

УДК 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-417-442

EDN: FLFXBT

## ФОРМУЛА ЛЕФШЕЦА ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ, АССОЦИИРОВАННЫХ С РАССЛОЕНИЕМ

Н. Р. Орлова

Москва, Россия

**Аннотация.** Рассматриваются эллиптические комплексы операторов, ассоциированные с расслоением. Дается формула Атьи—Ботта—Лефшеца для эндоморфизмов таких комплексов. Доказательство основано на методе стационарной фазы. Для оценки остаточного члена используются волновые фронты распределений.

**Ключевые слова:** эллиптические комплексы, нелокальные задачи, числа Лефшеца, волновой фронт, метод стационарной фазы.

**Заявление о конфликте интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Благодарности и финансирование.** Автор благодарен В. Е. Назайкинскому за объяснение его подхода к доказательству формулы Лефшеца и А. Ю. Савину за внимание к данной работе и полезные замечания в процессе её написания. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

**Для цитирования:** Н. Р. Орлова. Формула Лефшеца для нелокальных эллиптических задач, ассоциированных с расслоением // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 3. С. 417–442. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-417-442>

### ВВЕДЕНИЕ

Для диффеоморфизма  $g : M \rightarrow M$  многообразия  $M$  число Лефшеца определяется как альтернированная сумма

$$L(g) = \sum_{j=0}^{\dim M} (-1)^j \operatorname{tr} g^*|_{H^j(M)}$$

следов индуцированного отображения  $g^*$  на группах когомологий  $H^j(M)$ . Классическая формула Лефшеца [21] выражает число Лефшеца диффеоморфизма гладкого замкнутого многообразия в терминах вкладов его неподвижных точек.

Классическая формула Лефшеца может быть легко сформулирована в терминах комплекса де Рама. Пусть  $M$  — замкнутое многообразие размерности  $n$ ,  $\Omega^k(M)$  — пространство дифференциальных  $k$ -форм на  $M$ , а  $d_k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$  — оператор внешнего дифференцирования, для которого выполнено  $d_{k+1}d_k = 0$ . Комплекс де Рама

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(M) \longrightarrow 0$$

является эллиптическим, а его когомологии

$$\mathcal{H}_{dR}^k = \ker d_k / \operatorname{im} d_{k-1}$$

конечномерны. Рассматривается диффеоморфизм  $g : M \rightarrow M$ . Имеются индуцированные отображения  $g_k^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ , для которых выполнено условие

$$d_k g_k^* = g_{k+1}^* d_k.$$

Эндоморфизм  $g^*$  индуцирует эндоморфизм когомологий де Рама  $\mathcal{H}_{dR}^k$ . Числом Лефшеца в этом случае называется альтернированная сумма

$$L_d(g) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \operatorname{tr} g^*|_{\mathcal{H}_{dR}^k}.$$

В частном случае, когда  $g = \operatorname{Id}$  является тождественным отображением, число Лефшеца  $L_d(\operatorname{Id})$  совпадает с эйлеровой характеристикой  $\chi(M)$  многообразия  $M$ :

$$L_d(\operatorname{Id}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim \mathcal{H}_{dR}^k = \chi(M).$$

Предполагается, что все неподвижные точки диффеоморфизма  $g$  невырождены, т. е. для каждой неподвижной точки  $x$  выполнено условие  $\det(1 - dg(x)) \neq 0$ . Теорема Лефшеца утверждает, что число Лефшеца отображения  $g$  равно числу его неподвижных точек с соответствующими знаками:

$$L_d(g) = \sum_{g(x)=x} \operatorname{sign} \det(1 - dg(x)).$$

Атья и Ботт [8, 9] получили далеко идущее обобщение классической формулы Лефшеца на эндоморфизмы эллиптических комплексов псевдодифференциальных операторов. Напомним, что комплекс

$$0 \longrightarrow H^0 \xrightarrow{d_0} H^1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_m} H^m \longrightarrow 0, \quad d_j d_{j-1} = 0 \quad \text{для всех } j \quad (0.1)$$

ограниченных операторов  $d_j$ , действующих в гильбертовых пространствах  $H^j$ , фредгольмов, если его когомологии  $\mathcal{H}^j(d) = \ker d_j / \operatorname{im} d_{j-1}$  являются конечномерными для всех  $j$ . Эндоморфизм  $T = (T^j)$  комплекса (0.1) является набором таких ограниченных операторов  $T^j : H^j \rightarrow H^j$ , что  $T^{j+1} d_j = d_j T^j$  для всех  $j$ . Число Лефшеца определяется как

$$L_d(g) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \operatorname{tr} T^j|_{\mathcal{H}^j(d)}.$$

Атья и Ботт рассматривали комплексы (0.1), где  $H^j$  — пространства Соболева, а  $d_j$  являются псевдодифференциальными операторами на гладком замкнутом многообразии. В этом случае фредгольмовость комплекса эквивалентна его эллиптичности (а именно, комплекс эллиптивен, если его символьный комплекс точен). Рассматривался геометрический эндоморфизм комплекса  $T^j = \Phi^j \circ g^*$ , который определяется диффеоморфизмом  $g : M \rightarrow M$  рассматриваемого многообразия и семейством изоморфизмов  $\Phi^j : g^* E_j \rightarrow E_j$  расслоений  $E_j$  над  $M$ .

Если все неподвижные точки диффеоморфизма  $g$  невырожденные, то число Лефшеца вычисляется в терминах вкладов неподвижных точек по формуле Атья и Ботта

$$L_d(g) = \sum_{g(x)=x} \frac{\sum_i (-1)^i \operatorname{tr} \Phi^i(x)}{|\det(1 - dg(x))|}. \quad (0.2)$$

Примечательно, что формула (0.2) показывает, что число Лефшеца не зависит от операторов в комплексе и определяется исключительно эндоморфизмом комплекса на множестве неподвижных точек. Этот результат в частном случае комплекса де Рама даёт классическую формулу Лефшеца. Поэтому в литературе формула, полученная Атьёй и Боттом, называется *формулой Атья—Ботта—Лефшеца*. Ещё одним частным случаем формулы (0.2) является формула Лефшеца для комплекса Дольбо (голоморфная формула Лефшеца).

В последующие годы различным способом доказательства теоремы Атья—Ботта—Лефшеца был посвящён ряд работ [11, 12, 16, 19, 20, 28, 32].

Теорема Атья—Ботта—Лефшеца обобщалась в различных направлениях. Например, рассматривались не только невырожденные неподвижные точки: в работе Толедо [30] был представлен

общий подход к исследованию изолированных неподвижных точек диффеоморфизма  $g$  в случае эллиптических комплексов. Голоморфный вариант формулы Атьи—Ботта—Лефшеца обобщался Патоди [26], Толедо и Тонгом [31], Иноуэ [17] и другими. В работе [5] были определены числа Лефшеца для операторов в  $W^*$ -модулях. Рассматривались более сложные операторы, например, в работах [22, 29] рассмотрены эндоморфизмы эллиптических комплексов, определённых квантованными каноническими преобразованиями. Также рассматривались более сложные многообразия. В работе [1] была дана формула Лефшеца для потоков на компактных многообразиях, сохраняющих слоение коразмерности один и имеющих неподвижные точки. В работе [13] рассмотрены эллиптические комплексы на многообразии с краем, состоящие из операторов Буте де Монвеля. Для этого случая был дан аналог формулы Атьи—Ботта—Лефшеца. Рассматривались также многообразия с коническими особенностями [10, 23–25]. В работе [18] был дан аналог формулы Атьи—Ботта—Лефшеца для комплексов в относительной эллиптической теории.

Целью данной работы является предъявление формулы Лефшеца для нелокальных задач, ассоциированных с расслоением, введённых в работе [4].

Рассматриваются гладкие замкнутые многообразия  $X$  и  $Y$ , локально тривиальное расслоение с проекцией  $\pi : X \rightarrow Y$  и матричные операторы вида

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} : \begin{matrix} H(X) \\ \oplus \\ H(Y) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H(X) \\ \oplus \\ H(Y) \end{matrix}, \quad (0.3)$$

где

- $H(X)$ ,  $H(Y)$  — пространства Соболева на  $X$  и на  $Y$ ;
- $A$  и  $D$  — псевдодифференциальные операторы (ПДО) на  $X$  и на  $Y$  соответственно;
- $B$  — граничный оператор, равный композиции ПДО на  $X$  и  $Y$  и оператора интегрирования по слою, а  $C$  является кограничным оператором, равным композиции ПДО на  $X$  и  $Y$  и оператора продолжения константой вдоль слоя [2].

В работе даётся условие эллиптичности комплексов операторов с дифференциалами вида (0.3), а также даются условия, при которых такие комплексы фредгольмовы. Затем даётся определение геометрического эндоморфизма, определённого послойным диффеоморфизмом. Основным результатом работы является теорема типа Атьи—Ботта—Лефшеца, которая выражает число Лефшеца в терминах невырожденных неподвижных точек соответствующих диффеоморфизмов. Для доказательства этой теоремы используется подход, предложенный в работе [6]. Следуя этому подходу, метод микролокального разбиения единицы на  $T^*X$  с параметром  $h > 0$  применяется для локализации основного вклада в формулу Лефшеца, а метод стационарной фазы — для вычисления его асимптотики при  $h \rightarrow 0$ . Также в работе [6] показано, что оставшиеся члены в формулу Лефшеца вклад не вносят, однако подробного доказательства этого факта не приводится. В данной работе мы восполняем этот пробел.

## 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть  $H_0, \dots, H_m$  — гильбертовы пространства. Рассмотрим комплекс

$$0 \longrightarrow H_0 \xrightarrow{a_0} H_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_{m-1}} H_m \longrightarrow 0, \quad (1.1)$$

где  $a_j$  — линейные ограниченные операторы, при этом  $a_{j+1}a_j = 0$ . Для комплекса (1.1) справедливо следующее утверждение [27].

**Лемма 1.1.** *Если комплекс (1.1) точен, то в качестве его параметрикса можно взять последовательность*

$$0 \longleftarrow H_0 \xleftarrow{r_0} H_1 \xleftarrow{r_1} \dots \xleftarrow{r_{m-1}} H_m \longleftarrow 0$$

операторов  $r_j = l_j^{-1}a_j^* = a_j^*l_{j+1}^{-1}$ , где

$$l_j = a_{j-1}a_{j-1}^* + a_j^*a_j : H_j \rightarrow H_j \quad (1.2)$$

—  $j$ -й лапласиан комплекса (1.1). Другими словами, выполнено равенство

$$a_{j-1}r_{j-1} + r_ja_j = 1 - k_j.$$

Здесь  $k_j$  — оператор конечного ранга.

Теперь предположим, что комплекс (1.1) является подкомплексом комплекса

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{L_0}^{H_0} \xrightarrow{\tilde{a}_0} \bigoplus_{L_1}^{H_1} \xrightarrow{\tilde{a}_1} \dots \xrightarrow{\tilde{a}_{m-1}} \bigoplus_{L_m}^{H_m} \longrightarrow 0, \quad (1.3)$$

где пространства  $L_j$  конечномерные, а

$$\tilde{a}_j = \begin{pmatrix} a_j & c_j \\ b_j & d_j \end{pmatrix} : \bigoplus_{L_j}^{H_j} \longrightarrow \bigoplus_{L_{j+1}}^{H_{j+1}}, \quad \tilde{a}_{j+1}\tilde{a}_j = 0.$$

Здесь  $b_j, c_j, d_j$  — операторы конечного ранга.

**Лемма 1.2.** Если комплексы (1.1) и (1.3) точны, то в качестве параметрикса комплекса (1.3)

$$0 \longleftarrow \bigoplus_{L_0}^{H_0} \xleftarrow{\tilde{r}_0} \bigoplus_{L_1}^{H_1} \xleftarrow{\tilde{r}_1} \dots \xleftarrow{\tilde{r}_{m-1}} \bigoplus_{L_{m-1}}^{H_m} \longleftarrow 0,$$

можно взять операторы  $\tilde{r}_j = \tilde{l}_j^{-1}\tilde{a}_j^*$ . При этом имеем

$$\tilde{l}_j^{-1} = \begin{pmatrix} l_j^{-1} + g_j' & c_j' \\ b_j' & d_j' \end{pmatrix},$$

где  $b_j', c_j', d_j', g_j'$  — операторы конечного ранга.

*Доказательство.*  $j$ -й лапласиан, ассоциированный с комплексом (1.3), равен

$$\tilde{l}_j = \tilde{a}_{j-1}\tilde{a}_{j-1}^* + \tilde{a}_j^*\tilde{a}_j : \bigoplus_{L_j}^{H_j} \longrightarrow \bigoplus_{L_j}^{H_j}.$$

Получим

$$\tilde{l}_j = \begin{pmatrix} a_{j-1}a_{j-1}^* + a_j^*a_j + b_j^*b_j + c_{j-1}c_{j-1}^* & a_{j-1}b_{j-1}^* + c_{j-1}d_{j-1}^* + a_j^*c_j + b_j^*d_j \\ b_{j-1}a_{j-1}^* + d_{j-1}c_{j-1}^* + c_j^*a_j + d_j^*b_j & c_j^*c_j + d_j^*d_j + b_{j-1}b_{j-1}^* + d_{j-1}d_{j-1}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_j & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + K_j, \quad (1.4)$$

где  $K_j$  — матричный оператор конечного ранга. Поскольку комплекс (1.1) точен, то его лапласианы (1.2) обратимы, т. е. существуют обратные операторы  $l_j^{-1}$ , и

$$\tilde{l}_j = \begin{pmatrix} l_j & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left( 1 + \begin{pmatrix} l_j^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_j \right).$$

Отсюда получаем, что оператор, обратный к лапласиану (1.4), равен

$$\tilde{l}_j^{-1} = \left( 1 + \begin{pmatrix} l_j^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_j \right)^{-1} \begin{pmatrix} l_j^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1 + K_j') \begin{pmatrix} l_j^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_j^{-1} + g_j' & c_j' \\ b_j' & d_j' \end{pmatrix}.$$

Здесь  $K_j'$  — матричный оператор конечного ранга. □

## 2. КОМПЛЕКСЫ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Рассмотрим гладкие замкнутые многообразия  $X$  и  $Y$  и локально-тривиальное расслоение со слоем  $G$  и проекцией

$$\pi : X \longrightarrow Y.$$

Размерности многообразий обозначим через  $n = \dim X$ ,  $l = \dim Y$ ,  $\nu = \dim X - \dim Y$ . Выберем локальные координаты в окрестности произвольной точки на  $X$  и обозначим их через  $(x', x'') \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^\nu$ . Двойственные координаты в слоях кокасательного расслоения  $T^*X$  обозначим через  $(\xi', \xi'')$ .

Определим оператор поднятия

$$\pi^* : H^s(Y) \longrightarrow H^s(X), \quad (\pi^* f)(x', x'') = f(x'),$$

и соответствующий оператор опускания (интегрирования по слою)

$$\pi_* : H^s(X) \longrightarrow H^s(Y), \quad (\pi_* f)(x') = \int_{G_{x'}} f(x', x'') dx'',$$

где  $dx''$  — гладкое семейство форм объёма на слоях  $G_{x'}$ . Операторы  $\pi^*$  и  $\pi_*$  непрерывно действуют в указанных пространствах Соболева при всех  $s \in \mathbb{R}$ . При этом будем предполагать, что выполнено условие

$$\pi_* 1 = 1, \quad (2.1)$$

т. е. объём каждого слоя равен единице.

Следуя [4], рассмотрим матричные операторы вида

$$d = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} : \begin{matrix} H^{s_k}(X) \\ \oplus \\ H^{s_k}(Y) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H^{s_l}(X) \\ \oplus \\ H^{s_l}(Y) \end{matrix}, \quad (2.2)$$

где  $A$  и  $D$  — ПДО порядка  $\text{ord} A = \text{ord} D = s_k - s_l$  на  $X$  и  $Y$  соответственно. Операторы  $B$  и  $C$  равны

$$B = D_Y'' \pi_* D_X'', \quad C = D_X' \pi^* D_Y', \quad (2.3)$$

где  $D_X', D_X''$  — ПДО на  $X$ , а  $D_Y', D_Y''$  — ПДО на  $Y$ . Можно также рассматривать конечные суммы операторов вида (2.3).

Далее будем рассматривать последовательности операторов вида (2.2)

$$0 \rightarrow \begin{matrix} H^{s_0}(X, \pi^* E_0) \\ \oplus \\ H^{s_0}(Y, F_0) \end{matrix} \xrightarrow{d_0} \begin{matrix} H^{s_1}(X, \pi^* E_1) \\ \oplus \\ H^{s_1}(Y, F_1) \end{matrix} \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{m-1}} \begin{matrix} H^{s_m}(X, \pi^* E_m) \\ \oplus \\ H^{s_m}(Y, F_m) \end{matrix} \rightarrow 0, \quad (2.4)$$

где  $E_j$  и  $F_j$  — комплексные векторные расслоения на  $Y$ . Операторы в последовательности (2.4) являются ограниченными операторами в пространствах Соболева.

Предполагается, что последовательность (2.4) является комплексом, т. е.  $d_{j+1}d_j = 0$ ,  $\forall j$ ,  $0 \leq j \leq m-2$ .

### 3. УСЛОВИЕ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ И ТЕОРЕМА КОНЕЧНОСТИ

Фиксируем точку в кокасательном расслоении  $T^*Y$  с координатами  $(x', \xi')$ ,  $\xi' \neq 0$  и определим символьную последовательность комплекса (2.4)

$$0 \rightarrow \begin{matrix} L^2(G_{x'}, E_{0,x'}) \\ \oplus \\ F_{0,x'} \end{matrix} \xrightarrow{\sigma(d_0)(x', \xi')} \begin{matrix} L^2(G_{x'}, E_{1,x'}) \\ \oplus \\ F_{1,x'} \end{matrix} \xrightarrow{\sigma(d_1)(x', \xi')} \dots \xrightarrow{\sigma(d_{m-1})(x', \xi')} \begin{matrix} L^2(G_{x'}, E_{m,x'}) \\ \oplus \\ F_{m,x'} \end{matrix} \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

Здесь операторнозначные символы операторов  $d_j$  определяются формулами (см. [2])

$$\sigma(d_j)(x', \xi') = \begin{pmatrix} \sigma(A_j) & \sigma(C_j) \\ \sigma(B_j) & \sigma(D_j) \end{pmatrix} (x', \xi'),$$

где

$$\begin{aligned} (\sigma(A_j))u(x'') &= A_j(x', \xi', x'', 0)u(x''), \\ \sigma(B_j)u &= D_{Y,j}''(x', \xi') \int_{G_{x'}} D_{X,j}''(x', \xi', x'', 0)u(x'')dx'', \\ \sigma(C_j)w &= D_{X,j}'(x', \xi', x'', 0)D_{Y,j}'(x', \xi')w, \\ \sigma(D_j)w &= D_j(x', \xi')w, \end{aligned}$$

где  $(u, w) \in L^2(G_{x'}, E_{j,x'}) \oplus F_{j,x'}$ . Здесь через  $A(x', \xi', x'', \xi'')$  обозначен главный символ ПДО  $A\left(x', -i\frac{\partial}{\partial x'}, x'', -i\frac{\partial}{\partial x''}\right)$ .

**Определение 3.1.** Комплекс (2.4) называется *эллиптическим*, если выполнены следующие условия:

1.  $\forall(x, \xi) = (x', \xi', x'', \xi''), \xi \neq 0$  точен комплекс главных символов

$$0 \rightarrow E_{0,x'} \xrightarrow{\sigma(A_0)(x,\xi)} E_{1,x'} \xrightarrow{\sigma(A_1)(x,\xi)} \dots \xrightarrow{\sigma(A_{m-1})(x,\xi)} E_{m,x'} \rightarrow 0; \quad (3.2)$$

2.  $\forall(x', \xi'), \xi' \neq 0$  точен комплекс (3.1).

**Теорема 3.1.** Если комплекс (2.4) эллиптичен, то для любого  $N \in \mathbb{N}$  для него существует параметрикс

$$0 \leftarrow \begin{array}{c} H^{s_0}(X, \pi^* E_0) \\ \oplus \\ H^{s_0}(Y, F_0) \end{array} \xleftarrow{Q_0} \begin{array}{c} H^{s_1}(X, \pi^* E_1) \\ \oplus \\ H^{s_1}(Y, F_1) \end{array} \xleftarrow{Q_1} \dots \xleftarrow{Q_{m-1}} \begin{array}{c} H^{s_m}(X, \pi^* E_m) \\ \oplus \\ H^{s_m}(Y, F_m) \end{array} \leftarrow 0. \quad (3.3)$$

Более точно, для всех  $j$  выполнены равенства

$$d_{j-1}Q_{j-1} + Q_j d_j = 1 - K_{N,j}, \quad (3.4)$$

где  $K_{N,j}$  — оператор порядка  $\leq -N$  в шкале пространств Соболева. В частности, комплекс (2.4) фредгольмов.

*Доказательство.* 1. Из точности комплексов (3.1) и (3.2) по лемме 1.2 следует, что для этих комплексов можно построить параметрикс

$$0 \leftarrow E_{0,x'} \xleftarrow{q_{A,0}(x,\xi)} E_{1,x'} \xleftarrow{q_{A,1}(x,\xi)} \dots \xleftarrow{q_{A,m-1}(x,\xi)} E_{m,x'} \leftarrow 0$$

и

$$0 \leftarrow \begin{array}{c} L^2(G_{x'}, E_{0,x'}) \\ \oplus \\ F_{0,x'} \end{array} \xleftarrow{q_0(x',\xi')} \begin{array}{c} L^2(G_{x'}, E_{1,x'}) \\ \oplus \\ F_{1,x'} \end{array} \xleftarrow{q_1(x',\xi')} \dots \xleftarrow{q_{m-1}(x',\xi')} \begin{array}{c} L^2(G_{x'}, E_{m,x'}) \\ \oplus \\ F_{m,x'} \end{array} \leftarrow 0,$$

где

$$q_j(x', \xi') = \begin{pmatrix} q_{A,j}(x', \xi', 0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_j(x', \xi') & c'_j(x', \xi') \\ b'_j(x', \xi') & d'_j(x', \xi') \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

с операторами  $a'_j, b'_j, c'_j, d'_j$  конечного ранга.

2. Построим последовательность операторов

$$0 \leftarrow \begin{array}{c} H^{s_0}(X, \pi^* E_0) \\ \oplus \\ H^{s_0}(Y, F_0) \end{array} \xleftarrow{Q_0} \begin{array}{c} H^{s_1}(X, \pi^* E_1) \\ \oplus \\ H^{s_1}(Y, F_1) \end{array} \xleftarrow{Q_1} \dots \xleftarrow{Q_{m-1}} \begin{array}{c} H^{s_m}(X, \pi^* E_m) \\ \oplus \\ H^{s_m}(Y, F_m) \end{array} \leftarrow 0, \quad (3.6)$$

где

$$Q_j = \begin{pmatrix} Q_{A,j} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A'_j & C'_j \\ B'_j & D'_j \end{pmatrix}.$$

Здесь  $Q_{A,j}$  — ПДО с символом  $q_{A,j}(x, \xi)$ , а второе слагаемое — матричный оператор, элементами которого являются операторы из работы [4], символы которых равны матрицам (см. (3.5))

$$\begin{pmatrix} a'_j(x', \xi') & c'_j(x', \xi') \\ b'_j(x', \xi') & d'_j(x', \xi') \end{pmatrix}.$$

По построению имеем соотношение

$$\sigma(d_{j-1})q_{j-1} + q_j\sigma(d_j) = 1,$$

из которого следует, что для соответствующих операторов выполнено равенство

$$d_{j-1}Q_{j-1} + Q_j d_j = 1 - K_{1,j}, \quad (3.7)$$

где  $K_{1,j}$  — оператор порядка  $\leq -1$ . Таким образом, последовательность (3.6) является параметриksom комплекса (2.4).

Модифицируем параметрикс (3.6) так, чтобы остатки  $K_{1,j}$  имели высокий отрицательный порядок в равенстве (3.7), пользуясь следующей леммой.

**Лемма 3.1.** Пусть для некоторого  $n \in \mathbb{N}$  выполняется соотношение

$$d_{j-1}Q_{j-1} + Q_j d_j = 1 - K_{n,j}, \quad (3.8)$$

где  $K_{n,j}$  — оператор порядка  $\leq -n$ . Тогда для оператора  $Q'_j = Q_j(1 + K_{n,j+1})$  будет выполнено соотношение

$$d_{j-1}Q'_{j-1} + Q'_j d_j = 1 - K_{2n,j}, \quad (3.9)$$

где  $K_{2n,j}$  — оператор порядка  $\leq -2n$ .

*Доказательство.* 1. Домножим левую и правую части равенства (3.8) на оператор  $1 + K_{n,j}$ . Получим

$$d_{j-1}Q_{j-1}(1 + K_{n,j}) + Q_j d_j(1 + K_{n,j}) = (1 - K_{n,j})(1 + K_{n,j}). \quad (3.10)$$

Преобразуем левую часть равенства (3.10):

$$\begin{aligned} d_{j-1}Q_{j-1}(1 + K_{n,j}) + Q_j d_j + Q_j d_j K_{n,j} &= \\ &= d_{j-1}Q_{j-1}(1 + K_{n,j}) + Q_j d_j + Q_j d_j(1 - d_{j-1}Q_{j-1} - Q_j d_j) = \\ &= d_{j-1}Q_{j-1}(1 + K_{n,j}) + 2Q_j d_j - Q_j d_j d_{j-1}Q_{j-1} - Q_j d_j Q_j d_j. \end{aligned}$$

Поскольку  $d_j d_{j-1} = 0$ , то далее получаем

$$\begin{aligned} &= d_{j-1}Q_{j-1}(1 + K_{n,j}) + Q_j(2 - d_j Q_j) d_j = \\ &= d_{j-1}Q_{j-1}(1 + K_{n,j}) + Q_j(2 - (1 - K_{n,j+1} - Q_{j+1} d_{j+1})) d_j = \\ &= d_{j-1}Q_{j-1}(1 + K_{n,j}) + Q_j(1 + K_{n,j+1}) d_j. \end{aligned}$$

Итак, мы показали, что левая часть равенства (3.9) равна левой части равенства (3.10), где  $Q'_j = Q_j(1 + K_{n,j+1})$ .

2. Правая часть соотношения (3.10) равна

$$(1 - K_{n,j})(1 + K_{n,j}) = 1 - K_{n,j}^2 = 1 - K_{2n,j},$$

где  $K_{2n,j} = K_{n,j}^2$  — оператор порядка  $\leq -2n$ . Соотношение (3.9) доказано.  $\square$

Таким образом, последовательно применяя лемму 3.1, можно построить такой параметрик (3.3) комплекса (2.4), для которого выполнено искомое соотношение (3.4).  $\square$

#### 4. ФОРМУЛА ЛЕФШЕЦА

Рассмотрим эллиптический комплекс (2.4). Пусть дан послойный диффеоморфизм  $g : X \rightarrow X$ , т. е.  $g$  переводит слой расслоения в слой. Это значит, что для двух точек  $x_1, x_2 \in X$  выполнено соотношение

$$\pi(x_1) = \pi(x_2) \implies \pi(g(x_1)) = \pi(g(x_2)).$$

Диффеоморфизм  $g$  индуцирует диффеоморфизм базы  $Y$ , обозначаемый  $g_0$ . Пусть также даны изоморфизмы векторных расслоений

$$\Phi_X^j : g^*(\pi^* E_j) \longrightarrow \pi^* E_j \text{ над } X, \quad \Phi_Y^j : g_0^* F_j \longrightarrow F_j \text{ над } Y.$$

Определим геометрический эндоморфизм

$$T^j = \begin{pmatrix} T_X^j & 0 \\ 0 & T_Y^j \end{pmatrix} : \begin{matrix} C^\infty(X, \pi^* E_j) \\ \oplus \\ C^\infty(Y, F_j) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(X, \pi^* E_j) \\ \oplus \\ C^\infty(Y, F_j) \end{matrix},$$

где

$$T_X^j = \Phi_X^j \circ g^*, \quad T_Y^j = \Phi_Y^j \circ g_0^*. \quad (4.1)$$

Композиции (4.1) задают действия:

$$(T_X^j u)(x) = \Phi_X^j(x) u(g(x)), \quad (T_Y^j u)(x') = \Phi_Y^j(x') u(g_0(x')).$$

**Определение 4.1.** Комплекс (2.4) называется  $g$ -инвариантным, если выполняется равенство  $d_j T^j = T^{j+1} d_j$  для всех  $j$ .

**Определение 4.2.** Число Лефшеца эндоморфизма  $g$  комплекса (2.4) определяется как

$$L_d(g) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \operatorname{tr}(T^j|_{\mathcal{H}^j(d)}),$$

где  $\operatorname{tr}(T^j|_{\mathcal{H}^j(d)})$  — след геометрического эндоморфизма  $T^j$ , действующего в когомологиях  $\mathcal{H}^j(d)$  комплекса (2.4).

**Определение 4.3.** Неподвижная точка  $x$  диффеоморфизма  $g$  ( $g(x) = x$ ) называется невырожденной, если единица не является собственным значением дифференциала  $dg(x) : T_x X \rightarrow T_x X$ .

Мы будем считать, что все неподвижные точки невырожденные и диффеоморфизм  $g$  имеет конечное число неподвижных точек.

**Лемма 4.1.** Если неподвижная точка  $x \in X$  диффеоморфизма  $g$  невырождена, то неподвижная точка  $y = \pi(x) \in Y$  диффеоморфизма  $g_0 : Y \rightarrow Y$  также является невырожденной.

*Доказательство.* Возьмём точки  $x_1 = (x'_1, x''_1)$ ,  $x_2 = (x'_2, x''_2)$ ,  $x_1, x_2 \in X$ . Под действием диффеоморфизма  $g$  точки  $x_1$  и  $x_2$  переходят в точки  $\{g'(x'_1, x''_1), g''(x'_1, x''_1)\}$  и  $\{g'(x'_2, x''_2), g''(x'_2, x''_2)\}$  соответственно. Послойность действия диффеоморфизма  $g$  означает, что

$$\pi(x'_1, x''_1) = \pi(x'_2, x''_2) \implies \pi(g'(x'_1, x''_1), g''(x'_1, x''_1)) = \pi(g'(x'_2, x''_2), g''(x'_2, x''_2)).$$

Итак, это условие означает, что

$$x'_1 = x'_2 \implies g'(x'_1, x''_1) = g'(x'_2, x''_2).$$

Это значит, что функция  $g'$  не зависит от второй переменной. Тогда дифференциал диффеоморфизма  $g$  равен

$$dg(x', x'') = \begin{pmatrix} \frac{\partial g'(x')}{\partial x'} & 0 \\ \frac{\partial g''(x', x'')}{\partial x'} & \frac{\partial g''(x', x'')}{\partial x''} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\det(1 - dg(x)) = \det\left(1 - \frac{\partial g'(x')}{\partial x'}\right) \det\left(1 - \frac{\partial g''(x', x'')}{\partial x''}\right).$$

Из того, что  $\det(1 - dg(x)) \neq 0$ , следует, что

$$\det\left(1 - \frac{\partial g'(x')}{\partial x'}\right) = \det(1 - dg_0(x')) \neq 0.$$

□

Следующая теорема является основным результатом этой работы.

**Теорема 4.1.** Предположим, что все неподвижные точки диффеоморфизма  $g$  невырождены. Тогда справедлива следующая формула Лефшеца:

$$L_d(g) = \sum_{x \in \Omega_X} \frac{\sum_{k=0}^m (-1)^k \operatorname{tr} \Phi_X^k(x)}{|\det(1 - dg(x))|} + \sum_{x' \in \Omega_Y} \frac{\sum_{k=0}^m (-1)^k \operatorname{tr} \Phi_Y^k(x')}{|\det(1 - dg_0(x'))|}, \quad (4.2)$$

где  $\Omega_X = \{x \in X \mid g(x) = x\}$ ,  $\Omega_Y = \{x' \in Y \mid g_0(x') = x'\}$  — множества неподвижных точек на  $X$  и на  $Y$  соответственно.

**Замечание 4.1.** Формула типа (4.2) справедлива и для более общих комплексов, чем в формуле (2.4), в которых вместо расслоений  $\pi^* E_j$ , где  $E_j$  — векторные расслоения над базой  $Y$ , рассматриваются произвольные расслоения  $E_j$  над тотальным пространством  $X$ .

# 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ ЛЕФШЕЦА

Для доказательства формулы Лефшеца сначала воспользуемся методом, предложенным в работе [6]. Для краткости будем доказывать теорему 4.1 для комплекса, состоящего из одного оператора:

$$0 \rightarrow \begin{array}{c} C^\infty(X, \pi^* E_0) \\ \oplus \\ C^\infty(Y, F_0) \end{array} \xrightarrow{d} \begin{array}{c} C^\infty(X, \pi^* E_1) \\ \oplus \\ C^\infty(Y, F_1) \end{array} \rightarrow 0, \quad \text{где } d = d_0. \quad (5.1)$$

Число Лефшеца комплекса (5.1) равно [6]

$$L_d(g) = \text{tr}(T^0 - rT^1 d) - \text{tr}(T^1 - drT^1), \quad (5.2)$$

где через  $\text{tr}$  обозначен операторный след, а  $r$  — такой параметрикс оператора  $d$ , что у операторов  $1 - dr$  и  $1 - rd$  имеются следы.

Возьмём разбиение единицы  $\sum_i \rho_i^X(x) = 1$  на  $X$ , обладающее следующими свойствами:

- если  $x_0 \in \Omega_X \cap \text{supp} \rho_i^X$ , то  $\rho_i^X(x) \equiv 1$  в окрестности точки  $x_0$ ;
- носитель каждой функции  $\rho_i^X(x)$  лежит в координатной карте.

Определим теперь разбиение единицы на  $Y$ .

**Лемма 5.1.** *Функции  $\rho_i^Y(x') := \pi_* (\rho_i^X(x)) = \int_{G_{x'}} \rho_i^X(x', x'') dx''$ , где  $dx''$  — форма объёма на слое  $G_{x'}$ , определяют разбиение единицы на  $Y$ . При этом носитель каждой функции  $\rho_i^Y(x')$  лежит в координатной карте.*

*Доказательство.* Действительно, имеем

$$\sum_i \rho_i^Y(x') = \sum_i \pi_* (\rho_i^X(x)) = \pi_* 1 = 1. \quad (5.3)$$

Последнее равенство в (5.3) справедливо в силу (2.1).  $\square$

Теперь пусть  $\psi_0^X(\xi) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\psi_0^Y(\xi') \in C_c^\infty(\mathbb{R}^l)$  — такие функции с компактными носителями, что  $\psi_0^X(\xi) \equiv 1$ , если  $|\xi| \leq 1$ , и  $\psi_0^Y(\xi') \equiv 1$ , если  $|\xi'| \leq 1$ . Положим,  $\psi_\infty^X(\xi) = 1 - \psi_0^X(\xi)$ ,  $\psi_\infty^Y(\xi') = 1 - \psi_0^Y(\xi')$ .

Для любого  $h > 0$  определим  $h$ -псевдодифференциальные операторы

$$\psi^{ij} = \begin{pmatrix} \psi_X^{ij} & 0 \\ 0 & \psi_Y^{ij} \end{pmatrix} : \begin{array}{c} C^\infty(X) \\ \oplus \\ C^\infty(Y) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} C^\infty(X) \\ \oplus \\ C^\infty(Y) \end{array},$$

где

$$\psi_X^{ij} u(x) = \chi_i^X(x) \mathcal{F}^{-1} \psi_j^X(h\xi) \mathcal{F} \rho_i^X(x) u(x), \quad (5.4)$$

$$\psi_Y^{ij} u(x') = \chi_i^Y(x') \mathcal{F}^{-1} \psi_j^Y(h\xi') \mathcal{F} \rho_i^Y(x') u(x'). \quad (5.5)$$

Здесь  $\mathcal{F}$  — преобразование Фурье,  $j = 0$  или  $\infty$ , а функции  $\chi_i^X \equiv 1$ ,  $\chi_i^Y \equiv 1$  в окрестности носителей функций  $\rho_i^X(x)$  и  $\rho_i^Y(x')$  соответственно и имеют носители в той же карте, что и функции  $\rho_i^X, \rho_i^Y$ . Прямое вычисление даёт равенство

$$\sum_{ij} \psi^{ij} = 1. \quad (5.6)$$

Подставляя равенство (5.6) в (5.2), получим выражение

$$L_d(g) = \sum_i \{ \text{tr}(T^0 - rT^1 d) \psi^{i0} - \text{tr}(T^1 - drT^1) \psi^{i0} \} + \\ + \{ \text{tr}(T^0 - rT^1 d) \psi^{i\infty} - \text{tr}(T^1 - drT^1) \psi^{i\infty} \}. \quad (5.7)$$

Так как оператор  $\psi^{i0}$  обладает следом, то  $\text{tr}(drT^1 \psi^{i0}) = \text{tr}(rT^1 \psi^{i0} d)$ , и можно переписать выражение (5.7) в виде

$$L_d(g) = \sum_i \{ \text{tr} T^0 \psi^{i0} - \text{tr} T^1 \psi^{i0} \} +$$

$$+ \sum_i \{ \operatorname{tr}(T^0 - rT^1 d) \psi^{i0} - \operatorname{tr}(T^1 - drT^1) \psi^{i0} \} - \sum_i \operatorname{tr}(rT^1 [d, \psi^{i0}]), \quad (5.8)$$

где  $[d, \psi^{i0}] = d\psi^{i0} - \psi^{i0}d$ . Оценим каждый член в (5.8) при  $h \rightarrow 0$ .

**5.1. Оценка первого слагаемого в (5.8).** Утверждается, что первое слагаемое в (5.8) даёт сумму в правой части формулы Лефшеца (4.2) и  $O(h)$ . Действительно, разность следов в первом слагаемом в выражении (5.8) равна

$$\operatorname{tr} T^0 \psi^{i0} - \operatorname{tr} T^1 \psi^{i0} = \operatorname{tr} T_X^0 \psi_X^{i0} + \operatorname{tr} T_Y^0 \psi_Y^{i0} - \operatorname{tr} T_X^1 \psi_X^{i0} - \operatorname{tr} T_Y^1 \psi_Y^{i0}. \quad (5.9)$$

Применяя метод стационарной фазы так же, как в [6], получим

$$\operatorname{tr} T_X^0 \psi_X^{i0} - \operatorname{tr} T_X^1 \psi_X^{i0} = \begin{cases} \frac{\operatorname{tr} \Phi_X^0(x) - \operatorname{tr} \Phi_X^1(x)}{|\det(1 - dg(x))|} + O(h), & \text{если } \operatorname{supp} \rho_i^X \cap \Omega_X = \{x\}, \\ O(h^\infty), & \text{если } \operatorname{supp} \rho_i^X \cap \Omega_X = \emptyset, \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\operatorname{tr} T_Y^0 \psi_Y^{i0} - \operatorname{tr} T_Y^1 \psi_Y^{i0} = \begin{cases} \frac{\rho_i^Y(x')(\operatorname{tr} \Phi_Y^0(x') - \operatorname{tr} \Phi_Y^1(x'))}{|\det(1 - dg_0(x'))|} + O(h), & \text{если } \operatorname{supp} \rho_i^Y \cap \Omega_Y = \{x'\}, \\ O(h^\infty), & \text{если } \operatorname{supp} \rho_i^Y \cap \Omega_Y = \emptyset. \end{cases} \quad (5.11)$$

Теперь подставим (5.10) и (5.11) в (5.9) и получим

$$\begin{aligned} \sum_i \{ \operatorname{tr} T^0 \psi^{i0} - \operatorname{tr} T^1 \psi^{i0} \} &= \sum_i (\operatorname{tr} T_X^0 \psi_X^{i0} - \operatorname{tr} T_X^1 \psi_X^{i0}) + \sum_i (\operatorname{tr} T_Y^0 \psi_Y^{i0} - \operatorname{tr} T_Y^1 \psi_Y^{i0}) = \\ &= \sum_{x \in \Omega_X} \frac{\operatorname{tr} \Phi_X^0(x) - \operatorname{tr} \Phi_X^1(x)}{|\det(1 - dg(x))|} + \sum_i \sum_{x' \in \operatorname{supp} \rho_i^Y \cap \Omega_Y} \frac{\rho_i^Y(x')(\operatorname{tr} \Phi_Y^0(x') - \operatorname{tr} \Phi_Y^1(x'))}{|\det(1 - dg_0(x'))|} + O(h) = \\ &= \sum_{x \in \Omega_X} \frac{\operatorname{tr} \Phi_X^0(x) - \operatorname{tr} \Phi_X^1(x)}{|\det(1 - dg(x))|} + \sum_{x' \in \Omega_Y} \frac{\operatorname{tr} \Phi_Y^0(x') - \operatorname{tr} \Phi_Y^1(x')}{|\det(1 - dg_0(x'))|} + O(h). \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы используем соотношение  $\sum_i \rho_i^Y(x') = 1$ .

Итак, вклад первого члена в (5.8) равен правой части формулы (4.2) при  $m = 1$ .

**5.2. Оценка второго слагаемого в (5.8).** Второе слагаемое в (5.8) является величиной порядка  $O(h^\infty)$ . Доказательство такое же, как в работе [18].

**5.3. Оценка третьего слагаемого в (5.8).** Покажем, что третье слагаемое в (5.8) является величиной порядка  $o(1)$ . Доказательству этого утверждения посвящена оставшаяся часть этого пункта.

**Утверждение 5.1.** *Справедливо равенство  $\sum_i \operatorname{tr}(rT^1[d, \psi^{i0}]) = o(1)$  при  $h \rightarrow 0$ .*

*Доказательство.* Дадим явное выражение для оператора  $rT^1[d, \psi^{i0}]$ . Обозначим

$$d = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$[d, \psi^{i0}] = \begin{pmatrix} [A, \psi_X^{i0}] & C\psi_Y^{i0} - \psi_X^{i0}C \\ B\psi_X^{i0} - \psi_Y^{i0}B & [D, \psi_Y^{i0}] \end{pmatrix}.$$

Параметрикс  $r$  для оператора  $d$  имеет вид [3]

$$r = \begin{pmatrix} A^{-1}(1 + C\Delta^{-1}BA^{-1}) & -A^{-1}C\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}BA^{-1} & \Delta^{-1} \end{pmatrix},$$

где  $\Delta = D - BA^{-1}C$  — ПДО на  $Y$ . Обозначим

$$r' = (T^1)^{-1}rT^1 = \begin{pmatrix} (T_X^1)^{-1}A^{-1}(1 + C\Delta^{-1}BA^{-1})T_X^1 & -(T_X^1)^{-1}A^{-1}C\Delta^{-1}T_Y^1 \\ -(T_Y^1)^{-1}\Delta^{-1}BA^{-1}T_X^1 & (T_Y^1)^{-1}\Delta^{-1}T_Y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R'_{11} & R'_{12} \\ R'_{21} & R'_{22} \end{pmatrix}.$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(rT^1[d, \psi^{i0}]) &= \operatorname{tr}(T^1 r'[d, \psi^{i0}]) = \operatorname{tr}(T_X^1 R'_{11}[A, \psi_X^{i0}]) + \operatorname{tr}(T_X^1 R'_{12}(B\psi_X^{i0} - \psi_Y^{i0}B)) + \\ &+ \operatorname{tr}(T_Y^1 R'_{21}(C\psi_Y^{i0} - \psi_X^{i0}C)) + \operatorname{tr}(T_Y^1 R'_{22}[D, \psi_Y^{i0}]). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Оценим слагаемые в выражении (5.12).

Начнём с оценки первого слагаемого:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(T_X^1 R'_{11}[A, \psi_X^{i0}]) &= \operatorname{tr}(T_X^1 ((T_X^1)^{-1} A^{-1} (1 + C\Delta^{-1}BA^{-1})T_X^1)[A, \psi_X^{i0}]) = \\ &= \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}[A, \psi_X^{i0}]) + \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{\Phi}[A, \psi_X^{i0}]), \end{aligned} \quad (5.13)$$

где  $\hat{A} = (T_X^1)^{-1} A^{-1} T_X^1$  — ПДО на  $X$  и  $\hat{\Phi} = (T_X^1)^{-1} A^{-1} C\Delta^{-1}BA^{-1}T_X^1$ . Итак, задача свелась к оцениванию следов  $\operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}[A, \psi_X^{i0}])$  и  $\operatorname{tr}(T_X^1 \hat{\Phi}[A, \psi_X^{i0}])$ .

Начнём со следа  $\operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}[A, \psi_X^{i0}])$  в (5.13).

**Лемма 5.2.** *Справедливо соотношение  $\sum_i \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}[A, \psi_X^{i0}]) = o(1)$  при  $h \rightarrow 0$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим разложения

$$A = \sum_j A_j + K_1, \quad \hat{A} = \sum_m \hat{A}_m + K_2,$$

где  $A_j, \hat{A}_m$  — ПДО в координатах на  $X$ , а  $K_1, K_2$  — операторы с гладкими ядрами. Тогда

$$\operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}[A, \psi_X^{i0}]) = \sum_m \left( \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}_m[K_1, \psi_X^{i0}]) \right) + \operatorname{tr}(T_X^1 K_2[A, \psi_X^{i0}]) + \sum_{j,m} \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}_m[A_j, \psi_X^{i0}]). \quad (5.14)$$

1. Посмотрим подробнее на первое слагаемое в (5.14).

**Лемма 5.3.** *Пусть  $K$  — оператор с гладким ядром. Тогда  $K\psi_X^{i0} \rightarrow K\rho_i^X$  при  $h \rightarrow 0$ . Здесь под сходимостью понимается сходимость ядер Шварца в пространстве  $C^\infty(X \times X)$ .*

*Доказательство.* Оператор  $\psi_X^{i0}$  был определён в (5.4) при  $j = 0$ . Тогда композиция  $K\psi_X^{i0}$  имеет ядро

$$\begin{aligned} (K\psi_X^{i0})u(x) &= (2\pi)^{-n} \iiint K(x, z)\chi_i^X(z)e^{i(z-y)\xi}\psi_0^X(h\xi)\rho_i^X(y)u(y)dyd\xi dz = \int \mathbb{K}_h(x, y)u(y)dy, \\ \mathbb{K}_h(x, y) &= (2\pi)^{-n}\rho_i^X(y)h^{-n} \iint e^{\frac{i(z-y)\hat{\xi}}{h}}K(x, z)\chi_i^X(z)\psi_0^X(\hat{\xi})dzd\hat{\xi}, \quad \hat{\xi} = h\xi. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Применим метод стационарной фазы к интегралу в (5.15). Стационарная точка фазовой функции  $\Phi(z, \hat{\xi}) = (z - y)\hat{\xi}$  равна  $(y, 0)$ . Гессиан фазовой функции равен

$$\operatorname{Hess}(\Phi(z, \hat{\xi})) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как числа положительных и отрицательных собственных значений гессиана равны, то его сигнатура равна нулю.

Таким образом, интеграл (5.15) равен

$$\mathbb{K}_h(x, y) = K(x, y)\rho_i^X(y) + O(h).$$

Аналогично получаются соотношения

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \mathbb{K}_h(x, y) = \partial_x^\alpha \partial_y^\beta (K(x, y)\rho_i^X(y)) + O(h)$$

при всех  $\alpha, \beta$ . Это вытекает из равенств

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \mathbb{K}_h(x, y) &= \sum_{|\beta_1|+|\beta_2|=|\beta|} \frac{\beta!}{\beta_1!\beta_2!} \partial_y^{\beta_1} \rho_i^X(y) h^{-n} \iint \left( -\frac{i\hat{\xi}}{h} \right)^{\beta_2} e^{\frac{i(z-y)\hat{\xi}}{h}} \partial_x^\alpha K(x, z)\chi(z) dz d\hat{\xi} = \\ &= \sum_{|\beta_1|+|\beta_2|=|\beta|} \frac{\beta!}{\beta_1!\beta_2!} \partial_y^{\beta_1} \rho_i^X(y) h^{-n} \iint e^{\frac{i(z-y)\hat{\xi}}{h}} \partial_z^{\beta_2} \left( \partial_x^\alpha (K(x, z)\chi(z)) \right) dz d\hat{\xi} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{|\beta_1|+|\beta_2|=|\beta|} \frac{\beta!}{\beta_1!\beta_2!} \partial_y^{\beta_1} \rho_i^X(y) \partial_y^{\beta_2} \left( \partial_x^\alpha K(x, y) + O(h) \right) = \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \left( K(x, y) \rho_i^X(y) \right) + O(h).$$

□

Применяя лемму 5.3 к первому слагаемому в (5.13), получим

$$\sum_m \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}_m [K_1, \psi_X^{i0}]) = \sum_m \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}_m [K_1, \rho_i^X]) + O(h). \quad (5.16)$$

2. Второе слагаемое в равенстве (5.14) также по лемме 5.3 имеет разложение

$$\operatorname{tr}(T_X^1 K_2 [A, \psi_X^{i0}]) = \operatorname{tr}(T_X^1 K_2 [A, \rho_i^X]) + O(h). \quad (5.17)$$

3. Перейдём теперь к третьему слагаемому в (5.14). Имеет место равенство

$$\operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}_m [A_j, \psi_X^{i0}]) = \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}_m A_j \psi_X^{i0}) - \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}_m \psi_X^{i0} A_j). \quad (5.18)$$

Через  $\tilde{A} = \hat{A}_m A_j$  обозначим композицию ПДО  $\hat{A}_m$  и  $A_j$ . Через  $\tau$  обозначим регуляризованный след (см. приложение В).

**Лемма 5.4.** *Существует предел*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{tr}(T_X^1 \tilde{A} \psi_X^{i0}) = \tau(T_X^1 \tilde{A} \rho_i^X). \quad (5.19)$$

*Доказательство.* Поскольку  $\psi_X^{i0}$  — оператор с гладким ядром Шварца, то при всех  $h > 0$  можем заменить след оператора  $T_X^1 \tilde{A} \psi_X^{i0}$  на его регуляризованный след. Также далее будем работать с регуляризованным следом композиции  $T_X^1 \tilde{A} \rho_i^X$ . Отметим, что операторный след этой композиции, вообще говоря, не определён. Таким образом, доказательство соотношения (5.19) сводится к доказательству следующего предельного перехода:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(T_X^1 \tilde{A} \psi_X^{i0}) = \tau(T_X^1 \tilde{A} \rho_i^X).$$

С этой целью применим предложение В.2 (приложение В). Проверим, что условия предложения В.2 выполнены. Для этого нужно показать, что для волнового фронта оператора  $T_X^1 \tilde{A}$  имеем

$$WF'(T_X^1 \tilde{A}) \cap N^* \Delta = \emptyset$$

(используемые обозначения определены в приложениях А, В).

Так как  $\tilde{A}$  — ПДО, то выполнены соотношения

$$WF'(T_X^1 \tilde{A}) \subset WF'(T_X^1) = \left\{ \left( x, \xi, g(x), - \left( \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^t \right)^{-1} \xi \right) \right\}.$$

Отсюда получаем, что

$$WF'(T_X^1 \tilde{A}) \cap N^* \Delta \subset \left\{ (x, \xi, x, -\xi) \mid x = g(x), \left( \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^t \right)^{-1} \xi = \xi \right\} = \emptyset,$$

так как все неподвижные точки диффеоморфизма невырождены по условию. Выполнение условия  $WF'(T_X^1 \tilde{A}) = \emptyset$  очевидно. Итак, условия предложения В.2 из приложения В выполнены, и мы получаем искомое равенство (5.19).

Лемма 5.4 доказана. □

Теперь, применяя к (5.18) лемму 5.4, получим

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}_m A_j \psi_X^{i0}) - \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}_m \psi_X^{i0} A_j) \right] = \\ = \tau(T_X^1 \hat{A}_m A_j \rho_i^X) - \tau(T_X^1 \hat{A}_m \rho_i^X A_j) = \tau(T_X^1 \hat{A}_m [A_j, \rho_i^X]). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Наконец, из (5.14), (5.16), (5.17) и (5.20) получаем

$$\sum_i \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A} [A, \psi_X^{i0}]) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_i \left[ \sum_m \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}_m[K_1, \rho_i^X]) + \operatorname{tr}(T_X^1 K_2[A, \rho_i^X]) + \sum_{j,m} \tau(T_X^1 \hat{A}_m[A_j, \rho_i^X]) + O(h) + o(1) \right] = \\
 &= \sum_m \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}_m[K_1, \sum_i \rho_i^X]) + \operatorname{tr}(T_X^1 K_2[A, \sum_i \rho_i^X]) + \sum_{j,m} \tau(T_X^1 \hat{A}_m[A_j, \sum_i \rho_i^X]) + o(1) = \\
 &= \sum_m \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}_m[K_1, 1]) + \operatorname{tr}(T_X^1 K_2[A, 1]) + \sum_{j,m} \tau(T_X^1 \hat{A}_m[A_j, 1]) + o(1) = o(1),
 \end{aligned}$$

так как  $\sum_i \rho_i^X = 1$ .

Доказательство леммы 5.2 закончено.  $\square$

Теперь вернёмся к равенству (5.13) и оценим второе слагаемое. Оператор  $\hat{\Phi}$  можно представить в виде композиции

$$\hat{\Phi} = A_1 \pi^* A_2 \pi_* A_3, \quad (5.21)$$

где  $A_1, A_3$  — ПДО на  $X$ , а  $A_2$  — ПДО на  $Y$ . Операторы вида (5.21) ранее рассматривались в работе [4, с. 125, 128]. Для такого оператора справедлив следующий результат.

**Лемма 5.5.** *Справедливо равенство*

$$\sum_i \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{\Phi}[A, \psi_X^{i0}]) = o(1) \text{ при } h \rightarrow 0. \quad (5.22)$$

Данная лемма доказывается аналогично лемме 5.2. Покажем только применимость предложения В.2 для операторов вида (5.21).

Рассмотрим подмногообразие  $\Delta_1 \subset X \times X$ , определяемое как

$$\Delta_1 = \{(x_1, x_2) \mid \pi(x_1) = \pi(x_2)\}.$$

На первом сомножителе произведения  $X \times X$  выберем локальные координаты в окрестности произвольной точки и обозначим их через  $(x', x'')$ . Локальные координаты в окрестности произвольной точки второго сомножителя обозначим через  $(y', y'')$ . Через  $(\xi', \xi'', \eta', \eta'')$  будем обозначать стандартные координаты в слоях расслоения  $T^*(X \times X)$ , индуцированные координатами  $(x', x'', y', y'')$ .

Определим конормальное расслоение над подмногообразием  $N^* \Delta_1$  как

$$N^* \Delta_1 = \{(x', x'', x', y'', \xi', 0, \eta', 0) \in T^*(X \times X) \mid \xi' + \eta' = 0\}.$$

Для волнового фронта оператора (5.21) справедливо включение

$$WF'(\hat{\Phi}) \subset N^* \Delta_1.$$

Теперь для волнового фронта композиции вида  $T_1^X \hat{\Phi}$  справедливо соотношение

$$WF'(T_X^1 \hat{\Phi}) \subset \left\{ (x', x'', g_0(x'), y'', \xi', 0, -\left(\left(\frac{\partial g_0}{\partial x'}\right)^t\right)^{-1} \xi', 0) \right\}.$$

Отсюда следует, что

$$N^* \Delta_1 \cap WF'(T_X^1 \hat{\Phi}) = \left\{ (x', x'', x', x'', \xi', 0, -\xi', 0) \mid x' = g_0(x'), \xi' = \left(\left(\frac{\partial g_0}{\partial x'}\right)^t\right)^{-1} \xi' \right\}.$$

Так как все неподвижные точки диффеоморфизма  $g_0$  являются невырожденными, то последнее множество является пустым.

Таким образом, условие предложения В.2 выполнено, и справедливо равенство (5.22). Как следствие, сумма по  $i$  первого слагаемого в равенстве (5.12) является величиной порядка  $o(1)$ .

Посмотрим теперь на остальные слагаемые в равенстве (5.12). Сумма

$$\sum_i \operatorname{tr}(T_Y^1 R'_{22}[D, \psi_Y^{i0}])$$

аналогично лемме 5.2 является величиной порядка  $o(1)$ , так как  $D$  — ПДО на  $Y$ .

Далее оценим второе слагаемое в (5.12).

**Лемма 5.6.**

$$\sum_i \operatorname{tr}(T_X^1 R'_{12}(B\psi_X^{i0} - \psi_Y^{i0}B)) = o(1). \quad (5.23)$$

*Доказательство.* Как и в доказательстве леммы 5.2, используем разложение

$$R'_{12} = \sum_j R_j + K_1, \quad B = \sum_m B_m + K_2,$$

где  $R_j, B_m$  — операторы в локальных картах на  $X$  и  $Y$  соответственно, а  $K_1, K_2$  — операторы с гладкими ядрами.

Справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sum_i \operatorname{tr}(T_X^1 R'_{12}(B\psi_X^{i0} - \psi_Y^{i0}B)) &= \sum_i \operatorname{tr}(T_X^1 R'_{12}B\psi_X^{i0}) - \sum_i \operatorname{tr}(T_X^1 R'_{12}\psi_Y^{i0}B) = \\ &= \sum_i \left[ \sum_{j,m} \operatorname{tr}(T_X^1 R_j B_m \psi_X^{i0}) + \sum_j \operatorname{tr}(T_X^1 R_j K_2 \psi_X^{i0}) + \operatorname{tr}(T_X^1 K_1 B \psi_X^{i0}) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j,m} \operatorname{tr}(T_X^1 R_j \psi_Y^{i0} B_m) - \sum_j \operatorname{tr}(T_X^1 R_j \psi_Y^{i0} K_2) - \operatorname{tr}(T_X^1 K_1 \psi_Y^{i0} B) \right]. \quad (5.24) \end{aligned}$$

Операторы  $R_j$  являются операторами вида  $A_{1,j}\pi^*A_{2,j}$ , действующими из  $Y$  в  $X$ , а  $B_m$  являются операторами вида  $A_{3,m}\pi_*A_{4,m}$ . Здесь  $A_{1,j}, A_{4,m}$  — ПДО на  $X$ , а  $A_{2,j}, A_{3,m}$  — ПДО на  $Y$ . Таким образом, композиция  $R_j B_m$  является оператором вида  $A_{1,j}\pi^*A_{2,j}A_{3,m}\pi_*A_{4,m}$ . Вид композиции  $R_j B_m$  соответствует виду оператора (5.21). Таким образом, для таких операторов применимо предложение В.2. Также аналогично лемме 5.3 можно показать, что для операторов  $K_1, K_2$  при  $h \rightarrow 0$  справедлива сходимость  $K_1\psi_Y^{i0} \rightarrow \rho_i^Y$ ,  $K_2\psi_Y^{i0} \rightarrow \rho_i^Y$ .

Таким образом, из (5.24) получаем

$$\begin{aligned} \sum_i \operatorname{tr}(T_X^1 R'_{12}(B\psi_X^{i0} - \psi_Y^{i0}B)) &= \sum_{j,m} \left( \tau(T_X^1 R_j B_m \sum_i \rho_i^X) - \tau(T_X^1 R_j \sum_i \rho_i^Y B_m) \right) + \\ &+ \sum_j \left( \operatorname{tr}(T_X^1 R_j K_2 \sum_i \rho_i^X) - \operatorname{tr}(T_X^1 R_j \sum_i \rho_i^Y K_2) \right) + \left( \operatorname{tr}(T_X^1 K_1 B \sum_i \rho_i^X) - \operatorname{tr}(T_X^1 K_1 \sum_i \rho_i^Y B) \right) + o(1) = \\ &= \sum_{j,m} \left( \tau(T_X^1 R_j B_m) - \tau(T_X^1 R_j B_m) \right) + \sum_j \left( \operatorname{tr}(T_X^1 R_j K_2) - \operatorname{tr}(T_X^1 R_j K_2) \right) + \\ &\quad + \left( \operatorname{tr}(T_X^1 K_1 B) - \operatorname{tr}(T_X^1 K_1 B) \right) + o(1) = o(1). \quad (5.25) \end{aligned}$$

Второе равенство в выражении (5.25) следует из соотношения (5.3).

Доказательство леммы 5.6 завершено.  $\square$

Наконец, перейдём к третьему слагаемому в равенстве (5.12). Композиция  $R'_{21}C$  имеет вид  $A_1\pi_*A_2A_3\pi^*A_4$  с ПДО  $A_1, A_4$  на  $Y$  и ПДО  $A_2, A_3$  на  $X$ . Композиция  $R'_{21}C$  является ПДО на  $Y$  (см. [4]). Аналогично доказательству формулы (5.23), получаем

$$\sum_i \operatorname{tr}(T_Y^1 R'_{21}(C\psi_Y^{i0} - \psi_X^{i0}C)) = o(1).$$

Таким образом, суммы по  $i$  всех слагаемых равенства (5.12) являются величинами порядка  $o(1)$ .

Доказательство утверждения 5.1 завершено.  $\square$

Таким образом, второе и третье слагаемое в равенстве (5.8) не дают вклада в формулу Лефшеца (4.2). Теорема 4.1 доказана.

## 6. ПРИМЕР

Рассмотрим расслоение  $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 = Y$  (проекция на первый множитель) и комплекс

$$0 \longrightarrow \Omega^0(X) \xrightarrow{d} \Omega^1(X) \xrightarrow{\left( \begin{smallmatrix} d \\ \pi_* \end{smallmatrix} \right)} \begin{smallmatrix} \Omega^2(X) \\ \oplus \\ \Omega^0(Y) \end{smallmatrix} \xrightarrow{(\pi_* d)} \Omega^1(Y) \longrightarrow 0, \quad (6.1)$$

где

$$\pi_* : \Omega^j(X) \rightarrow \Omega^{j-1}(Y), \quad (\pi_* f)(x') = \int_{\mathbb{S}^1} f(x', x'') dx''$$

— отображение интегрирования по слою проекции  $\pi$ .

Рассмотрим диффеоморфизм

$$g(x', x'') = (g_0(x'), x'' + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0,$$

где диффеоморфизм

$$g_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$$

определяется как монотонно возрастающая функция с двумя неподвижными точками  $x' = 0$  и  $x' = \frac{1}{2}$ , причём  $g'_0(0) < 1$ ,  $g'_0\left(\frac{1}{2}\right) > 1$ . Индуцированное отображение  $g^*$  на дифференциальных формах определяет эндоморфизм комплекса (6.1).

Очевидно, что диффеоморфизм  $g$  не имеет неподвижных точек, а диффеоморфизм  $g_0$  имеет две невырожденные неподвижные точки  $x' = 0$  и  $x' = \frac{1}{2}$ .

### Лемма 6.1.

1. Размерности когомологий комплекса (6.1) равны

$$\dim \mathcal{H}^k = \begin{cases} 1, & k = 0, 1; \\ 0, & k = 2, 3. \end{cases}$$

Базисами в  $\mathcal{H}^0$  и  $\mathcal{H}^1$  являются формы 1 и  $dx'$  соответственно.

2. Отображение  $g^*$  действует в когомологиях как тождественное отображение.

*Доказательство.* Первое утверждение несложно доказать, раскладывая формы в ряды Фурье по переменным  $x', x''$ .

Докажем второе утверждение. Индуцированное отображение  $g^*$  действует в пространстве  $\mathcal{H}^0$  как тождественное отображение. Покажем теперь, что оно действует как тождественное отображение и в пространстве когомологий  $\mathcal{H}^1$  с базисом  $dx'$ :

$$g^*(dx') = \frac{\partial g_0}{\partial x'} dx'.$$

Разложим форму  $\frac{\partial g_0}{\partial x'} dx'$  в сумму точной формы и формы с постоянным коэффициентом:

$$\frac{\partial g_0}{\partial x'} dx' = df + c dx', \quad f \in C^\infty(\mathbb{S}^1), \quad c \in \mathbb{C}. \quad (6.2)$$

Проинтегрируем обе части равенства (6.2). Получим

$$\int_{\mathbb{S}^1} \frac{\partial g_0}{\partial x'} dx' = \int_{\mathbb{S}^1} df + \int_{\mathbb{S}^1} c dx'. \quad (6.3)$$

Первое слагаемое в правой части в (6.3) равно нулю. Отсюда

$$c = \int_{\mathbb{S}^1} \frac{\partial g_0}{\partial x'} dx' = g_0(1) - g_0(0) = 1. \quad (6.4)$$

Последнее равенство в (6.4) справедливо, так как из построения следует, что  $g_0(0) = 0$ ,  $g_0(1) = 1$ .  $\square$

Теперь получаем

$$\begin{aligned} L_d(g) &= \sum_{x' \in \Omega_Y} \frac{\operatorname{tr} \Phi^0(x') - \operatorname{tr} \Phi^1(x')}{|\det(1 - dg_0(x'))|} = \\ &= \frac{\operatorname{tr} \Phi^0(0) - \operatorname{tr} \Phi^1(0)}{|\det(1 - dg_0(0))|} + \frac{\operatorname{tr} \Phi^0(1/2) - \operatorname{tr} \Phi^1(1/2)}{|\det(1 - dg_0(1/2))|} = \frac{1 - g'_0(0)}{1 - g'_0(0)} + \frac{1 - g'_0(1/2)}{g'_0(1/2) - 1} = 0, \end{aligned}$$

т. е. для рассматриваемого эндоморфизма левая и правая части формулы Атьи—Ботта—Лефшеца (4.2) равны нулю.

#### А. ПРИЛОЖЕНИЕ. ВОЛНОВЫЕ ФРОНТЫ

Через  $\mathcal{D}'(X)$  обозначим пространство распределений на гладком замкнутом многообразии  $X$ . Напомним сведения о волновых фронтах распределений из  $\mathcal{D}'(X)$ , см. [7, 14, 15].

**Определение А.1.** Волновым фронтом  $WF(u)$  распределения  $u \in \mathcal{D}'(X)$  называется дополнение в  $T^*X \setminus 0$  набора всех таких  $(x_0, \xi_0) \in T^*X \setminus 0$ , что для некоторой окрестности  $U$  точки  $x_0$  и окрестности  $V$  точки  $\xi_0$ , для каждой функции  $\varphi \in C_c^\infty(U)$  и каждого  $N$ :

$$\mathcal{F}(\varphi u)(\tau \xi) = O(\tau^{-N}) \text{ при } \tau \rightarrow \infty$$

равномерно по  $\xi \in V$ . Здесь  $\mathcal{F}$  — преобразование Фурье.

Волновой фронт является замкнутым конусом в  $T^*X \setminus 0$ .

Пусть  $\Gamma$  — замкнутый конус в  $T^*X \setminus 0$ . Определим линейное подпространство

$$\mathcal{D}'_\Gamma(X) = \{u \in \mathcal{D}'(X) \mid WF(u) \subset \Gamma\}.$$

На подпространстве  $\mathcal{D}'_\Gamma(X) \subset \mathcal{D}'(X)$  рассматриваются полунормы на  $\mathcal{D}'(X)$  и дополнительные полунормы, отвечающие конусу  $\Gamma$ . Для определения этих полунорм зафиксируем точку  $(x_0, \xi_0)$  и выберем окрестность  $U$  точки  $x_0$  и окрестность  $V$  точки  $\xi_0$ , как в определении А.1. Тогда для каждой  $\varphi \in C_c^\infty(U)$  и каждого  $N$  полунорма определяется как

$$\|u\|_{\varphi, V, U} = \sup_{x_0, \xi_0} \sup_{\tau \geq 1, \xi \in V} \tau^N |\mathcal{F}(\varphi u)(\tau \xi)|, \quad u \in \mathcal{D}'_\Gamma(X). \quad (\text{A.1})$$

Следующие ниже результаты являются уточнениями теорем о преобразовании волновых фронтов распределений при отображениях многообразий из цитированных выше работ. Уточнение состоит в указании конусов, в которых содержатся волновые фронты.

Пусть  $X, Y$  — гладкие замкнутые многообразия. Для гладкого отображения  $\Phi : X \rightarrow Y$  рассмотрим множество кономалей (это множество является замкнутым конусом):

$$N = \left\{ (y, \eta) \in T^*Y \setminus 0 \mid \exists x \in X, y = \Phi(x), \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^t \eta = 0 \right\}. \quad (\text{A.2})$$

**Предложение А.1.** Пусть  $\Gamma$  — такой замкнутый конус в  $T^*Y \setminus 0$ , что  $\Gamma \cap N = \emptyset$ . Тогда определён замкнутый конус

$$\tilde{\Gamma} = \Phi^*(\Gamma) = \left\{ (x, \xi) \in T^*X \setminus 0 \mid \exists \eta : \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^t \eta = \xi, (\Phi(x), \eta) \in \Gamma \right\}, \quad (\text{A.3})$$

а отображение обратного образа

$$\Phi^* : C^\infty(Y) \longrightarrow C^\infty(X) \quad (\text{A.4})$$

имеет непрерывное продолжение на пространства распределений

$$\Phi^* : \mathcal{D}'_\Gamma(Y) \longrightarrow \mathcal{D}'_{\tilde{\Gamma}}(X). \quad (\text{A.5})$$

При этом  $\operatorname{supp}(\Phi^*v) \subset \Phi^{-1}(\operatorname{supp} v)$  для каждого  $v \in \mathcal{D}'_\Gamma(Y)$ . Непрерывность отображения (А.5) здесь и ниже понимается в следующем смысле: если  $v_j \rightarrow v$  для  $v_j, v \in \mathcal{D}'_\Gamma(Y)$  по полунормам в  $\mathcal{D}'_\Gamma(Y)$ , то  $\Phi^*v_j \rightarrow \Phi^*v$  по полунормам в  $\mathcal{D}'_{\tilde{\Gamma}}(X)$ .

**Предложение А.2.** Рассмотрим отображение, двойственное к отображению (А.4):

$$\Phi_* = (\Phi^*)^t : \mathcal{D}'(X) \longrightarrow \mathcal{D}'(Y).$$

Пусть  $\tilde{\Gamma}$  — замкнутый конус в  $T^*X \setminus 0$ . Тогда имеется непрерывное отображение подпространств

$$\Phi_* : \mathcal{D}'_{\tilde{\Gamma}}(X) \longrightarrow \mathcal{D}'_{\Gamma}(Y),$$

где замкнутый конус  $\Gamma \subset T^*Y \setminus 0$  определяется формулой

$$\Gamma = \Phi_*(\tilde{\Gamma}) = \left\{ (y, \eta) \in T^*Y \setminus 0 \mid \exists x \in X, y = \Phi(x), \left( x, \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^t \eta \right) \in \tilde{\Gamma} \right\}. \quad (\text{A.6})$$

**Предложение А.3.** Пусть  $\Gamma_1$  — замкнутый конус в  $T^*X \setminus 0$ ,  $\Gamma_2$  — замкнутый конус в  $T^*Y \setminus 0$ . Тогда определено непрерывное отображение

$$\mathcal{D}'_{\Gamma_1}(X) \times \mathcal{D}'_{\Gamma_2}(Y) \longrightarrow \mathcal{D}'_{\Gamma_3}(X \times Y), \quad (u, v) \mapsto u \otimes v.$$

Здесь рассматривается замкнутый конус  $\Gamma_3 \subset T^*(X \times Y) \setminus 0$ :

$$\Gamma_3 = (\Gamma_1 \times \Gamma_2) \cup (\Gamma_1 \times 0_Y) \cup (0_X \times \Gamma_2),$$

где  $0_X$  и  $0_Y$  рассматриваются как нулевые сечения в  $T^*X$  и в  $T^*Y$  соответственно.

Рассмотрим непрерывный оператор

$$D : C^\infty(Y) \longrightarrow \mathcal{D}'(X).$$

Его ядро Шварца обозначим через  $K_D \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ .

**Определение А.2.** Пусть  $\Gamma_1 \subset T^*(X \times Y) \setminus 0$ ,  $\Gamma_2 \subset T^*(Y \times Z) \setminus 0$  — замкнутые конусы, которые удовлетворяют условию

$$\{(y, \eta) \in (T^*Y) \setminus 0 \mid \exists x \in X, z \in Z : (x, 0, y, \eta) \in \Gamma_1, (y, \eta, z, 0) \in \Gamma_2\} = \emptyset. \quad (\text{A.7})$$

Композиция  $\Gamma_1 \circ \Gamma_2 \subset T^*(X \times Z) \setminus 0$  определяется как конус

$$\Gamma_1 \circ \Gamma_2 = \{(a, c) \in T^*(X \times Z) \setminus 0 \mid \exists b : (a, b) \in \Gamma_1, (b, c) \in \Gamma_2\}. \quad (\text{A.8})$$

Для конуса  $\Gamma \subset T^*(X \times Z) \setminus 0$  введём обозначения

$$\Gamma_X = \{(x, \xi) \in T^*X \setminus 0 \mid \exists z \in Z : (x, \xi, z, 0) \in \Gamma\},$$

$$\Gamma_Z = \{(z, \zeta) \in (T^*Z) \setminus 0 \mid \exists x \in X : (x, 0, z, \zeta) \in \Gamma\},$$

$$\Gamma' = \{(x, \xi, z, \zeta) \in T^*(X \times Z) \setminus 0 \mid (x, \xi, y, -\zeta) \in \Gamma\}.$$

Конус (А.8), вообще говоря, не является замкнутым. Нетрудно доказать следующую лемму.

**Лемма А.1.** Для замыкания  $\overline{\Gamma_1 \circ \Gamma_2} \subset T^*(X \times Z) \setminus 0$  выполнено соотношение

$$\overline{\Gamma_1 \circ \Gamma_2} \subset (\Gamma_1 \circ \Gamma_2) \cup (\Gamma_{1_X} \times 0_Z) \cup (0_X \times \Gamma_{2_Z}).$$

**Теорема А.1.** Пусть  $X, Y, Z$  — гладкие многообразия, и  $\Gamma_1 \subset T^*(X \times Y) \setminus 0$ ,  $\Gamma_2 \subset T^*(Y \times Z) \setminus 0$  — такие замкнутые конусы, что для конусов  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma_2$  выполнено условие (А.7).

Пусть имеются линейные непрерывные отображения

$$D_1 : C^\infty(Y) \rightarrow \mathcal{D}'(X), \quad D_2 : C^\infty(Z) \rightarrow \mathcal{D}'(Y)$$

с ядрами Шварца

$$K_{D_1} \in \mathcal{D}'_{\Gamma_1}(X \times Y), \quad K_{D_2} \in \mathcal{D}'_{\Gamma_2}(Y \times Z).$$

Тогда определена композиция операторов

$$D_1 \circ D_2 : C^\infty(Z) \longrightarrow \mathcal{D}'(X),$$

а композиция соответствующих ядер Шварца даёт линейное непрерывное отображение

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_{\Gamma_1}(X \times Y) \times \mathcal{D}'_{\Gamma_2}(Y \times Z) &\longrightarrow \mathcal{D}'_{\Gamma_3}(X \times Z), \\ (K_{D_1}, K_{D_2}) &\longmapsto K_{D_1 \circ D_2}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

где замкнутый конус  $\Gamma_3$  равен

$$\Gamma_3 = (\Gamma'_1 \circ \Gamma_2) \cup (\Gamma_{1_X} \times 0_Z) \cup (0_X \times \Gamma_{2_Z}).$$

*Доказательство.* При выполнении условия (A.7) конус  $\Gamma_3$  является замкнутым в  $T^*(X \times Z) \setminus 0$  по лемме A.1.

Определим отображения

$$\Delta : X \times Y \times Z \longrightarrow X \times Y \times Y \times Z, \quad \Delta(x, y, z) = (x, y, y, z);$$

$$\pi : X \times Y \times Z \longrightarrow X \times Z, \quad \pi(x, y, z) = (x, z).$$

Тогда справедлива формула [14, 15]

$$K_{D_1 \circ D_2} = \pi_* \Delta^*(K_{D_1} \otimes K_{D_2}). \quad (\text{A.10})$$

Приведём подробные вычисления волнового фронта композиции (A.10). Для волнового фронта тензорного произведения  $K_{D_1} \otimes K_{D_2}$  в силу предложения A.3 справедливо вложение

$$WF(K_{D_1} \otimes K_{D_2}) \subset \Gamma_1 \times \Gamma_2 \cup (\Gamma_1 \times 0_{Y \times Z}) \cup (0_{X \times Y} \times \Gamma_2). \quad (\text{A.11})$$

Определим конормальное расслоение диагонали  $N^*\Delta$ . Обозначим координаты на  $X \times Y \times Y \times Z$  через  $(x, y_1, y_2, z)$ . Тогда

$$N^*\Delta = \left\{ (x, 0, y_1, \eta_1, y_2, \eta_2, z, 0) \in T^*(X \times Y \times Y \times Z) \setminus 0 \mid \eta_1 + \eta_2 = 0, y_1 = y_2 \right\}.$$

Легко видеть, что расслоение  $N^*\Delta$  совпадает с множеством нормалей (A.2) для отображения  $\Delta$ .

**Лемма A.2.** *Справедливо соотношение*

$$WF(K_{D_1} \otimes K_{D_2}) \cap N^*\Delta = \emptyset. \quad (\text{A.12})$$

*Доказательство.* Из (A.11) следует, что

$$WF(K_{D_1} \otimes K_{D_2}) \cap N^*\Delta \subset \left( \Gamma_1 \times \Gamma_2 \cup (\Gamma_1 \times 0_{Y \times Z}) \cup (0_{X \times Y} \times \Gamma_2) \right) \cap N^*\Delta. \quad (\text{A.13})$$

Пересечение

$$(\Gamma_1 \times \Gamma_2) \cap N^*\Delta = \left\{ (x, 0, y_1, \eta_1, y_1, -\eta_1, z, 0) \in T^*(X \times Y \times Y \times Z) \setminus 0 \mid \right. \\ \left. (x, 0, y_1, \eta_1) \in \Gamma_1, (y_1, -\eta_1, z, 0) \in \Gamma_2, \eta_1 \neq 0 \right\}$$

является пустым множеством в силу условия (A.7).

Пересечение множеств

$$(\Gamma_1 \times 0_{Y \times Z}) \cap N^*\Delta = \left\{ (x, 0, y_1, 0, y_1, 0, z, 0) \in T^*(X \times Y \times Y \times Z) \mid (x, 0, y_1, 0) \in \Gamma_1 \right\}$$

является пустым, так как  $\Gamma_1 \in T^*(X \times Y) \setminus 0$ . Аналогично

$$(0_{X \times Y} \times \Gamma_2) \cap N^*\Delta = \left\{ (x, 0, y_1, 0, y_1, 0, z, 0) \in T^*(X \times Y \times Y \times Z) \mid (y_1, 0, z, 0) \in \Gamma_2 \right\}$$

— пустое множество в силу того, что  $\Gamma_2 \in T^*(Y \times Z) \setminus 0$ .

Таким образом, правая часть соотношения (A.13) является пустым множеством. Доказательство леммы завершено.  $\square$

В силу леммы A.2 и предложения A.1 распределение  $\Delta^*(K_{D_1} \otimes K_{D_2})$  корректно определено. Перейдём теперь к вычислению его волнового фронта.

**Определение A.3.** Пусть  $\Gamma_1 \subset T^*(X \times Y) \setminus 0, \Gamma_2 \subset T^*(Y \times Z) \setminus 0$  — замкнутые конусы. Сумма  $\Gamma_1 + \Gamma_2 \subset T^*(X \times Y \times Z) \setminus 0$  определяется как

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \left\{ (x, \xi, y, \eta_1 + \eta_2, z, \zeta) \in T^*(X \times Y \times Z) \setminus 0 \mid (x, \xi, y, \eta_1) \in \Gamma_1, (y, \eta_2, z, \zeta) \in \Gamma_2 \right\}.$$

**Лемма A.3.** *Для волнового фронта распределения  $\Delta^*(K_{D_1} \otimes K_{D_2})$  имеем*

$$WF(\Delta^*(K_{D_1} \otimes K_{D_2})) \subset (\Gamma_1 + \Gamma_2) \cup (\Gamma_1 \times 0_Z) \cup (0_X \times \Gamma_2).$$

*Доказательство.* По предложению A.1 для волнового фронта распределения  $\Delta^*(K_{D_1} \otimes K_{D_2})$  справедливо соотношение

$$WF(\Delta^*(K_{D_1} \otimes K_{D_2})) \subset \tilde{\Gamma} = \Delta^*\left((\Gamma_1 \times \Gamma_2) \cup (\Gamma_1 \times 0_{Y \times Z}) \cup (0_{X \times Y} \times \Gamma_2)\right). \quad (\text{A.14})$$

Опишем множество в правой части соотношения (A.14). Так как

$$\Delta : (x, y, z) \rightarrow (x, y, y, z),$$

то, воспользовавшись формулой (A.3) из предложения A.1 для произвольного конуса  $\Gamma \subset T^*(X \times Y \times Z) \setminus 0$ , получим, что

$$\begin{aligned} \Delta^*\Gamma = \left\{ (x, \xi, y, \eta, z, \zeta) \in T^*(X \times Y \times Z) \setminus 0 \mid \right. \\ \left. \exists (\xi', \eta'_1, \eta'_2, \zeta') : \xi' = \xi, \zeta' = \zeta, \eta'_1 + \eta'_2 = \eta, (x, \xi', y, \eta'_1, y, \eta'_2, z, \zeta') \in \Gamma \right\}. \end{aligned}$$

Применим эту формулу к конусу  $\Gamma = (\Gamma_1 \times \Gamma_2) \cup (\Gamma_1 \times 0_{Y \times Z}) \cup (0_{X \times Y} \times \Gamma_2)$ , который состоит из точек вида  $(x, \xi, y_1, \eta_1, y_2, \eta_2, z, \zeta)$ . Получим

$$\begin{aligned} \Delta^*(\Gamma_1 \times \Gamma_2) = \left\{ (x, \xi, y, \eta_1 + \eta_2, z, \zeta) \in T^*(X \times Y \times Z) \setminus 0 \mid (x, \xi, y, \eta_1) \in \Gamma_1, (y, \eta_2, z, \zeta) \in \Gamma_2 \right\} = \\ = \Gamma_1 + \Gamma_2. \end{aligned}$$

Конус  $\Gamma_1 \times 0_{Y \times Z}$  состоит из точек вида  $(x, \xi, y_1, \eta_1, y_2, 0, z, 0)$ . Тогда

$$\Delta^*(\Gamma_1 \times 0_{Y \times Z}) = \left\{ (x, \xi, y, \eta_1, z, 0) \in T^*(X \times Y \times Z) \setminus 0 \mid (x, \xi, y, \eta_1) \in \Gamma_1 \right\} = \Gamma_1 \times 0_Z.$$

Наконец, конус  $0_{X \times Y} \times \Gamma_2$  состоит из точек вида  $(x, 0, y_1, 0, y_2, \eta_2, z, \zeta)$ . Тогда

$$\Delta^*(0_{X \times Y} \times \Gamma_2) = \left\{ (x, 0, y, \eta_2, z, \zeta) \in T^*(X \times Y \times Z) \setminus 0 \mid (y, \eta_2, z, \zeta) \in \Gamma_2 \right\} = 0_X \times \Gamma_2.$$

Таким образом, получаем, что

$$\tilde{\Gamma} = (\Gamma_1 + \Gamma_2) \cup (\Gamma_1 \times 0_Z) \cup (0_X \times \Gamma_2),$$

и конус  $\tilde{\Gamma}$  замкнут в  $T^*(X \times Y \times Z) \setminus 0$  в силу предложения A.1.

Лемма доказана.  $\square$

Теперь рассмотрим распределение  $\pi_*(\Delta^*(K_{D_1} \otimes K_{D_2}))$ .

**Лемма A.4.** Для волнового фронта распределения  $\pi_*(\Delta^*(K_{D_1} \otimes K_{D_2}))$  имеем

$$WF(\pi_*(\Delta^*(K_{D_1} \otimes K_{D_2}))) \subset \Gamma_3.$$

*Доказательство.* По предложению A.2 получаем, что

$$WF(\pi_*(\Delta^*(K_{D_1} \otimes K_{D_2}))) \subset \Gamma = \pi_*\left((\Gamma_1 + \Gamma_2) \cup (\Gamma_1 \times 0_Z) \cup (0_X \times \Gamma_2)\right). \quad (\text{A.15})$$

Здесь конус  $\pi_*(\tilde{\Gamma})$  для конуса  $\tilde{\Gamma} \subset T^*(X \times Y \times Z) \setminus 0$  в силу (A.6) определяется как

$$\pi_*(\tilde{\Gamma}) = \left\{ (x, \xi, z, \zeta) \in T^*(X \times Z) \setminus 0 \mid \exists y \in Y : (x, \xi, y, 0, z, \zeta) \in \tilde{\Gamma} \right\}. \quad (\text{A.16})$$

Вычислим явно это множество:

$$\pi_*(\Gamma_1 + \Gamma_2) = \left\{ (x, \xi, z, \zeta) \in T^*(X \times Z) \setminus 0 \mid \exists (y, \eta_1) : (x, \xi, y, -\eta_1) \in \Gamma_1, (y, \eta_1, z, \zeta) \in \Gamma_2 \right\} = \Gamma'_1 \circ \Gamma_2,$$

$$\pi_*(\Gamma_1 \times 0_Z) = \left\{ (x, \xi, z, 0) \in T^*(X \times Z) \setminus 0 \mid (x, \xi, y, 0) \in \Gamma_1 \right\} = \Gamma_{1X} \times 0_Z,$$

$$\pi_*(0_X \times \Gamma_2) = \left\{ (x, 0, z, \zeta) \in T^*(X \times Z) \setminus 0 \mid (y, 0, z, \zeta) \in \Gamma_2 \right\} = 0_X \times \Gamma_{2Z}.$$

Таким образом, из последних трёх соотношений получаем искомое равенство

$$\Gamma = (\Gamma'_1 \circ \Gamma_2) \cup \Gamma_{1X} \times 0_Z \cup 0_X \times \Gamma_{2Z} = \Gamma_3.$$

Лемма доказана.  $\square$

Вернёмся к доказательству теоремы. В силу леммы А.4 получаем

$$WF(K_{D_1} \circ K_{D_2}) = WF(\pi_*(\Delta^*(K_{D_1} \otimes K_{D_2}))) \subset \Gamma_3.$$

Так как все операции в правой части формулы (А.10) являются непрерывными, отображение (А.9) непрерывно. Теорема А.1 доказана.  $\square$

## В. ПРИЛОЖЕНИЕ. РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ СЛЕД

**В.1. Одно семейство псевдодифференциальных операторов.** Рассмотрим семейство псевдодифференциальных операторов с параметром  $h > 0$

$$\begin{aligned} \psi^0(h) : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n), \\ (\psi^0(h)u)(x) &= (2\pi)^{-n} \chi(x) \int e^{i(x-y)\xi} \psi_0(h\xi) \rho(y) u(y) dy d\xi, \end{aligned} \quad (\text{В.1})$$

которое определяется следующими вспомогательными функциями:

- $\rho(x), \chi(x), \psi_0(\xi) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ;
- $\chi(x) \equiv 1$  в окрестности носителя функции  $\rho(x)$ ;
- $\psi_0(\xi) \equiv 1$ , если  $|\xi| \leq 1$ .

Ядро Шварца оператора (В.1) имеет компактный носитель, является бесконечно гладким и равно

$$K_{\psi^0(h)}(x, y) = (2\pi)^{-n} \chi(x) \int e^{i(x-y)\xi} \psi_0(h\xi) \rho(y) d\xi. \quad (\text{В.2})$$

Оператор умножения на функцию  $\rho(x)$

$$\rho : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad u(x) \mapsto \rho(x)u(x)$$

имеет ядро Шварца

$$K_\rho(x, y) = \delta(x - y) \rho(x). \quad (\text{В.3})$$

Для ядер Шварца (В.2) и (В.3) справедлив следующий результат.

**Предложение В.1.** При  $h \rightarrow 0$  имеет место сходимость ядер Шварца

$$K_{\psi^0(h)} \longrightarrow K_\rho$$

по полунормам в пространстве  $\mathcal{D}'_{N^*\Delta}(X \times X)$ , где  $N^*\Delta \subset T^*(X \times X)$  — кономальное расслоение диагонали  $\Delta \subset X \times X$ .

*Доказательство.* 1. Сначала докажем сходимость в  $\mathcal{D}'(X \times X)$ . Для этого покажем, что для любой пробной функции  $\varphi \in C^\infty(X \times X)$  существует предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} K_{\psi^0(h)}(\varphi) = K_\rho(\varphi). \quad (\text{В.4})$$

В самом деле, правая часть уравнения (В.4) равна (мы использовали (В.3) и равенство  $\chi\rho = \rho$ )

$$K_\rho(\varphi) = \int \varphi(x, x) \rho(x) dx. \quad (\text{В.5})$$

Запишем теперь величину в левой части в (В.4) в виде интеграла

$$K_{\psi^0(h)}(\varphi) = (2\pi)^{-n} \iiint e^{i(x-y)\xi} \varphi(x, y) \chi(x) \rho(y) \psi_0(h\xi) dy d\xi dx. \quad (\text{В.6})$$

Сделаем замену  $\xi' = h\xi$  в (В.6). Получим

$$K_{\psi^0(h)}(\varphi) = (2\pi h)^{-n} \int \chi(x) \left[ \iint e^{i\frac{(x-y)\xi'}{h}} \varphi(x, y) \rho(y) \psi_0(\xi') dy d\xi' \right] dx. \quad (\text{В.7})$$

Применим метод стационарной фазы к внутреннему интегралу в формуле (В.7). В стационарной точке  $m_0 = (x, 0)$  гессиан фазовой функции  $f(y, \xi') = (x - y)\xi'$  равен

$$\text{Hess} f(m_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда интеграл (В.7) имеет разложение

$$K_{\psi^0(h)}(\varphi) = \int \varphi(x, x) \chi(x) \rho(x) \psi_0(0) dx + O(h) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (\text{В.8})$$

Поскольку  $\chi\rho = \rho$  по условию и  $\psi_0(0) = 1$ , то из выражений (В.5) и (В.8) получаем искомую сходимость в  $\mathcal{D}'(X \times X)$ :

$$K_{\psi^0(h)}(\varphi) - K_\rho(\varphi) = O(h).$$

2. Теперь докажем сходимость  $K_{\psi^0(h)}$  к  $K_\rho$  в  $\mathcal{D}'_{N^* \Delta}(X \times X)$ . Выберем малые окрестности  $U_1, U_2 \subset X$  и срезающую функцию  $\varphi(x, y) = \varphi_1(x) \varphi_2(y) \in C_c^\infty(U_1 \times U_2)$ .

Для доказательства сходимости  $K_{\psi^0(h)}$  к  $K_\rho$  в  $\mathcal{D}'_{N^* \Delta}(X \times X)$  необходимо оценить разность

$$\mathcal{F}(\varphi K_{\psi^0(h)})(t\xi', t\eta') - \mathcal{F}(\varphi K_\rho)(t\xi', t\eta') \quad (\text{В.9})$$

при малых  $h$  равномерно при всех

$$t \geq 1, \quad |\xi'|^2 + |\eta'|^2 = 1, \quad |\xi' + \eta'| \geq \varepsilon. \quad (\text{В.10})$$

Для разности (В.9) получаем равенства

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}(\varphi K_{\psi^0(h)})(t\xi', t\eta') - \mathcal{F}(\varphi K_\rho)(t\xi', t\eta') = \\ &= \iint e^{-it(x\xi' + y\eta')} \left[ \int e^{i\xi(x-y)} \psi_0(h\xi) \varphi_1(x) \chi(x) \varphi_2(y) \rho(y) d\xi \right] dx dy - \\ & \quad - \iint e^{-it(x\xi' + y\eta')} \left[ \varphi_1(x) \chi(x) \varphi_2(y) \delta(x-y) \rho(y) \right] dx dy = \\ &= \int \psi_0(h\xi) \left[ \int e^{ix(\xi - t\xi')} \varphi_1(x) \chi(x) dx \int e^{iy(-\xi - t\eta')} \varphi_2(y) \rho(y) dy \right] d\xi - \\ & \quad - \int e^{-itx(\xi' + \eta')} \varphi_1(x) \chi(x) \varphi_2(x) \rho(x) dx = \\ &= \int \psi_0(h\xi) \mathcal{F}(\varphi_1 \chi)(t\xi' - \xi) \mathcal{F}(\varphi_2 \rho)(t\eta' + \xi) d\xi - \int \mathcal{F}(\varphi_1 \chi)(t\xi' - \xi) \mathcal{F}(\varphi_2 \rho)(t\eta' + \xi) d\xi = \\ &= \int (\psi_0(h\xi) - 1) \mathcal{F}(\varphi_1 \chi)(t\xi' - \xi) \mathcal{F}(\varphi_2 \rho)(t\eta' + \xi) d\xi. \quad (\text{В.11}) \end{aligned}$$

Оценим последнее выражение в (В.11) в области (В.10). Поскольку  $\psi_0(h\xi) \equiv 1$  при  $|h\xi| \leq 1$  и в силу того, что функции  $\varphi_1, \varphi_2, \chi$  — гладкие с компактным носителем, получаем из (В.11) оценку

$$|\mathcal{F}(\varphi K_{\psi^0(h)})(t\xi', t\eta') - \mathcal{F}(\varphi K_\rho)(t\xi', t\eta')| \leq C_N \int_{|\xi| > \frac{1}{h}} \left[ (1 + |\xi - t\xi'|)(1 + |\xi + t\eta'|) \right]^{-N} d\xi \quad (\text{В.12})$$

для любых  $N$ .

**Лемма В.1.** Для  $\varepsilon > 0$  в области (В.10) справедливы неравенства

$$(1 + |\xi - t\xi'|)(1 + |\xi + t\eta'|) \geq \varepsilon |\xi|, \quad (\text{В.13})$$

$$(1 + |\xi - t\xi'|)(1 + |\xi + t\eta'|) \geq 1 + t\varepsilon. \quad (\text{В.14})$$

*Доказательство.* 1. Неравенство (В.14) следует из неравенства треугольника и неравенств (В.10):

$$(1 + |\xi - t\xi'|)(1 + |\xi + t\eta'|) = 1 + |\xi - t\xi'| + |\xi + t\eta'| + |\xi - t\xi'| |\xi + t\eta'| \geq 1 + |t\xi' + t\eta'| \geq 1 + t\varepsilon.$$

2. Получим теперь неравенство (В.13):

$$\begin{aligned} (1 + |\xi - t\xi'|)^2 (1 + |\xi + t\eta'|)^2 & \geq (1 + |\xi - t\xi'|^2)(1 + |\xi + t\eta'|^2) \geq \\ & \geq 1 + |\xi - t\xi'|^2 + |\xi + t\eta'|^2 = 1 + 2|\xi|^2 + t^2 - 2t(\xi, \xi' - \eta') \geq \\ & \geq 1 + 2|\xi|^2 - |(\xi, \xi' - \eta')|^2 \geq 1 + 2|\xi|^2 - |\xi' - \eta'|^2 |\xi|^2 = 1 + |\xi|^2 (2 - |\xi' - \eta'|^2) = \\ & = 1 + |\xi|^2 |\xi' + \eta'|^2 \geq 1 + \varepsilon^2 |\xi|^2 > \varepsilon^2 |\xi|^2. \end{aligned}$$

Лемма В.1 доказана.  $\square$

Вернёмся к оценке величины (В.12). Пусть  $N = N_1 + N_2$ . Тогда по лемме В.1 получим

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| > \frac{1}{h}} \left[ (1 + |\xi - t\xi'|)(1 + |\xi + t\eta'|) \right]^{-N} d\xi = \\ = \int_{|\xi| > \frac{1}{h}} \left[ (1 + |\xi - t\xi'|)(1 + |\xi + t\eta'|) \right]^{-N_1} \left[ (1 + |\xi - t\xi'|)(1 + |\xi + t\eta'|) \right]^{-N_2} d\xi \leq \\ \leq (1 + t\varepsilon)^{-N_1} \int_{|\xi| > \frac{1}{h}} C |\xi|^{-N_2} d\xi = C_1 (1 + t\varepsilon)^{-N_1} h^{N_2 - n}. \end{aligned} \quad (\text{В.15})$$

Здесь в последнем интеграле в соотношении (В.15) мы сделали замену  $\tau = h\xi$  (интеграл сходится при  $N_2 > n$ ).

Итак, из выражений (В.12) и (В.15) получаем оценку

$$\mathcal{F}(\varphi K_{\psi^0(h)})(t\xi', t\eta') - \mathcal{F}(\varphi K_\rho)(t\xi', t\eta') = O(t^{-N_1} h^{N_2 - n})$$

в области (В.10) для любого  $\varepsilon > 0$ . Отсюда следует, что значения полунорм (А.1) от разности  $K_{\psi^0(h)} - K_\rho$  являются величинами порядка  $O(h^{N_2 - n})$ . Теперь, выбирая  $N_2 = n + 1$ , получаем, что эти значения стремятся к нулю.  $\square$

**В.2. Регуляризованный след.** На гладком замкнутом многообразии  $X$  рассмотрим непрерывный оператор

$$A : C^\infty(X) \longrightarrow \mathcal{D}'(X) \quad (\text{В.16})$$

с ядром Шварца  $K_A \in \mathcal{D}'(X \times X)$ .

Через  $\Delta \subset X \times X$  обозначим диагональ  $\Delta = \{(x, x) | x \in X\}$ . Конормальное расслоение диагонали равно

$$N^* \Delta = \{(x, \xi, x, \eta) \in T^*(X \times X) \mid \xi + \eta = 0\}.$$

Вложение  $i : \Delta \hookrightarrow X \times X$  индуцирует оператор сужения на диагональ

$$i^* : C^\infty(X \times X) \longrightarrow C^\infty(\Delta), \quad i^* : u(x, y) \mapsto u(x, x).$$

Применяя предложение А.1 из дополнения А к отображению  $i$ , получаем следствие.

**Следствие В.1.** Если выполнено условие

$$WF(K_A) \cap N^* \Delta = \emptyset, \quad (\text{В.17})$$

то определено сужение ядра Шварца на диагональ  $i^* K_A \in \mathcal{D}'(\Delta)$ .

**Определение В.1.** Регуляризованным следом оператора  $A$ , удовлетворяющего условиям (В.17), называется число

$$\tau(A) = (i^* K_A)(1).$$

**Замечание В.1.** Если оператор  $A$  имеет непрерывное ядро Шварца  $K_A$ , то регуляризованный след совпадает с операторным следом.

**Предложение В.2.** Если для оператора  $A$  из (В.16) выполнено соотношение (В.17) и выполнено условие

$$WF'_X(A) = \emptyset,$$

то существует предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(A\psi^0(h)) = \tau(A\rho), \quad (\text{В.18})$$

где оператор  $\psi^0(h)$  и функция  $\rho$  были определены в предыдущем разделе.

**Доказательство.** Через  $K_{A\psi^0(h)}$  обозначим ядро Шварца оператора  $A\psi^0(h)$ . Из определения регуляризованного следа видно, что для доказательства существования предела (В.18) достаточно доказать следующее:

1. ядро Шварца  $K_{A\psi^0(h)}$  сходится к ядру Шварца  $K_{A\rho}$  при  $h \rightarrow 0$  в пространстве  $\mathcal{D}'_{N^* \Delta}(X \times X)$ ;

2. сужение ядра  $K_{A\psi^0(h)}$  на диагональ сходится к ядру Шварца  $K_{A\rho}$  при  $h \rightarrow 0$  в пространстве  $\mathcal{D}'(\Delta)$ ;
3. спаривание с единицей даёт непрерывную функцию от  $h$  в точке  $h = 0$ .

Докажем эти три свойства.

Сначала покажем, что ядро Шварца  $K_{A\psi^0(h)}$  непрерывно зависит от  $h$  по полунормам (А.1) при  $h = 0$ . Предложение В.1 даёт, что ядро Шварца  $K_{\psi^0(h)}$  при  $h \rightarrow 0$  сходится к  $K_\rho$  в пространстве  $\mathcal{D}'_{N^*\Delta}(X \times X)$ . Далее, так как  $WF'_X(A) = \emptyset$ ,  $WF'_X(\psi^0(h)) = \emptyset$  и  $WF'_X(\rho) = \emptyset$ , то по теореме А.1 получим искомую сходимость

$$K_{A\psi^0(h)} \rightarrow K_{A\rho} \text{ в } \mathcal{D}'_{N^*\Delta}(X \times X) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Далее заметим, что сужение ядра Шварца  $K_{A\psi^0(h)}$  на диагональ  $\Delta \subset X \times X$  непрерывно при  $h \rightarrow 0$  в силу предложения А.1. Условие предложения А.1 выполнено, поскольку выполнено соотношение (В.17).

Наконец, операция спаривания с единицей является непрерывной в силу определения сходимости в пространстве  $\mathcal{D}'(\Delta)$ .  $\square$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кордюков Ю. А., Павленко В. А. О формулах Лефшеца для потоков на многообразиях со слоением // Уфимск. мат. ж. — 2015. — 7, №2. — С. 73–108.
2. Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Индекс нелокальных задач, ассоциированных с расслоением // Дифф. уравн. — 2014. — 50, № 8. — С. 1117–1127.
3. Стернин Б. Ю. Относительная эллиптическая теория и проблема С.Л. Соболева // Докл. АН СССР. — 1976. — 230, № 2. — С. 287–290.
4. Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е. Распирение алгебры псевдодифференциальных операторов и некоторые нелокальные эллиптические задачи // Мат. сб. — 1994. — 185, № 3. — С. 117–159.
5. Троицкий Е. В., Франк М. Числа Лефшеца и геометрия операторов в  $W^*$ -модулях // Функц. анализ и его прил. — 1996. — 30, № 4. — С. 45–57.
6. Федосов Б. В. Теоремы об индексе // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направл. — 1991. — 65. — С. 165–268.
7. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1: Теория распределений и анализ Фурье. — М.: Мир, 1986.
8. Atiyah M. F., Bott R. A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I // Ann. Math. — 1967. — 86, № 3. — С. 374–407.
9. Atiyah M. F., Bott R. A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. II. Applications // Ann. Math. — 1968. — 88, № 3. — С. 451–491.
10. Bei F. The  $L^2$ -Atiyah–Bott–Lefschetz theorem on manifolds with conical singularities: a heat kernel approach // Ann. Global Anal. Geom. — 2013. — 44, №4. — С. 565–605.
11. Bismut M. The Atiyah–Singer theorems: a probabilistic approach. Part II: The Lefschetz fixed point formulas // J. Funct. Anal. — 1984. — 57, № 3. — С. 329–348.
12. Bismut M. The infinitesimal Lefschetz formulas: A heat equation proof // J. Funct. Anal. — 1985. — 62. — С. 437–457.
13. Brenner A. V., Shubin M. A. The Atiyah–Bott–Lefschetz formula for elliptic complexes on a manifold with boundary // J. Math. Sci. (N. Y.). — 1993. — 64, № 4. — С. 1069–1111.
14. Duistermaat J. J. Fourier integral operators. — Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 1996.
15. Gabor A. Remarks on the wave front of a distribution // Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — 170. — С. 239–244.
16. Gilkey P. B. Lefschetz fixed point formulas and the heat equations // Commun. Pure Appl. Math. — 1984. — 48, № 3. — С. 477–528.
17. Inoue H. A proof of the holomorphic Lefschetz formula for higher dimensional fixed point sets by the heat equation method // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. — 1982. — 29, № 2. — С. 267–285.
18. Izvarina N. R., Savin A. Yu. An Atiyah–Bott–Lefschetz theorem for relative elliptic complexes // Lobachevskii J. Math. — 2022. — 43, № 10. — С. 2675–2684.
19. Kotake T. The fixed point theorem of Atiyah–Bott via parabolic operator // Commun. Pure Appl. Math. — 1969. — 22, № 6. — С. 789–806.
20. Lafferty J., Yu Y., Zhang W. A direct geometric proof of the Lefschetz fixed point formulas // Trans. Am. Math. Soc. — 1992. — 329, № 2. — С. 571–583.

21. *Lefschetz M.* Intersections and transformations of complexes and manifolds// Trans. Am. Math. Soc. — 1926. — 28. — С. 1–49.
22. *Nazaikinskii V. E.* Semiclassical Lefschetz formulas on smooth and singular manifolds// Russ. J. Math. Phys. — 1999. — 6. — С. 202–213.
23. *Nazaikinskii V., Savin A., Schulze B.-W., Sternin B.* Elliptic theory on singular manifolds. — Boca Raton: CRC-Press, 2005.
24. *Nazaikinskii V. E., Schulze B.-W., Sternin B. Yu., Shatalov V. E.* The Atiyah–Bott–Lefschetz theorem for manifold with conical singularities// Ann. Global Anal. Geom. — 1999. — 17. — С. 409–439.
25. *Nazaikinskii V., Sternin B.* Lefschetz theory on manifolds with singularities// В сб.: « $C^*$ -algebras and elliptic theory. Trends Math». — Basel: Birkhäuser, 2006. — С. 157–186.
26. *Patodi V.* Holomorphic Lefschetz fixed point formula// Bull. Amer. Math. Soc. — 1973. — 79. — С. 825–828.
27. *Rempel S., Schulze B.-W.* Index theory of elliptic boundary problems. — Berlin: Akademie-Verlag, 1982.
28. *Seeley R.* A proof of the Atiyah–Bott–Lefschetz fixed point formula// Ann. Acad. Brasil Cienn. — 1969. — 41, № 4. — С. 493–501.
29. *Sternin B. Yu., Shatalov V. E.* Lefschetz fixed point theorem for quantized symplectic transformations// Funct. Anal. Appl. — 1998. — 32. — С. 247–257.
30. *Toledo D.* On the Atiyah–Bott formula for isolated fixed points// J. Differ. Geom. — 1973. — 8. — С. 401–436.
31. *Toledo D., Tong Y. L.* Duality and intersection theory in complex manifolds. II: The holomorphic Lefschetz formula// Ann. Math. — 1975. — 108. — С. 519–538.
32. *Wintgen P.* On the fixed point formula of Atiyah and Bott// Colloq. Math. (PRL). — 1982. — 47, № 2. — С. 295–301.

Н. П. Орлова  
Москва, Россия  
E-mail: [izvarinanat@gmail.com](mailto:izvarinanat@gmail.com)

UDC 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-417-442

EDN: FLFXBT

## Lefschetz formula for nonlocal elliptic problems associated with fibration

N. R. Orlova

*Moscow, Russia*

**Abstract.** Elliptic operator complexes associated with fibration are considered. The Atiyah–Bott–Lefschetz formula for endomorphisms of such complexes is given. The proof is based on the stationary phase method. Wavefronts of distributions are used to estimate the remainder term.

**Keywords:** elliptic complexes, nonlocal problems, Lefschetz numbers, wave front, stationary phase method.

**Conflict-of-interest.** The author declares no conflicts of interest.

**Acknowledgments and funding.** The author is grateful to V. E. Nazaikinskii for explaining his approach to proving the Lefschetz formula and to A. Yu. Savin for his attention to this work and useful comments during the writing process. The author declares no financial support.

**For citation:** N. R. Orlova, “Lefschetz formula for nonlocal elliptic problems associated with fibration,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 3, 417–442. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-417-442>

## REFERENCES

1. Yu. A. Kordyukov and V. A. Pavlenko, “O formulakh Lefshetsa dlya potokov na mnogoobraziiakh so sloeniem” [On Lefschetz formulas for flows on foliated manifolds], *Ufmsk. mat. zh.* [Ufa Math. J.], 2015, **7**, No. 2, 73–108 (in Russian).
2. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, “Indeks nelokal’nykh zadach, assotsirovannykh s rassloeniem” [Index of nonlocal problems associated with fibration], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2014, **50**, No. 8, 1117–1127 (in Russian).
3. B. Yu. Sternin, “Otnositel’naya ellipticheskaya teoriya i problema S. L. Soboleva” [Relative elliptic theory and S. L. Sobolev’s problem], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1976, **230**, No. 2, 287–290 (in Russian).
4. B. Yu. Sternin and V. E. Shatalov, “Rasshirenie algebrы psevdodifferentsial’nykh operatorov i nekotorye nelokal’nye ellipticheskie zadachi” [Extension of the algebra of pseudodifferential operators and some nonlocal elliptic problems], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1994, **185**, No. 3, 117–159 (in Russian).
5. E. V. Troitskiy and M. Frank, “Chisla Lefshetsa i geometriya operatorov v  $W^*$ -modulyakh” [Lefschetz numbers and geometry of operators in  $W^*$ -modules], *Funkts. analiz i ego pril.* [Funct. Anal. Appl.], 1996, **30**, No. 4, 45–57 (in Russian).
6. B. V. Fedosov, “Teoremy ob indekse” [Index theorems], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. probl. mat. Fundam. naprav.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math. Fundam. Naprav.], 1991, **65**, 165–268 (in Russian).
7. L. Hörmander, *Analiz lineynykh differentsial’nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 1: Teoriya raspredeleniy i analiz Fur’e* [The Analysis of Linear Partial Differential Operators I. Distribution Theory and Fourier Analysis], Mir, Moscow, 1986 (Russian translation).
8. M. F. Atiyah and R. Bott, “A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I,” *Ann. Math.*, 1967, **86**, No. 3, 374–407.
9. M. F. Atiyah and R. Bott, “A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. II. Applications,” *Ann. Math.*, 1968, **88**, No. 3, 451–491.
10. F. Bei, “The  $L^2$ -Atiyah–Bott–Lefschetz theorem on manifolds with conical singularities: a heat kernel approach,” *Ann. Global Anal. Geom.*, 2013, **44**, No. 4, 565–605.
11. M. Bismut, “The Atiyah–Singer theorems: a probabilistic approach. Part II: The Lefschetz fixed point formulas,” *J. Funct. Anal.*, 1984, **57**, No. 3, 329–348.
12. M. Bismut, “The infinitesimal Lefschetz formulas: A heat equation proof,” *J. Funct. Anal.*, 1985, **62**, 437–457.
13. A. V. Brenner and M. A. Shubin, “The Atiyah–Bott–Lefschetz formula for elliptic complexes on a manifold with boundary,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 1993, **64**, No. 4, 1069–1111.
14. J. J. Duistermaat, *Fourier integral operators*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 1996.
15. A. Gabor, “Remarks on the wave front of a distribution,” *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1972, **170**, 239–244.
16. P. B. Gilkey, “Lefschetz fixed point formulas and the heat equations,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1984, **48**, No. 3, 477–528.
17. H. Inoue, “A proof of the holomorphic Lefschetz formula for higher dimensional fixed point sets by the heat equation method,” *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 1982, **29**, No. 2, 267–285.
18. N. R. Izvarina and A. Yu. Savin, “An Atiyah–Bott–Lefschetz theorem for relative elliptic complexes,” *Lobachevskii J. Math.*, 2022, **43**, No. 10, 2675–2684.
19. T. Kotake, “The fixed point theorem of Atiyah–Bott via parabolic operator,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1969, **22**, No. 6, 789–806.
20. J. Lafferty, Y. Yu, and W. Zhang, “A direct geometric proof of the Lefschetz fixed point formulas,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1992, **329**, No. 2, 571–583.
21. M. Lefschetz, “Intersections and transformations of complexes and manifolds,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1926, **28**, 1–49.
22. V. E. Nazaikinskii, “Semiclassical Lefschetz formulas on smooth and singular manifolds,” *Russ. J. Math. Phys.*, 1999, **6**, 202–213.
23. V. Nazaikinskii, A. Savin, B.-W. Schulze, and B. Sternin, *Elliptic theory on singular manifolds*, CRC-Press, Boca Raton, 2005.
24. V. E. Nazaikinskii, B.-W. Schulze, B. Yu. Sternin, and V. E. Shatalov, “The Atiyah–Bott–Lefschetz theorem for manifold with conical singularities,” *Ann. Global Anal. Geom.*, 1999, **17**, 409–439.

25. V. Nazaikinskii and B. Sternin, “Lefschetz theory on manifolds with singularities,” In: *C\*-algebras and elliptic theory. Trends Math*, Birkhäuser, Basel, 2006, pp. 157–186.
26. V. Patodi, “Holomorphic Lefschetz fixed point formula,” *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1973, **79**, 825–828.
27. S. Rempel and B.-W. Schulze, *Index theory of elliptic boundary problems*, Akademie-Verlag, Berlin, 1982.
28. R. Seeley, “A proof of the Atiyah–Bott–Lefschetz fixed point formula,” *Ann. Acad. Brasil Cienn.*, 1969, **41**, No. 4, 493–501.
29. B. Yu. Sternin and V. E. Shatalov, “Lefschetz fixed point theorem for quantized symplectic transformations,” *Funct. Anal. Appl.*, 1998, **32**, 247–257.
30. D. Toledo, “On the Atiyah–Bott formula for isolated fixed points,” *J. Differ. Geom.*, 1973, **8**, 401–436.
31. D. Toledo and Y. L. Tong, “Duality and intersection theory in complex manifolds. II: The holomorphic Lefschetz formula,” *Ann. Math.*, 1975, **108**, 519–538.
32. P. Wintgen, “On the fixed point formula of Atiyah and Bott,” *Colloq. Math. (PRL)*, 1982, **47**, No. 2, 295–301.

N. R. Orlova  
Moscow, Russia  
E-mail: izvarinanat@gmail.com