

УДК 519.711

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-443-451

EDN: FMBVJU

НЕПРЕРЫВНАЯ ПОПУЛЯЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ПОКОЛЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА

А. Ю. ПЕРЕВАРЮХА

Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. Традиционно непрерывные модели математической биологии направлены на динамику взаимодействующих популяций как стационарных гомогенных общностей. Состояние популяций в уравнениях регулируется общими для всех особей $\forall t, N(t)$ факторами эффективности воспроизводства, гибели, ограничения жизненного пространства или лимитом ресурсов. Существуют много видов с непрерывающейся последовательностью поколений, сменяющих друг друга в разных сезонных условиях. Число годовых поколений — важная характеристика экологии вида при захвате нового ареала. Длина жизненного цикла и показатель репродуктивной активности r у смежных поколений насекомых в ареале различны из-за необходимости зимовки. Колебания этих величин влияют на стремительные всплески численности. Показано, что применение дискретных моделей $x_{n+1} = \psi(x_n; r)\varphi(x_{n-i}) - \Xi$ оказывается нереалистично по фундаментальным причинам. Появление циклов $p \neq 2^i$ в порядке теоремы Шарковского избыточно для анализа популяций и прогноза массовых размножений насекомых. В статье предложен метод организации моделей сопряженного развития череды поколений в системе разрывных дифференциальных уравнений как последовательности краевых задач. Модель событийно переопределяется для получения решения на отрезках времени, соответствующих условиям сезона. Модель с учетом конкуренции и запаздывающей регуляции актуальна для анализа череды пиков активности вредителей, для которых характерны отдельные чрезвычайно многочисленными поколения.

Ключевые слова: популяционное моделирование, непрерывная модель, моделирование поколений, популяционный цикл, динамика выживаемости, разрывные дифференциальные уравнения.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: А. Ю. Переварюха. Непрерывная популяционная модель поколений с разрывными характеристиками жизненного цикла // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 3. С. 443–451. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-443-451>

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблематика статьи связана с развитием методологии моделирования специфических сложных ситуаций при трансформации развития популяционных процессов. Фундаментальные проблемы математической биологии возникают при формализации непрерывных процессов в биофизической среде, имеющих выраженные аспекты трансформаций. Во многих случаях представление популяции как некоторой бесконечно делимой общности с мгновенными параметрами рождаемости и смертности («мальтузианский» параметр $r = \text{const}$) слишком абстрактно. Многие популяции (рыб и насекомых) представлены только одним поколением, и у разных поколений оказываются разные характеристики. Актуальность темы определена инвазионными процессами и

частыми всплесками численности опасных вселенцев в форме нескольких (обычно не более трех) исключительно многочисленных поколений вредителей, превышающих балансовую K -емкость экосистемы. В ситуации активных всплесков одно поколение вне рамок контроля начинает разрушать свою среду, что регулярно происходит с обычно редкой и мелкой бабочкой *Choristoneura fumiferana*, уничтожающей массивы хвойных лесов США и Канады. Популяция чрезмерно агрессивного вселенца может полностью исчезнуть из ареала, что ранее не рассматривали в моделях биофизики.

Цель работы — предложить метод формализации взаимодействия сменяющихся поколений «короткоцикловых» популяций, которые из-за особенностей ареала развиваются при разных условиях. Соответственно, характеристики жизненного цикла, длительности стадий онтогенеза и факторы регуляции размножения и выживания у соседствующих в хронологии поколений должны меняться импульсно. Для генерирующих сезонные поколения видов говорят об их *вольтинности* (би-, три- или поливольтинные). Вольтинность на разных границах ареала вида часто отличается из-за климата. Одно из поколений должно пережить зимовку, что разрывает популяционный процесс. Меняются не только значения параметров, что требует от модели аспекта событийности. В статье обсудим метод формирования уравнений для описания убыли численности на интервалах времени, где параметры дифференциальных уравнений с запаздыванием и регулирующие функции в правой части событийно меняются при переходе к расчету новой генерации. Популяция рассматривается как общность, но с меняющимися характеристиками воспроизводства.

2. БИОФИЗИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМАТИКА ТЕОРЕМЫ ШАРКОВСКОГО

Проблема методов моделирования для применения в биофизике обусловлена тем, что решения должны укладываться в рамки реальности. Классический пример выводов на грани разумного — уравнение для гиперболического роста населения «Doomsday equation»

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N^2(t)}{C}$$

с точкой $N(t_D) \rightarrow \infty$. Время удвоения численности человечества не может сокращаться

$$\lim_{t \rightarrow t_D} |t_{k1} - t_{k2}| = 0$$

хотя бы из-за ненулевого срока беременности, но идея назначенной в 1960 г. авторами [6] на 13 ноября 2026 г. Doomsday-катастрофы неоднократно обсуждалась.

Важный методологический вопрос, оправдано ли для описания череды поколений переходить к дискретной динамике? Поведение дискретных моделей становится сложным по фундаментальным математическим причинам, не связанным с проблемами биофизики. Варианты фазовых портретов итерационных моделей разнообразны. Для функциональных итераций установлены свойства нелинейности поведения «цикл $\leftrightarrow$ хаос», которые универсальны и относятся к целым классам отображений. Проблема в том, что если один из режимов поведения итераций получает трактовку, то с ним ассоциирован ряд избыточных. В результате свойства моделей популяционных процессов при сущностном рассмотрении оказываются противоречивыми. Решения и выводы при сопоставлении с реальностью выходят за рамки применимости. Усложнение модели может [11] упростить ее поведение.

Описание поколений в итерациях с возмущением Ξ_n :

$$x_{n+1} = \psi(x_n) - \Xi_n$$

выглядит нагляднее, что определило многие теоретические работы. Особенно активно развивались для оптимизации промысла модели [7] из нелинейной функции связи существующего запаса взрослых с нормой вылова q и производимого запасом пополнения, например,

$$x_{n+1} = ax_n \exp(-bx_n),$$

$a > 1$, $0 < b < 1$ если глобальная точка $x^* = \psi(x^*)$, $1 < a < \hat{a}$, $\forall x_0 > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n(x_0) = x^*$ теряет устойчивость при $a = e^2 + \epsilon$, $|\psi'(x^*)| > 1$.

Именно в уже известных популяционных моделях была обнаружена цикличность и теоретически исследована хаотизация траектории, известная как сценарий каскада бифуркаций удвоения периода $p = 2^i$, $i \rightarrow \infty$, $a = a_\infty < \infty$ с универсальными константами Фейгенбаума [5].

В параметрических диапазонах $a > a_\infty$ наблюдаются переходы «хаос $\rightarrow$ цикл», образующих бесконечное число «окон периодичности» в силу свойства существования n пар точек пересечения (помимо x^*) с прямой $\psi(x) = x$ у любой n раз вычисленной унимодальной $\psi^n(\dots\psi(x)\dots)$.

Хаотизация вследствие возникшего замкнутого множества, не содержащего никаких внутренних и изолированных точек, образованного из-за несчетного числа неустойчивых точек всех 2^i -циклов и всех их прообразов: $\mathcal{F} = \bigcup_j^{2^n} \psi^{-n}(x_j^*)$, — это сугубо математическое явление, ведь популяция является конечным множеством.

Для прогнозов эксплуатации популяций требуется *усложнить* модель — получить у $\psi(x)$ две стационарные точки $0 < x_1^* < x_{\max} < x_2^*$ и ненулевую горизонтальную асимптоту, сделав поведение $\psi^n(x_0)$ менее разнообразным, а значит, нехаотическим. Целесообразно нарушить данные в работе [14] рамки условий сценария $p = 2^i$, $i \rightarrow \infty$ с $\exists x$, $0 < x < x_{\max} : \mathcal{H}_{\psi(x)} > 0$, избегая так для унимодальных итераций с $f'(x) \neq 0$, $x \neq x_{\max}$ основного критерия неограниченности каскада удвоений — отрицательности шварцмана:

$$\mathcal{H}_\psi = \frac{\psi'''(x)}{\psi'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)} \right)^2 < 0.$$

Для популяционных циклов $x_i^* < x_{i+1}^*$ у видов с кратким онтогенезом характерен максимум при завершении периода, но циклы после бифуркаций удвоения не могут обладать нужным расположением точек $x_1^* < x_{i+1}^* < x_p^*$, $\sum_{i=1}^{p-1} x_i^* < x_p^*$. По обходу точек различают возникшие при разных значениях a циклы $p = 4 \times 2$ и $p = 2^4$. Согласно теореме Шарковского [12] в этой модели возможно получение циклов периодов $p \neq 2^i$, но в малых параметрических диапазонах из $a \in [1, \infty]$ и множестве $\mathfrak{A} = \bigcup_{p=3}^{\infty} \{\mathcal{A}_p\}$ периодических окон при $\mathcal{A}_p = [a_p, a_{p*}] \rightarrow 0$, $p = 3 \dots \rightarrow \infty$. Ширина параметрического окна $[a_p, a_{p*}] \rightarrow \max$ при $p = 3$.

Порядком чисел Шарковского указано сосуществование периодов циклов, и нечетные периоды следуют после всех четных [8]. Порядок Шарковского заканчивается на цикле $p = 3$, значит, уже существуют циклические траектории всех периодов (но неустойчивые). Популяции с циклом из трех поколений известны, см. [2]. Согласно расширенным результатам о потере устойчивости возникающих циклов в работе Ли и Йорка «Period Three Implies Chaos» [9] популяция с нечетным циклом не будет существовать стабильно (рядом всегда хаос), хотя число поколений $p \neq 2^i$ до пика активности встречается часто у мелких млекопитающих.

Включение запаздывания

$$x_{n+1} = \psi(x_n)\varphi(x_{n-i})$$

или

$$x_{n+1} = ax_n \exp \left(- \sum_{i=0}^m b_i x_{n-i} \right) - qx_n$$

нарушает важный критерий теоремы Сингера о единственности ω -предельного множества траектории унимодальной $\psi^n(x_0)$, но появление альтернативных притягивающих циклов дает тонкий динамический эффект. Представление цикличности для динамики экосистем необходимо модифицировать, можно включить запаздывание или алгоритмы перенастройки параметров.

3. ПРИМЕНИМОСТЬ СВОЙСТВ ЦИКЛОВ В МОДЕЛЯХ ПОПУЛЯЦИЙ С $N(t-h)$

Флуктуации численности у изолированных популяций возникали даже в постоянных условиях лабораторий в опытах с моллюсками и насекомыми из-за конкуренции поколений за ресурсы [13]. Сложные колебательные и апериодические режимы возможно получить в одновидовых непрерывных моделях с включением нелинейной запаздывающей регуляции

$$\frac{dN}{dt} = rF(N(t-\tau)) - \mathfrak{F}(N(t-h), N(t)).$$

Логистическое уравнение

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

с монотонным приближением к порогу ниши $\forall t, r, N(0) < K : N(t) \leq K, \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$ не актуально для обобщения модели для сценариев всплесков и инвазий, например,

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{\theta N^2}{E^2 + N^2}.$$

Для нерегулярных колебаний лабораторных насекомых при сосуществовании имаго и личинок предложено уравнение [4] со сосредоточенным запаздыванием h и с постоянной смертностью q :

$$\frac{dN}{dt} = rN(t-h) \exp(-bN(t-h)) - N(t)q, \quad r, b, q, \tau > 0. \quad (3.1)$$

Установлено [1], что в решении уравнения (3.1) с ростом rh появляется цикл релаксационной формы, и при увеличении значений — аperiодическая динамика большой амплитуды.

Подобные (3.1) уравнения сохраняют важный недостаток для популяционных прогнозов:

$$\exists \hat{t}, \quad \lim_{t \rightarrow \hat{t}} \min N_*(rh > B, t) = 0 + \epsilon,$$

так как если минимумы цикла $N_*(rh)$ стремятся к нулю, то длительный режим флуктуаций численности нереалистичен. При небольших rh в (3.1) можно получить временное перенасыщение со стабилизацией роста: $\exists t, r, h \forall N(0) : N(t, rh) > K : \lim_{t \rightarrow \infty} N(rh, t) = K$. Величина экологической ниши K не тождественна действующему уровню насыщения лабораторных условий K .

Для ситуации появления адаптивного воздействия у атакуемой вселенной среды предложим модификацию модели (3.1) с $-F(N(t-h))$ и с действующим на биотическую среду порогом A :

$$\frac{dN}{dt} = rN(t-h) \exp(-bN(t-h)) - \frac{\theta N^2(t-h)}{(A - N(t-h))^2}. \quad (3.2)$$

Предложенная модификация (3.2) описывает актуальную для инвазий ситуацию — однократного прохождения состояния малой околороговой численности и экологический эффект «бутылочного горлышка». Это явление связано со стремительно адаптивно возникшим ростом активного биотического противодействия, что можно использовать для выработки мер подавления опасных видов. Форма нелинейности в разных экологических ситуациях должна быть разная.

Для задач анализа инвазий логичнее подбирать соответствующие ситуации функции $\mathfrak{F}(N - l(h))$, чем менять и дополнять параметры модели. Свойства реальных всплесков трудно описать даже моделями с $F(N(t-h_1), \dots, (N(t-l(h_j))))$, необходимо включать переопределяемые структуры.

4. НЕПРЕРЫВНАЯ СОБЫТИЙНАЯ МОДЕЛЬ БИВОЛЬТИННОЙ ПОПУЛЯЦИИ

Предложим подход построения непрерывной вычислительной модели переходных популяционных режимов с событийными трансформациями функций нелинейной регуляции, а не только параметров в правых частях уравнений с $N(t-h)$.

Для прогноза активности насекомых в бореальных лесах альтернативный итерационный метод — формализация скорости убыли поколения от $t = 0$ на стадиях до полового созревания. Из-за долгой зимы длительность онтогенеза поколений различна (обозначим как τ или $\mathcal{T}$) в зависимости от сезона, и более того, бывает не постоянной между сезонами, так как зависит от погоды, и потому для сравнения сценариев длительность послужит управляющим параметром.

Событийные модели выделяют из пространства состояний предикативно по истинности набора условий точки трансформаций. Точки разрыва в расчетах правых частей легче задать алгоритмом с внешними воздействиями, но мы предлагаем рассчитывать моменты перехода из других связанных уравнений. Метод моделирования позволит разделить момент размножения и дальнейшую убыль полученного поколения $N_n(t_n = 0)$, которая замедляется к моменту размножения и появления другого сезонного поколения $N_{n+1}(t_{n+1} = 0)$. Меняя в сценарных экспериментах

величины τ или $\mathcal{T}$, можно оценить влияние продолжительности зимовки находящихся в спячке особей зимнего поколения из-за погодных условий на частоту появления генераций высокого уровня выживаемости и необычных всплесков численности летнего поколения.

Если у насекомых с полным циклом превращений поколения не перекрываются и имеют различные условия развития, то у них проявляются иные механизмы, контролирующие формирование итогового половозрелого поколения. Самки сезонных поколений часто обладают разной плодовитостью и миграционной активностью. Яйца или куколки поколения находятся в долгом анабиозе до весны либо развиваются в весенних условиях. Учтем, что интервал времени между появлением половозрелых генераций может не быть постоянным. Учет численности опасных насекомых проводят по вредящей стадии, обычно гусениц старших возрастов. Статистикой фиксируется состояние поколения $N(\mathfrak{T})$ в некоторый момент $\mathfrak{T}$ незавершенного цикла развития. Во время запуска всплесков численности вредителей состояние популяции оценивается мониторингом по размерам пораженных площадей леса. Метод расчетов сопряженных краевых задач на последовательности интервалов времени — естественное описание для анализа развития насекомых, которые отличаются выраженной стадийностью развития.

4.1. Базовая модель динамики сопряженных поколений. Получить зависимость эффективности размножения можно, рассчитав убыль численности поколения $N(0)$ до его размножения на интервале времени, раздельно учтя факторы смертности в модели динамики плавной убыли:

$$\frac{dN}{dt} = -(\alpha N(0) + \beta)N(t), \quad t \in [0, \tau], \quad (4.1)$$

где α — компенсирующий избыток яиц параметр убыли, β — коэффициент независимой от плотности смертности. Для весеннего поколения сильнее зависимость его убыли от начальной численности $N(0) = \lambda N(\mathcal{T})$ из-за действия негативных факторов активности естественных врагов. На развивающееся весной поколение оказывает давление массовые осы-паразиты, избирательно атакующие ранние стадии развития. Действие паразитов становится эффективным при высокой плотности жертв, что характерно для планового выпуска паразитической осы *Stethantix oaxacana*. Можно было бы подавить выпусками выращенных ос всех вредных для культурных растений чешуекрылых, но самих ос атакуют веерокрылые паразиты *Xenos vesparum*. Интегрирование (4.1) даст унимодальную функцию:

$$\int_{N(0)}^{N(t)} \frac{dN}{-(\alpha N(0) + \beta)N(t)} = \int_0^t dt, \ln \frac{N(0)}{N(t)} = t(\alpha N(0) + \beta), N(t) = \frac{N(0)}{\exp(t(\alpha N(0) + \beta))}.$$

$N(0)$ рассчитаем из плодовитости, а время определено длиной стадий. Важно, что непрерывную модель (4.1) легче целенаправленно модифицировать и избегать ее избыточного поведения.

Учтем, что на выживаемость личинок насекомых влияет скорость развития из-за необходимости своевременного перехода на их следующую стадию онтогенеза:

$$\frac{dN}{dt} = -(\alpha \mathfrak{F}[w(t)]N(0) + \beta)N(t), \quad t \in [0, \tau]. \quad (4.2)$$

Скорость роста $w(t) = l(N^{-k}(t))$, $k \notin \mathbb{Z}$ отражается на выживаемости поколения в благоприятных условиях и при меньшей продолжительности онтогенеза. Связь темпов роста личинок $\mathfrak{F}[w(t)]$ будет разной для поколений, потому выберем две формализации $\mathfrak{F}$.

Способность к избеганию атак доминирующего паразита сопровождается достижением стадии развития, переменами физиологии и поведения. Метаморфозы могут происходить только после накопления достаточного роста $w(t_s)$. Средняя обеспеченность кормом группы особей, в свою очередь, зависит от $N(t)$ и часто от предшествующего $N(t - \mathfrak{h})$, что определяет динамику темпов роста особей поколения. Обоснован метод взаимосвязанного описания скорости убыли поколения в зависимости от темпов роста. Для скорости роста $w(t)$ многих видов на периоде жизни после личинки известно балансовое уравнение активности анаболизма ζ и катаболизма σ :

$$\frac{dw}{dt} = \zeta \sqrt[3]{w(t)^2} - \sigma w(t), \quad w(0) = w_0$$

Уравнение хорошо описывает рост ряда животных на асимптотике приближения к $w \rightarrow W_\infty$, но исключая период раннего онтогенеза для видов со стадиями жизни и метаморфозами. Для рыб или насекомых данное уравнение необходимо модифицировать. Достаточно сильно действует влияние скученности особей, и первые стадии развития проходят при эндогенном питании. При увеличении плотности возникает асимметричное распределение размерной структуры популяции, остаются либо очень крупные, либо слишком мелкие особи [15], что влияет на размножение.

4.2. Моделирование динамики первой генерации. Для разрывной структуры необходимо описание изменения поколений от момента его генерации до его репродуктивной активности (у насекомых отряда *Lepidoptera* однократная). Опишем динамику убыли численности поколения на интервале $t \in [0, \tau]$ объединенными в систему уравнениями с учетом оптимального роста $\hat{w}$:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = - \left(\alpha \sqrt{\frac{\hat{w}}{w(t)}} N(0) + \beta \right) N(t), \\ \frac{dw}{dt} = \zeta \frac{w(t)^{2/3}}{\sqrt{N(t)}} - \sigma w(t). \end{cases} \quad (4.3)$$

В сегменте модели (4.3) включение запаздывания из-за истощения пищевых ресурсов не актуально, так как темп пополнения ресурсов питания в этой фазе обычно компенсирует активное потребление [3]. В начале расчетов из-за включения $N(0)$ убыль в (4.3) очень стремительна.

4.3. Моделирование развития второго сезонного поколения. Синхронизированная с первичной численностью атака паразитов — короткое сезонное явление. Опишем выживаемость второго поколения $t \in [0, T]$ системой уравнений, связанной по начальным условиям с (4.3) и оптимальным значением размерного развития $\tilde{w}$ для зимующего поколения:

$$\begin{cases} \frac{dN_2}{dt} = - \left(\alpha \sqrt{(\tilde{w} - w(t))^2} N(t) + \beta \right) N(t - \mathfrak{h}), \\ \frac{dw}{dt} = \frac{Q}{\sqrt[3]{N^2 + \zeta}}. \end{cases} \quad (4.4)$$

В сегменте (4.4) $w(t)$ отражает уровень размерного развития поколения, влияющий на увеличение пищевых потребностей и действующий негативно при возможном истощении пищевых ресурсов; Q — параметр, учитывающий ограниченность количества доступных ресурсов; ζ — параметр, учитывающий ограничение темпов развития, не зависящее от численности, и отражающий уровень конкуренции за ресурсы; α — аналогично коэффициент смертности от скученности, но при $N(t)$; β — коэффициент независимой смертности, учтем небольшое запаздывание $\mathfrak{h}$.

Начальные условия:

$$N(0) = \lambda N(\tau), \quad w(0) = w_0,$$

где λ — средняя плодовитость особей. Вспышку в форме краткого пика активности в предложенной модели запускает повышенная выживаемость зимующего поколения при сокращении времени зимовки при сниженном конкурентном факторе для весеннего поколения при его высокой плодовитости, но истощение ресурсов прошлой генерацией снижает возможности массового размножения. Плодовитость — орудие эволюционной борьбы, но, как любое орудие, может обратиться и против его обладателя, разрушив ресурсы среды.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье разработан метод построения специфической модели популяционного цикла воспроизводства на основе сопряженных по начальным условиям систем дифференциальных уравнений для поколений. Формализованные темпы убыли численности взаимосвязаны с размерным развитием на неравных интервалах онтогенеза у смежных поколений. Сопрягая в вычислительной среде решения на последовательных кадрах гибридного времени $\mathbb{T} = [0, \tau]_i \cup [0, T]_i$, можно описывать нерегулярную смену сезонов с высокой и низкой численностью вредителя. При сложности вычислений метод более естественно следует экологии [10], чем итерации $x_{n+1} = \psi x_n$ с циклами $p = 2^i$ и хаотизацией. Модель (4.3) $\leftrightarrow$ (4.4) формализует различия плотностной и паразитической регуляции при смене сезонов в зависимости либо от текущей $N^2(t)$, либо исходного обилия $N(0)$

для летней генерации. Раздельно описав действие плотностной регуляции во взаимосвязи с темпами развития, мы получили модель динамики выживаемости слабо конкурирующих поколений с различными условиями метаморфозов стадий и продолжительностью онтогенеза. Предложенный метод актуален для моделирования динамики и оценки эффективности искусственного воспроизводства лососевых рыб с независимо сосуществующими четными и нечетными генерациями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abbas S., Niezabitowski M., Grace S.* Global existence and stability of Nicholson blowflies model with harvesting and random effect// *Nonlinear Dyn.* — 2021. — 103. — С. 2109–2123.
2. *Andreassen H.* Population cycles and outbreaks of small rodents: ten essential questions we still need to solve// *Oecologia* — 2021. — 195. — С. 601–622.
3. *Borisova T. Yu.* On the physicochemical method of analysis of the formation of secondary immunodeficiency as a bioindicator of the state of ecosystems using the example of seabed biota of the Caspian Sea// *Techn. Phys. Lett.* — 2022. — 48. — С. 251–257.
4. *Brillinger D.* The Nicholson blowfly experiments// *J. Time Ser. Anal.* — 2012. — 33. — С. 718–723.
5. *Feigenbaum M.* Universal behavior in nonlinear systems// *Los Alamos Sci.* — 1980. — 1. — С. 4–27.
6. *Foerster H., Mora P. M., Amiot L.* Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026// *Science*. — 1960. — 132, № 3436. — С. 1291–1295.
7. *Hoang M.* A generalized model for the population dynamics of a two stage species with recruitment and capture using a nonstandard finite difference scheme// *Comp. Appl. Math.* — 2024. — 43. — С. 47–57.
8. *Kloeden P.* On Sharkovsky's cycle coexistence ordering// *Bulle. Austral. Math. Soc.* — 1979. — 20. — С. 171–178.
9. *Lee H., York J.* Period three implies chaos// *Am. Math. Monthly*. — 1975. — 82. — С. 985–992.
10. *Mikhailov V. V.* Computational modeling of the nonlinear metabolism rate as a trigger mechanism of extreme dynamics of invasion processes// *Techn. Phys. Lett.* — 2022. — 48. — С. 301–304.
11. *Perevaryukha A. Y.* Modeling of a crisis in the biophysical process by the method of predicative hybrid structures// *Techn. Phys.* — 2022. — 67, № 6. — С. 523–532.
12. *Sharkovski A. N.* Co-existence of cycles of a continuous map of the line into itself// *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* — 1995. — 5. — С. 1263–1273.
13. *Shorrocks B.* Population fluctuations in the fruit fly (*drosophila melanogaster*) maintained in the laboratory// *J. Animal Ecol.* — 1970. — 39. — С. 229–253.
14. *Singer D.* Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval// *SIAM J. Appl. Math.* — 1978. — 35. — С. 260–268.
15. *Trofimova I. V.* Adequacy of interpretation of monitoring data on biophysical processes in terms of the theory of bifurcations and chaotic dynamics// *Techn. Phys. Lett.* — 2022. — 48. — С. 305–310.

А. Ю. Переварюха

Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: madelf@rambler.ru

UDC 519.711

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-443-451

EDN: FMBVJU

Continuous generation population model with discontinuous life cycle characteristics

A. Yu. Perevaryukha

Saint Petersburg Institute for Informatics and Automation of the RAS, Saint Petersburg, Russia

Abstract. Traditionally, continuous models of mathematical biology are focused on the dynamics of interacting populations as stationary homogeneous entities. The state of the populations in the equations is governed by factors common to all individuals $\forall t, N(t)$: reproductive efficiency, mortality, living space limitations, or resource limitations. Many species exist with nonoverlapping generation sequences, replacing each other under different seasonal conditions. The number of annual generations is an important characteristic of the ecology of a species when occupying a new range. The length of the life cycle and the index of reproductive activity r in adjacent generations of insects in a range vary due to the need for wintering. Fluctuations in these values affect rapid population outbreaks. It is shown that the use of discrete models $x_{n+1} = \psi(x_n; r)\varphi(x_{n-i}) - \Xi$ is unrealistic for fundamental reasons. The appearance of cycles $p \neq 2^i$ in the order of Sharkovsky's theorem is excessive for the analysis of populations and the forecast of mass reproductions of insects. The article proposes a method for organizing models of the conjugate development of a succession of generations in a system of discontinuous differential equations as a sequence of boundary-value problems. The model is event-based redefined to obtain a solution on time intervals corresponding to the conditions of the season. The model taking into account competition and delayed regulation is relevant for the analysis of a sequence of peaks in pest activity, which are characterized by individual extremely numerous generations.

Keywords: population modeling, continuous model, generational modeling, population cycle, survival dynamics, discontinuous differential equations.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: A. Yu. Perevaryukha, "Continuous generation population model with discontinuous life cycle characteristics," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 3, 443–451. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-443-451>

REFERENCES

1. S. Abbas, M. Niezabitowski, and S. Grace, "Global existence and stability of Nicholson blowflies model with harvesting and random effect," *Nonlinear Dyn.*, 2021, **103**, 2109–2123.
2. H. Andreassen, "Population cycles and outbreaks of small rodents: ten essential questions we still need to solve," *Oecologia*, 2021, **195**, 601–622.
3. T. Yu. Borisova, "On the physicochemical method of analysis of the formation of secondary immunodeficiency as a bioindicator of the state of ecosystems using the example of seabed biota of the Caspian Sea," *Techn. Phys. Lett.*, 2022, **48**, 251–257.
4. D. Brillinger, "The Nicholson blowfly experiments," *J. Time Ser. Anal.*, 2012, **33**, 718–723.
5. M. Feigenbaum, "Universal behavior in nonlinear systems," *Los Alamos Sci.*, 1980, **1**, 4–27.
6. H. Foerster, P. M. Mora, and L. Amiot, "Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026," *Science*, 1960, **132**, No. 3436, 1291–1295.



7. M. Hoang, “A generalized model for the population dynamics of a two stage species with recruitment and capture using a nonstandard finite difference scheme,” *Comp. Appl. Math.*, 2024, **43**, 47–57.
8. P. Kloeden, “On Sharkovsky’s cycle coexistence ordering,” *Bulle. Austral. Math. Soc.*, 1979, **20**, 171–178.
9. H. Lee and J. York, “Period three implies chaos,” *Am. Math. Monthly*, 1975, **82**, 985–992.
10. V. V. Mikhailov, “Computational modeling of the nonlinear metabolism rate as a trigger mechanism of extreme dynamics of invasion processes,” *Techn. Phys. Lett.*, 2022, **48**, 301–304.
11. A. Y. Perevaryukha, “Modeling of a crisis in the biophysical process by the method of predicative hybrid structures,” *Techn. Phys.*, 2022, **67**, No. 6, 523–532.
12. A. N. Sharkovski, “Co-existence of cycles of a continuous map of the line into itself,” *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 1995, **5**, 1263–1273.
13. B. Shorrocks, “Population fluctuations in the fruit fly (*drosophila melanogaster*) maintained in the laboratory,” *J. Animal Ecol.*, 1970, **39**, 229–253.
14. D. Singer, “Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval,” *SIAM J. Appl. Math.*, 1978, **35**, 260–268.
15. I. V. Trofimova, “Adequacy of interpretation of monitoring data on biophysical processes in terms of the theory of bifurcations and chaotic dynamics,” *Techn. Phys. Lett.*, 2022, **48**, 305–310.

A. Yu. Perevaryukha

Saint Petersburg Institute for Informatics and Automation of the RAS, Saint Petersburg, Russia

E-mail: madelf@rambler.ru