = 0$:

$$\lambda_1 =: \mu = -\omega, \quad \lambda_2 =: \rho = \omega \epsilon, \quad \lambda_3 =: \bar{\rho} = \omega \epsilon^{-1}, \quad \epsilon := e^{\pi i/3} = \sqrt[3]{-1}; \quad (2.4)$$

при этом $\mathcal{F}_1(x)$ является вещественной, а $\mathcal{F}_2(x)$ и $\mathcal{F}_3(x)$ — комплексными функциями. Нам потребуются следующие соотношения между величинами μ и ρ :

$$\rho \bar{\rho} = \omega^2, \quad \rho^2 = -\omega \bar{\rho}, \quad \bar{\rho}^2 = -\omega \rho, \quad \rho - \bar{\rho} = \omega \sqrt{3} i, \quad \rho - \mu = \omega \sqrt{3} e^{\pi i/6} = i \sqrt{3} \bar{\rho}. \quad (2.5)$$

$$\mu + \rho + \bar{\rho} = \omega(-1 + \epsilon + \bar{\epsilon}) = 0 = \omega^2(1 - \bar{\epsilon} - \epsilon) = \mu^2 + \rho^2 + \bar{\rho}^2. \quad (2.6)$$

Введем на отрезке $[0, L]$ сетку, образованную узлами

$$0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_K = L \quad (2.7)$$

и обозначим через $\mathcal{P}_m$ пространство многочленов от переменной x степени не выше $m \geq 0$ ($\dim \mathcal{P}_m = m + 1$). Будем предполагать, что правая часть $g(x)$ уравнения (2.1) является кусочно полиномиальной функцией, совпадающей на каждом из интервалов $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ с некоторым полиномом $f_k(x)$, т. е. справедливы соотношения

$$g(x)|_{[\xi_{k-1}, \xi_k]} =: f_k(x) \in \mathcal{P}_m, \quad k = 1, \dots, K. \quad (2.8)$$

Функция (2.8), вообще говоря, может иметь разрывы в точках ξ_k . Решение $y(x)$ уравнения (2.1) с такой правой частью будем искать в классе $C^2[0, L]$, понимая решение уравнения в смысле выполнения интегрального тождества, эквивалентного (2.1) (см. [9]).

Предлагаемый численный алгоритм решения задачи (2.1), (2.2) состоит из двух этапов. На первом этапе (см. п. 2.1) построим частные решения уравнения (2.1) отдельно на каждом из промежутков пространственного разбиения (2.7). На втором этапе (см. п. 2.2) с помощью этих частных решений получим решение краевой задачи (2.1), (2.2) на всем отрезке интегрирования $x \in [0, L]$.

2.1. Построение частных решений на отрезках разбиения. Построим частное решение уравнения (2.1) с правой частью вида (2.8) на k -м отрезке разбиения (2.7) при помощи интегрального представления

$$\tilde{y}_k(x) = \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} f_k(\xi) \mathcal{E}(x, \xi) d\xi, \quad x \in [\xi_{k-1}, \xi_k], \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.9)$$

где функция $f_k(\xi)$ задана равенством (2.8), а через $\mathcal{E}(x, \xi)$ обозначено фундаментальное решение уравнения (2.1), т. е. решение уравнения

$$\mathcal{L}[\mathcal{E}(x, \xi)] = \delta(x - \xi); \quad (2.10)$$

здесь $\xi \in \mathbb{R}$ — параметр, а $\delta(\cdot)$ — функция Дирака.

Утверждение 2.1. *Функция*

$$\mathcal{E}(x, \xi) = \frac{1}{3} \begin{cases} -\mu e^{\mu(x-\xi)}, & \xi \leq x, \\ \rho e^{\rho(x-\xi)} + \bar{\rho} e^{\bar{\rho}(x-\xi)}, & \xi > x \end{cases} \quad (2.11)$$

является фундаментальным решением уравнения (2.1), т. е. удовлетворяет равенству (2.10) при всех $\xi \in \mathbb{R}$.

Отметим, что функция (2.11) является вещественной и экспоненциально убывает с ростом расстояния $|x - \xi|$.

Доказательство. Фундаментальное решение (2.11) может быть получено следующим образом (см. [4, 6]). Образует из функций фундаментальной системы решений (2.3) и их производных матрицу

$$\mathbf{D}(x) := \begin{pmatrix} e^{\mu x} & e^{\rho x} & e^{\bar{\rho} x} \\ \mu e^{\mu x} & \rho e^{\rho x} & \bar{\rho} e^{\bar{\rho} x} \\ \mu^2 e^{\mu x} & \rho^2 e^{\rho x} & \bar{\rho}^2 e^{\bar{\rho} x} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \times \text{diag}(e^{\mu x}, e^{\rho x}, e^{\bar{\rho} x}), \quad (2.12)$$

где постоянная матрица $\mathbf{M}$ имеет вид

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu & \rho & \bar{\rho} \\ \mu^2 & \rho^2 & \bar{\rho}^2 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, \omega, \omega^2) \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \epsilon & \bar{\epsilon} \\ 1 & -\bar{\epsilon} & -\epsilon \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Первую строку матрицы $\mathbf{D}(x)$ составляют функции (2.3), вторую и третью строки — соответственно первые и вторые производные этих функций. Здесь и далее $\text{diag}(\cdot, \cdot, \cdot)$ означает диагональную матрицу с указанными элементами на главной диагонали. Обратим матрицу (2.12) и запишем результат, заменяя независимую переменную x на ξ :

$$\mathbf{D}^{-1}(\xi) = \text{diag}(e^{-\mu\xi}, e^{-\rho\xi}, e^{-\bar{\rho}\xi}) \times \mathbf{M}^{-1},$$

где

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \bar{\epsilon} & -\epsilon \\ 1 & \epsilon & -\bar{\epsilon} \end{pmatrix} \times \text{diag}(1, \omega^{-1}, \omega^{-2}). \quad (2.14)$$

Тогда произведение

$$\mathbf{G}(x, \xi) := \mathbf{D}(x) \times \mathbf{D}^{-1}(\xi) = \mathbf{M} \times \text{diag}(e^{\mu(x-\xi)}, e^{\rho(x-\xi)}, e^{\bar{\rho}(x-\xi)}) \times \mathbf{M}^{-1} \quad (2.15)$$

обращается в единичную матрицу $\mathbf{E}$ при $x = \xi$, т. е.

$$\mathbf{G}(x, \xi) \Big|_{x=\xi} = \mathbf{E}, \quad x, \xi \in \mathbb{R}, \quad (2.16)$$

причем вторая и третья строки матрицы-функции $\mathbf{G}(x, \xi)$ являются в силу построения (2.15) соответственно первой и второй производной по x от ее первой строки, поскольку тем же свойством обладает матрица-функция $\mathbf{G}(x)$.

Из (2.16) следует, что матричный элемент

$$G_{(1)}^{(3)}(x, \xi) = \frac{1}{3\omega^2} (e^{\mu(x-\xi)} - \epsilon e^{\rho(x-\xi)} - \bar{\epsilon} e^{\bar{\rho}(x-\xi)}), \quad (2.17)$$

занимающий правый верхний угол матрицы (2.15), удовлетворяет равенствам

$$G_{(1)}^{(3)}(x, \xi) \Big|_{x=\xi} = \frac{d}{dx} G_{(1)}^{(3)}(x, \xi) \Big|_{x=\xi} = 0, \quad \frac{d^2}{dx^2} G_{(1)}^{(3)}(x, \xi) \Big|_{x=\xi} = 1,$$

откуда получаем, что функция

$$\mathcal{E}_0(x, \xi) := \omega^3 G_{(1)}^{(3)}(x, \xi) \theta(x - \xi) \quad (2.18)$$

является фундаментальным решением уравнения (2.1); здесь $\theta(\cdot)$ — функция Хевисайда.

Покажем, что функция (2.11) отличается от $\mathcal{E}_0(x, \xi)$ прибавлением линейной комбинации функций $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_3$, принадлежащих фундаментальной системе (2.3) и, следовательно, также удовлетворяет условию (2.10). В самом деле, из (2.17), (2.18) с учетом равенств (2.5) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0(x, \xi) + \frac{\omega\epsilon}{3} \mathcal{F}_2 + \frac{\omega\bar{\epsilon}}{3} \mathcal{F}_3 &= \mathcal{E}_0(x, \xi) + \frac{\omega}{3} (\epsilon e^{\rho(x-\xi)} + \bar{\epsilon} e^{\bar{\rho}(x-\xi)}) = \\ &= \frac{\omega}{3} \begin{cases} e^{\mu(x-\xi)}, & x \geq \xi \\ \epsilon e^{\rho(x-\xi)} + \bar{\epsilon} e^{\bar{\rho}(x-\xi)}, & x < \xi \end{cases} = \mathcal{E}(x, \xi). \end{aligned}$$

Утверждение доказано. $\square$

Частное решение $\tilde{y}_k(x)$ уравнения (2.1) на отрезке $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ может быть вычислено по формулам (2.9), (2.11) путем численного интегрирования на основе квадратурных формул. Для случая кусочно полиномиальной правой части $g(x)$ этого уравнения, имеющей вид (2.8), проведем такое вычисление в явном виде.

Подставляя фундаментальное решение $\mathcal{E}(x, \xi)$ в виде (2.11) в интегральное представление (2.9), находим

$$\tilde{y}_k(x) = \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} f_k(\xi) \mathcal{E}(x, \xi) d\xi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \left(-\mu \int_{\xi_{k-1}}^x e^{\mu(x-\xi)} f_k(\xi) d\xi + \rho \int_x^{\xi_k} e^{\rho(x-\xi)} f_k(\xi) d\xi + \bar{\rho} \int_x^{\xi_k} e^{\bar{\rho}(x-\xi)} f_k(\xi) d\xi \right) = \\
&= \frac{1}{3} \left(\mu \int_x^{\xi_{k-1}} e^{\mu(x-\xi)} f_k(\xi) d\xi + \rho \int_x^{\xi_k} e^{\rho(x-\xi)} f_k(\xi) d\xi + \bar{\rho} \int_x^{\xi_k} e^{\bar{\rho}(x-\xi)} f_k(\xi) d\xi \right). \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Для того, чтобы вычислить интегралы, стоящие в правой части равенства (2.19), рассмотрим следующую более общую ситуацию. Предположим, что заданы некоторый многочлен $f(x) \in \mathcal{P}_m$ степени $m \geq 0$ и число $\nu \in \mathbb{C}$, $\nu \neq 0$, и найдем первообразную функции $e^{-\nu x} f(x)$. Применяя несколько раз интегрирование по частям, получим

$$\int e^{-\nu x} f(x) dx = -\frac{e^{-\nu x}}{\nu} \sum_{j=0}^m \frac{1}{\nu^j} \frac{d^j}{dx^j} f(x) + C = -\frac{e^{-\nu x}}{\nu} \left\{ \sum_{j=0}^m \left(\frac{1}{\nu} \mathcal{D}(m) \right)^j \right\} f(x) + C, \quad (2.20)$$

где через $\mathbf{1}_{m+1}$ обозначен тождественный оператор в пространстве $\mathcal{P}_m$, а через $\mathcal{D}_m$ — оператор дифференцирования по x , действующий в этом же линейном пространстве, т. е.

$$\mathcal{D}(m) : \mathcal{P}_m \rightarrow \mathcal{P}_m, \quad f \xrightarrow{\mathcal{D}(m)} \frac{df}{dx}, \quad f(x), \frac{df}{dx} \in \mathcal{P}_m. \quad (2.21)$$

Отметим, что оператор (2.21) является нильпотентным:

$$\forall f \in \mathcal{P}_m : \quad \frac{d^{m+1}f}{dx^{m+1}} = 0 \quad \implies \quad (\mathcal{D}(m))^{m+1} = 0. \quad (2.22)$$

Используя свойство (2.22), перепишем формулу (2.20) в виде

$$\int e^{-\nu x} f(x) dx = -\frac{e^{-\nu x}}{\nu} \left\{ \mathbf{1}_{m+1} - \frac{1}{\nu} \mathcal{D}(m) \right\}^{-1} f(x) + C, \quad C = \text{const}. \quad (2.23)$$

Отметим, что входящее в правую часть формулы (2.23) выражение

$$F(x; \nu)[f] := \left\{ \mathbf{1}_m - \frac{1}{\nu} \mathcal{D}(m) \right\}^{-1} f(x) \quad (2.24)$$

также задает многочлен из пространства $\mathcal{P}_m$.

Вычислим, исходя из (2.23), определенный интеграл от функции $e^{-\nu \xi} f(\xi)$ в пределах от x до Ξ , где $x, \Xi \in \mathbb{R}$ — некоторые числа, пользуясь формулой Ньютона—Лейбница:

$$\begin{aligned}
\int_x^\Xi e^{-\nu \xi} f(\xi) d\xi &= \left[-\frac{e^{-\nu \xi}}{\nu} F(\xi; \nu) \right]_{\xi=x}^{\xi=\Xi} = \frac{1}{\nu} \left(e^{-\nu x} F(x; \nu) - e^{-\nu \Xi} F(\Xi; \nu) \right) = \\
&= \frac{1}{\nu e^{\nu x}} \left(F(x; \nu) - F(\Xi; \nu) e^{\nu(x-\Xi)} \right); \quad (2.25)
\end{aligned}$$

здесь в выражениях $F(\cdot; \nu)[f]$ для простоты опущен параметр f .

Введем следующее обозначение:

$$\mathcal{J}(x; \nu, \Xi)[f] := \nu e^{\nu x} \int_x^\Xi e^{-\nu \xi} f(\xi) d\xi. \quad (2.26)$$

Тогда с учетом формулы (2.25) имеем

$$\mathcal{J}(x; \nu, \Xi)[f] = F(x; \nu)[f] - F(\Xi; \nu)[f] e^{\nu(x-\Xi)}. \quad (2.27)$$

Введем также обозначения для выражений (2.24) и (2.26) при $f = f_k(\xi)$:

$$F_k(x; \nu) := F(x; \nu)[f_k] \equiv \left\{ \mathbf{1}_{m+1} - \frac{1}{\nu} \mathcal{D}(m) \right\}^{-1} f_k(x), \quad F_k(x; \nu) \in \mathcal{P}_m, \quad (2.28)$$

$$\mathcal{J}_k(x; \nu, \Xi) := \mathcal{J}(x; \nu, \Xi)[f_k] = F_k(x; \nu) - F_k(\Xi; \nu) e^{\nu(x-\Xi)}. \quad (2.29)$$

Вычислим интегралы в правой части равенства (2.19) по формуле (2.25) при $f = f_k$ и $\nu = \mu$ или $\nu = \rho$. Используя введенные обозначения (2.24) (2.26), (2.28), (2.29), получим

$$\tilde{y}_k(x) = \frac{1}{3} (\mathcal{J}_k(x; \mu, \xi_{k-1}) + \mathcal{J}_k(x; \rho, \xi_k) + \mathcal{J}_k(x; \bar{\rho}, \xi_k)), \quad x \in [\xi_{k-1}, \xi_k]. \quad (2.30)$$

Найдем первую и вторую производные полученного частного решения (2.30) уравнения (2.1) на отрезке $[\xi_{k-1}, \xi_k]$. Для этого сначала продифференцируем по x выражение (2.26):

$$\frac{d}{dx} \mathcal{J}(x; \nu, \Xi)[f] = \nu^2 e^{\nu x} \int_{\Xi} e^{-\nu \xi} f(\xi) d\xi - \nu e^{\nu x} e^{-\nu x} f(x) = \nu \mathcal{J}(x; \nu, \Xi)[f] - \nu f(x). \quad (2.31)$$

Дифференцируя по x равенство (2.30), с учетом формул (2.31) и (2.6) находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tilde{y}_k(x) &= \frac{1}{3} \left(\frac{d}{dx} \mathcal{J}_k(x; \mu, \xi_{k-1}) + \frac{d}{dx} \mathcal{J}_k(x; \rho, \xi_k) + \frac{d}{dx} \mathcal{J}_k(x; \bar{\rho}, \xi_k) \right) = \\ &= \frac{1}{3} (\mu \mathcal{J}_k(x; \mu, \xi_{k-1}) + \rho \mathcal{J}_k(x; \rho, \xi_k) + \bar{\rho} \mathcal{J}_k(x; \bar{\rho}, \xi_k)) - \frac{1}{3} (\mu + \rho + \bar{\rho}) f_k(x) = \\ &= \frac{1}{3} (\mu \mathcal{J}_k(x; \mu, \xi_{k-1}) + \rho \mathcal{J}_k(x; \rho, \xi_k) + \bar{\rho} \mathcal{J}_k(x; \bar{\rho}, \xi_k)). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Повторно дифференцируя по x полученное выражение (2.32), аналогичным образом находим

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \tilde{y}_k(x) &= \frac{1}{3} (\mu^2 \mathcal{J}_k(x; \mu, \xi_{k-1}) + \rho^2 \mathcal{J}_k(x; \rho, \xi_k) + \bar{\rho}^2 \mathcal{J}_k(x; \bar{\rho}, \xi_k)) - \frac{1}{3} (\mu^2 + \rho^2 + \bar{\rho}^2) f_k(x) = \\ &= \frac{1}{3} (\mu^2 \mathcal{J}_k(x; \mu, \xi_{k-1}) + \rho^2 \mathcal{J}_k(x; \rho, \xi_k) + \bar{\rho}^2 \mathcal{J}_k(x; \bar{\rho}, \xi_k)). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$\tilde{\mathbf{y}}_k(x) := \left(\tilde{y}_k(x), \frac{d\tilde{y}_k}{dx}(x), \frac{d^2\tilde{y}_k}{dx^2}(x) \right)^T; \quad (2.34)$$

здесь и далее $(\cdot)^T$ означает матричное транспонирование. Тогда равенства (2.30), (2.32), (2.33) принимают вид одного векторного соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_k(x) &= \frac{1}{3} \left\{ \mathcal{J}_k(x; \mu, \xi_{k-1}) (1, \mu, \mu^2)^T + \mathcal{J}_k(x; \rho, \xi_k) (1, \rho, \rho^2)^T + \mathcal{J}_k(x; \bar{\rho}, \xi_k) (1, \bar{\rho}, \bar{\rho}^2)^T \right\} = \\ &= \frac{1}{3} \mathbf{M} \times (\mathcal{J}_k(x; \mu, \xi_{k-1}), \mathcal{J}_k(x; \rho, \xi_k), \mathcal{J}_k(x; \bar{\rho}, \xi_k))^T, \quad x \in [\xi_{k-1}, \xi_k], \end{aligned} \quad (2.35)$$

где матрица $\mathbf{M}$ имеет вид (2.13). Таким образом, искомое частное решение (2.9) уравнения (2.1) с полиномиальной правой частью на отрезке $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ построено в виде (2.30) и, вместе с первыми двумя производными, — в векторном виде (2.35).

Для дальнейшего изложения вычислительного алгоритма нам потребуется найти значения вектора (2.35) в концах отрезка $[\xi_{k-1}, \xi_k]$. Для того, чтобы их получить, воспользуемся тождеством

$$\mathcal{J}(\Xi; \nu, \Xi)[f] = 0, \quad \Xi \in \mathbb{R}, \quad \nu \neq 0, \quad f \in \mathcal{P}_m, \quad (2.36)$$

которое непосредственно вытекает из определения (2.26). Подставляя последовательно $x = \xi_{k-1}$ и $x = \xi_k$ в формулу (2.35), с учетом (2.36) находим

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_k(\xi_k) &= \frac{1}{3} \mathbf{M} \times (\mathcal{J}_k(\xi_k; \mu, \xi_{k-1}), 0, 0)^T, \quad k = 1, \dots, K, \\ \tilde{\mathbf{y}}_k(\xi_{k-1}) &= \frac{1}{3} \mathbf{M} \times (0, \mathcal{J}_k(\xi_{k-1}; \rho, \xi_k), \mathcal{J}_k(\xi_{k-1}; \bar{\rho}, \xi_k))^T. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Последнее равенство запишем, производя подстановку $k \mapsto (k+1)$, в следующем виде:

$$\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}(\xi_k) = \frac{1}{3} \mathbf{M} \times (0, \mathcal{J}_{k+1}(\xi_k; \rho, \xi_{k+1}), \mathcal{J}_{k+1}(\xi_k; \bar{\rho}, \xi_{k+1}))^T, \quad k = 0, \dots, K-1. \quad (2.38)$$

Таким образом, приходим к следующему результату.

Утверждение 2.2. Уравнение (2.1) с кусочно-полиномиальной правой частью (2.8) имеет на каждом отрезке $[\xi_{k-1}, \xi_k]$, $k = 1, \dots, K$, частное решение $\tilde{y}_k(x)$ вида (2.30), где выражения $\mathcal{J}_k(x; \cdot, \cdot)$ даны формулами (2.29), (2.28). Вектор (2.34), составленный из производных функции $\tilde{y}_k(x)$, может быть найден по формуле (2.35). Значения таких векторов в узлах ξ_k находятся по формулам (2.37), (2.38).

2.2. Решение линейной краевой задачи на отрезке. Построим решение краевой задачи (2.1), (2.2), (2.8), предполагая, что на отрезках $[\xi_{k-1}, \xi_k]$, разбиения (2.7) заданы какие-либо вещественнозначные частные решения $\tilde{y}_k(x) \in C^2[\xi_{k-1}, \xi_k]$ уравнения (2.1), (2.8):

$$\mathcal{L}[\tilde{y}_k](x) = f_k(x), \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, \dots, K. \quad (2.39)$$

Для этих частных решений мы сохраняем обозначение $\tilde{y}_k(x)$ из предыдущего пункта, не полагая при этом, что они обязательно заданы формулой (2.9). Как и выше, будем обозначать через $\tilde{\mathbf{y}}_k(x)$ вектор-функцию (2.34).

Определим для каждого отрезка $[\xi_{k-1}, \xi_k]$, $k = 1, \dots, K$, разбиения (2.7) фундаментальную систему решений уравнения (2.1), элементы которой запишем в виде строки

$$\mathbf{d}_k(x) := (e^{\mu(x-\xi_{k-1})}, e^{\rho(x-\xi_k)}, e^{\bar{\rho}(x-\xi_k)}). \quad (2.40)$$

Дополняя строку (2.40) ее первой и второй производной по x , образуем по аналогии с матрицей (2.12) матрицу

$$\mathbf{D}_k(x) := \begin{pmatrix} e^{\mu(x-\xi_{k-1})} & e^{\rho(x-\xi_k)} & e^{\bar{\rho}(x-\xi_k)} \\ \mu e^{\mu(x-\xi_{k-1})} & \rho e^{\rho(x-\xi_k)} & \bar{\rho} e^{\bar{\rho}(x-\xi_k)} \\ \mu^2 e^{\mu(x-\xi_{k-1})} & \rho^2 e^{\rho(x-\xi_k)} & \bar{\rho}^2 e^{\bar{\rho}(x-\xi_k)} \end{pmatrix} = \quad (2.41)$$

$$= \mathbf{M} \times \text{diag}(e^{\mu(x-\xi_{k-1})}, e^{\rho(x-\xi_k)}, e^{\bar{\rho}(x-\xi_k)}), \quad (2.42)$$

где постоянная матрица $\mathbf{M}$ дана формулой (2.13); здесь и далее знак $\times$ обозначает матричное умножение.

Обозначим через $\hat{y}(x)$ искомое решение краевой задачи (2.1), (2.2), (2.8), а через $\hat{\mathbf{y}}(x)$ — вектор производных порядка 0, 1, 2 от $\hat{y}(x)$ по аналогии с (2.34). На каждом из отрезков $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ это решение имеет вид

$$\hat{y}(x) = \tilde{y}_k(x) + \mathbf{d}_k(x) \times \mathbf{h}_k, \quad (2.43)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(x) = \tilde{\mathbf{y}}_k(x) + \mathbf{D}_k(x) \times \mathbf{h}_k, \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.44)$$

где

$$\mathbf{h}_k \equiv (a_k, b_k, c_k)^T, \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.45)$$

— некоторый постоянный вектор-столбец коэффициентов, элементы которого будут найдены далее, а строка $\mathbf{d}_k(x)$ и матрица $\mathbf{D}_k(x)$ заданы равенствами (2.40), (2.41).

Условие гладкости $\hat{y}(x) \in C^2[0, L]$ эквивалентно требованию непрерывности вектор-функции $\hat{\mathbf{y}}(x)$ во внутренних узлах ξ_k отрезка $[0, L]$. В силу представления (2.44) это приводит к следующим условиям:

$$\tilde{\mathbf{y}}_k(\xi_k) + \mathbf{D}_k(\xi_k) \times \mathbf{h}_k = \tilde{\mathbf{y}}_{k+1}(\xi_k) + \mathbf{D}_{k+1}(\xi_k) \times \mathbf{h}_{k+1}, \quad k = 1, \dots, K-1. \quad (2.46)$$

Соотношения (2.46) представляют собой систему $(K-1)$ линейных алгебраических уравнений относительно K векторов (2.45). Потребуем в дополнение к этому выполнения краевых условий (2.2), что обеспечит совпадение числа уравнений и числа неизвестных. Для того чтобы сформулировать указанное требование, введем фундаментальные системы решений $\mathbf{d}_{(0)}(x)$ и $\mathbf{d}_{(L)}(x)$ уравнения (2.1), связанные с концевыми точками отрезка $[0, L]$ $x = 0 = \xi_0$ и $x = L = \xi_K$ соответственно:

$$\mathbf{d}_{(0)}(x) := (\mathcal{F}_1(x), \mathcal{F}_2(x), \mathcal{F}_3(x)), \quad \mathbf{d}_{(L)}(x) := \mathbf{d}_0(x-L), \quad (2.47)$$

где функции $\mathcal{F}_j(x)$, $j = 1, 2, 3$, являются экспонентами (2.3). Определим также соответствующие матрицы, составленные из производных фундаментальных систем (2.47):

$$\mathbf{D}_{(0)}(x) := \mathbf{D}(x) = \mathbf{D}_1(x) \times \text{diag}(1, e^{-\rho\xi_1}, e^{-\bar{\rho}\xi_1}), \quad (2.48)$$

$$\mathbf{D}_{(L)}(x) := \mathbf{D}(x - L) = \mathbf{D}_K(x) \times \text{diag}(e^{\mu(L-\xi_{K-1})}, 1, 1), \quad (2.49)$$

где матрица $\mathbf{D}(x)$ имеет вид (2.12), а $\mathbf{D}_1(x)$ и $\mathbf{D}_K(x)$ даны формулой (2.41) при $k = 1$ и $k = K$.

Запишем равенство (2.44) при $k = 1$, $x = \xi_0 = 0$ с учетом (2.48) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}(0) - \tilde{\mathbf{y}}_1(0) &= \mathbf{D}_1(0) \times \mathbf{h}_1 = \mathbf{D}_{(0)}(0) \times \text{diag}(1, e^{-\rho\xi_1}, e^{-\bar{\rho}\xi_1}) \times \mathbf{h}_1 = \\ &= \mathbf{M} \times (a_1, e^{-\rho\xi_1} b_1, e^{-\bar{\rho}\xi_1} c_1)^T. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Аналогичным образом равенство (2.44) при $k = K$, $x = \xi_K = L$ запишем в виде

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}(L) - \tilde{\mathbf{y}}_K(L) &= \mathbf{D}_K(L) \times \mathbf{h}_K = \mathbf{D}_{(L)}(L) \times \text{diag}(e^{\mu(L-\xi_{K-1})}, 1, 1) \times \mathbf{h}_K = \\ &= \mathbf{M} \times (e^{\mu(L-\xi_{K-1})} a_K, b_K, c_K)^T. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Рассмотрим векторные равенства (2.50), (2.51) покомпонентно и выпишем те три уравнения из получившихся шести, в которые входят данные краевых условий (2.2):

$$\Phi_0 - \tilde{y}_1(0) = a_1 + e^{-\rho\xi_1} b_1 + e^{-\bar{\rho}\xi_1} c_1, \quad (2.52)$$

$$\Psi_0 - \tilde{y}_K(L) = e^{\mu(L-\xi_{K-1})} a_K + b_K + c_K, \quad (2.53)$$

$$\Psi_1 - \frac{\tilde{y}_K}{dx}(L) = \mu e^{\mu(L-\xi_{K-1})} a_K + \rho b_K + \bar{\rho} c_K, \quad (2.54)$$

где уравнение (2.52) отвечает первой компоненте равенства (2.50), а уравнение (2.53), (2.54) — первым двум компонентам равенства (2.51).

Уравнения (2.46), (2.52)–(2.54) образуют систему линейных алгебраических уравнений, в которой число уравнений $3K$ совпадает с числом искомым скалярных величин (2.45). Для того, чтобы сформулировать результат о разрешимости этой системы и дать эффективные формулы вычисления коэффициентов a_k , b_k , c_k , введем ряд обозначений. Определим числа u_k , v_k , w_k , $k = 1, \dots, K-1$, характеризующие размер скачков частных решений $\tilde{y}_k(x)$ и их производных во внутренних узлах сетки (2.7), следующим образом:

$$(u_k, v_k, w_k)^T \equiv \mathbf{z}_k := \mathbf{M}^{-1} \times (\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}(\xi_k) - \tilde{\mathbf{y}}_k(\xi_k)), \quad k = 1, \dots, K-1, \quad (2.55)$$

где матрица $\mathbf{M}^{-1}$ имеет вид (2.14). Рассмотрим также следующие линейные комбинации этих чисел:

$$U := \sum_{k=1}^{K-1} e^{\mu(L-\xi_k)} u_k, \quad V := \sum_{k=1}^{K-1} e^{-\rho\xi_k} v_k, \quad W := \sum_{k=1}^{K-1} e^{-\bar{\rho}\xi_k} w_k. \quad (2.56)$$

Определим величины $\tilde{\Phi}_0$, $\tilde{\Psi}_0$, $\tilde{\Phi}_1$ и $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, связанные с краевыми условиями (2.2):

$$\tilde{\Phi}_0 := \Phi_0 - \tilde{y}_1(0), \quad \tilde{\Psi}_0 := \Psi_0 - \tilde{y}_K(L), \quad \tilde{\Phi}_1 := \Psi_1 - \frac{\tilde{y}_K}{dx}(L), \quad (2.57)$$

$$\mathcal{R}_1 := \tilde{\Psi}_0 + \frac{1}{\omega} \tilde{\Phi}_1, \quad \mathcal{R}_2 := \tilde{\Psi}_0 + U - e^{\mu L} (\tilde{\Phi}_0 - V - W). \quad (2.58)$$

Отметим, что из вида матрицы (2.14) и вещественности компонент векторов $\tilde{\mathbf{y}}_k(x)$ и функций, задающих краевые условия (2.2), вытекают следующие соотношения:

$$u_k \in \mathbb{R}, \quad w_k = \bar{v}_k, \quad k = 1, \dots, K-1; \quad U, \tilde{\Phi}_0, \tilde{\Psi}_0, \tilde{\Phi}_1, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathbb{R}, \quad W = \bar{V}. \quad (2.59)$$

Введем в рассмотрение число $\mathcal{B}$, зависящее только от произведения (ωL) :

$$\mathcal{B} := \text{Im}\{(\epsilon + 1)(1 - e^{-(\bar{\epsilon}+1)\omega L})\}, \quad (2.60)$$

где ϵ определено последней из формул (2.4). Заметим, что поскольку $\text{Re}\{\bar{\epsilon} + 1\} = 3/2 > 0$, то при достаточно больших значениях (ωL) величина $\mathcal{B}$ отлична от нуля.

Теорема 2.1. *Предположим, что величина $\mathcal{B}$, определяемая по формуле (2.60), отлична от нуля. Тогда система уравнений (2.45), (2.46), (2.52)–(2.54) однозначным образом разрешима относительно $3K$ искомым величин a_k , b_k , c_k , $k = 1, \dots, K$ — коэффициентов представления (2.43)–(2.45) — при любых значениях параметров $\Phi_0, \Phi_1, \Psi_0 \in \mathbb{R}$ и любых заданных функциях $\tilde{y}_k(x) \in C^2[\xi_{k-1}, \xi_k]$, $k = 1, \dots, K$.*

Справедливы следующие формулы для вычисления коэффициентов b_K и a_1 :

$$b_K = \frac{(1 - e^{-(\bar{\epsilon}+1)\omega L}) \mathcal{R}_1 - (\bar{\epsilon} + 1) \mathcal{R}_2}{2i\mathcal{B}}, \quad (2.61)$$

$$a_1 = \tilde{\Phi}_0 - 2 \operatorname{Re}\{V + e^{-\rho L} b_K\}, \quad (2.62)$$

где $\tilde{\Phi}_0$ определено формулой (2.57). Остальные коэффициенты из серий $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ определяются рекуррентным способом:

$$a_{k+1} = e^{\mu(\xi_k - \xi_{k-1})} a_k - u_k, \quad k = 1, \dots, K-1, \quad (2.63)$$

$$b_k = e^{-\rho(\xi_{k+1} - \xi_k)} b_{k+1} + v_k, \quad k = K-1, \dots, 1. \quad (2.64)$$

Для коэффициентов $\{c_k\}$ справедливо соотношение

$$c_k = \bar{b}_k, \quad k = 1, \dots, K. \quad (2.65)$$

Доказательство. Умножая равенство (2.46) слева на матрицу $\mathbf{M}^{-1}$, перепишем его с учетом формулы (2.42) и обозначения (2.55) в виде

$$\begin{aligned} & \operatorname{diag}(e^{\mu(\xi_k - \xi_{k-1})}, 1, 1, \dots) \times \mathbf{h}_k - \operatorname{diag}(1, e^{\rho(\xi_k - \xi_{k+1})}, e^{\bar{\rho}(\xi_k - \xi_{k+1})}) \times \mathbf{h}_{k+1} = \\ & = \mathbf{M}^{-1} \times (\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}(\xi_k) - \tilde{\mathbf{y}}_k(\xi_k)) = \mathbf{z}_k, \quad k = 1, \dots, K-1. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Покомпонентная запись векторного равенства (2.66) приводит к соотношениям (2.63), (2.64) и следующей формуле:

$$c_k = c_{k+1} e^{-\bar{\rho}(\xi_{k+1} - \xi_k)} + w_k, \quad k = 1, \dots, K-1. \quad (2.67)$$

Перейдем к выводу равенств (2.61), (2.62). Последовательно применяя $K-1$ раз формулу (2.63), выразим через a_1 величину $e^{\mu(L - \xi_{K-1})} a_K$, входящую в правые части уравнений (2.53) и (2.54):

$$\begin{aligned} e^{\mu(L - \xi_{K-1})} a_K &= e^{\mu(L - \xi_{K-1})} (e^{\mu(\xi_{K-1} - \xi_{K-2})} a_{K-1} - u_{K-1}) = \\ &= e^{\mu(L - \xi_{K-2})} (e^{\mu(\xi_{K-2} - \xi_{K-3})} a_{K-2} - u_{K-2}) - e^{\mu(L - \xi_{K-1})} u_{K-1} = \dots = \\ &= e^{\mu(L - \xi_1)} (e^{\mu(\xi_1 - \xi_0)} a_1 - u_1) - e^{\mu(L - \xi_2)} u_2 - \dots - e^{\mu(L - \xi_{K-2})} u_{K-2} - e^{\mu(L - \xi_{K-1})} u_{K-1} = \\ &= e^{\mu L} a_1 - U, \end{aligned} \quad (2.68)$$

где U задано первым из равенств (2.56). Аналогичным образом выразим через b_K и c_K слагаемые в правой части уравнения (2.52), содержащие b_1 и c_1 , используя рекуррентные соотношения (2.64) и (2.67) соответственно:

$$e^{-\rho \xi_1} b_1 = e^{-\rho \xi_1} (e^{-\rho(\xi_2 - \xi_1)} b_2 + v_1) = \dots = e^{-\rho L} b_K + V, \quad (2.69)$$

$$e^{-\bar{\rho} \xi_1} c_1 = e^{-\bar{\rho} \xi_1} (e^{-\bar{\rho}(\xi_2 - \xi_1)} c_2 + w_1) = \dots = e^{-\bar{\rho} L} c_K + W, \quad (2.70)$$

где величины V и W также заданы формулами (2.56).

Подставляя выражения (2.68)–(2.70) в уравнения (2.52)–(2.54), исключим величины a_K , b_1 и c_1 из этой системы. Тогда с использованием обозначений (2.57) получаем следующую систему трех линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_1 , b_K и c_K :

$$a_1 + (e^{-\rho L} b_K + V) + (e^{-\bar{\rho} L} c_K + W) = \tilde{\Phi}_0, \quad (2.71)$$

$$(e^{\mu L} a_1 - U) + b_K + c_K = \tilde{\Psi}_0, \quad (2.72)$$

$$\mu(e^{\mu L} a_1 - U) + \rho b_K + \bar{\rho} c_K = \tilde{\Psi}_1, \quad (2.73)$$

Исключим a_1 из уравнений (2.72), (2.73). Для этого умножим первое из них (2.72) на μ и вычтем результат из второго (2.73), получим

$$(\rho - \mu) b_K + (\bar{\rho} - \mu) c_K = \tilde{\Psi}_1 - \mu \tilde{\Psi}_0. \quad (2.74)$$

Затем, подставляя в уравнение (2.72) коэффициент a_1 , выраженный из уравнения (2.71) в виде

$$a_1 = \tilde{\Phi}_0 - V - W - e^{-\rho L} b_K - e^{-\bar{\rho} L} c_K, \quad (2.75)$$

получаем

$$(1 + e^{(\mu-\rho)L}) b_K + (1 + e^{(\mu-\bar{\rho})L}) c_K = \tilde{\Psi}_0 + U - e^{\mu L} (\tilde{\Phi}_0 - V - W). \quad (2.76)$$

Запишем уравнение (2.74), разделив его на $\omega = -\mu$, вместе с уравнением (2.76) с учетом равенств (2.4), (2.5) в следующем векторном виде:

$$\begin{pmatrix} \epsilon + 1 & \bar{\epsilon} + 1 \\ 1 - e^{-(\epsilon+1)\omega L} & 1 - e^{-(\bar{\epsilon}+1)\omega L} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_K \\ c_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 \\ \mathcal{R}_2 \end{pmatrix}, \quad (2.77)$$

где величины $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ заданы формулами (2.58). Решая полученную систему (2.77), находим

$$b_K = \frac{(1 - e^{-(\bar{\epsilon}+1)\omega L}) \mathcal{R}_1 - (\bar{\epsilon} + 1) \mathcal{R}_2}{2i \operatorname{Im}\{(\epsilon + 1)(1 - e^{-(\bar{\epsilon}+1)\omega L})\}}, \quad c_K = \frac{-(1 - e^{-(\epsilon+1)\omega L}) \mathcal{R}_1 + (\epsilon + 1) \mathcal{R}_2}{2i \operatorname{Im}\{(\epsilon + 1)(1 - e^{-(\bar{\epsilon}+1)\omega L})\}},$$

откуда с учетом обозначения (2.60) получаем формулу (2.61), а также соотношение

$$c_K = \overline{b_K}. \quad (2.78)$$

Формула (2.62) вытекает из (2.75), (2.78) и (2.59), а формула (2.65) следует по индукции из (2.78), (2.67), (2.64) и (2.59). Теорема доказана. $\square$

2.3. Вычислительный алгоритм решения линейной краевой задачи. Дадим уточнение формул (2.55) для случая, когда частные решения $\tilde{y}_k(x)$ уравнения (2.1), (2.8) заданы в виде (2.30), (2.35).

Подставляя равенства (2.37), (2.38) в формулу (2.55) при $k = 1, \dots, K-1$, находим

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_k &= \mathbf{M}^{-1} \times (\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}(\xi_k) - \tilde{\mathbf{y}}_k(\xi_k)) = \mathbf{M}^{-1} \times \left(\frac{1}{3} \mathbf{M} \times (0, \mathcal{J}_{k+1}(\xi_k; \rho, \xi_{k+1}), \mathcal{J}_{k+1}(\xi_k; \bar{\rho}, \xi_{k+1}))^T - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \mathbf{M} \times (\mathcal{J}_k(\xi_k; \mu, \xi_{k-1}), 0, 0)^T \right) = \frac{1}{3} (-\mathcal{J}_k(\xi_k; \mu, \xi_{k-1}), \mathcal{J}_{k+1}(\xi_k; \rho, \xi_{k+1}), \mathcal{J}_{k+1}(\xi_k; \bar{\rho}, \xi_{k+1}))^T, \end{aligned}$$

т. е. для коэффициентов $\{u_k\}, \{v_k\}, \{w_k\}$ имеем следующие выражения:

$$u_k = -\frac{1}{3} \mathcal{J}_k(\xi_k; \mu, \xi_{k-1}), \quad v_k = \frac{1}{3} \mathcal{J}_{k+1}(\xi_k; \rho, \xi_{k+1}), \quad w_k = \overline{v_k}, \quad k = 1, \dots, K-1, \quad (2.79)$$

где величины $\mathcal{J}_k(x; \cdot, \cdot)$ определяются по формулам (2.29), (2.28).

Остановимся подробнее на вычислении полиномов $F_k(x; \nu)$ вида (2.28), которые составляют основу построения искомого решения задачи (2.1), (2.2), (2.8) согласно теореме 2.1 и формулам (2.29), (2.79).

Предположим, что многочлен $f_k(x) \in \mathcal{P}_m$, задающий правую часть уравнения (2.1) на k -м отрезке разбиения (2.7), записан в виде линейной комбинации

$$f_k(x) = \sum_{j=0}^m f_{k,j} T_j^{(k)}(x), \quad f_{k,j} \in \mathbb{R}, \quad (2.80)$$

базисных векторов

$$T_j^{(k)}(x) := T_j\left(2 \frac{x - \xi_{k-1}}{\Delta_k} - 1\right), \quad j = 0, \dots, m, \quad (2.81)$$

где $T_j(X)$ — j -й многочлен Чебышева первого рода, $X \in [-1, 1]$, а через Δ_k обозначена длина рассматриваемого отрезка:

$$\Delta_k := \xi_k - \xi_{k-1}, \quad k = 1, \dots, K. \quad (2.82)$$

Обозначим через $\mathbf{T}(m)$ матрицу оператора дифференцирования многочленов от X в базисе $\{T_j(X)\}_{j=0}^m$. Тогда матрица оператора дифференцирования $\mathcal{D}(m)$ в базисе $\{T_j^{(k)}(x)\}_{j=0}^m$ равна $2\mathbf{T}(m)/\Delta_k$, а матрица оператора $(1 - \mathcal{D}(m)/\nu)$, стоящего в правой части определения (2.28), имеет вид

$$\mathbf{R}_{(k)}(m, \nu) := \mathbf{E}_{m+1} - \frac{2}{\nu \Delta_k} \mathbf{T}(m), \quad (2.83)$$

где $\mathbf{E}_{m+1} = \text{diag}(1, \dots, 1)$ — единичная матрица порядка $m + 1$. Матрица $\mathbf{T}(m)$ является верхне-треугольной и имеет нули на главной диагонали. Следовательно, матрица $\mathbf{R}_{(k)}(m, \nu)$, как и обратная к ней, также является верхне-треугольной и имеет единицы на главной диагонали. Вычисляя эту обратную матрицу и применяя ее к вектору (2.80), получаем вектор-столбец

$$(\mathbf{R}_{(k)}(m, \nu))^{-1} \times (f_{k,0}, \dots, f_{k,m})^T$$

коэффициентов разложения искомого многочлена $F_k(x; \nu)$ по базису (2.81). Сформулируем построенный вычислительный алгоритм решения задачи (2.1), (2.2), (2.8) с кусочно полиномиальной правой частью.

Алгоритм 2.1.

1. Предполагаем, что многочлены (2.8), задающие правую часть уравнения (2.1), представлены коэффициентами $f_{k,j}$ разложения (2.80) по базису (2.81), $j = 0, \dots, m$, $k = 1, \dots, K$.
2. Вычисляем матрицы $(\mathbf{R}_{(k)}(\mu, m))^{-1}$ и $(\mathbf{R}_{(k)}(\rho, m))^{-1}$, $k = 1, \dots, K$, обратные к матрицам (2.83) при $\nu = \mu$ и $\nu = \rho$ соответственно.
3. Умножая векторы $(f_{k,j})_{j=0}^m$ слева на найденные матрицы для каждого значения индекса $k = 1, \dots, K$, вычисляем по формуле (2.28) многочлены $F_k(x; \mu)$ и $F_k(x; \rho)$ в виде разложений по базису (2.81).
4. Подставляя в формулу (2.29) последовательно $x = \xi_k$ при $k = 1, \dots, K$ и $\nu = \rho$, $\nu = \mu$, находим значения $\mathcal{J}_{k+1}(\xi_k; \mu, \xi_{k+1})$, $\mathcal{J}_k(\xi_k; \rho, \xi_k)$, $k = 1, \dots, K-1$, из которых по формулам (2.79) получаем числа $\{u_k\}$, $\{v_k = \overline{w_k}\}$.
5. По формулам (2.56)–(2.58), (2.60)–(2.65) находим коэффициенты $\{a_k\}$, $\{b_k = \overline{c_k}\}$.
6. Получаем искомое решение $y = \hat{y}(x)$ вместе с его первыми двумя производными в виде (2.43)–(2.45), где частные решения $\tilde{y}_k(x)$ и их производные представлены формулой (2.35).

При заданном m алгоритм 2.1 имеет сложность $O(K)$, где K — число отрезков разбиения (2.7). Отметим, что если разбиения (2.7) является равномерным, то матрицы (2.83) совпадают между собой при всех $k = 1, \dots, K$, поскольку одинаковы длины (2.82) отрезков $[\xi_{k-1}, \xi_k]$. В этом случае все шаги алгоритма 2.1, кроме шага 5, сводятся к перемножению матриц, что позволяет достичь высокой эффективности при его численной реализации.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим пример численного решения начально-краевой задачи для уравнения Гарднера

$$\partial_t u + (\alpha u + \beta u^2) \partial_x u + \gamma \partial_{xxx}^3 u = 0, \quad (3.1)$$

т. е. для уравнения (1.1) при $f(x) = 0$. Выпишем известное [7] солитонное решение, т. е. решение типа уединенной бегущей волны

$$u^{\text{ex}}(x, t) = \frac{6\gamma\Gamma^2}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 6\beta\gamma\Gamma^2} \text{ch}(\Gamma(x - \Omega t))}, \quad \Gamma > 0, \quad \Omega := \gamma\Gamma^2, \quad (3.2)$$

где Ω — скорость распространения волны вдоль оси x , а Γ — произвольный параметр.

При $\beta < 0$ допустимые значения величины Γ имеют верхнюю грань Γ_{lim} :

$$\Gamma \in (0, \Gamma_{\text{lim}}), \quad \Gamma_{\text{lim}} = \frac{\alpha}{\sqrt{6|\beta|\gamma}}, \quad (3.3)$$

так что при $\Gamma \rightarrow \Gamma_{\text{lim}}$ амплитуда $A := \max_{(x,t)} u^{\text{ex}}(x, t)$ решения (3.2) приближается снизу к своему предельному значению

$$A_{\text{lim}} = \frac{\alpha}{|\beta|},$$

а верхняя часть профиля волны обретает характерную плоскую форму.

Зададим начальное и краевые условия (1.2), (1.3) для уравнения (3.1) в следующем виде:

$$u_0(x) = u^{\text{ex}}(0, x), \quad \varphi_0(t) = u^{\text{ex}}(0, t), \quad \psi_0(t) = u^{\text{ex}}(L, t), \quad \psi_1(t) = \frac{\partial u^{\text{ex}}}{\partial x}(L, t). \quad (3.4)$$

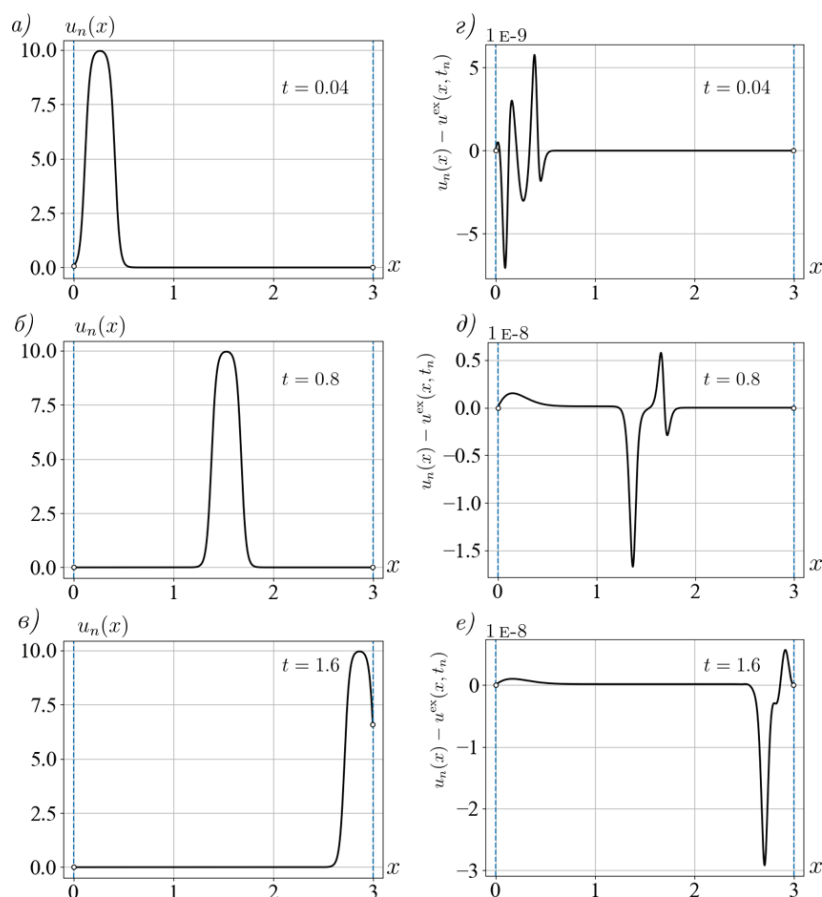


Рис. 1. Решение задачи (3.1), (3.4), (3.5) — распространение солитона (3.2); а, б, в — график решения в различные моменты времени; г, д, е — график абсолютной погрешности в те же моменты времени.

FIG. 1. Solution of the problem (3.1), (3.4), (3.5): propagation of the soliton (3.2); а, б, в: graphs of the solution at different moments of time; г, д, е: graphs of the absolute error at the same moments of time.

τ	m	K	$\ u_n - u^{\text{ex}}(\cdot, t_n)\ _{L_\infty}$	$\ \partial_x u_n - \partial_x u^{\text{ex}}(\cdot, t_n)\ _{L_\infty}$	CPU t, sec
1 E-3	4	100	1.2 E-2	2.7 E-1	0.24
1 E-4	5	200	1.3 E-4	3.2 E-3	3.48
1 E-5	6	300	1.4 E-6	3.2 E-5	50.36
1 E-6	7	400	2.9 E-8	5.1 E-7	658.11

ТАБ. 1. Сопоставление результатов численного алгоритма для задачи (3.1), (3.4), (3.5) с ее точным решением (3.2) при различных значениях параметров τ , m , K .

ТАБ. 1. Comparison of the results of the numerical algorithm for the problem (3.1), (3.4), (3.5) with its exact solution (3.2) for different values of the parameters τ , m , K .

Приведены результаты численного решения начально-краевой задачи (3.1), (3.4), проведенного по схеме из раздела 1.2 с использованием алгоритма 2.1 для решения вспомогательной линейной задачи (1.6), (1.8), (1.9), при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, & \beta &= -0.1, & \gamma &= 10^{-3}, & L &= 3, & T &= 1.6, & x_0 &= 0.2, \\ A_{\text{lim}} &= 10, & \Gamma &= (1 - 10^{-5}) \Gamma_{\text{lim}} \approx 40.82, & \Omega &\approx 1.67. \end{aligned} \quad (3.5)$$

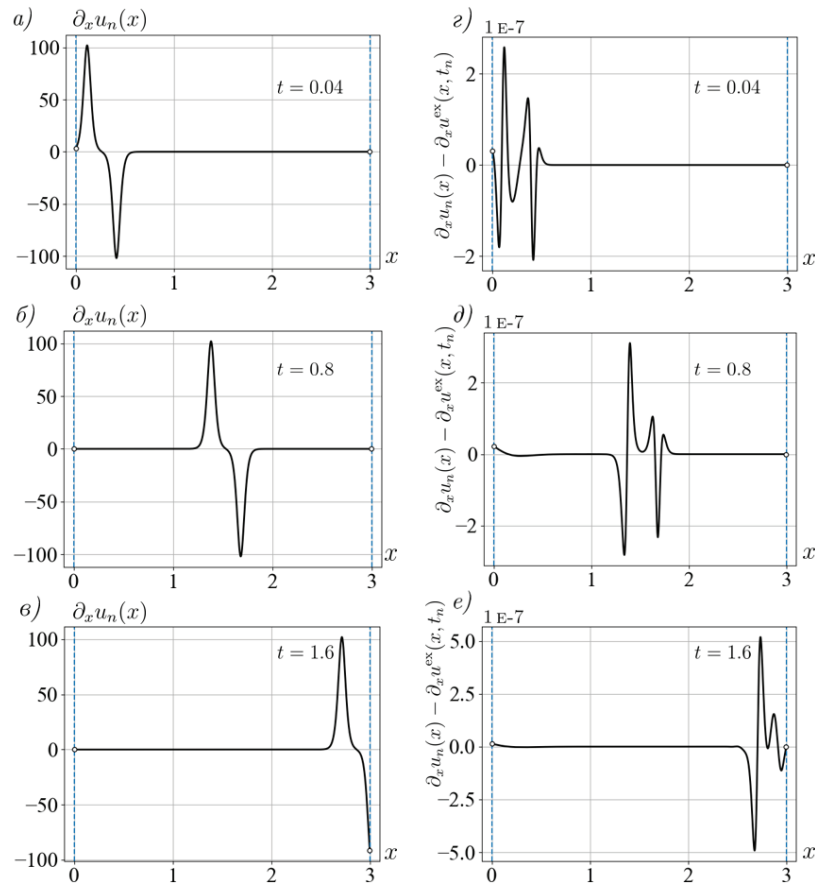


Рис. 2. Найденная численно производная решения (3.2) задачи (3.1), (3.4), (3.5); а, б, в — график производной в различные моменты времени; г, д, е — график абсолютной погрешности этого вычисления в те же моменты времени.

FIG. 2. The numerically found derivative of the solution (3.2) of the problem (3.1), (3.4), (3.5); а, б, в: graphs of the derivative at different moments of time; г, д, е: graphs of the absolute error of this calculation at the same moments of time.

В таб. 1 для различных сочетаний шага по времени τ , степени m кусочно-полиномиальной аппроксимации и количества K отрезков разбиения (2.7) приведена погрешность численного решения задачи (3.1), (3.4), (3.5), вычисленная как максимум L_∞ -норм $\|u_n - u^{\text{ex}}(\cdot, t_n)\|_{L_\infty}$ на отрезке $[0, L]$ по всем $n = 0, \dots, N$ разности аппроксимации $u_n(x)$ с точным решением (3.2) при $t = t_n$. Также в таблице дана погрешность $\|\partial_x u_n - \partial_x u^{\text{ex}}(\cdot, t_n)\|_{L_\infty}$ вычисления первой производной решения и затраченное процессорное время. Численная реализация проводилась при помощи библиотеки *Numeric Python* на ноутбуке с процессором *11th Gen Intel Core i7*. Отметим, что шаг τ по времени может быть выбран очень малым без потери устойчивости численного результата. Это связано с тем, что предложенный в разделе 2 алгоритм 2.1 сохраняет свою эффективность при решении сингулярно возмущенных краевых задач для линейного уравнения (2.1), т. е. при больших значениях параметра ω , что и реализуется для вспомогательного уравнения (1.6) при малом τ . Отметим также, что в тестовых примерах, приведенных в таб. 1, достигаемая точность определяется явно-неявной схемой аппроксимации (1.5), т. е. увеличение указанных в таблице параметров m , K при заданном значении τ не приводит к дальнейшему повышению точности результата.

На рис. 1 приведены графики численного решения задачи (3.1), (3.4), (3.5) при $\tau = 10^{-6}$, $m = 7$, $K = 400$ в различные моменты времени, а также графики погрешности, найденной как разность приближенного и точного решения (3.2). На рис. 2 даны графики вычисленной производной решения и соответствующие графики абсолютной погрешности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безродных С. И., Власов В. И. Краевая задача для моделирования физических полей в полупроводниковом диоде// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2004. — 44, № 12. — С. 2220–2251.
2. Безродных С. И., Власов В. И. Аналитико-численный метод расчета взаимодействия физических полей в полупроводниковом диоде// Мат. модел. — 2015. — 27, № 7. — С. 15–24.
3. Безродных С. И., Пикулин С. В. Численно-аналитический метод для уравнения Бюргерса с периодическим краевым условием// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2023. — 69, № 2. — С. 208–223.
4. Безродных С. И., Пикулин С. В. Численно-аналитический метод для нелинейных уравнений типа Колмогорова—Петровского—Пискунова// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2024. — 64, № 11. — С. 2017–2042.
5. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980.
6. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
7. Пелиновский Е. Н., Слюняев А. В. Генерация и взаимодействие солитонов большой амплитуды// Письма в ЖЭТФ. — 1998. — 67, № 9. — С. 628–633.
8. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989.
9. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.
10. Ablowitz M. A., Clarkson P. A. Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.
11. Ak T., Triki H., Dhanwan S. et al. Theoretical and numerical investigations on solitary wave solutions of Gardner equation// Eur. Phys. J. Plus. — 2018. — 133. — 382.
12. Ascher U. M., Ruuth S. J., Wetton B. T. R. Implicit-explicit methods for time-dependent partial differential equations// SIAM J. Numer. Anal. — 1995. — 32, № 3. — С. 797–823.
13. Dahiya S., Singh A., Singh S. P. Study of the Gardner equation with homogeneous boundary conditions via fourth order modified cubic B-spline collocation method// Comput. Math. Math. Phys. — 2023. — 63, № 12. — С. 2474–2491.
14. Demler E., Maltsev A. Semiclassical solitons in strongly correlated systems of ultracold bosonic atoms in optical lattices// Ann. Phys. — 2011. — 326, № 7. — С. 1775–1805.
15. Grimshaw R. Internal solitary waves// В сб.: «Environmental stratified flows. Topics in environmental fluid mechanics». — Boston: Springer, 2003. — С. 1–27.
16. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T., Kurkin A. Simulation of the transformation of internal solitary waves on oceanic shelves// J. Phys. Oceanogr. — 2004. — 34. — С. 2774–2791.
17. Holmer J. The initial-boundary value problem for the Korteweg–de Vries equation// Commun. Part. Differ. Equ. — 2006. — 31, № 8. — С. 1151–1190.
18. Hundsdorfer W., Verwer J. Numerical solutions of time-dependent advection–diffusion–reaction equations. — Berlin–Heidelberg: Springer, 2003.
19. Kamchatnov A. M. Undular bore theory for the Gardner equation// Phys. Rev. E. — 2012. — № 86. — 036605.
20. Miles J. W. On internal solitary waves// Tellus. — 1979. — 31. — С. 456–462.
21. Miura R., Gardner C., Kruskal M. Korteweg–de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion// J. Math. Phys. — 1968. — 9. — С. 1205–1209.
22. Ruderman M. S., Talipov T., Pelinovsky E. Dynamics of modulationally unstable ion-acoustic wavepackets in plasmas with negative ions// J. Plasma Phys. — 2008. — 74, № 5. — С. 639–656.
23. Wang K. J. Traveling wave solutions of the Gardner equation in dusty plasmas// Results Phys. — 2022. — 33. — 105207.
24. Watanabe S. Ion acoustic soliton in plasma with negative ion// J. Phys. Soc. Japan. — 1984. — 53. — С. 950–956.
25. Wazwaz A. M. New solitons and kink solutions for the Gardner equation// Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. — 2007. — 12, № 8. — С. 1395–1404.

С. И. Безродных

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия
E-mail: sbezrodnykh@mail.ru

С. В. Пикулин

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия
E-mail: spikulin@gmail.com

UDC 517.956.4, 519.633

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-353-369

EDN: FAKSTK

On one method for solving the initial-boundary value problem for the Gardner equation

S. I. Bezrodnykh and S. V. Pikulin

Federal Research Center "Computer Science and Control" of the RAS, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, the efficient solution is considered for an initial-boundary value problem for the Gardner equation: a spatially one-dimensional nonlinear evolution equation describing a broad class of dispersive autowave processes. A numerical-analytical method is proposed based on a combination of explicit and implicit time discretization schemes for various terms of the differential operator. A new efficient algorithm is developed to solve a sequence of auxiliary linear problems, relying on analytical representations using an explicit form of the fundamental system of solutions. An example of a numerical solution of the initial-boundary value problem for the Gardner equation is considered, and the result is compared with a known exact solution of the solitary traveling wave type.

Keywords: Gardner equation, effective numerical-analytical method, Green's function, explicit-implicit scheme.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: S. I. Bezrodnykh, S. V. Pikulin, "On one method for solving the initial-boundary value problem for the Gardner equation," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 3, 353–369. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-353-369>

REFERENCES

1. S. I. Bezrodnykh and V. I. Vlasov, "Kraevaya zadacha dlya modelirovaniya fizicheskikh poley v poluprovodnikovom diode" [Boundary-value problem for modeling physical fields in a semiconductor diode], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2004, **44**, No. 12, 2220–2251 (in Russian).
2. S. I. Bezrodnykh and V. I. Vlasov, "Analitiko-chislennyy metod rascheta vzaimodeystviya fizicheskikh poley v poluprovodnikovom diode" [Analytical-numerical method for calculating the interaction of physical fields in a semiconductor diode], *Mat. model.* [Math. Model.], 2015, **27**, No. 7, 15–24 (in Russian).
3. S. I. Bezrodnykh and S. V. Pikulin, "Chislenno-analiticheskiy metod dlya uravneniya Byurgersa s periodicheskim kraevym usloviem" [Numerical-analytical method for the Burgers equation with a periodic boundary condition], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 2, 208–223 (in Russian).
4. S. I. Bezrodnykh and S. V. Pikulin, "Chislenno-analiticheskiy metod dlya nelineynykh uravneniy tipa Kolmogorova–Petrovskogo–Piskunova" [Numerical-analytical method for nonlinear equations of the Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov type], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2024, **64**, No. 11, 2017–2042 (in Russian).
5. V. E. Zakharov, S. V. Manakov, S. P. Novikov, and L. P. Pitaevskiy, *Teoriya solitonov. Metod obratnoy zadachi* [Soliton Theory. Inverse Problem Method], Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).
6. M. A. Naimark, *Lineynye differentsial'nye operatory* [Linear Differential Operators], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).

7. E. N. Pelinovskii and A. V. Slyunyaev, “Generatsiya i vzaimodeystvie solitonov bol’shoi amplitudy” [Generation and interaction of large-amplitude solitons], *Pis’ma v ZhETF* [Commun. J. Exp. Theor. Phys.], 1998, **67**, No. 9, 628–633 (in Russian).
8. A. A. Samarskii, *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
9. A. F. Filippov, *Differentsial’nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast’yu* [Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side], Nauka, Moscow, 1985 (in Russian).
10. M. A. Ablowitz and P. A. Clarkson, *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
11. T. Ak, H. Triki, S. Dhawan et al., “Theoretical and numerical investigations on solitary wave solutions of Gardner equation,” *Eur. Phys. J. Plus*, 2018, **133**, 382.
12. U. M. Ascher, S. J. Ruuth, and B. T. R. Wetton, “Implicit-explicit methods for time-dependent partial differential equations,” *SIAM J. Numer. Anal.*, 1995, **32**, No. 3, 797–823.
13. S. Dahiya, A. Singh, and S. P. Singh, “Study of the Gardner equation with homogeneous boundary conditions via fourth order modified cubic B-spline collocation method,” *Comput. Math. Math. Phys.*, 2023, **63**, No. 12, 2474–2491.
14. E. Demler and A. Maltsev, “Semiclassical solitons in strongly correlated systems of ultracold bosonic atoms in optical lattices,” *Ann. Phys.*, 2011, **326**, No. 7, 1775–1805.
15. R. Grimshaw, “Internal solitary waves,” In: *Environmental stratified flows. Topics in environmental fluid mechanics*, Springer, Boston, 2003, pp. 1–27.
16. R. Grimshaw, E. Pelinovsky, T. Talipova, and A. Kurkin, “Simulation of the transformation of internal solitary waves on oceanic shelves,” *J. Phys. Oceanogr.*, 2004, **34**, 2774–2791.
17. J. Holmer, “The initial-boundary value problem for the Korteweg–de Vries equation,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 2006, **31**, No. 8, 1151–1190.
18. W. Hundsdorfer and J. Verwer, *Numerical solutions of time-dependent advection–diffusion–reaction equations*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2003.
19. A. M. Kamchatnov, “Undular bore theory for the Gardner equation,” *Phys. Rev. E*, 2012, No. 86, 036605.
20. J. W. Miles, “On internal solitary waves,” *Tellus*, 1979, **31**, 456–462.
21. R. Miura, C. Gardner, and M. Kruskal, “Korteweg–de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion,” *J. Math. Phys.*, 1968, **9**, 1205–1209.
22. M. S. Ruderman, T. Talipov, and E. Pelinovsky, “Dynamics of modulationally unstable ion-acoustic wavepackets in plasmas with negative ions,” *J. Plasma Phys.*, 2008, **74**, No. 5, 639–656.
23. K. J. Wang, “Traveling wave solutions of the Gardner equation in dusty plasmas,” *Results Phys.*, 2022, **33**, 105207.
24. S. Watanabe, “Ion acoustic soliton in plasma with negative ion,” *J. Phys. Soc. Japan*, 1984, **53**, 950–956.
25. A. M. Wazwaz, “New solitons and kink solutions for the Gardner equation,” *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2007, **12**, No. 8, 1395–1404.

S. I. Bezrodnykh

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the RAS, Moscow, Russia

E-mail: sbezrodnykh@mail.ru

S. V. Pikulin

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the RAS, Moscow, Russia

E-mail: spikulin@gmail.com