

УДК 517.95

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-395-416

EDN: FFCPII

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ СМЕСИ

В. Ю. Ноговищева¹, Д. А. Прокудин²¹Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия²Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия³Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия

Аннотация. В статье изучается начально-краевая задача для одномерных уравнений динамики сжимаемой вязкой смеси. Доказывается теорема существования и единственности решения начально-краевой задачи без каких-либо ограничений на структуру матрицы вязкостей, кроме стандартных физических требований симметричности и положительной определенности.

Ключевые слова: динамика сжимаемой вязкой смеси, одномерная начально-краевая задача, недиагональная матрица вязкостей, существование и единственность решения.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке проекта «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (2024–26) (гос. задание FZMW-2024-0003).

Для цитирования: В. Ю. Ноговищева, Д. А. Прокудин. Существование и единственность решения начально-краевой задачи для одномерных уравнений динамики сжимаемой вязкой смеси // Современ. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 3. С. 395–416. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-395-416>

1. ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена проблеме разрешимости одномерных уравнений для модели, описывающей движение сжимаемой вязкой смеси. По поводу происхождения этой модели можно обратиться к монографиям [8, 20], а также за уточнениями для подмодели, рассматриваемой в данной работе, — к статье [16]. Несмотря на имеющиеся результаты о разрешимости для одномерных уравнений динамики сжимаемых вязких смесей, такие как [1, 3–6, 9–13, 15, 17, 18], остается неизученным вариант нестационарных одномерных движений с учетом взаимодействия компонент смеси между собой как на уровне обмена импульсом, так и через взаимное вязкое трение в случае, если матрица вязкостей является недиагональной и нетреугольной. Именно этот случай будет рассматриваться в данной работе.

Структура статьи следующая. Раздел 2 содержит постановку задачи и формулировку основного результата — теоремы 2.1 о существовании и единственности решения. В разделе 3 проводится исследование разрешимости приближенной задачи, полученной из исходной задачи применением

метода Галеркина. В разделе 4 выводятся равномерные по параметру приближения оценки решений приближенной задачи, на основе которых совершается предельный переход и обосновывается существование решения исходной задачи в малом по времени. Для продолжения локального решения в разделе 5 выводятся априорные оценки, постоянные в которых не зависят от промежутка существования локального решения. В разделе 6 доказывается единственность решения исследуемой задачи и завершается доказательство теоремы 2.1. В заключительном разделе 7 приведены основные результаты работы.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим начально-краевую задачу для одномерных изотермических уравнений динамики сжимаемой вязкой смеси. В замыкании $\overline{Q_T}$ области $Q_T = (0, T) \times (0, 1)$, $T = \text{const} > 0$ требуется найти плотности $\rho_i(t, x) > 0$ и скорости $u_i(t, x)$ для каждой компоненты с номером $i = 1, \dots, N$, $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, удовлетворяющие следующей системе уравнений, начальных и краевых условий:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i v)}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.1)$$

$$\rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + v \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + \alpha_i K \frac{\partial \rho}{\partial x} = \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^N a_{ij} (u_j - u_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

$$\rho_i|_{t=0} = \rho_{0i}(x), \quad u_i|_{t=0} = u_{0i}(x), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.3)$$

$$u_i|_{x=0} = u_i|_{x=1} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.4)$$

Здесь $v = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j$ — средневзвешенная скорость, $\alpha_j = \text{const} \in (0, 1)$, $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$, $\rho = \sum_{j=1}^N \rho_j$ — суммарная плотность, ν_{ij} — постоянные коэффициенты вязкостей, образующие симметричную матрицу $\mathbf{N} > 0$, $K = \text{const} > 0$, $a_{ij} = a_{ji} = \text{const} > 0$, $\rho_{0i}(x)$, $u_{0i}(x)$ — известные функции начальных данных.

Определение 2.1. *Сильным решением задачи (2.1)–(2.4) называется совокупность $2N$ функций $(\rho_1, \dots, \rho_N, u_1, \dots, u_N)$ таких, что для всех $i = 1, \dots, N$*

$$\begin{aligned} \rho_i > 0, \quad \rho_i \in L_\infty(0, T; W_2^1(0, 1)), \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} \in L_\infty(0, T; L_2(0, 1)), \\ u_i \in L_\infty(0, T; W_2^1(0, 1)) \cap L_2(0, T; W_2^2(0, 1)), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} \in L_2(Q_T), \end{aligned} \quad (2.5)$$

уравнения (2.1), (2.2) выполнены почти всюду в Q_T , начальные условия (2.3) — для почти всех $x \in (0, 1)$, а краевые условия (2.4) — для почти всех $t \in (0, T)$.

Сформулируем теорему об однозначной разрешимости задачи (2.1)–(2.4), которая является основным результатом этой работы.

Теорема 2.1. *Пусть начальные данные в (2.3) удовлетворяют условиям*

$$\rho_{0i} > 0, \quad \rho_{0i} \in W_2^1(0, 1), \quad u_{0i} \in \dot{W}_2^1(0, 1), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.6)$$

Тогда существует единственное сильное решение задачи (2.1)–(2.4) в смысле определения 2.1.

Доказательство теоремы 2.1 будет проведено в разделах 3–6 настоящей работы.

3. ПОСТРОЕНИЕ ГАЛЕРКИНСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Докажем сначала разрешимость приближенной начально-краевой задачи, полученной из задачи (2.1)–(2.4) применением метода Галеркина ($i = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, m$):

$$\frac{\partial \rho_i^m}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i^m v^m)}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

$$\int_0^1 \left(\rho_i^m \frac{\partial u_i^m}{\partial t} + \rho_i^m v^m \frac{\partial u_i^m}{\partial x} + \alpha_i K \frac{\partial \rho^m}{\partial x} - \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j^m}{\partial x^2} - \sum_{j=1}^N a_{ij} (u_j^m - u_i^m) \right) \sin(\pi k x) dx = 0, \quad (3.2)$$

$$\rho_i^m|_{t=0} = \rho_{0i}(x), \quad (3.3)$$

$$u_i^m = \sum_{s=1}^m \xi_{is}^m(t) \sin(\pi s x), \quad u_i^m|_{t=0} = \sum_{s=1}^m \xi_{0is} \sin(\pi s x), \quad (3.4)$$

где $m \in \mathbb{N}$, $v^m = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j^m$, $\rho^m = \sum_{j=1}^N \rho_j^m$, $\xi_{0ik} = \xi_{ik}^m(0) = 2 \int_0^1 u_{0i}(x) \sin(\pi k x) dx$, при этом

$$\rho_i^m > 0, \quad \rho_i^m \in L_\infty(0, t^m; W_2^1(0, 1)) \cap W_\infty^1(0, t^m; L_2(0, 1)), \quad \xi_{ik}^m \in C^1[0, t^m], \quad t^m \in (0, T). \quad (3.5)$$

Условимся пока опускать индекс m вверх в обозначении решений. Рассмотрим множество

$$V = \left\{ \xi \in (C[0, t^m])^{mN} \mid \xi(0) = \xi_0, \quad \|\xi\|_{(C[0, t^m])^{mN}} \leq c \right\}, \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} \xi &= (\xi_1, \dots, \xi_N), \quad \xi_i = (\xi_{i1}, \dots, \xi_{im}), \quad i = 1, \dots, N, \\ \xi_0 &= (\xi_{01}, \dots, \xi_{0N}), \quad \xi_{0i} = (\xi_{0i1}, \dots, \xi_{0im}), \quad i = 1, \dots, N, \\ c^2 &= e^{\frac{\max_{1 \leq i \leq N} \sup_{[0,1]} \rho_{0i}}{\min_{1 \leq i \leq N} \inf_{[0,1]} \rho_{0i}}} \|\xi_0\|_{\mathbb{R}^{mN}}^2 + 1, \end{aligned}$$

и построим оператор $A : V \rightarrow (C[0, t^m])^{mN}$, $\text{Im } A \subset (C^1[0, t^m])^{mN}$, $A(\xi) = \psi$, где $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$, $\psi_i = (\psi_{i1}, \dots, \psi_{im})$, $i = 1, \dots, N$ следующим образом. Сначала найдем функции

$$\rho_i > 0, \quad \rho_i \in L_\infty(0, t^m; W_2^1(0, 1)) \cap W_\infty^1(0, t^m; L_2(0, 1)), \quad i = 1, \dots, N$$

как решения задач Коши (3.1), (3.3), где $v = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j$, а u_j задаются по формулам (3.4) (см. [14]).

При этом справедливы неравенства ($i = 1, \dots, N$)

$$\left(\inf_{[0,1]} \rho_{0i} \right) e^{-\sum_{j=1}^N \int_0^t \sup_{[0,1]} \left| \frac{\partial u_j}{\partial x} \right| d\tau} \leq \rho_i(t, x) \leq \left(\sup_{[0,1]} \rho_{0i} \right) e^{\sum_{j=1}^N \int_0^t \sup_{[0,1]} \left| \frac{\partial u_j}{\partial x} \right| d\tau}, \quad (3.7)$$

которые, в силу включения $\xi \in V$, дают оценки

$$\left(\inf_{[0,1]} \rho_{0i} \right) e^{-\pi m^2 c N t} \leq \rho_i(t, x) \leq \left(\sup_{[0,1]} \rho_{0i} \right) e^{\pi m^2 c N t}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.8)$$

Затем найдем функцию ψ как решение следующей задачи Коши для системы mN линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка ($i = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, m$):

$$\int_0^1 \left(\rho_i \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho_i v \frac{\partial U_i}{\partial x} + \alpha_i K \frac{\partial \rho}{\partial x} - \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} - \sum_{j=1}^N a_{ij} (U_j - U_i) \right) \sin(\pi k x) dx = 0, \quad (3.9)$$

$$\psi(0) = \xi_0, \quad (3.10)$$

где $U_i = \sum_{s=1}^m \psi_{is}(t) \sin(\pi s x)$.

Неравенство

$$\det M(t) \neq 0,$$

где

$$M(t) = \begin{pmatrix} M_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_N(t) \end{pmatrix},$$

$$M_i(t) = \left\{ \int_0^1 \rho_i(t, x) \sin(\pi kx) \sin(\pi sx) dx \right\}_{k,s=1}^m, \quad i = 1, \dots, N,$$

выполненное в силу положительности ρ_i , $i = 1, \dots, N$, позволяет разрешить систему (3.9) относительно производных, что обосновывает существование функции $\psi \in (C^1[0, t^m])^{mN}$.

Таким образом, для произвольного $t^m \in (0, T)$ определен оператор $A : V \rightarrow (C^1[0, t^m])^{mN} \subset (C[0, t^m])^{mN}$, $A(\xi) = \psi$, неподвижная точка которого, если она существует, вместе с соответствующими функциями ρ_i , u_i , $i = 1, \dots, N$, дает решение задачи (3.1)–(3.4).

Покажем, что при достаточно малом t^m оператор A удовлетворяет условиям теоремы Шаудера о неподвижной точке (см. [2, с. 39]), а именно:

- 1) V — выпуклое замкнутое ограниченное множество (в нашем случае это очевидно);
- 2) $A : V \rightarrow V$;
- 3) A — вполне непрерывный оператор.

Установим сначала, что $A(V) \subset V$. Условимся через $C_i(\cdot)$, $i \in \mathbb{N}$, обозначать величины, принимающие конечные положительные значения и зависящие от объектов, указанных в скобках или перечисленных в комментариях. Умножим уравнения (3.9) на $\psi_{ik}(t)$, а затем просуммируем по i, k и проинтегрируем по x ; получим с учетом (3.1), что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i U_i^2 dx + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial U_j}{\partial x} \right) dx + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^1 (U_i - U_j)^2 dx = K \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right) dx, \end{aligned} \quad (3.11)$$

откуда, в силу неравенств (при получении которых мы используем (3.8) и тот факт, что $N > 0$)

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial U_j}{\partial x} \right) dx \geq C_1(N) \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 dx, \\ & K \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right) dx \leq \frac{C_1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 dx + C_2, \end{aligned}$$

где $C_2 = \frac{K^2 N^3}{2C_1} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \sup_{[0,1]} \rho_{0i} \right)^2 e^{2\pi m^2 c N t^m}$, получаем оценку

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i U_i^2 dx + C_1 \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 dx \leq 2C_2,$$

из которой, в свою очередь, следует, что

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i U_i^2 dx \leq \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_{0i} U_{0i}^2 dx + 2C_2 t^m, \quad (3.12)$$

где $U_{0i} = \sum_{s=1}^m \psi_{is}(0) \sin(\pi sx) = \sum_{s=1}^m \xi_{0is} \sin(\pi sx)$, $i = 1, \dots, N$. Еще раз привлекая (3.8), получаем из (3.12) неравенство

$$\|\psi\|_{(C[0,t^m])^{mN}}^2 \leq e^{\pi m^2 c N t^m} \frac{\max_{1 \leq i \leq N} \sup_{[0,1]} \rho_{0i}}{\min_{1 \leq i \leq N} \inf_{[0,1]} \rho_{0i}} \|\xi_0\|_{\mathbb{R}^{mN}}^2 + \frac{4C_2 e^{\pi m^2 c N t^m}}{\min_{1 \leq i \leq N} \inf_{[0,1]} \rho_{0i}} t^m.$$

Выберем

$$t^m < \min \left(T, \frac{1}{\pi m^2 c N}, \frac{\min_{1 \leq i \leq N} \inf_{[0,1]} \rho_{0i}}{4eC_3} \right), \quad (3.13)$$

где $C_3 = \frac{K^2 N^3 e^2}{2C_1} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \sup_{[0,1]} \rho_{0i} \right)^2$. Тогда получим, что $C_2 \leq C_3$ и придем к нужной оценке

$$\|\psi\|_{(C[0,t^m])^{mN}} \leq c.$$

Таким образом, при выполнении (3.13) оператор A отображает множество V в себя.

Докажем теперь компактность оператора A . Умножая (3.9) на $\frac{d\psi_{ik}(t)}{dt}$, суммируя по i, k и интегрируя по x , выводим соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx &= \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(-\rho_i v \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right) + \alpha_i K \rho \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x} \right) \left(\frac{\partial U_j}{\partial x} \right) + \sum_{j=1}^N a_{ij} (U_j - U_i) \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right) \right) dx. \end{aligned} \quad (3.14)$$

С помощью (3.8), неравенства Коши и неравенств $\|\xi\|_{(C[0,t^m])^{mN}} \leq c$, $\|\psi\|_{(C[0,t^m])^{mN}} \leq c$, $\left\| \frac{\partial U_i}{\partial x} \right\|_{L_2(0,1)} \leq C_4(m) \|U_i\|_{L_2(0,1)}$, $\left\| \frac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x} \right\|_{L_2(0,1)} \leq C_4 \left\| \frac{\partial U_i}{\partial t} \right\|_{L_2(0,1)}$, $i = 1, \dots, N$, произведем оценки слагаемых в правой части (3.14):

$$-\sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i v \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right) dx \leq \frac{1}{8} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx + C_5 \left(C_4, \left\{ \sup_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, N, c, m, t^m \right), \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} K \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x} \right) dx &\leq \frac{1}{8} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx + \\ &+ C_6 \left(C_4, \left\{ \inf_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, \left\{ \sup_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, K, N, c, m, t^m \right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$-\sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x} \right) \left(\frac{\partial U_j}{\partial x} \right) dx \leq \frac{1}{8} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx + C_7 \left(C_4, \left\{ \inf_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, N, N, c, m, t^m \right), \quad (3.17)$$

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^1 (U_j - U_i) \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right) dx \leq \frac{1}{8} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx + C_8 \left(\left\{ \inf_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N, N, c, m, t^m \right). \quad (3.18)$$

Таким образом, из (3.14) получаем неравенство

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx \leq C_5 + C_6 + C_7 + C_8,$$

интегрируя которое по времени и применяя (3.8), выводим оценку

$$\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial U_i}{\partial t} \right\|_{L_2(Q_{t^m})} \leq C_9 \left(C_5, C_6, C_7, C_8 \left\{ \inf_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, N, c, m, t^m \right), \quad (3.19)$$

где $Q_{t^m} = (0, t^m) \times (0, 1)$. Поскольку получена оценка ψ в $(W_2^1(0, t^m))^{mN}$, то A является компактным оператором.

Установим далее непрерывность оператора A из V в $(C[0, t^m])^{mN}$. Пусть $\xi^{(1,2)} \in V$, $\psi^{(1,2)} = A(\xi^{(1,2)})$, $u_i^{(1,2)} = \sum_{s=1}^m \xi_{is}^{(1,2)} \sin(\pi s x)$, $U_i^{(1,2)} = \sum_{s=1}^m \psi_{is}^{(1,2)} \sin(\pi s x)$, $i = 1, \dots, N$. Пусть $\rho_i^{(1,2)}$, $i = 1, \dots, N$ — решения задач Коши (3.1), (3.3), где вместо v стоят $v^{(1,2)} = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j^{(1,2)}$ соответственно. Обозначим $\rho_i = \rho_i^{(1)} - \rho_i^{(2)}$, $u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$, $U_i = U_i^{(1)} - U_i^{(2)}$, $i = 1, \dots, N$, $v = v^{(1)} - v^{(2)}$, $\rho = \rho^{(1)} - \rho^{(2)}$, где $\rho^{(1,2)} = \sum_{j=1}^N \rho_j^{(1,2)}$. Дифференцируя по переменной x уравнения

$$\frac{\partial \rho_i^{(1,2)}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_i^{(1,2)} v^{(1,2)})}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.20)$$

(см. замечание 4.1 далее), затем умножая на $\frac{\partial \rho_i^{(1,2)}}{\partial x}$, интегрируя по x, t , используя начальные условия

$$\rho_i^{(1,2)}|_{t=0} = \rho_{0i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.21)$$

неравенства (см. (3.8))

$$\left(\inf_{[0,1]} \rho_{0i} \right) e^{-\pi m^2 c N t} \leq \rho_i^{(1,2)}(t, x) \leq \left(\sup_{[0,1]} \rho_{0i} \right) e^{\pi m^2 c N t}, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.22)$$

и неравенство Гронуолла, получаем оценки

$$\left\| \frac{\partial \rho_i^{(1,2)}}{\partial x} \right\|_{L_2(0,1)} \leq C_{10} \left(\left\{ \|\rho_{0i}\|_{W_2^1(0,1)} \right\}_{i=1}^N, N, c, m, t^m \right), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.23)$$

Заметим теперь, что из (3.20), (3.21) следуют равенства

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_i v^{(1)})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_i^{(2)} v)}{\partial x} = 0, \quad \rho_i|_{t=0} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.24)$$

Умножая (3.24) на ρ_i , интегрируя по x , приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \rho_i^2 dx &= - \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \rho_i^2 \left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} \right) + \rho_i^{(2)} \rho_i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \rho_i^{(2)}}{\partial x} \right) \rho_i v \right) dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\sup_{[0,1]} \left| \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} \right| \int_0^1 \rho_i^2 dx + \sup_{[0,1]} \rho_i^{(2)} \int_0^1 \left(\rho_i^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) dx + \sup_{[0,1]} v^2 \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho_i^{(2)}}{\partial x} \right)^2 dx + \right. \\ &\left. + \int_0^1 \rho_i^2 dx \right) \leq C_{11} \left(C_{10}, \left\{ \sup_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, N, c, m, t^m \right) \left(\int_0^1 \rho_i^2 dx + \sum_{j=1}^N \int_0^1 u_j^2 dx \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Здесь использовались очевидные соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \int_0^1 u_j^2 dx &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^m \xi_{js}^2(t), \quad \sup_{[0,1]} v^2 \leq \sum_{i,j=1}^N \sum_{s,l=1}^m |\xi_{il}(t) \xi_{js}(t)|, \\ \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx &= \frac{\pi^2}{2} \sum_{i,j=1}^N \alpha_i \alpha_j \sum_{s=1}^m s^2 \xi_{js}(t) \xi_{is}(t). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Из (3.25), применяя неравенство Гронуолла и учитывая начальные условия в (3.24), для всех $t \in (0, t_m]$ выводим неравенства

$$\int_0^1 \rho_i^2 dx \leq C_{12}(C_{11}, t^m) \sum_{j=1}^N \int_0^t \int_0^1 u_j^2 dx d\tau, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.27)$$

Далее, из уравнений для $U_i^{(1,2)}$, $i = 1, \dots, N$ (см. (3.9)) ввиду (3.20) следует соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^{(1)} U_i^2 dx + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial U_j}{\partial x} \right) dx d\tau + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^t \int_0^1 (U_i - U_j)^2 dx d\tau = \\ & = K \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^t \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right) dx d\tau - \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \rho_i U_i \left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial \tau} \right) dx d\tau - \\ & - \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \rho_i^{(1)} v U_i \left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx d\tau - \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \rho_i v^{(2)} U_i \left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx d\tau. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Первое слагаемое в левой части (3.28) допускает оценку

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^{(1)} U_i^2 dx \geq \frac{e^{-\pi m^2 c N t^m} \min_{1 \leq i \leq N} \inf_{[0,1]} \rho_{0i}}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 U_i^2 dx. \quad (3.29)$$

Для второго слагаемого в левой части (3.28) имеем неравенство

$$\sum_{i,j=1}^N \int_0^t \int_0^1 \nu_{ij} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial U_j}{\partial x} \right) dx d\tau \geq C_1 \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 dx d\tau. \quad (3.30)$$

Для первого слагаемого в правой части (3.28) получаем соотношение

$$K \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^t \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right) dx d\tau \leq \frac{C_1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 dx d\tau C_{13}(C_1, C_{12}, K, N, t^m) \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 u_i^2 dx d\tau. \quad (3.31)$$

Для второго слагаемого в правой части (3.28) следует неравенство

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \rho_i U_i \left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial \tau} \right) dx d\tau \leq \frac{C_{12} N t^m}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 u_i^2 dx d\tau + \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^N \sup_{[0,t] \times [0,1]} U_i^2 \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial \tau} \right)^2 dx d\tau \leq \varepsilon m C_9^2 \sum_{i=1}^N \sup_{[0,t]} \int_0^1 U_i^2 dx + \\ & + \frac{C_{12} N t^m}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 u_i^2 dx d\tau, \end{aligned} \quad (3.32)$$

взяв в котором

$$\varepsilon m C_9^2 = \frac{e^{-\pi m^2 c N t^m} \min_{1 \leq i \leq N} \inf_{[0,1]} \rho_{0i}}{4N},$$

получим, что

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \rho_i U_i \left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial \tau} \right) dx d\tau &\leq \frac{e^{-\pi m^2 c N t^m} \min_{1 \leq i \leq N} \inf_{[0,1]} \rho_{0i}}{4N} \sum_{i=1}^N \sup_{[0,t]} \int_0^1 U_i^2 dx + \\ &+ C_{14} \left(C_9, C_{12}, \left\{ \inf_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, N, c, m, t^m \right) \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 u_i^2 dx d\tau. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Третье слагаемое в правой части (3.28) оценим следующим образом:

$$- \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \rho_i^{(1)} v U_i \left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx d\tau \leq C_{15} \left(\sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 u_i^2 dx d\tau + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 U_i^2 dx d\tau \right), \quad (3.34)$$

где $C_{15} = C_{15} \left(\left\{ \sup_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, N, c, m, t^m \right)$. Наконец, для последнего слагаемого в правой части (3.28) получаем соотношение

$$- \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \rho_i v^{(2)} U_i \left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx d\tau \leq C_{16} \left(\sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 u_i^2 dx d\tau + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 U_i^2 dx d\tau \right), \quad (3.35)$$

где $C_{16} = C_{16}(C_{12}, N, c, m, t^m)$. Таким образом, из (3.28), с учетом (3.29)–(3.35), следует неравенство

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 U_i^2 dx \leq C_{17} \left(\sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 u_i^2 dx d\tau + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 U_i^2 dx d\tau \right),$$

где $C_{17} = C_{17} \left(C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}, \left\{ \inf_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, N, c, m, t^m \right)$, из которого, пользуясь неравенством Гронуолла, получаем оценку

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 U_i^2 dx \leq C_{18}(C_{17}, t^m) \sum_{i=1}^N \int_0^{t^m} \int_0^1 u_i^2 dx dt,$$

а отсюда — неравенство

$$\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|_{(C[0,t^m])^{mN}} \leq C_{19}(C_{18}, t^m) \|\xi^{(1)} - \xi^{(2)}\|_{(C[0,t^m])^{mN}},$$

обосновывающее непрерывность оператора A на V .

Поскольку оператор A удовлетворяет перечисленным выше условиям теоремы Шаудера, то в V существует неподвижная точка ξ оператора A , определяющая, вместе с соответствующими функциями ρ_i , u_i , $i = 1, \dots, N$, решение задачи (3.1)–(3.4).

4. РАВНОМЕРНЫЕ ОЦЕНКИ И СХОДИМОСТЬ ГАЛЕРКИНСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Получим далее равномерные по параметру m оценки решений приближенной начально-краевой задачи (3.1)–(3.4), которые позволят совершить предельный переход при $m \rightarrow \infty$. Введем следующее обозначение:

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx d\tau, \quad \alpha'(t) \geq 0. \quad (4.1)$$

Поскольку уравнения (3.1) влекут выполнение неравенств (3.7), то из этих неравенств следуют оценки

$$C_{20}^{-1} e^{-C_{20}\alpha(t)} \leq \rho_i(t, x) \leq C_{20} e^{C_{20}\alpha(t)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.2)$$

где $C_{20} = C_{20} \left(\left\{ \sup_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, \left\{ \inf_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, N, T \right)$. Далее заметим, что из (3.1) вытекают равенства

$$\rho_i \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(\frac{1}{\rho_i} \right) + \rho_i v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\rho_i} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.3)$$

из которых получаем

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_i} \right) \right)^2 dx = 2 \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_i} \right) \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.4)$$

Из (4.4) следуют соотношения

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_i} \right) \right)^2 dx \leq \int_0^1 \rho_{0i} \left(\left(\frac{1}{\rho_{0i}} \right)' \right)^2 dx + \\ & + \int_0^t \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_i} \right) \right)^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx d\tau, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Замечание 4.1. При выводе (4.5) нам потребовалась (в (4.3), (4.4)) дополнительная гладкость ρ_i , $i = 1, \dots, N$ по сравнению с (3.5), хотя сами соотношения (4.5) никаких дополнительных требований не предусматривают. Это означает, что (4.5) могут быть получены путем регуляризации ρ_{0i} , $i = 1, \dots, N$, вывода (4.5) для решений получившихся задач, а затем предельного перехода по параметру регуляризации. Аналогичным образом следует понимать вывод соотношений (3.23).

Из (4.5), пользуясь (4.1), (4.2) и неравенством Гронуолла, получаем оценки

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_i} \right) \right)^2 dx + \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x} \right)^2 dx \leq C_{21} e^{C_{21} \alpha(t)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.6)$$

где $C_{21} = C_{21} \left(C_{20}, \left\{ \|\rho_{0i}\|_{W_2^1(0,1)} \right\}_{i=1}^N, \left\{ \inf_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, N, T \right)$. Далее, умножая (3.2) на $\xi'_{ik} + \pi^2 k^2 \xi_{ik}$, суммируя по i, k и учитывая (3.1), (3.4), приходим к соотношению (здесь используется симметричность матрицы $\mathbf{N}$)

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dx + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right) dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx + \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dx = - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i v \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) dx - \\ & - K \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) dx + K \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) dx + \\ & + 2 \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) dx + \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^1 (u_j - u_i) \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dx - \\ & - \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^1 (u_j - u_i) \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) dx. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Левая часть (4.7) допускает оценку (т. к. $\mathbf{N} > 0$)

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dx + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right) dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx + \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dx \geq C_{22}(C_1) \alpha'(t) + \beta'(t), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где

$$\beta(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dx.$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое в правой части (4.7). Для первого слагаемого в правой части (4.7) имеем

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i v \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) dx & \leq \sum_{i=1}^N \sup_{[0,1]} |v| \left(\int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \frac{C_{22}}{14} \alpha'(t) + C_{23}(C_{20}, C_{22}, N) \beta^2(t) e^{C_{23}\alpha(t)}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $C_{23} = C_{23}(C_{20}, C_{22}, N)$. Для второго и третьего слагаемых в правой части (4.7) получаем соответственно

$$-K \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) dx \leq \frac{C_{22}}{14} \alpha'(t) + C_{24} e^{C_{24}\alpha(t)}, \quad (4.10)$$

$$K \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx \leq \frac{C_{22}}{14} \alpha'(t) + C_{25} e^{C_{25}\alpha(t)}, \quad (4.11)$$

где $C_{24} = C_{24}(C_{20}, C_{21}, C_{22}, K, N)$, $C_{25} = C_{25}(C_{21}, C_{22}, K, N)$. Для четвертого слагаемого в правой части (4.7) с помощью интерполяционной оценки

$$\sup_{[0,1]} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x} \right| \leq \sqrt{2} \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{4}}$$

ВЫВОДИМ

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) dx \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^N \sup_{[0,1]} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x} \right| \left(\int_0^1 \frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \frac{C_{22}}{14} \alpha'(t) + C_{26} \beta(t) e^{C_{26}\alpha(t)}, \quad C_{26} = C_{26}(C_{20}, C_{21}, C_{22}, N). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Для пятого слагаемого в правой части (4.7) получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) dx \leq \\ & \leq 2 \sum_{i=1}^N \sup_{[0,1]} |v| \sup_{[0,1]} \sqrt{\rho_i} \left(\int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \frac{C_{22}}{14} \alpha'(t) + C_{27} \beta^2(t) e^{C_{27}\alpha(t)}, \quad C_{27} = C_{27}(C_{20}, C_{22}, N). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Наконец, для последних двух слагаемых в правой части (4.7) выводим соответственно соотношения

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^1 (u_j - u_i) \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dx \leq \frac{C_{22}}{14} \alpha'(t) + C_{28} \beta(t) e^{C_{28} \alpha(t)}, \quad (4.14)$$

$$- \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^1 (u_j - u_i) \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) dx \leq \frac{C_{22}}{14} \alpha'(t) + C_{29} \beta(t) e^{C_{29} \alpha(t)}, \quad (4.15)$$

где $C_{28} = C_{28}(C_{20}, C_{22}, \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N, N)$, $C_{29} = C_{29}(C_{20}, C_{22}, \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N, N)$. Таким образом, из (4.9)–(4.15) следует, что правая часть (4.7)

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i v \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) dx - K \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) dx + K \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx - \\ & - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) dx + 2 \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) dx + \\ & + \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^1 (u_j - u_i) \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dx - \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^1 (u_j - u_i) \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) dx \leq \\ & \leq \frac{C_{22}}{2} \alpha'(t) + C_{30} (1 + \beta^2(t)) e^{C_{30} \alpha(t)}, \quad C_{30} = C_{30}(C_{23}, C_{24}, C_{25}, C_{26}, C_{27}, C_{28}, C_{29}). \end{aligned} \quad (4.16)$$

В итоге, объединяя соотношения (4.8) и (4.16), получаем из (4.7) неравенство

$$\left(\frac{C_{22}}{2} \alpha(t) + \beta(t) \right)' \leq C_{31} e^{C_{31} \left(\frac{C_{22}}{2} \alpha(t) + \beta(t) \right)}, \quad C_{31} = C_{31}(C_{22}, C_{30}). \quad (4.17)$$

Зададим любое $C_{32} > \beta(0)$, например, $C_{32} = 2\beta(0)$. Тогда при

$$t_0 = \min \left(T, \frac{e^{-C_{31} \beta(0)} - e^{-C_{31} C_{32}}}{C_{31}^2} \right) \quad (4.18)$$

из (4.17) получаем оценку

$$\sup_{0 \leq t \leq t_0} (\alpha + \beta) \leq \left(1 + \frac{2}{C_{22}} \right) C_{33}, \quad C_{33} = \frac{1}{C_{31}} \ln \left(\frac{1}{e^{-C_{31} \beta(0)} - C_{31}^2 t_0} \right),$$

из которой и (3.1), (4.2), (4.6) следует, что

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left(\|\rho_i\|_{L_\infty(0, t_0; W_2^1(0,1))} + \|u_i\|_{L_\infty(0, t_0; W_2^1(0,1))} + \|u_i\|_{L_2(0, t_0; W_2^2(0,1))} + \right. \\ & \left. + \left\| \frac{\partial \rho_i}{\partial t} \right\|_{L_\infty(0, t_0; L_2(0,1))} + \left\| \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\|_{L_2(Q_{t_0})} + \left\| \frac{1}{\rho_i} \right\|_{L_\infty(Q_{t_0})} \right) \leq C_{34}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

где $Q_{t_0} = (0, t_0) \times (0, 1)$, $C_{34} = C_{34}(C_{20}, C_{21}, C_{22}, C_{33}, N)$.

Таким образом, построив решения $(\rho_1^m, \dots, \rho_N^m, u_1^m, \dots, u_N^m)$ задач (3.1)–(3.4) при всех $m \in \mathbb{N}$, а затем при необходимости продолжив их на интервал $(0, t_0)$, мы можем использовать для них оценку (4.19). На основании этой оценки может быть выделена подпоследовательность (которую мы обозначим так же, далее эта процедура также будет подразумеваться при необходимости), для которой при $m \rightarrow \infty$ для всех $i = 1, \dots, N$ имеют место сходимости

$$\rho_i^m \rightarrow \rho_i \text{ *-слабо в } L_\infty(0, t_0; W_2^1(0,1)),$$

$$u_i^m \rightarrow u_i \text{ *-слабо в } L_\infty(0, t_0; W_2^1(0,1)) \text{ и слабо в } L_2(0, t_0; W_2^2(0,1)).$$

Кроме того, оставшиеся свойства, перечисленные в (2.5), выполнены для нашей подпоследовательности в Q_{t_0} равномерно по m , а значит, предельные функции попадают в соответствующие

классы. Покажем, что совокупность функций $(\rho_1, \dots, \rho_N, u_1, \dots, u_N)$ является сильным решением задачи (2.1)–(2.4) на $(0, t_0)$.

Из равномерных оценок ρ_i^m, u_i^m в $L_\infty(0, t_0; W_2^1(0, 1))$ и $\frac{\partial \rho_i^m}{\partial t}, \frac{\partial u_i^m}{\partial t}$ в $L_2(Q_{t_0})$ (см. (4.19)) получаем по теореме Арцела–Асколи [19, теорема 1.70, с. 58] сходимости

$$\rho_i^m \rightarrow \rho_i \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ сильно в } C([0, t_0]; L_2(0, 1)), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.20)$$

$$u_i^m \rightarrow u_i \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ сильно в } C([0, t_0]; L_2(0, 1)), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.21)$$

Из ограниченности $\frac{\partial u_i^m}{\partial t}$ в $L_2(Q_{t_0})$ следует равномерная оценка $\frac{\partial^2 u_i^m}{\partial t \partial x}$ в $L_2(0, t_0; W_2^{-1}(0, 1))$, что вместе с оценкой $\frac{\partial u_i^m}{\partial x}$ в $L_2(0, t_0; W_2^1(0, 1))$ приводит, по теореме Обена–Лионса [19, теорема 1.71, с. 59], к сходимостям

$$\frac{\partial u_i^m}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x} \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ сильно в } L_2(Q_{t_0}), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.22)$$

Отсюда и из (4.21) следуют соотношения

$$u_i^m \rightarrow u_i \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ сильно в } L_2(0, t_0; C[0, 1]), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.23)$$

Таким образом, предельные функции $\rho_i, u_i, i = 1, \dots, N$, удовлетворяют уравнениям неразрывности (2.1) почти всюду в Q_{t_0} , в которых $v = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j$, начальным условиям (2.3) для почти всех $x \in (0, 1)$ и граничным условиям (2.4) для почти всех $t \in (0, t_0)$.

Из ограниченности $\frac{\partial u_i^m}{\partial t}$ в $L_2(Q_{t_0})$ следует слабая сходимость $\frac{\partial u_i^m}{\partial t}$ к $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ в $L_2(Q_{t_0})$, что вместе с (4.20) и ограниченностью $\rho_i^m \frac{\partial u_i^m}{\partial t}$ в $L_2(Q_{t_0})$ влечет

$$\rho_i^m \frac{\partial u_i^m}{\partial t} \rightarrow \rho_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ слабо в } L_2(Q_{t_0}), \quad i = 1, \dots, N.$$

Далее, из (4.20) и (4.22) следует, что

$$\rho_i^m \frac{\partial u_i^m}{\partial x} \rightarrow \rho_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ сильно в } L_2(0, t_0; L_1(0, 1)), \quad i = 1, \dots, N,$$

откуда и из (4.23) получаем для всех $i, j = 1, \dots, N$ сходимости

$$\left(\rho_i^m \frac{\partial u_i^m}{\partial x} \right) u_j^m \rightarrow \left(\rho_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) u_j \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ сильно в } L_1(Q_{t_0}). \quad (4.24)$$

Из (3.2) следует, что для любых функций вида $(i = 1, \dots, N)$

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^M \eta_{ik}(t) \sin(\pi k x), \quad \eta_{ik} \in C[0, t_0], \quad k = 1, \dots, M, \quad M \leq m, \quad (4.25)$$

выполнены равенства $(i = 1, \dots, N)$

$$\int_0^{t_0} \int_0^1 \left(\rho_i^m \frac{\partial u_i^m}{\partial t} + \rho_i^m v^m \frac{\partial u_i^m}{\partial x} + \alpha_i K \frac{\partial \rho^m}{\partial x} - \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j^m}{\partial x^2} - \sum_{j=1}^N a_{ij} (u_j^m - u_i^m) \right) \varphi_i dx dt = 0, \quad (4.26)$$

переходя в которых, благодаря полученным выше сходимостям, к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем, поскольку множество функций $\varphi_i, i = 1, \dots, N$ вида (4.25) всюду плотно в $L_2(Q_{t_0})$, справедливость уравнений баланса импульсов (2.2) для предельных функций $\rho_i, u_i, i = 1, \dots, N$ п. в. в Q_{t_0} ,

в которых $\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i$.

Таким образом, доказано существование решения начально-краевой задачи (2.1)–(2.4) в малом по времени. Чтобы продолжить решение с интервала $(0, t_0)$ на весь рассматриваемый интервал $(0, T)$, необходимо для локального решения получить априорные оценки, константы в которых

зависят лишь от данных задачи и от величины T , но не от малого параметра t_0 (см., например, [2, с. 46]).

5. ГЛОБАЛЬНЫЕ АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

При дальнейшем исследовании однозначной разрешимости задачи (2.1)–(2.4) иногда будет удобнее пользоваться массовыми лагранжевыми координатами. Возьмем за новые независимые переменные t и $y(t, x) = \int_0^x \rho(t, s) ds$. Тогда уравнения (2.1), (2.2) примут вид

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_i}{\partial t} + \tilde{\rho}_i \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.1)$$

$$\frac{\tilde{\rho}_i}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \alpha_i K \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} = \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y} \right) + \frac{1}{\tilde{\rho}} \sum_{j=1}^N a_{ij} (\tilde{u}_j - \tilde{u}_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.2)$$

где $\tilde{v} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \tilde{u}_j$, $\tilde{\rho} = \sum_{j=1}^N \tilde{\rho}_j$. Область Q_T при таком переходе отображается в прямоугольник

$\Pi_T = (0, d) \times (0, T)$, где $d = \int_0^1 \rho_0 dx > 0$, $\rho_0 = \sum_{j=1}^N \rho_{0j}$, начальные и граничные условия преобразуются к виду

$$\tilde{\rho}_i|_{t=0} = \tilde{\rho}_{0i}, \quad \tilde{u}_i|_{t=0} = \tilde{u}_{0i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.3)$$

$$\tilde{u}_i|_{y=0} = \tilde{u}_i|_{y=d} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.4)$$

Приступим к выводу априорных оценок. Отметим сначала, что суммируя (5.1) по i , получаем

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \tilde{\rho}^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0, \quad (5.5)$$

поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\tilde{\rho}_i}{\tilde{\rho}} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Отсюда и из (5.3) тогда следует, что для всех $i = 1, \dots, N$

$$\frac{\tilde{\rho}_i(t, y)}{\tilde{\rho}(t, y)} = \frac{\tilde{\rho}_{0i}(y)}{\tilde{\rho}_0(y)}, \quad (5.6)$$

где $\tilde{\rho}_0 = \sum_{j=1}^N \tilde{\rho}_{0j}$. В эйлеровых переменных отношения $\frac{\rho_i}{\rho}$ удовлетворяют уравнениям переноса и в этом случае мы имеем только неравенства

$$0 < \min_{1 \leq i \leq N} \inf_{[0,1]} \frac{\rho_{0i}}{\rho_0} \leq \frac{\rho_i(t, x)}{\rho(t, x)} \leq \max_{1 \leq i \leq N} \sup_{[0,1]} \frac{\rho_{0i}}{\rho_0} \leq 1 \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.7)$$

Умножим далее уравнения (2.2) на u_i , проинтегрируем по x и просуммируем по i . Учитывая, что в силу (2.1), (2.4) и условия $\mathbf{N} > 0$, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\rho_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho_i v \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) u_i dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i u_i^2 dx, \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i K \int_0^1 u_i \frac{\partial \rho}{\partial x} dx &= -K \int_0^1 \rho \frac{\partial v}{\partial x} dx = K \frac{d}{dt} \int_0^1 (\rho \ln \rho - (\ln d + 1) \rho + d) dx, \\ \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right) u_i dx &= - \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dx \leq -C_1 \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx, \end{aligned} \quad (5.8)$$

получим неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \rho_i u_i^2 + K (\rho \ln \rho - (\ln d + 1) \rho + d) \right) dx + \\ & + C_1 \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^1 (u_i - u_j)^2 dx \leq 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Неравенство (5.9) проинтегрируем по t , используя (2.3), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \rho_i u_i^2 + K (\rho \ln \rho - (\ln d + 1) \rho + d) \right) dx + C_1 \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx d\tau + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^t \int_0^1 (u_i - u_j)^2 dx d\tau \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \rho_{0i} u_{0i}^2 + K (\rho_0 \ln \rho_0 - (\ln d + 1) \rho_0 + d) \right) dx, \end{aligned} \quad (5.10)$$

откуда и из (5.7) следует оценка

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho u_i^2 dx + \int_0^1 (\rho \ln \rho - (\ln d + 1) \rho + d) dx + \\ & + \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx dt + \sum_{i,j=1}^N \int_0^T \int_0^1 (u_i - u_j)^2 dx dt \leq C_{35}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где $C_{35} = C_{35} \left(C_1, \left\{ \inf_{[0,1]} \frac{\rho_{0i}}{\rho_0} \right\}_{i=1}^N, \left\{ \sup_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, \{ \|u_{0i}\|_{L_2(0,1)} \}_{i=1}^N, K, \{ a_{ij} \}_{i,j=1}^N, N, d \right)$. Перепишем (5.11), используя массовые лагранжевы координаты, в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_0^d \tilde{u}_i^2 dy + \int_0^d \frac{\tilde{\rho} \ln \tilde{\rho} - (\ln d + 1) \tilde{\rho} + d}{\tilde{\rho}} dy + \\ & + \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_0^d \tilde{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y} \right)^2 dy dt + \sum_{i,j=1}^N \int_0^T \int_0^d \frac{(\tilde{u}_i - \tilde{u}_j)^2}{\tilde{\rho}} dy dt \leq C_{35}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Заметим, что из оценки (5.11), ввиду (2.4), очевидно вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^N \int_0^T \left(\sup_{[0,1]} |u_i| \right)^2 dt \leq C_{35}. \quad (5.13)$$

Воспользуемся теперь записью уравнений (2.1), (2.2) в форме (5.1), (5.2). Перепишем уравнения (5.2) в виде

$$\sum_{j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \frac{\tilde{\rho}_j}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} + K \left(\sum_{j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_j \right) \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y} \right) + \frac{1}{\tilde{\rho}} \sum_{j,k=1}^N \tilde{\nu}_{ij} a_{jk} (\tilde{u}_k - \tilde{u}_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.14)$$

где $\tilde{\nu}_{ij}$ — элементы симметричной матрицы $\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N}^{-1} > 0$. Затем умножим (5.14) на α_i и просуммируем по i , получим, с учетом (5.6), что

$$\sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \frac{\tilde{\rho}_j}{\tilde{\rho}_0} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} + \tilde{K} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) + \frac{1}{\tilde{\rho}} \sum_{i,j,k=1}^N \alpha_i \tilde{\nu}_{ij} a_{jk} (\tilde{u}_k - \tilde{u}_j), \quad (5.15)$$

где $\tilde{K} = K \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \alpha_j = \text{const} > 0$. Выражая из уравнения (5.5)

$$\tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = - \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial t} \quad (5.16)$$

и подставляя в (5.15), приходим к равенству

$$\frac{\partial^2 \ln \tilde{\rho}}{\partial t \partial y} + \tilde{K} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} = - \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \frac{\tilde{\rho}_{0j}}{\tilde{\rho}_0} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \sum_{i,j,k=1}^N \alpha_i \tilde{\nu}_{ij} a_{jk} (\tilde{u}_k - \tilde{u}_j).$$

Умножим это равенство на $\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y}$ и проинтегрируем по y , получим соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^d \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy + \tilde{K} \int_0^d \tilde{\rho} \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy = & - \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \left(\frac{\tilde{\rho}_{0j}}{\tilde{\rho}_0} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right) dy + \\ & + \sum_{i,j,k=1}^N \alpha_i \tilde{\nu}_{ij} a_{jk} \int_0^d \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_j}{\tilde{\rho}} \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right) dy. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Правую часть (5.17) преобразуем, интегрируя по частям и используя (5.16):

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \left(\frac{\tilde{\rho}_{0j}}{\tilde{\rho}_0} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right) dy = & - \frac{d}{dt} \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \left(\frac{\tilde{\rho}_{0j}}{\tilde{\rho}_0} \tilde{u}_j \right) \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right) dy + \\ & + \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \left(\frac{\tilde{\rho}_{0j}}{\tilde{\rho}_0} \right)' \tilde{\rho} \tilde{u}_j \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) dy + \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \frac{\tilde{\rho}_{0j} \tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_0} \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) dy. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Таким образом, после интегрирования (5.17) по t , учитывая (5.18), находим

$$\begin{aligned} \int_0^d \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy + 2\tilde{K} \int_0^t \int_0^d \tilde{\rho} \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy d\tau \leq & \int_0^d ((\ln \tilde{\rho}_0)')^2 dy - \\ & - 2 \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \left(\frac{\tilde{\rho}_{0j}}{\tilde{\rho}_0} u_j \right) \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right) dy + 2 \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \left(\frac{\tilde{\rho}_{0j}}{\tilde{\rho}_0} \tilde{u}_{0j} \right) (\ln \tilde{\rho}_0)' dy + \\ & + 2 \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \left(\frac{\tilde{\rho}_{0j}}{\tilde{\rho}_0} \right)' \tilde{\rho} \tilde{u}_j \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) dy + 2 \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \frac{\tilde{\rho}_{0j} \tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_0} \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) dy + \\ & + 2 \sum_{i,j,k=1}^N \alpha_i \tilde{\nu}_{ij} a_{jk} \int_0^t \int_0^d \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_j}{\tilde{\rho}} \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right) dy d\tau. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Используя полученные выше оценки, отсюда выводим неравенство

$$\int_0^d \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy + \int_0^T \int_0^d \tilde{\rho} \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy dt \leq C_{36}, \quad (5.20)$$

где $C_{36} = C_{36} \left(C_{35}, \left\{ \left\| \frac{\tilde{\rho}_{0i}}{\tilde{\rho}_0} \right\|_{W_2^1(0,d)} \right\}_{i=1}^N, \|(\ln \tilde{\rho}_0)'\|_{L_2(0,d)}, \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N, \{\|\tilde{u}_{0i}\|_{L_2(0,d)}\}_{i=1}^N, \tilde{K}, \tilde{N}, N, T, d \right)$.

Далее, из (5.3)–(5.5) очевидно следует, что при каждом $t \in [0, T]$ хотя бы в одной точке $\delta(t) \in [0, d]$

$$\tilde{\rho}(t, \delta(t)) = d. \quad (5.21)$$

Следовательно, можно воспользоваться представлением

$$\ln \tilde{\rho}(t, y) = \ln \tilde{\rho}(t, \delta(t)) + \int_{\delta(t)}^y \frac{\partial \ln \tilde{\rho}(t, s)}{\partial s} ds,$$

из которого по неравенству Гельдера, с учетом (5.20) и (5.21), имеем

$$|\ln \tilde{\rho}(t, y)| \leq |\ln d| + \sqrt{d} \left\| \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right\|_{L_2(0, d)} \leq C_{37}(C_{36}, d).$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\frac{1}{C_{38}(C_{37})} \leq \tilde{\rho}(t, y) \leq C_{38}(C_{37}) \Rightarrow \frac{1}{C_{38}} \leq \rho(t, x) \leq C_{38}. \quad (5.22)$$

Из (5.6) и (5.22) получаем, что для всех $i = 1, \dots, N$

$$C_{39} \leq \tilde{\rho}_i(t, y) \leq C_{38}, \quad (5.23)$$

где $C_{39} = C_{39} \left(C_{38}, \left\{ \inf_{[0, d]} \frac{\tilde{\rho}_{0i}}{\tilde{\rho}_0} \right\}_{i=1}^N \right)$. Значит, для всех $i = 1, \dots, N$

$$C_{39} \leq \rho_i(t, x) \leq C_{38}. \quad (5.24)$$

Из (5.6) и (5.20) тогда следует, что

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x} \right)^2 dx \leq C_{40}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.25)$$

где $C_{40} = C_{40} \left(C_{36}, C_{38}, \left\{ \inf_{[0, d]} \frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_{0i}} \right\}_{i=1}^N, \left\{ \left\| \left(\frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_{0i}} \right)' \right\|_{L_2(0, d)} \right\}_{i=1}^N \right)$, а поэтому

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 dx \leq C_{41}(C_{40}, N). \quad (5.26)$$

Возведем теперь в квадрат уравнения (2.2), поделим на ρ_i и просуммируем по i , получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\rho_i} \left(\sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left(\sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right) = \\ = \sum_{i=1}^N \rho_i \left(v \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\alpha_i K}{\rho_i} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^N a_{ij}(u_j - u_i) \right)^2. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Введем следующее обозначение:

$$\theta(t) = \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dx + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{\rho_i} \left(\sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx d\tau. \quad (5.28)$$

Тогда из (5.27) и неравенств (5.8), (5.24) и (5.26) следует, что (здесь используется симметричность матрицы $\mathbf{N}$)

$$\theta'(t) \leq C_{42} + C_{43} \left(\sum_{j=1}^N \|u_j\|_{L_\infty(0,1)}^2 \right) \theta(t), \quad (5.29)$$

где $C_{42} = C_{42}(C_{35}, C_{39}, C_{41}, \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N, K, N)$, $C_{43} = C_{43}(C_1, C_{38}, N)$, откуда и из неравенства Гро-нуолла (см. также (5.13)) получаем, что

$$\theta(t) \leq C_{44} (C_{35}, C_{42}, C_{43}, \{\|u'_{0i}\|_{L_2(0,1)}\}_{i=1}^N, \mathbf{N}, N, T). \quad (5.30)$$

Из (5.30) непосредственно следует оценка

$$\sum_{i=1}^N \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dx dt + \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2 dx dt \right) \leq C_{45}, \quad (5.31)$$

где $C_{45} = C_{45}(C_1, C_{38}, C_{39}, C_{44}, N)$.

Наконец, из уравнений неразрывности (2.1) и оценок (5.24), (5.25) и (5.31) получаем, что

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial t} \right)^2 dx \leq C_{46}(C_{38}, C_{41}, C_{45}, N), \quad i = 1, \dots, N.$$

Тем самым получены все оценки, необходимые для продолжения решения начально-краевой задачи (2.1)–(2.4) с интервала $(0, t_0)$ на интервал $(0, T)$. Для завершения доказательства теоремы 2.1 осталось обосновать единственность решения начально-краевой задачи (2.1)–(2.4).

6. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

Пусть $(\rho_1^{(1)}, \dots, \rho_N^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_N^{(1)})$ и $(\rho_1^{(2)}, \dots, \rho_N^{(2)}, u_1^{(2)}, \dots, u_N^{(2)})$ — два решения задачи начально-краевой задачи (2.1)–(2.4), $v^{(1,2)} = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j^{(1,2)}$, $\rho^{(1,2)} = \sum_{j=1}^N \rho_j^{(1,2)}$. Положим $\rho_i = \rho_i^{(1)} - \rho_i^{(2)}$, $u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$, $i = 1, \dots, N$, $v = v^{(1)} - v^{(2)}$, $\rho = \rho^{(1)} - \rho^{(2)}$.

Из (2.1), (2.3) следуют равенства (см. (3.24))

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_i v^{(1)})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_i^{(2)} v)}{\partial x} = 0, \quad \rho_i|_{t=0} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.1)$$

Умножая (6.1) на $2\rho_i$ и интегрируя по x , получаем

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \rho_i^2 dx = - \int_0^1 \left(\rho_i^2 \left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} \right) + 2\rho_i^{(2)} \rho_i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2\rho_i v \left(\frac{\partial \rho_i^{(2)}}{\partial x} \right) \right) dx, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.2)$$

Слагаемые в правой части (6.2) можно оценить следующим образом:

$$- \int_0^1 \rho_i^2 \left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} \right) dx \leq \left(\sum_{j=1}^N \left\| \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x} \right\|_{L_\infty(0,1)} \right) \left(\int_0^1 \rho_i^2 dx \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad (6.3)$$

$$-2 \int_0^1 \rho_i^{(2)} \rho_i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \leq \left\| \rho_i^{(2)} \right\|_{L_\infty(Q_T)}^2 \left(\int_0^1 \rho_i^2 dx \right) + N \sum_{j=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right)^2 dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} -2 \int_0^1 \rho_i v \left(\frac{\partial \rho_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx &\leq \int_0^1 \rho_i^2 dx + \left\| \frac{\partial \rho_i^{(2)}}{\partial x} \right\|_{L_\infty(0,T;L_2(0,1))}^2 \|v\|_{L_\infty(0,1)}^2 \leq \int_0^1 \rho_i^2 dx + \\ &+ N \left\| \frac{\partial \rho_i^{(2)}}{\partial x} \right\|_{L_\infty(0,T;L_2(0,1))}^2 \left(\sum_{j=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right)^2 dx \right), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (6.5)$$

В силу включений

$$\begin{aligned} \rho_i^{(2)} &\in L_\infty(Q_T), \quad \frac{\partial \rho_i^{(2)}}{\partial x} \in L_\infty(0, T; L_2(0, 1)), \quad i = 1, \dots, N, \\ \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x} &\in L_2(0, T; L_\infty(0, 1)), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

ВЫВОДИМ ОЦЕНКИ

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \rho_i^2 dx \leq C_{47}(t) \int_0^1 \rho_i^2 dx + C_{48} \sum_{j=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right)^2 dx, \quad i = 1, \dots, N,$$

где

$$C_{47} = C_{47} \left(\left\{ \left\| \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x} \right\|_{L_\infty(0,1)} \right\}_{i=1}^N, \left\{ \|\rho_i^{(2)}\|_{L_\infty(Q_T)} \right\}_{i=1}^N \right), \quad C_{47} \in L_2(0, T),$$

$$C_{48} = C_{48} \left(\left\{ \left\| \frac{\partial \rho_i^{(2)}}{\partial x} \right\|_{L_\infty(0,T;L_2(0,1))} \right\}_{i=1}^N, N \right).$$

Поэтому, применяя неравенство Гронуолла, приходим к неравенствам

$$\int_0^1 \rho_i^2 dx \leq C_{49} (\|C_{47}\|_{L_1(0,T)}, C_{48}) \sum_{j=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right)^2 dx d\tau, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.6)$$

Далее, из уравнений (2.2) и краевых условий (2.4) следует равенство (см. (3.28))

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^{(1)} u_i^2 dx + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dx + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^1 (u_i - u_j)^2 dx = K \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t} \right) dx - \\ & - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^{(1)} v u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i v^{(2)} u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx, \end{aligned} \quad (6.7)$$

из которого вытекает соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^{(1)} u_i^2 dx + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dx d\tau \right) \leq K \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx - \\ & - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t} \right) dx - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^{(1)} v u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i v^{(2)} u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Оценим слагаемые в правой части соотношения (6.8) следующим образом:

$$K \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \leq \frac{C_1}{4} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx + C_{50} (C_1, K, N) \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^2 dx, \quad (6.9)$$

$$- \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t} \right) dx \leq \frac{C_1}{4} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx + C_{51} \left(C_1, \left\{ \left\| \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t} \right\|_{L_2(0,1)} \right\}_{i=1}^N \right) \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^2 dx, \quad (6.10)$$

$$- \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^{(1)} v u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx \leq C_{52} \left(\left\{ \left\| \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right\|_{L_\infty(0,1)} \right\}_{i=1}^N, N \right) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^{(1)} u_i^2 dx, \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i v^{(2)} u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx \leq C_{53} \left(\left\{ \|u_i^{(2)}\|_{L_\infty(Q_T)} \right\}_{i=1}^N, N \right) \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^2 dx + \\
& + C_{54} \left(\left\{ \left\| \frac{1}{\rho_i^{(1)}} \right\|_{L_\infty(Q_T)} \right\}_{i=1}^N, \left\{ \left\| \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right\|_{L_\infty(0,1)} \right\}_{i=1}^N \right) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^{(1)} u_i^2 dx,
\end{aligned} \tag{6.12}$$

где $C_{51}, C_{54} \in L_1(0, T)$, $C_{52} \in L_2(0, T)$. Таким образом, из (6.8), с учетом уже доказанного соотношения (см. (6.6))

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^2 dx \leq C_{55}(C_1, C_{49}, N) \frac{C_1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx d\tau,$$

следует неравенство

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^{(1)} u_i^2 dx + \frac{C_1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx d\tau \right) & \leq C_{56} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^{(1)} u_i^2 dx + \right. \\
& \left. + \frac{C_1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx d\tau \right),
\end{aligned} \tag{6.13}$$

где $C_{56} = C_{56}(C_{50}, C_{51}, C_{52}, C_{53}, C_{54}, C_{55})$, $C_{56} \in L_1(0, T)$, из которого получаем тождества $\rho_i \equiv 0$, $u_i \equiv 0$, $i = 1, \dots, N$, завершающие доказательство теоремы 2.1.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для начально-краевой задачи о движениях сжимаемой вязкой смеси проведено исследование однозначной разрешимости. В исследуемых уравнениях, являющихся некоторыми обобщениями известной системы уравнений Навье—Стокса, присутствуют старшие производные (производные второго порядка) от полей скоростей всех компонент, поскольку, в отличие от уравнений Навье—Стокса, в которых коэффициент вязкости является скаляром, в случае смеси, ввиду составной структуры тензоров вязких напряжений, коэффициенты вязкостей образуют матрицу вязкостей, элементы которой отвечают за вязкое трение. За вязкое трение внутри каждой компоненты отвечают диагональные элементы, а за трение между компонентами — недиагональные. Это не позволяет автоматически распространить известные результаты для уравнений Навье—Стокса на случай смеси. В случае диагональной матрицы вязкостей уравнения будут связаны только через младшие члены. В работе рассматривается более сложный случай недиагональной матрицы вязкостей. Доказывается существование и единственность сильного решения начально-краевой задачи без каких-либо упрощающих предположений о структуре матрицы вязкостей, кроме стандартных физических требований симметричности и положительной определенности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амосов А. А., Злотник А. А. Разрешимость «в целом» системы уравнений одномерного движения неоднородного вязкого теплопроводного газа // Мат. заметки. — 1992. — 52, № 2. — С. 3–16.
2. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. — М.: Наука, 1983.
3. Злотник А. А. Равномерные оценки и стабилизация решений системы уравнений одномерного движения многокомпонентной баротропной смеси // Мат. заметки. — 1995. — 58, № 2. — С. 307–312.
4. Злотник А. А. Слабые решения уравнений движения вязкой сжимаемой реагирующей бинарной смеси: единственность и непрерывная по Липшицу зависимость от данных // Мат. заметки. — 2004. — 75, № 2. — С. 307–310.
5. Злотник А. А., Амосов А. А. Обобщенные решения «в целом» уравнений одномерного движения вязкого баротропного газа // Докл. АН СССР. — 1988. — 299, № 6. — С. 1303–1307.
6. Кажихов А. В., Петров А. Н. Корректность начально-краевой задачи для модельной системы уравнений многокомпонентной смеси // Динам. сплош. среды. — 1978. — 35. — С. 61–73.

7. Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А. Глобальная однозначная разрешимость начально-краевой задачи для одномерных баротропных уравнений динамики бинарных смесей вязких сжимаемых жидкостей// Сиб. ж. индустр. мат. — 2021. — 24, № 1. — С. 32–47.
8. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред, ч. 1. — М.: Наука, 1987.
9. Папин А. А. Об единственности решений начально-краевой задачи для системы теплопроводной двухфазной смеси// Мат. заметки. — 2010. — 87, № 4. — С. 636–640.
10. Папин А. А., Ахмерова И. Г. Разрешимость системы уравнений одномерного движения теплопроводной двухфазной смеси// Мат. заметки. — 2010. — 87, № 2. — С. 246–261.
11. Петров А. Н. Корректность начально-краевых задач для одномерных уравнений взаимопроникающего движения совершенных газов// Динам. сплош. среды. — 1982. — 56. — С. 105–121.
12. Прокудин Д. А. Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для модельной системы уравнений политропного движения смеси вязких сжимаемых жидкостей// Сиб. электрон. мат. изв. — 2017. — 14. — С. 568–585.
13. Bresch D., Huang X., Li J. Global weak solutions to one-dimensional non-conservative viscous compressible two-phase system// Commun. Math. Phys. — 2012. — 309. — С. 737–755.
14. DiPerna R. J., Lions P. L. Ordinary differential aligns, transport theory and Sobolev spaces// Invent. Math. — 1989. — 98. — С. 511–547.
15. Li S. On one-dimensional compressible Navier–Stokes aligns for a reacting mixture in unbounded domains// Z. Angew. Math. Phys. — 2017. — 68. — 106.
16. Mamontov A. E., Prokudin D. A. Viscous compressible homogeneous multi-fluids with multiple velocities: barotropic existence theory// Сиб. электрон. мат. изв. — 2017. — 14. — С. 388–397.
17. Mamontov A. E., Prokudin D. A. Unique solvability of initial-boundary value problem for one-dimensional aligns of polytropic flows of multicomponent viscous compressible fluids// Сиб. электрон. мат. изв. — 2018. — 15. — С. 631–649.
18. Mamontov A. E., Prokudin D. A. Global unique solvability of the initial-boundary value problem for the aligns of one-dimensional polytropic flows of viscous compressible multfluids// J. Math. Fluid Mech. — 2019. — 21. — 9.
19. Novotny A., Straskraba I. Introduction to the mathematical theory of compressible flow. — Oxford: Oxford University Press, 2004.
20. Rajagopal K. R., Tao L. Mechanics of mixtures. — Singapore: World Scientific, 1995.

В. Ю. Ноговищева

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

E-mail: v.nogovishcheva@ng.su.ru

Д. А. Прокудин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия

E-mail: prokudin@hydro.nsc.ru

UDC 517.95

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-395-416

EDN: FFCPIL

Existence and uniqueness of the solution of the initial-boundary value problem for one-dimensional equations of the dynamics of a compressible viscous mixture

V. Yu. Nogovishcheva¹ and D. A. Prokudin²

¹*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*

²*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences*

³*Altai State University, Barnaul, Russia*

Abstract. In this paper, an initial-boundary value problem is studied for one-dimensional equations of the dynamics of a compressible viscous mixture. A theorem is proved for the existence and uniqueness of a solution to the initial-boundary value problem without any restrictions on the structure of the viscosity matrix other than the standard physical requirements of symmetry and positive definiteness.

Keywords: dynamics of a compressible viscous mixture, one-dimensional initial-boundary value problem, off-diagonal viscosity matrix, existence and uniqueness of a solution.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was carried out with the financial support of the project “Modern models of hydrodynamics for problems of nature management, industrial systems and polar mechanics” (2024–26) (State assignment FZMW-2024-0003).

For citation: V. Yu. Nogovishcheva, D. A. Prokudin, “Existence and uniqueness of the solution of the initial-boundary value problem for one-dimensional equations of the dynamics of a compressible viscous mixture,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. 71, No. 3, 395–416. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-395-416>

REFERENCES

1. A. A. Amosov and A. A. Zlotnik, “Razreshimost’ «v tselom» sistemy uravneniy odnomernogo dvizheniya neodnorodnogo vyazkogo teploprovodnogo gaza” [Solvability «in the large» of the system of equations of one-dimensional motion of a nonuniform viscous heat-conducting gas], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1992, **52**, No. 2, 3–16 (in Russian).
2. S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, and V. N. Monakhov, *Kraevye zadachi mekhaniki neodnorodnykh zhidkostey* [Boundary-Value Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Fluids], Nauka, Moscow, 1983 (in Russian).
3. A. A. Zlotnik, “Ravnomernye otsenki i stabilizatsiya resheniy sistemy uravneniy odnomernogo dvizheniya mnogokomponentnoy barotropnoy smesi” [Uniform estimates and stabilization of solutions of a system of equations of one-dimensional motion of a multicomponent barotropic mixture], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1995, **58**, No. 2, 307–312 (in Russian).
4. A. A. Zlotnik, “Slabye resheniya uravneniy dvizheniya vyazkoy szhimaemoy reagiruyushchey binarnoy smesi: edinstvennost’ i nepreryvnaya po Lipshitsu zavisimost’ ot dannykh” [Weak solutions of the equations of motion of a viscous compressible reacting binary mixture: uniqueness and Lipschitz-continuous data dependence], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2004, **75**, No. 2, 307–310 (in Russian).
5. A. A. Zlotnik and A. A. Amosov, “Obobshchennyye resheniya «v tselom» uravneniy odnomernogo dvizheniya vyazkogo barotropnogo gaza” [Generalized solutions «in general» of the equations of one-dimensional



- motion of a viscous barotropic gas], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1988, **299**, No. 6, 1303–1307 (in Russian).
6. A. V. Kazhikhov and A. N. Petrov, “Korrektnost’ nachal’no-kraevoy zadachi dlya model’noy sistemy uravneniy mnogokomponentnoy smesi” [Well-posedness of the initial-boundary value problem for a model system of equations of a multicomponent mixture], *Dinam. splosh. sredy* [Dym. Contin. Medium], 1978, **35**, 61–73 (in Russian).
 7. A. E. Mamontov and D. A. Prokudin, “Global’naya odnoznachnaya razreshimost’ nachal’no-kraevoy zadachi dlya odnomernykh barotropnykh uravneniy dinamiki binarnykh smesey vyazkikh szhimaemykh zhidkostey” [Global unique solvability of the initial-boundary value problem for one-dimensional barotropic equations of the dynamics of binary mixtures of viscous compressible fluids], *Sib. zh. industr. mat.* [Sib. J. Industr. Math.], 2021, **24**, No. 1, 32–47 (in Russian).
 8. R. I. Nigmatulin, *Dinamika mnogofaznykh sred, ch. 1* [Dynamics of Multiphase Media, Pt. 1], Nauka, Moscow, 1987 (in Russian).
 9. A. A. Papin, “Ob edinstvennosti resheniy nachal’no-kraevoy zadachi dlya sistemy teploprovodnoy dvukhfaznoy smesi” [On the uniqueness of solutions of the initial-boundary value problem for a system of heat-conducting two-phase mixtures], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2010, **87**, No. 4, 636–640 (in Russian).
 10. A. A. Papin and I. G. Akhmerova, “Razreshimost’ sistemy uravneniy odnomernogo dvizheniya teploprovodnoy dvukhfaznoy smesi” [Solvability of the system of equations of one-dimensional motion of a heat-conducting two-phase mixture], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2010, **87**, No. 2, 246–261 (in Russian).
 11. A. N. Petrov, “Korrektnost’ nachal’no-kraevykh zadach dlya odnomernykh uravneniy vzaimopronikayushchego dvizheniya sovershennykh gazov” [Correctness of initial-boundary value problems for one-dimensional equations of interpenetrating motion of perfect gases], *Dinam. splosh. sredy* [Dym. Contin. Medium], 1982, **56**, 105–121 (in Russian).
 12. D. A. Prokudin, “Ob odnoznachnoy razreshimosti nachal’no-kraevoy zadachi dlya model’noy sistemy uravneniy politropnogo dvizheniya smesi vyazkikh szhimaemykh zhidkostey” [On the unique solvability of the initial-boundary value problem for a model system of equations of polytropic motion of a mixture of viscous compressible fluids], *Sib. elektron. mat. izv.* [Sib. Electron. Math. Bull.], 2017, **14**, 568–585 (in Russian).
 13. D. Bresch, X. Huang, and J. Li, “Global weak solutions to one-dimensional non-conservative viscous compressible two-phase system,” *Commun. Math. Phys.*, 2012, **309**, 737–755.
 14. R. J. DiPerna and P. L. Lions, “Ordinary differential aligns, transport theory and Sobolev spaces,” *Invent. Math.*, 1989, **98**, 511–547.
 15. S. Li, “On one-dimensional compressible Navier–Stokes aligns for a reacting mixture in unbounded domains,” *Z. Angew. Math. Phys.*, 2017, **68**, 106.
 16. A. E. Mamontov and D. A. Prokudin, “Viscous compressible homogeneous multi-fluids with multiple velocities: barotropic existence theory,” *Сиб. электрон. мат. изв.*, 2017, **14**, 388–397.
 17. A. E. Mamontov and D. A. Prokudin, “Unique solvability of initial-boundary value problem for one-dimensional aligns of polytropic flows of multicomponent viscous compressible fluids,” *Сиб. электрон. мат. изв.*, 2018, **15**, 631–649.
 18. A. E. Mamontov and D. A. Prokudin, “Global unique solvability of the initial-boundary value problem for the aligns of one-dimensional polytropic flows of viscous compressible multifluids,” *J. Math. Fluid Mech.*, 2019, **21**, 9.
 19. A. Novotny and I. Straskraba, *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*, Oxford University Press, Oxford, 2004.
 20. K. R. Rajagopal and L. Tao, *Mechanics of mixtures*, World Scientific, Singapore, 1995.

V. Yu. Nogovishcheva

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

E-mail: v.nogovishcheva@ng.su.ru

D. A. Prokudin

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

Altai State University, Barnaul, Russia

E-mail: prokudin@hydro.nsc.ru