

УДК 517.984

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-452-477

EDN: FMENVB

РАВНОСХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО КОРНЕВЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА И В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ

В. С. Рыхлов

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

Аннотация. Рассматривается несамосопряженный обыкновенный дифференциальный оператор, определяемый на конечном отрезке линейным дифференциальным выражением n -го порядка с ненулевым коэффициентом при $(n - 1)$ -й производной и двухточечными регулярными по Биркгофу краевыми условиями. Исследуется вопрос о равномерной равносходимости разложений заданной функции в биортогональный ряд по собственным и присоединенным или, кратко, корневым функциям этого оператора и в обычный тригонометрический ряд Фурье, а также об оценке разности соответствующих частичных сумм (или, коротко, о скорости равносходимости) при самых общих условиях на разлагаемую функцию и коэффициент при $(n - 1)$ -й производной. Получены оценки разности разложений в терминах общих (интегральных) модулей непрерывности разлагаемой функции и коэффициента при $(n - 1)$ -й производной, равномерные внутри основного интервала. Из этих оценок выводятся соответствующие оценки в случае, когда модули непрерывности оцениваются сверху медленно меняющимися функциями и, в частности, логарифмическими функциями. На основе этого сформулированы достаточные условия равносходимости в указанных случаях. Эти результаты получаются с использованием полученной ранее автором оценки разности частичных сумм разложений заданной функции в биортогональный ряд по собственным и присоединенным функциям рассматриваемого дифференциального оператора и в модифицированный тригонометрический ряд Фурье, а также аналогов теоремы Штейнгауза. Модификация тригонометрического ряда Фурье заключается в применении к обычному тригонометрическому ряду Фурье вполне конкретного ограниченного оператора, выражающегося через коэффициент при $(n - 1)$ -й производной, а к разлагаемой функции — обратного к нему оператора.

Ключевые слова: несамосопряженный обыкновенный дифференциальный оператор, разложение по корневым функциям, ряд Фурье, равносходимость разложения, скорость равносходимости.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: В. С. Рыхлов. Равносходимость разложений по корневым функциям дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 3. С. 452–477. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-452-477>

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И КРАТКАЯ ИСТОРИЯ ВОПРОСА

Рассматривается несамосопряженный обыкновенный дифференциальный оператор L , определяемый на отрезке $[0, 1]$ дифференциальным выражением (д.в.)

$$\ell(y) := y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y, \quad (1.1)$$

где $p_j(x) \in L_1[0, 1]$, $j = \overline{1, n}$, с ненулевым коэффициентом при $(n - 1)$ -й производной, и линейно независимыми краевыми условиями

$$\sum_{j=0}^{n-1} (a_{kj}y^{(j)}(0) + b_{kj}y^{(j)}(1)) = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (1.2)$$

Пусть выполняется основное предположение: краевые условия (1.2) регулярны по Биркгофу (определения общепринятых понятий, встречающихся в настоящей статье, можно найти, например, в книге [41]).

Исследуется вопрос о равномерной равносходимости разложений заданной функции в ряд по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) или, кратко, корневым функциям оператора L и в обычный тригонометрический ряд Фурье, а также об оценке разности соответствующих частичных сумм (или, коротко, о скорости равносходимости) при самых общих условиях на разлагаемую функцию и коэффициент $p_1(x)$ при $(n - 1)$ -й производной.

Задача о разложении заданной функции в ряд по с.п.ф. оператора L является одной из основных задач, возникающих при рассмотрении таких операторов. Наиболее полно эта задача решается в случае, когда удастся доказать равносходимость (в том или ином смысле) разложений заданной функции в ряды по с.п.ф. оператора L и по тригонометрической системе, так как тригонометрическая система достаточно хорошо изучена.

Исследование равносходимости спектральных разложений представляет собой активно развивающееся направление, начало которого было положено в работах В. А. Стеклова [56, 57], Э. У. Хобсона [70], А. Хаара [68, 69] для случая дифференциального оператора Штурма—Лиувилля и Я. Д. Тамаркина [58, 82, 83], М. Стоуна [81] для дифференциального оператора произвольного порядка с произвольными двухточечными краевыми условиями, удовлетворяющими условию регулярности Биркгофа [41, с. 66–67].

Новый импульс этому направлению придал В. А. Ильин [6–9], разработавший метод получения теорем равносходимости, в котором дифференциальный оператор не привязывается к граничным условиям, а лишь используется дополнительная информация о поведении собственных значений (с.з.) и с.п.ф.

Первый наиболее общий результат о равносходимости для оператора L получил Я. Д. Тамаркин [82]. Он доказал, что при нулевом коэффициенте $p_1(x)$ (или достаточно гладком: $p_1(x) \in C^{n-1}[0, 1]$) и регулярных краевых условиях для всякой интегрируемой (по Риману) функции ряды Фурье по с.п.ф. оператора L и по тригонометрической системе равномерно равносходятся внутри $(0, 1)$. Похожий результат получил М. Н. Стоун [81].

Позднее Я. Д. Тамаркин [58, 83] доказал теорему равносходимости для более общих операторов, но опять-таки с условиями регулярности краевых условий и достаточной гладкости коэффициента при $(n - 1)$ -й производной или аналогичных ему коэффициентов.

Н. П. Купцов [15] доказал абстрактную теорему равносходимости разложений по с.п.ф. операторов A и $A + Q$, действующих в банаховом пространстве. Приложениями этой теоремы являются обычные теоремы равносходимости разложений по с.п.ф. оператора L и в обычный тригонометрический ряд Фурье, но опять же в случае регулярных краевых условий оператора L и нулевого коэффициента $p_1(x)$.

А. П. Хромов [60, 62] распространил теорему о равносходимости Тамаркина на интегральные операторы $(Af)(x) := \int_0^1 A(x, \xi)f(\xi) d\xi$ ($x \in [0, 1]$), ядра которых обобщают свойства функции Грина оператора L с регулярными краевыми условиями. А именно, А. П. Хромов рассмотрел случай, когда некоторые производные ядра интегрального оператора имеют разрыв первого рода на линии $\xi = x$. Такие операторы являются в определенном смысле каноническими в классе интегральных операторов, для разложений по с.п.ф. которых имеет место равносходимость с тригонометрическим рядом Фурье. В дальнейшем В. В. Корнев и А. П. Хромов [14], а также А. П. Хромов [63] распространили эти результаты на другие интегральные операторы. Аналог случая $p_1(x) \notin C^{n-1}[0, 1]$ при этом не рассматривался.

Обзор результатов по вопросам сходимости и, в частности, равносходимости биортогональных разложений функций для обыкновенных дифференциальных операторов приведен А. П. Хромовым в [61].

В основе всех этих результатов лежал метод контурного интеграла Пуанкаре—Коши или, по-другому, резольвентный метод, использующий интегральное представление Коши проекторов Рисса.

Другой подход к проблеме равносходимости, как было отмечено, предложил В. А. Ильин [6–9]. При получении своих результатов он существенно использовал формулу среднего значения, полученную первоначально Е. И. Моисеевым [39, 40] для случая гладких коэффициентов, и затем модифицированную И. С. Ломовым [29] для случая негладких коэффициентов. Эта формула является распространением формулы среднего значения для регулярного решения самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка, которая указана в книге Э. Ч. Титчмарша [59], на случай присоединенных функций и на случай уравнений более высокого порядка.

В. А. Ильин доказал равномерную равносходимость с тригонометрическим рядом разложений в биортогональный ряд по с.п.ф. произвольного несамосопряженного дифференциального оператора, порожденного выражением $\ell(y)$ и произвольными краевыми условиями, обеспечивающими определенное асимптотическое поведение с.з.

Доказанные В. А. Ильиным теоремы формулируются в терминах условий на коэффициенты $\ell(y)$ и функции биортогональной системы и охватывают ранее известные результаты, касающиеся равносходимости, в частности, случай регулярных краевых условий. Более того, эти теоремы впервые устанавливают локальный характер не только требований на разлагаемую функцию, но и требований на коэффициенты $\ell(y)$ и функции биортогональной системы.

Дальнейшее продвижение в вопросе о равносходимости было сделано А. М. Минкиным [37, 38]. Некоторые доказанные им теоремы по формулировке родственны ряду утверждений В. А. Ильина [6–9], но доказательства другие. В обзорной статье [73] А. М. Минкина дан развернутый анализ результатов по равносходимости спектральных разложений.

Все приведенные выше результаты относились к операторам L с достаточно гладким коэффициентом $p_1(x)$, а также к обобщениям именно таких операторов. Вопрос о влиянии свойств этого коэффициента на равносходимость был исследован автором [44, 46, 76]. Было установлено, что существует тесная связь между множеством тех функций $f(x)$, для разложений которых по с.п.ф. оператора L имеет место равносходимость с тригонометрическим рядом Фурье, и свойствами коэффициента $p_1(x)$. По сути, в этих работах была дана оценка разности частичных сумм разложений в ряд по с.п.ф. оператора L и в обычный тригонометрический ряд Фурье (или, кратко, скорости равносходимости).

Отметим, что вопрос об оценке разности частичных сумм разложений по с.п.ф., отвечающих двум произвольным неотрицательным самосопряженным расширениям оператора Штурма—Лиувилля, впервые был рассмотрен В. А. Ильиным и И. Йо [12, 13].

Аналогичные вопросы для оператора Штурма—Лиувилля исследовались Ш. А. Алимовым и И. Йо [66], а также Н. Лажетичем [20, 21]. Для оператора Шредингера вопросы, связанные с оценкой скорости равносходимости спектральных разложений, были рассмотрены Е. И. Никольской в статье [42].

В. Е. Волков и И. Йо [4] перенесли результат [12, 13] на случай несамосопряженного оператора Шредингера с комплекснозначным потенциалом из класса L^2_{loc} и получили точную по порядку оценку разности частичных сумм спектральных разложений. Позднее В. А. Ильин [10, 11] и Е. И. Никольская [42] перенесли результат [12, 13] на случай произвольного суммируемого потенциала, скалярного или матричного.

Во всех случаях были получены оценки скорости равномерной равносходимости на любом компакте $K \subset G$, где G есть основной интервал. Такие же локальные оценки, но в интегральной метрике, получены В. М. Курбановым [17] для широкого класса обыкновенных дифференциальных операторов. Отметим также другие статьи [16, 18, 19, 72] В. М. Курбанова в этом направлении. В частности, в статье [18] им была исследована зависимость скорости равносходимости от модуля непрерывности главных коэффициентов д.в.

Системы функций, по которым ведется разложение, могут удовлетворять разным краевым условиям, поэтому равномерной равносходимости соответствующих рядов на всем отрезке G в общем случае не может быть. Некоторые практические задачи, тем не менее, требуют оценку скорости равносходимости разложений или оценку порядка приближения функций спектральными разложениями именно на всем G , причем оценку достаточно установить в интегральной метрике. Используя подход В. А. Ильина, оценки скорости равносходимости соответствующих разложений на всем интервале G в интегральной метрике L_p получил И. С. Ломов [23].

В дальнейшем И. С. Ломов перенес эти результаты на несамосопряженный оператор Шредингера [24, 25] и затем на оператор Штурма—Лиувилля с негладким коэффициентом $p_1(x)$ при первой производной в дифференциальной операции [26–28]. Для произвольного оператора четного порядка результат был получен И. С. Ломовым [30, 31, 33] и И. С. Ломовым совместно с С. В. Афонинным [1] — для операторов нечетного порядка.

И. С. Ломов в [34] также установил оценку зависимости скорости локальной равносходимости разложений от расстояния внутреннего компакта до границы интервала G и совместно с А. С. Марковым [36] перенес эти результаты на системы дифференциальных уравнений.

Детальный обзор этих и аналогичных результатов по оценке разности частичных сумм можно найти в работах И. С. Ломова [32, 35].

Интересные результаты по оценке скорости равносходимости получили Г. В. Радзиевский и А. М. Гомилко [5], а также Г. В. Радзиевский [43, 75]. Они подробно исследовали равносходимость и получили оценки разности частичных сумм разложений по с.п.ф. регулярных краевых задач для функционально-дифференциальных и дифференциальных операторов в метрике $L_p[0, 1]$, где $1 < p < \infty$. Результат сформулирован в терминах подходящих модулей непрерывности.

Отдельно от перечисленных результатов стоят результаты о равносходимости для операторов Штурма—Лиувилля с потенциалами-распределениями.

Операторы Штурма—Лиувилля с потенциалами-распределениями начали изучаться в начале 2000-х годов. Такого типа операторы были введены А. М. Савчуком и А. А. Шкаликовым [49] и активно исследовались разными математиками.

По-видимому, первой работой, в которой изучались вопросы равносходимости для таких операторов, стала статья В. А. Винокурова и В. А. Садовниченко [3], в которой была доказана равномерная на всем отрезке $[0, \pi]$ равносходимость в случае, когда $f(x) \in L_1[0, \pi]$, $q(x) = u'(x)$, где функция $u(x)$ из пространства $BV[0, \pi]$, т. е. функция ограниченной вариации. При этом рассматривались краевые условия Дирихле.

П. Джаков и Б. С. Митягин [67] установили равномерную равносходимость для такого вида операторов Штурма—Лиувилля с произвольными регулярными краевыми условиями. При этом разлагаемая функция $f(x)$ выбиралась квадратично суммируемой с дополнительным условием на ее коэффициенты Фурье, а именно: суммируемость в квадрате с логарифмическим весом.

И. В. Садовнича в серии работ [50–54, 79] получила ряд интересных результатов о равносходимости и оценке скорости равносходимости для оператора Штурма—Лиувилля с потенциалом-распределением и операторов Дирака. В частности, для оператора Штурма—Лиувилля с краевыми условиями Дирихле и с потенциалом $q(x) = u'(x)$, где $u(x) \in L_2[0, \pi]$, была доказана равносходимость по норме пространства $L_\nu[0, \pi]$, $\nu \in [2, \infty)$, в случае, когда разлагаемая функция $f(x) \in L_\mu[0, \pi]$, $\mu \in [1, 2]$, где $1/\mu - 1/\nu \leq 1/2$ (в частности, для $\mu = 2$, $\nu = \infty$). Для оператора Штурма—Лиувилля с краевыми условиями Дирихле и с потенциалом $q(x) = u'(x)$, где $u(x) \in W_2^\theta[0, \pi]$, $0 < \theta < 1/2$ ($W_2^\theta[0, \pi]$ есть шкала соболевских пространств с нецелым индексом гладкости $\theta \in [0, 1]$), получена оценка скорости равносходимости по норме пространства $L_\infty[0, \pi]$ для случая, когда разлагаемая функция $f(x) \in L_2[0, \pi]$.

Следует отметить также результаты В. А. Юрко [65] по равносходимости спектральных разложений в случае дифференциальных уравнений с неинтегрируемыми коэффициентами.

Таким образом, вопросы равносходимости в том или ином виде спектральных разложений и задача оценки разности частичных сумм в различных метриках и для различных классов дифференциальных операторов являются актуальными направлениями исследований.

Автору статьи удалось продвинуться в данном направлении, а именно, в [46, 47, 76, 77] была дана оценка разности частичных сумм разложений по с.п.ф. оператора L и в тригонометрический

ряд Фурье в терминах логарифмических модулей непрерывности коэффициента $p_1(x)$ и разлагаемой функции $f(x)$. В статье [78] результаты [46, 47, 76, 77] были обобщены и оценка разности частичных сумм была получена в терминах общих модулей непрерывности. В частности, в случае, когда модули непрерывности оцениваются сверху медленно меняющимися функциями. При этом важную роль в доказательстве играет доказанный автором аналог теоремы Штейнгауза [48].

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ФОРМУЛИРОВКА ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Далее будут использоваться следующие модули непрерывности:

$$\omega(f, \delta)_p = \sup_{0 < h \leq \delta} \left(\int_0^{1-h} |f(t+h) - f(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad \text{в случае } 1 \leq p < \infty, \quad (2.1)$$

$$\omega(f, \delta)_\infty = \sup_{0 < h \leq \delta} \sup_{t \in [0, 1-h]} |f(t+h) - f(t)|.$$

Далее под $L_\infty[0, 1]$ удобно понимать пространство $C[0, 1]$.

Введем следующие пространства функций при $\alpha > 0$ и $1 \leq r \leq \infty$:

$$H_r^\alpha[0, 1] = \left\{ f \in L_r[0, 1] : \omega(f, \delta)_r = O\left(\ln^{-\alpha} \frac{1}{\delta}\right), \delta \rightarrow +0 \right\}.$$

Считаем, что $H_r^0[0, 1] = L_r[0, 1]$.

Наряду с оператором L вида (1.1)-(1.2) потребуется линейный дифференциальный оператор L_0 , порожденный простейшим д.в. и периодическими краевыми условиями

$$\ell_0(y) := y^{(n)}, \quad y^{(k-1)}(0) - y^{(k-1)}(1) = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.2)$$

Числа $\lambda_{0\nu} := (2\nu\pi i)^n$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, суть с.з. оператора L_0 , а функции $e_\nu(x) := \exp(2\nu\pi i x)$ — соответствующие собственные функции (с.ф.), т. е. система с.ф. есть обычная тригонометрическая система в экспоненциальной форме.

Пусть λ_ν , $\nu = 0, 1, 2, \dots$, суть с.з. оператора L . Асимптотика с.з. оператора L может быть получена аналогично тому, как это сделано, например, в [41, с. 74-75], но с использованием асимптотических формул для решений дифференциального уравнения $\ell(y) - \lambda y = 0$, даваемых теоремой из статьи автора [45], вместо асимптотических формул [41, с. 58-59].

Обозначим через D_δ область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, получающуюся из $\mathbb{C}$ в результате удаления множеств $\bigcup_{\nu=0}^{\infty} K_\delta(\lambda_\nu)$ и $\bigcup_{\nu=-\infty}^{\infty} K_\delta(\lambda_{0\nu})$, где обозначено $K_\delta(c) = \{\lambda : |\lambda - c| < \delta\}$, $\delta > 0$ и достаточно мало.

Из асимптотики с.з. оператора L следует, что существует последовательность $\{r_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ такая, что $(2\pi m)^n < r_m < (2\pi(m+1))^n$, и контуры $\Gamma_m := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_m\}$, начиная с некоторого достаточно большого m , лежат в области D_δ . Между соседними контурами находятся не более двух с.з. λ_ν , начиная с некоторого m . Рассмотрение таких контуров обусловлено структурой обычного тригонометрического ряда Фурье в экспоненциальной форме, который на самом деле является рядом со скобками.

Обозначим через R_λ и $R_{0\lambda}$ резольвенты операторов L и L_0 , соответственно, а через $G(x, \xi, \lambda)$ и $G_0(x, \xi, \lambda)$ — соответствующие функции Грина. Пусть

$$S_m(f, x) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} R_\lambda f d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) d\xi d\lambda,$$

$$\sigma_m(f, x) \equiv S_{0m}(f, x) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} R_{0\lambda} f d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \int_0^1 G_0(x, \xi, \lambda) d\xi d\lambda.$$

Известно [41, с. 92], что $S_m(f, x)$ есть частичная сумма биортогонального ряда Фурье функции $f(x)$ по с.п.ф. оператора L , содержащая слагаемые, соответствующие с.з. λ_ν , для которых выполняется неравенство $|\lambda_\nu| < r_m$, а $\sigma_m(f)$ есть частичная сумма ортогонального ряда Фурье функции $f(x)$ по с.ф. оператора L_0 , содержащая слагаемые, соответствующие с.з. $\lambda_{0\nu} = (2\nu\pi i)^n$,

для которых $|\nu| \leq m$, т. е. частичная сумма порядка m обычного тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$

$$\sigma_m(f, x) := \sum_{k=-m}^m (f, e_k) e_k(x), \quad \text{где} \quad (f, e_k) := \int_0^1 f(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi.$$

Для $f(x)$ из $L_1[0, 1]$ обозначим

$$\Phi_m(x) = S_m(f, x) - V\sigma_m(V^{-1}f, x), \quad \Psi_m(x) = S_m(f, x) - \sigma_m(f, x), \quad (2.3)$$

где

$$V(x) = \exp \left(-\frac{1}{n} \int_0^x p_1(\tau) d\tau \right). \quad (2.4)$$

Введем условие

$$f(x) \in L_r[0, 1], \quad p_1(x) \in L_q[0, 1], \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1, \quad 1 \leq q \leq \infty. \quad (2.5)$$

Справедлива следующая теорема об оценке разности частичных сумм $\Phi_m(x)$ в терминах общих модулей непрерывности разлагаемой функций $f(x)$ и коэффициента $p_1(x)$.

Теорема 2.1. При условии (2.5) для любого компакта $K \subset (0, 1)$ и натурального $m \gg 1$

$$\|\Phi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, L, K) A_m, \quad (2.6)$$

где

$$A_m = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \left(\ln m \omega \left(p_1, \frac{1}{k} \right)_q + 1 + \frac{k^{2/q}}{m^{1/q}} + \frac{k^2 \ln m}{m} \right) \omega \left(f, \frac{1}{k} \right)_r + \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{k^2 \ln m}{m} \right) \omega \left(p_1, \frac{1}{k} \right)_q + \frac{k^{2+2/q}}{m^{1+1/q}} + \frac{k^4 \ln m}{m^2} \right\}.$$

Для формулировки теоремы об оценке разности частичных сумм $\Psi_m(x)$ введем следующие обозначения:

- для функции $h(x) \in C[0, 1]$ положим

$$H_q(h, m) := \left(\int_{1/m}^1 \frac{1}{\xi} h^q(\xi) d\xi \right)^{1/q} \quad \text{при} \quad 1 \leq q < \infty, \quad H_\infty(h, m) := 1; \quad (2.7)$$

- для функции $g(x) \in L_q[0, 1]$ положим

$$\theta_q(g, \delta) := \sup_{\tau \in [0, \delta]} \theta_{1q}(g, \tau) \quad \text{при} \quad 1 \leq q < \infty \quad \text{и} \quad \theta_\infty(g, \delta) \equiv 1, \quad (2.8)$$

где

$$\theta_{1q}(g, \tau) := \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \omega \left(g, \frac{1}{k} \right)_q + (k^2 \tau)^{\frac{1}{q}} \right\} \quad \text{при} \quad 1 \leq q < \infty, \quad (2.9)$$

$$\hat{\theta}_q(g, \delta) = \sup_{\tau \in [0, \delta]} \hat{\theta}_{1q}(g, \tau) \quad \text{при} \quad 1 \leq q < \infty \quad \text{и} \quad \hat{\theta}_\infty(g, \delta) \equiv 1, \quad (2.10)$$

где

$$\hat{\theta}_{1q}(g, \tau) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \omega \left(g, \frac{1}{k} \right)_q + \frac{1}{k^{1/r}} \theta_q \left(g, \frac{1}{k} \right) + (k^2 \tau)^{\frac{1}{q}} \right\} \quad \text{при} \quad 1 \leq q < \infty. \quad (2.11)$$

Теорема 2.2. При условии (2.5) для любого компакта $K \subset (0, 1)$ и натурального $m \gg 1$

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, L, K) B_m, \quad (2.12)$$

где

$$B_m = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \left(\ln m \omega \left(p_1, \frac{1}{k} \right)_q + 1 + H_q(\hat{\theta}_q(p_1, \cdot), m) + \frac{k^{2/q}}{m^{1/q}} + \frac{k^2 \ln m}{m} \right) \omega \left(f, \frac{1}{k} \right)_r + \right.$$

$$+ \left(1 + \frac{k^2 \ln m}{m}\right) \omega\left(p_1, \frac{1}{k}\right)_q + \frac{1}{k^{1/r}} \theta_q\left(p_1, \frac{1}{k}\right) + \frac{k^{2+2/q}}{m^{1+1/q}} + \frac{k^4 \ln m}{m} \Big\}. \quad (2.13)$$

Если на $\omega(f, \delta)_r$ и $\omega(p_1, \delta)_q$ наложить такие условия, при которых $A_m \rightarrow 0$ или $B_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, можно получить различные достаточные условия равносходимости соответствующих разложений с оценками разности частичных сумм.

Интересные результаты получаются в случае, когда функции $\omega(f, \delta)_r$ и $\omega(p_1, \delta)_q$ по переменной δ являются медленно меняющимися функциями.

Понятие медленно меняющейся функции тесно связано с понятием правильно меняющейся функции. Это понятие было введено И. Караматой [71] в 1930 г. (при этом рассматривались непрерывные функции).

Правильно меняющиеся функции примыкают к степенным, хорошо изучены и имеют многочисленные приложения, в основном благодаря их особой роли в теоремах тауберова типа. Теорию таких функций можно найти в книге [55].

Определение 2.1. Положительная непрерывная в проколотовой окрестности нуля функция $\Omega(\delta)$, для которой выполнено условие

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Omega(\gamma\delta)}{\Omega(\delta)} = \gamma^\rho \quad \text{для любого } \gamma > 0, \quad (2.14)$$

называется *правильно меняющейся в нуле функцией порядка* $\rho \in \mathbb{R}$. Правильно меняющаяся в нуле функция порядка $\rho = 0$ называется *медленно меняющейся функцией* (м.м.ф.) в нуле. Функция $\Omega(\delta)$ называется *правильно меняющейся функцией в бесконечности порядка* $\rho \in \mathbb{R}$, если функция $\Omega\left(\frac{1}{\delta}\right)$ есть правильно меняющаяся функция в нуле того же порядка.

Замечание 2.1. На самом деле в общем определении правильно меняющейся функции (а значит, и м.м.ф.) фигурируют измеримые функции, но мы ограничимся только непрерывными правильно меняющимися функциями (а значит, и непрерывными м.м.ф.).

Приведем наиболее известный (эталонный) пример [55, с. 48–50] м.м.ф. в нуле, которая наиболее часто используется.

Пример 2.1 (медленно меняющаяся функция в 0). Пусть заданы k вещественных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Положим

$$\Omega(\delta) = \left(\ln \frac{1}{\delta}\right)^{\alpha_1} \left(\ln \ln \frac{1}{\delta}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\ln \ln \dots \ln \frac{1}{\delta}\right)^{\alpha_k},$$

где $\ln b$ есть логарифм по какому-то основанию $c > 0$, $c \neq 1$. Тогда $\Omega(\delta)$ есть м.м.ф. в 0.

Функции, рассмотренные в этом примере, образуют так называемую логарифмическую мультишкалу, имеющую ряд приложений в теории функциональных пространств.

Введем условие

$$\omega(f, \delta)_r = O(\Omega_1(\delta)), \quad \omega(p_1, \delta)_q = O(\Omega_2(\delta)), \quad \delta \rightarrow +0, \quad (2.15)$$

и пусть функции $\Omega_1(\delta)$ и $\Omega_2(\delta)$ удовлетворяют следующему условию:

Условие 2.1 (медленное изменение (МИ)). Существует интервал $(0, \varepsilon_0)$, на котором

- (а) $\Omega(\delta)$ есть м.м.ф. в точке 0;
- (б) $\Omega(\delta)$ является монотонно неубывающей функцией, для которой $\Omega(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$;
- (в) для любого $\gamma > 0$ справедливо $\Omega(\delta^\gamma) \sim \Omega(\delta)$ при $\delta \rightarrow +0$, т. е. существуют константы $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что

$$C_1 \Omega(\delta) \leq \Omega(\delta^\gamma) \leq C_2 \Omega(\delta).$$

Замечание 2.2. Предположение (б) вполне естественно, так как модуль непрерывности обладает этим свойством.

Замечание 2.3. Произвольная м.м.ф., вообще говоря, не обладает свойством (в). Однако наиболее часто используемые на практике м.м.ф. обладают этим свойством. В частности, такая м.м.ф., как в примере 2.1.

Справедливы следующие теоремы равносходимости.

Теорема 2.3. Если выполняются условия (2.5), (2.15), функции $\Omega_1(\delta)$, $\Omega_2(\delta)$ удовлетворяют условию МИ и таковы, что

$$\ln m \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \quad (2.16)$$

то для любого компакта $K \subset (0, 1)$ имеет место равносходимость

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Phi_m(x)\|_{C(K)} = 0$$

и справедливы следующие оценки при $m \gg 1$:

$$\|\Phi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, p_1, K) \left(\ln m \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) + \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) + \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) \right). \quad (2.17)$$

Теорема 2.4. Пусть выполняются условия (2.5), (2.15), а функции $\Omega_1(\delta)$ и $\Omega_2(\delta)$ удовлетворяют условию МИ. Если, к тому же, выполняются еще и условия (2.16) и

$$\Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) H_q(\Omega_2, m) \rightarrow \infty \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \quad (2.18)$$

то для любого компакта $K \subset (0, 1)$ имеет место равносходимость

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Psi_m(x)\|_{C(K)} = 0$$

и справедлива следующая оценка при $m \gg 1$:

$$\begin{aligned} \|\Psi_m(x)\|_{C(K)} &\leq \\ &\leq C(f, p_1, K) \left(\ln m \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) + \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) H_q(\Omega_2, m) + \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) + \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Введем условие

$$\omega(f, \delta)_r = O\left(\frac{1}{\ln^\alpha 1/\delta}\right), \quad \omega(p_1, \delta)_q = O\left(\frac{1}{\ln^\beta 1/\delta}\right), \quad \delta \rightarrow +0, \quad (2.20)$$

т. е. $f(x) \in H_r^\alpha[0, 1]$ и $p_1(x) \in H_q^\beta[0, 1]$.

Следствиями теорем 2.3 и 2.4 являются следующие теоремы, которые были получены автором ранее в [46, 47, 76, 77].

Теорема 2.5. Если выполняются условия (2.5), (2.20) и $\alpha + \beta > 1$, то для любого компакта $K \subset (0, 1)$ имеет место равносходимость

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Phi_m(x)\|_{C(K)} = 0$$

и справедлива следующая оценка при $m \gg 1$:

$$\|\Phi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, p_1, K) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^\alpha m} + \frac{1}{\ln^\beta m} \right). \quad (2.21)$$

Теорема 2.6. Если выполняются условия (2.5), (2.20) и $\alpha + \beta > 1$, то для любого компакта $K \subset (0, 1)$ имеет место равносходимость

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Psi_m(x)\|_{C(K)} = 0$$

и справедливы следующие оценки при $m \gg 1$:

- в случае $\beta q = 1$ и $1 \leq q < \infty$

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, p_1, K) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{(\ln \ln m)^{1/q}}{\ln^\alpha m} + \frac{1}{\ln^\beta m} \right), \quad (2.22)$$

- в остальных случаях ($\beta q \neq 1$ и $1 \leq q < \infty$ или $q = \infty$)

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, p_1, K) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^\alpha m} + \frac{1}{\ln^\beta m} \right). \quad (2.23)$$

Замечание 2.4. В работе автора [44] рассмотрен простейший линейный дифференциальный оператор вида

$$y'' + p_1(x)y', \quad y(0) = y(1) = 0, \quad (2.24)$$

в котором проявляются все трудности общего случая, а именно, такое же влияние свойств коэффициента $p_1(x)$ и разлагаемой функции $f(x)$ на оценку разности частичных сумм разложений, как и в общем случае. Было показано, что сформулированные выше теоремы точны в следующем смысле:

- 1) если $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} > 1$, $q > 1$, $r > 1$, $r_1 > r$, $q_1 > q$, но по-прежнему $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{q_1} > 1$, то существуют функции $f(x) \in L_r[0, 1]$ и $p_1(x) \in L_q[0, 1]$, положительная константа $C(q_1, r_1)$ и возрастающая подпоследовательность $\{m_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\left| \Psi_{m_k} \left(\frac{1}{2} \right) \right| \geq C(q_1, r_1) m_k^{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{q_1} - 1} \rightarrow +\infty;$$

- 2) если $r = \infty$, $q = 1$ или $r = 1$, $q = \infty$, $\alpha + \beta < 1$, $\alpha_1 > \alpha$, $\beta_1 > \beta$, но по-прежнему $\alpha_1 + \beta_1 < 1$, то существуют функции $f(x) \in H_r^\alpha[0, 1]$, $p_1(x) \in H_q^\beta[0, 1]$, положительная константа $C(\alpha_1, \beta_1)$ и некоторая возрастающая подпоследовательность $\{m_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\left| \Psi_{m_k} \left(\frac{1}{2} \right) \right| \geq C(\alpha_1, \beta_1) \frac{\ln m_k}{\ln^{\alpha_1 + \beta_1} m_k} \rightarrow +\infty.$$

Полные доказательства теорем 2.1 и 2.3 приведены в статье [78] автора. Теоремы 2.2 и 2.4 также были сформулированы в [78], но подробные доказательства не были приведены. Отмечалось только, что их доказательство следует из теорем 2.1 и 2.3 с использованием соответствующих аналогов теоремы Штейнгауза.

Цель настоящей статьи — восполнить этот пробел и дать полные доказательства теорем 2.2 и 2.4, а заодно другим способом доказать теорему 2.6.

Для удобства в следующем разделе сформулируем саму теорему Штейнгауза и необходимые аналоги теоремы Штейнгауза, приведенные в работах автора [44, 46, 48, 76]. Подробную историю вопроса можно найти в [48].

3. АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ ШТЕЙНГАУЗА

В 1913 г. Г. Штейнгауз [80] доказал следующую теорему (формулировка дается по книге [2, с. 111]).

Теорема 3.1 (Г. Штейнгауз). *Если $f(x) \in L_1[0, 1]$, $\mathcal{W}(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1 на $[0, 1]$ и обе функции периодичны, то*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|\mathcal{W}(x)\sigma_m(f, x) - \sigma_m(\mathcal{W}f, x)\|_{C[0, 1]} = 0. \quad (3.1)$$

Равносходимость вида (3.1), но в метрике пространства $C(K)$ для любого компакта $K \subset (0, 1)$ была установлена автором [44] при других условиях на функции $f(x)$ и $\mathcal{W}(x)$.

Чтобы сформулировать этот результат, будем использовать для функции $\mathcal{W}(x)$ представление

$$\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}_0 + \int_0^x g(t) dt, \quad (3.2)$$

где $\mathcal{W}_0$ есть произвольная константа, и обозначение

$$\Theta_m(x) := \mathcal{W}(x)\sigma_m(f, x) - \sigma_m(\mathcal{W}f, x). \quad (3.3)$$

Функцию $\Theta_m(x)$ будем называть кратко *разностью частичных тригонометрических сумм*.

В [44] доказан следующий аналог теоремы Штейнгауза.

Теорема 3.2. *Пусть функция $\mathcal{W}(x)$ имеет вид (3.2), тогда для любого компакта $K \subset (0, 1)$*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Theta_m(x)\|_{C(K)} = 0, \quad (3.4)$$

если выполняется хотя бы одно из условий

- 1) $f \in L_1[0, 1]$, $g \in L_\infty[0, 1]$;
- 2) $f \in L_r[0, 1]$, $g \in L_q[0, 1]$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} < 1$;
- 3) $f \in H_\infty^\alpha[0, 1]$, $g \in H_1^\beta[0, 1]$, $\alpha + \beta > 1$.

Если неравенства в условиях 2)-3) заменить на противоположные ($<$ на $>$, $>$ на $<$), то утверждение (3.4) станет, вообще говоря, неверным.

Естественно возник вопрос об оценке стремления к нулю в (3.4) в зависимости от свойств функций $f(x)$ и $g(x)$. Ответ был дан автором в статьях [46, 48, 76].

В [46, 76] была дана оценка разности частичных тригонометрических сумм в случае, когда модули непрерывности функций $f(x)$ и $g(x)$ оцениваются сверху логарифмическими функциями.

Для формулировки теоремы потребуются следующие условия:

$$f(x) \in L_r[0, 1], \quad g(x) \in L_q[0, 1], \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1, \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad (3.5)$$

$$\omega(f, \delta)_r = O\left(\frac{1}{\ln^\alpha 1/\delta}\right), \quad \omega(g, \delta)_q = O\left(\frac{1}{\ln^\beta 1/\delta}\right) \text{ при } \delta \rightarrow +0, \quad \alpha, \beta > 0. \quad (3.6)$$

Теорема 3.3. Пусть функция $\mathcal{W}(x)$ имеет вид (3.2) и выполняются предположения (3.5) и (3.6). Тогда для любого компакта $K \subset (0, 1)$ имеет место равносходимость

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Theta_m(x)\|_{C(K)} = 0 : \quad (3.7)$$

- 1) в случае $1 \leq q < \infty$ при условии $\alpha + \beta > \frac{1}{q}$, при этом, если $\beta q \neq 1$, то

$$\|\Theta_m(x)\|_{C(K)} = O\left(\frac{\ln^{\frac{1}{q}} m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^\alpha m} + \frac{1}{\ln^\beta m}\right), \quad (3.8)$$

а если $\beta q = 1$, то

$$\|\Theta_m(x)\|_{C(K)} = O\left(\frac{(\ln \ln m)^{\frac{1}{q}}}{\ln^\alpha m} + \frac{1}{\ln^\beta m}\right); \quad (3.9)$$

- 2) в случае $q = \infty$ при любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, при этом

$$\|\Theta_m(x)\|_{C(K)} = O\left(\frac{1}{\ln^\alpha m} + \frac{1}{\ln^\beta m}\right).$$

Впоследствии в статье автора [48] была доказана теорема об оценке разности частичных тригонометрических сумм в терминах общих модулей непрерывности функций $f(x)$ и $g(x)$, а также аналог теоремы Штейнгауза в случае, когда модули непрерывности оцениваются сверху м.м.ф. Сформулируем также и эти теоремы.

Теорема 3.4. Пусть функция $\mathcal{W}(x)$ имеет вид (3.2), а функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию (3.5). Тогда для любого компакта $K \subset (0, 1)$ и любого натурального $m \gg 1$ имеет место оценка

$$\|\Theta_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, g, K) Q_m, \quad (3.10)$$

где

$$Q_m = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \omega\left(f, \frac{1}{k}\right)_r H_q(\theta_q(g, \cdot), m) + \omega\left(g, \frac{1}{k}\right)_q + \frac{k^4 \ln m}{m} \right\}. \quad (3.11)$$

Если на $\omega(f, \delta)_r$ и $\omega(g, \delta)_q$ наложить такие условия, при которых $Q_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, можно получить различные достаточные условия равносходимости вида (3.4).

В частности, результат, даваемый теоремой 3.3, следует из теоремы 3.4 в случае выполнения условий (3.5) и (3.6) при дополнительных условиях на параметры α и β .

Интересные результаты получаются в случае, когда функции $\omega(f, \delta)_r$ и $\omega(g, \delta)_q$ оцениваются сверху медленно меняющимися функциями.

Пусть по-прежнему выполняется условие (3.5) и, кроме того, имеют место оценки

$$\omega(f, \delta)_r = O(v(\delta)), \quad \omega(g, \delta)_q = O(w(\delta)), \quad \delta \rightarrow +0, \quad (3.12)$$

где $v(\delta)$ и $w(\delta)$ удовлетворяют условию 2.1 МИ.

Справедлива следующая теорема, которая доказана в [48].

Теорема 3.5. Пусть функция $\mathcal{W}(x)$ имеет вид (3.2), выполняются условия (3.5) и (3.12). Тогда, если

$$v\left(\frac{1}{m}\right)H_q(w, m) \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \quad (3.13)$$

то для любого компакта $K \subset (0, 1)$ имеет место равносходимость

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Theta_m(x)\|_{C(K)} = 0. \quad (3.14)$$

При этом справедлива следующая оценка при $m \gg 1$:

$$\|\Theta_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, g, K) \left(v\left(\frac{1}{m}\right)H_q(w, m) + w\left(\frac{1}{m}\right) \right). \quad (3.15)$$

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Далее потребуются некоторые результаты из [22]. Сформулируем эти результаты в виде леммы.

Лемма 4.1 (см. [22]). Пусть $Q_m(x)$ есть произвольный алгебраический многочлен степени m ; p и q — такие вещественные числа, что $1 \leq p < q \leq \infty$; s есть натуральное число. Тогда существует константа $C(p, q)$, зависящая только от p и q , и константа $C(s)$, зависящая только от s , такие, что

$$(a) \quad \|Q_m(x)\|_q \leq C(p, q)m^{2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|Q_m(x)\|_p; \quad (4.1)$$

$$(б) \quad \|Q_m^{(s)}(x)\|_p \leq C(s)m^{2s}\|Q_m(x)\|_p. \quad (4.2)$$

Обозначим через $\mathbb{P}_k$ множество алгебраических многочленов степени не выше k . Далее, наилучшее приближение функции $f(x)$ в метрике пространства $L_p[0, 1]$ алгебраическими многочленами степени не выше k будем обозначать $E_k(f)_p$, а многочлен наилучшего приближения — $F_k(x)$ (если не оговорено противное), т. е.

$$E_k(f)_p = \|f(x) - F_k(x)\|_p = \min_{f_k(x) \in \mathbb{P}_k} \|f(x) - f_k(x)\|_p.$$

Ясно, что для многочлена $F_k(x)$ наилучшего приближения функции $f(x)$ в метрике пространства $L_p[0, 1]$ выполняется неравенство

$$\|F_k(x)\|_r \leq C(f), \quad (4.3)$$

где $C(f)$ — некоторая константа. Здесь, для краткости, используется обозначение $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p[0,1]}$.

Далее также потребуется результат, который доказан в [64] (аналог классической теоремы Джексона). Сформулируем его также в виде леммы.

Лемма 4.2 (см. [64]). Если $f(x) \in L_p[0, 1]$ ($1 \leq p \leq \infty$), то

$$E_k(f)_p \leq \omega\left(f, \frac{1}{k}\right)_p. \quad (4.4)$$

Далее в доказательстве будет использоваться следующая лемма.

Лемма 4.3. Если $g(x) \in L_q[0, 1]$, где $1 \leq q \leq \infty$, то справедлива оценка

$$\int_a^b |g(\tau)| d\tau \leq C(g)\delta^{\frac{1}{r}}\theta_q(g, \delta), \quad \delta := b - a, \quad (4.5)$$

где $0 \leq a < b \leq 1$, а функция $\theta_q(g, \delta)$ определяется формулами (2.8)-(2.9). При этом функция $\theta_q(g, \delta)$ в случае $1 \leq q < \infty$ монотонно стремится к нулю при $\delta \rightarrow +0$.

Доказательство. Так как по неравенству треугольника

$$\int_a^b |g(\tau)| d\tau \leq \int_a^b |g(\tau) - G_k(\tau)| d\tau + \int_a^b |G_k(\tau)| d\tau,$$

то, применяя к правой части неравенство Гельдера и неравенства (4.4), (4.1) и (4.3), получим для любого $k \in \mathbb{N}$ и $1 \leq q < \infty$

$$\begin{aligned} \int_a^b |g(\tau)| d\tau &= \int_a^b |g(\tau) - G_k(\tau) + G_k(\tau)| d\tau \leq \left(\int_a^b 1^r d\tau \right)^{1/r} \|g(\tau) - G_k(\tau)\|_q + \|G_k(\tau)\|_\infty \delta \leq \\ &\leq \delta^{\frac{1}{r}} \left(E_k(g)_q + C(g)(k^2\delta)^{\frac{1}{q}} \right) \leq C(g)\delta^{\frac{1}{r}} \left(\omega\left(g, \frac{1}{k}\right)_q + (k^2\delta)^{\frac{1}{q}} \right). \end{aligned}$$

Так как $k \in \mathbb{N}$ является произвольным, то отсюда будем иметь

$$\begin{aligned} \int_a^b |g(\tau)| d\tau &\leq C(g)\delta^{\frac{1}{r}} \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \omega\left(g, \frac{1}{k}\right)_q + (k^2\delta)^{\frac{1}{q}} \right\} = \\ &= C(g)\delta^{\frac{1}{r}} \theta_{1q}(g, \delta) \leq C(g)\delta^{\frac{1}{r}} \sup_{\tau \in [0, \delta]} \theta_{1q}(g, \tau) = C(g)\delta^{\frac{1}{r}} \theta_q(g, \delta), \end{aligned}$$

где функция $\theta_q(g, \delta)$ определяется формулой (2.8).

Таким образом, оценка (4.5) в случае $1 \leq q < \infty$ доказана. Совершенно ясно, что в случае $q = \infty$ оценка (4.5) также справедлива, если считать $\theta_\infty(g, \delta) \equiv 1$.

Для завершения доказательства установим следующую лемму.

Лемма 4.4. *Функция $\theta_q(g, \delta)$ в случае $1 \leq q < \infty$ является неубывающей при $\delta \in (0, 1]$ и $\theta_q(g, \delta) \rightarrow 0$, когда $\delta \rightarrow +0$.*

Доказательство. То, что функция $\theta_q(g, \delta)$ является неубывающей при $\delta \in (0, 1]$, следует из ее определения. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ таким образом, что

$$\omega\left(g, \frac{1}{k_\varepsilon}\right)_q < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.6)$$

Пусть $0 < \tau_\varepsilon < 1$ есть такое число, что

$$(k_\varepsilon^2 \tau_\varepsilon)^{1/q} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.7)$$

Из (4.6)-(4.7) получим, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \tau_\varepsilon \in (0, 1) \forall \tau \in [0, \tau_\varepsilon]$

$$\theta_{1q}(g, \tau) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \omega\left(g, \frac{1}{k}\right)_q + (k^2\tau)^{\frac{1}{q}} \right\} \leq \omega\left(g, \frac{1}{k_\varepsilon}\right)_q + (k_\varepsilon^2\tau)^{\frac{1}{q}} \leq \omega\left(g, \frac{1}{k_\varepsilon}\right)_q + (k_\varepsilon^2\tau_\varepsilon)^{\frac{1}{q}} < \varepsilon.$$

Следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \exists \tau_\varepsilon \in (0, 1) \forall \delta \in [0, \tau_\varepsilon]$

$$\theta_q(g, \delta) \leq \theta_q(g, \tau_\varepsilon) = \sup_{\tau \in [0, \tau_\varepsilon]} \theta_{1q}(g, \tau) < \varepsilon.$$

А это означает, что $\theta_q(g, \delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$. Тем самым, лемма 4.4 доказана. $\square$

Следовательно, и лемма 4.3 полностью доказана. $\square$

Далее будут использоваться некоторые свойства м.м.ф. из [55, с. 24-25], которые, для удобства, сформулируем в виде следующих лемм.

Лемма 4.5. *Пусть $L(x)$ есть произвольная м.м.ф. в нуле (бесконечности). Тогда*

(а) *для любого $\gamma > 0$ при $x \rightarrow 0$ (∞)*

$$x^\gamma L(x) \rightarrow 0 \text{ } (0), \quad x^{-\gamma} L(x) \rightarrow \infty \text{ } (0),$$

(б) *для любого $\kappa \in (-\infty, \infty)$ функция $L^\kappa(x)$ является медленно меняющейся в нуле (бесконечности).*

Лемма 4.6. Если функции $L_1(x)$, $L_2(x)$ суть м.м.ф. в нуле (бесконечности), то функции $L_1(x) + L_2(x)$ и $L_1(x)L_2(x)$ также суть м.м.ф. в нуле (бесконечности).

Предположим $g(x) \in L_q[0, 1]$ и $\omega(g, \delta)_q = O(w(\delta))$ при $\delta \rightarrow +0$, где функция $w(\delta)$ удовлетворяет условию 2.1 МИ.

Справедливы следующие две леммы.

Лемма 4.7. Если $1 \leq q < \infty$, то при всех достаточно малых $\xi > 0$ справедлива оценка

$$\theta_q(g, \xi) = O(w(\xi)). \quad (4.8)$$

Доказательство. В рассматриваемом случае имеем

$$\theta_{1q}(g, \tau) \leq C \inf_{k \in \mathbb{N}} \left(w\left(\frac{1}{k}\right) + (k^2 \tau)^{\frac{1}{q}} \right), \quad (4.9)$$

где $\tau > 0$ и достаточно мало.

Положим справа в (4.9)

$$k = \left[\tau^{-\frac{3}{8}} \right], \quad (4.10)$$

где $[x]$ обозначает целую часть числа $x \in \mathbb{R}$.

Справедливы неравенства

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\left[\tau^{-\frac{3}{8}} \right]} \leq \frac{1}{\tau^{-\frac{3}{8}} - 1} = \frac{1}{\tau^{-\frac{1}{4}}(\tau^{-\frac{1}{8}} - \tau^{\frac{1}{4}})} < \frac{\tau^{\frac{1}{4}}}{2 - 1} = \tau^{\frac{1}{4}}, \quad (4.11)$$

при $\tau < 2^{-8}$ с учетом того, что $\tau \leq 1$.

Отсюда, а также из (4.9) и (4.10), ввиду монотонного неубывания функции $w(\delta)$ получим при достаточно малых $\tau > 0$

$$\begin{aligned} \theta_{1q}(g, \tau) &\leq C \left(w\left(\frac{1}{\left[\tau^{-\frac{3}{8}} \right]}\right) + \left(\left[\tau^{-\frac{3}{8}} \right]^2 \tau \right)^{\frac{1}{q}} \right) \leq \\ &\leq C \left(w\left(\tau^{\frac{1}{4}}\right) + \tau^{\frac{1}{4q}} \right) \leq C \left(w(\tau) + \tau^{\frac{1}{4q}} \right) \leq Cw(\tau), \end{aligned} \quad (4.12)$$

причем в предпоследнем неравенстве мы воспользовались тем, что функция $w(\delta)$ удовлетворяет свойству (в) в условии 2.1 МИ, а в последнем неравенстве — леммой 4.5. Используя монотонность функции $w(\delta)$, из оценки (4.12) найдем

$$\theta_q(g, \xi) = \sup_{\tau \in [0, \xi]} \theta_{1q}(g, \tau) \leq C \sup_{\tau \in [0, \xi]} w(\tau) \leq Cw(\xi),$$

где $\xi > 0$ и достаточно мало.

Тем самым лемма 4.7 доказана. $\square$

Лемма 4.8. Если $1 \leq q < +\infty$, то справедлива оценка

$$H_q(\theta_q(g, \cdot), m) = O(H_q(w, m)) \quad \text{при } m \rightarrow \infty \quad (4.13)$$

и функция $H_q(w, m)$ есть м.м.ф. в бесконечности как функция от m .

Доказательство. С учетом предыдущей леммы

$$H_q^q(\theta_q(g, \cdot), m) = \int_{1/m}^1 \frac{1}{\xi} \theta_q^q(g, \xi) d\xi = O \left(\int_{1/m}^1 \frac{1}{\xi} w^q(\xi) d\xi \right) = O(H_q^q(w, m)), \quad (4.14)$$

т. е. оценка (4.13) установлена.

Преобразуем интеграл, фигурирующий в соотношении (4.14), делая замену переменной интегрирования $\xi = \frac{1}{x}$. Будем иметь

$$H_q^q(w, m) = \int_{1/m}^1 \frac{1}{\xi} w^q(\xi) d\xi = \int_1^m \frac{1}{x} w^q\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_1^m \frac{1}{x} \tilde{w}\left(\frac{1}{x}\right) dx, \quad (4.15)$$

где обозначено $\tilde{w}(\xi) = w^q(\xi)$.

Так как функция $w(\xi)$ есть м.м.ф. в нуле, то на основании свойства (б) леммы 4.5 получим, что и $\tilde{w}(\xi)$ есть м.м.ф. в нуле. А тогда по определению 2.1 функция $\tilde{w}\left(\frac{1}{x}\right)$ будет м.м.ф. в бесконечности.

Тогда заключительное утверждение доказываемой леммы 4.8 следует из результата, который установлен в [74] и приведен в качестве упражнения в [55, упр. 2.2, с. 82]. Сформулируем этот результат в виде леммы.

Лемма 4.9. *Если функция $L(x)$ есть м.м.ф. в бесконечности, то такова же и функция*

$$\int_A^x \frac{1}{t} L(t) dt,$$

где $A > 0$ есть константа.

На основании утверждения этой леммы $H_q^q(w, m)$ есть м.м.ф. в бесконечности как функция от m . Но тогда, используя свойство (б) леммы 4.5, получим, что и $H_q(w, m)$ есть м.м.ф. в бесконечности. Тем самым лемма 4.8 доказана. $\square$

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ОБ ОЦЕНКЕ РАЗНОСТИ ЧАСТИЧНЫХ СУММ И ТЕОРЕМ РАВНОСХОДИМОСТИ

Доказательство теоремы 2.2. Справедливость теоремы 2.2 в случае общих модулей непрерывности следует из теоремы 2.1 и теоремы 3.4 об оценке разности частичных тригонометрических сумм на основании соотношения

$$\begin{aligned} \Psi_m(x) &= S_m(f, x) - \sigma_m(f, x) = \\ &= S_m(f, x) - V(x)\sigma_m(f, x) + V(x)\left(\sigma_m(V^{-1}f, x) - V^{-1}(x)\sigma_m(f, x)\right) = \\ &= \Phi_m(x) + V(x)\left(\sigma_m(V^{-1}f, x) - V^{-1}(x)\sigma_m(f, x)\right) = \\ &= \Phi_m(x) - V(x)\left(\tilde{\mathcal{W}}(x)\sigma_m(f, x) - \sigma_m(\tilde{\mathcal{W}}f, x)\right) =: \Phi_m(x) - V(x)\tilde{\Theta}_m(x), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где используются обозначения (2.3), $V(x)$ определяется формулой (2.4), $\tilde{\mathcal{W}}(x) := V^{-1}(x)$ и функция $\tilde{\Theta}_m(x)$ есть аналог функции $\Theta_m(x)$, определенной формулой (3.3), в которой вместо функции $\mathcal{W}(x)$ стоит функция $\tilde{\mathcal{W}}(x)$.

Для функции $\tilde{\mathcal{W}}(x)$ справедлива формула

$$\tilde{\mathcal{W}}(x) = V^{-1}(x) = \exp\left(\frac{1}{n} \int_0^x p_1(\tau) d\tau\right) = 1 + \int_0^x \tilde{g}(t) dt, \quad (5.2)$$

где

$$\tilde{g}(t) := \frac{1}{n} p_1(t) V^{-1}(t). \quad (5.3)$$

Ясно, что если $p_1(t) \in L_q[0, 1]$, то и $\tilde{g}(t) \in L_q[0, 1]$, и наоборот. Следовательно, функция $\tilde{\mathcal{W}}(x) \equiv V^{-1}(x)$ есть аналог функции $\mathcal{W}(x)$ в теореме 3.4 для случая общих модулей непрерывности, и для нее вместо формулы (3.2) справедлива формула (5.2), в которой $\tilde{g}(t) \in L_q[0, 1]$. Тогда на основании теоремы 3.4 получим оценку

$$\|\tilde{\Theta}_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, \tilde{g}, K) \tilde{Q}_m, \quad (5.4)$$

где

$$\tilde{Q}_m = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \omega\left(f, \frac{1}{k}\right)_r H_q(\theta_q(\tilde{g}, \cdot), m) + \omega\left(\tilde{g}, \frac{1}{k}\right)_q + \frac{k^4 \ln m}{m} \right\}; \quad (5.5)$$

$$H_q(\theta_q(\tilde{g}, \cdot), m) = \left(\int_{1/m}^1 \frac{1}{\xi} \theta_q^q(\tilde{g}, \xi) d\xi \right)^{1/q} \quad (1 \leq q < \infty), \quad H_\infty(\theta_\infty(\tilde{g}, \cdot), m) = 1; \quad (5.6)$$

$$\theta_q(\tilde{g}, \xi) = \sup_{\tau \in [0, \xi]} \theta_{1q}(\tilde{g}, \tau) \quad \text{при } 1 \leq q < \infty \quad \text{и} \quad \theta_\infty(\tilde{g}, \xi) = 1, \quad (5.7)$$

$$\theta_{1q}(\tilde{g}, \tau) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \omega\left(\tilde{g}, \frac{1}{k}\right)_q + (k^2 \tau)^{\frac{1}{q}} \right\} \quad \text{при } 1 \leq q < \infty. \quad (5.8)$$

Оценим все объекты, содержащие функцию $\tilde{g}(x)$, через аналогичные объекты, содержащие только функцию $p_1(x)$. Если обозначить $v^* := \max_{t \in [0, 1]} |V^{-1}(t)|$, то на основании (5.3) получим

$$\begin{aligned} \omega(\tilde{g}, \delta)_q &= \frac{1}{n} \sup_{0 < h \leq \delta} \left(\int_0^{1-h} |p_1(t+h)V^{-1}(t+h) - p_1(t)V^{-1}(t)|^q dt \right)^{1/q} \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \left(\sup_{0 < h \leq \delta} \left(\int_0^{1-h} |p_1(t+h) - p_1(t)|^q |V^{-1}(t+h)|^q dt \right)^{1/q} + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{0 < h \leq \delta} \left(\int_0^{1-h} |p_1(t)|^q |V^{-1}(t+h) - V^{-1}(t)|^q dt \right)^{1/q} \right) \leq \\ &\leq \frac{v^*}{n} \omega(p_1, \delta)_q + \|p_1(x)\|_q \sup_{0 < h \leq \delta} \sup_{t \in [0, 1-h]} |V^{-1}(t+h) - V^{-1}(t)| = \\ &= \frac{v^*}{n} \omega(p_1, \delta)_q + \|p_1(x)\|_q \sup_{0 < h \leq \delta} \sup_{t \in [0, 1-h]} \left| \int_0^{1-h} \tilde{g}(\tau) d\tau \right|. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Так как по условию $p_1(x) \in L_q[0, 1]$, то из равенства (5.3) и леммы 4.3 следует

$$\int_t^{t+h} |\tilde{g}(\tau)| d\tau \leq \frac{v^*}{n} \int_t^{t+h} |p_1(\tau)| d\tau \leq C(p_1) h^{\frac{1}{r}} \theta_q(p_1, h), \quad (5.10)$$

где $\theta_q(p_1, h)$ определяется формулами (2.8)-(2.9).

Из (5.9)-(5.10) будем иметь

$$\omega(\tilde{g}, \delta)_q \leq C(p_1) \left(\omega(p_1, \delta)_q + \delta^{\frac{1}{r}} \theta_q(p_1, \delta) \right). \quad (5.11)$$

Учитывая эту оценку в (5.8), получим

$$\theta_{1q}(\tilde{g}, \tau) \leq C(p_1) \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \omega\left(p_1, \frac{1}{k}\right)_q + \frac{1}{k^{1/r}} \theta_q\left(p_1, \frac{1}{k}\right) + (k^2 \tau)^{\frac{1}{q}} \right\} = C(p_1) \hat{\theta}_{1q}(p_1, \tau), \quad (5.12)$$

где используется обозначение (2.11).

На основании этой оценки из (5.7) следует

$$\theta_q(\tilde{g}, \xi) \leq C(p_1) \sup_{\tau \in [0, \xi]} \hat{\theta}_{1q}(p_1, \tau) = C(p_1) \hat{\theta}_q(p_1, \xi), \quad (5.13)$$

где используется обозначение (2.10).

Наконец, из (5.6) и (5.13) получим

$$H_q(\theta_q(\tilde{g}, \cdot), m) \leq C(p_1) \left(\int_{1/m}^1 \frac{1}{\xi} \hat{\theta}_q^q(p_1, \xi) d\xi \right)^{1/q} = C(p_1) H_q(\hat{\theta}_q(p_1, \cdot), m). \quad (5.14)$$

Таким образом, из (5.4), (5.5), (5.11) и (5.14) следует

$$\tilde{Q}_m \leq C(f, p_1, K) \hat{Q}_m, \quad (5.15)$$

где

$$\hat{Q}_m = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ H_q(\hat{\theta}_q(p_1, \cdot), m) \omega\left(f, \frac{1}{k}\right)_r + \omega\left(p_1, \frac{1}{k}\right)_q + \frac{1}{k^{1/r}} \theta_q\left(p_1, \frac{1}{k}\right) + \frac{k^4 \ln m}{m} \right\}. \quad (5.16)$$

Следовательно, из соотношений (5.1), (5.4), (5.15), (5.16), а также из теоремы 2.1 получим утверждение доказываемой теоремы. Тем самым, теорема 2.2 полностью доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2.4. Предположим теперь, что выполняется условие (2.15), а функции $\Omega_1(\delta)$ и $\Omega_2(\delta)$ удовлетворяют условию 2.1 МИ. Учитывая условие (2.15) в теореме 2.2, получим

$$B_m \leq C(f, p_1) \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \left(\ln m \Omega_2\left(\frac{1}{k}\right) + 1 + H_q(\hat{\theta}_q(p_1, \cdot), m) + \frac{k^{2/q}}{m^{1/q}} + \frac{k^2 \ln m}{m} \right) \Omega_1\left(\frac{1}{k}\right) + \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{k^2 \ln m}{m} \right) \Omega_2\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k^{1/r}} \theta_q\left(p_1, \frac{1}{k}\right) + \frac{k^{2+2/q}}{m^{1+1/q}} + \frac{k^4 \ln m}{m} \right\}. \quad (5.17)$$

На основании леммы 4.7 и условия (2.15) при $1 \leq q < \infty$ справедлива оценка

$$\theta_q\left(p_1, \frac{1}{k}\right) = O\left(\Omega_2\left(\frac{1}{k}\right)\right). \quad (5.18)$$

Если же $q = \infty$, то

$$\theta_\infty\left(p_1, \frac{1}{k}\right) = 1 \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}. \quad (5.19)$$

На основании леммы 4.7 при $1 \leq q < \infty$ получается оценка

$$\hat{\theta}_q(p_1, \xi) = O(\Omega_2(\xi)).$$

С учетом этой оценки и леммы 4.8 в итоге будем иметь при $1 \leq q < +\infty$ оценку

$$H_q(\hat{\theta}_q(p_1, \cdot), m) = O(H_q(\Omega_2, m)) \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \quad (5.20)$$

и функция $H_q(\Omega_2, m)$ есть м.м.ф. в бесконечности как функция от m . Используя этот факт, оценки (5.17), (5.18), (5.20), свойства м.м.ф., даваемых леммами 4.5 и 4.6, получаем оценку (2.19) в случае $1 \leq q < \infty$. В случае $q = \infty$ рассуждения тривиальным образом видоизменяются и также получается оценка (2.19). Из оценки (2.19) вытекают достаточные условия равносходимости (2.16) и (2.18). Тем самым теорема 2.4 полностью доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2.6. Предположим, что выполняется условие (2.20).

Для доказательства теоремы 2.6 воспользуемся теоремой 2.4.

Введем непрерывные неубывающие функции $\hat{\Omega}_1(\delta)$ и $\hat{\Omega}_2(\delta)$ на отрезке $[0, 1]$, которые удовлетворяют условию 2.1 МИ и на некотором достаточно малом отрезке $[0, \varepsilon_0] \subset [0, 1]$ выполняются равенства

$$\hat{\Omega}_1(\delta) = \frac{1}{\ln^\alpha 1/\delta}, \quad \hat{\Omega}_2(\delta) = \frac{1}{\ln^\beta 1/\delta}, \quad (\hat{\Omega}_1(0) := 0, \hat{\Omega}_2(0) := 0). \quad (5.21)$$

Вне отрезка $[0, \varepsilon_0]$ конкретный вид функций $\hat{\Omega}_1(\delta)$ и $\hat{\Omega}_2(\delta)$ не принципиален. Ясно, что таких функций существует бесконечно много.

С учетом соотношений (5.21) из оценок (2.19) теоремы 2.4 для любого компакта $K \subset (0, 1)$ при $m \gg 1$ следуют оценки

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, p_1, K) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^\alpha m} H_q(\hat{\Omega}_2, m) + \frac{1}{\ln^\alpha m} + \frac{1}{\ln^\beta m} \right). \quad (5.22)$$

В случае $1 \leq q < \infty$ из формулы (2.7) для функции $H_q(h, m)$ и равенства (5.21) для функции $\hat{\Omega}_2(\delta)$, будем иметь

$$\begin{aligned}
H_q^q(\hat{\Omega}_2, m) &= \int_{1/m}^1 \frac{1}{\xi} \hat{\Omega}_2^q(\xi) d\xi = \int_{1/m}^{\varepsilon_0} \frac{1}{\xi} \hat{\Omega}_2^q(\xi) d\xi + \int_{\varepsilon_0}^1 \frac{1}{\xi} \hat{\Omega}_2^q(\xi) d\xi = \\
&= \int_{1/m}^{\varepsilon_0} \frac{1}{\xi} \frac{1}{\ln^{\beta q} \frac{1}{\xi}} d\xi + C = \int_{1/m}^m \frac{1}{\tau} \frac{1}{\ln^{\beta q} \tau} d\tau + C = \int_{1/\varepsilon_0}^m \frac{1}{\ln^{\beta q} \tau} d \ln \tau + C.
\end{aligned}$$

Отсюда следуют оценки:

$$\begin{cases} H_q^q(\hat{\Omega}_2, m) \leq C \left(\frac{\ln m}{\ln^{\beta q} m} + 1 \right), & \text{если } \beta q \neq 1, \\ H_q^q(\hat{\Omega}_2, m) \leq C(\ln \ln m + 1) \leq C \ln \ln m, & \text{если } \beta q = 1. \end{cases}$$

Таким образом, в случае $1 \leq q < \infty$ получим:

$$\begin{cases} H_q(\hat{\Omega}_2, m) \leq C \left(\frac{\ln^{\frac{1}{q}} m}{\ln^{\beta} m} + 1 \right), & \text{если } \beta q \neq 1 \\ H_q(\hat{\Omega}_2, m) \leq C (\ln \ln m)^{1/q}, & \text{если } \beta q = 1. \end{cases} \quad (5.23)$$

Если же $q = \infty$, то

$$H_{\infty}(\hat{\Omega}_2, m) = 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (5.24)$$

Учитывая оценки (5.23) в (5.22), будем иметь при $1 \leq q < \infty$:

- если $\beta q \neq 1$, то

$$\begin{aligned}
\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} &\leq C(f, p_1, K) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^{\alpha} m} \left(\frac{\ln^{\frac{1}{q}} m}{\ln^{\beta} m} + 1 \right) + \frac{1}{\ln^{\alpha} m} + \frac{1}{\ln^{\beta} m} \right) = \\
&\leq C(f, p_1, K) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^{\alpha} m} + \frac{1}{\ln^{\beta} m} \right), \quad (5.25)
\end{aligned}$$

- если $\beta q = 1$, то

$$\begin{aligned}
\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} &\leq C(f, p_1, K) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{(\ln \ln m)^{1/q}}{\ln^{\alpha} m} + \frac{1}{\ln^{\alpha} m} + \frac{1}{\ln^{\beta} m} \right) = \\
&\leq C(f, p_1, K) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{(\ln \ln m)^{1/q}}{\ln^{\alpha} m} + \frac{1}{\ln^{\beta} m} \right). \quad (5.26)
\end{aligned}$$

Если же $q = \infty$, то учитывая равенство (5.24) в (5.22), будем иметь

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, p_1, K) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^{\alpha} m} + \frac{1}{\ln^{\beta} m} \right). \quad (5.27)$$

Из оценок (5.25)–(5.27) следует утверждение теоремы 2.6. Тем самым теорема 2.6 полностью доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афонин С. В., Ломов И. С. О сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами нечетного порядка с негладкими коэффициентами // Докл. РАН. — 2010. — 431, № 2. — С. 151–153.
2. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961.
3. Винокуров В. А., Садовничий В. А. Равномерная равносходимость ряда Фурье по собственным функциям первой краевой задачи и тригонометрического ряда Фурье // Докл. РАН. — 2001. — 380, № 6. — С. 731–735.
4. Волков В. Е., Йо И. Оценка разности частичных сумм спектральных разложений, отвечающих двум операторам Шредингера // Дифф. уравн. — 1986. — 22, № 11. — С. 1865–1876.
5. Гомилко А. М., Радзиевский Г. В. Равносходимость рядов по собственным функциям обыкновенных функционально-дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. — 1991. — 316, № 2. — С. 265–270.

6. Ильин В. А. О равномерной равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье// Докл. АН СССР. — 1975. — 223, № 3. — С. 548–551.
7. Ильин В. А. О равносходимости разложений в тригонометрический ряд Фурье и по собственным функциям пучка М. В. Келдыша обыкновенных несамосопряженных дифференциальных операторов// Докл. АН СССР. — 1975. — 225, № 3. — С. 497–499.
8. Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. I// Дифф. уравн. — 1980. — 16, № 5. — С. 771–794.
9. Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. II// Дифф. уравн. — 1980. — 16, № 6. — С. 980–1009.
10. Ильин В. А. Равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям одномерного оператора Шредингера с комплексным потенциалом из класса L_1 // Дифф. уравн. — 1991. — 27, № 4. — С. 577–597.
11. Ильин В. А. Покомпонентная равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым вектор-функциям оператора Шредингера с матричным неэрмитовым потенциалом, все элементы которого только суммируемы// Дифф. уравн. — 1991. — 27, № 11. — С. 1862–1879.
12. Ильин В. А., Йо И. Оценка разности частичных сумм разложений, отвечающих двум произвольным неотрицательным самосопряженным расширениям двух операторов типа Штурма–Лиувилля, для абсолютно непрерывной функции// Докл. АН СССР. — 1978. — 243, № 6. — С. 1381–1383.
13. Ильин В. А., Йо И. Оценка разности частичных сумм разложений, отвечающих двум произвольным неотрицательным самосопряженным расширениям двух операторов типа Штурма–Лиувилля, для абсолютно непрерывной функции// Дифф. уравн. — 1979. — 15, № 7. — С. 1175–1193.
14. Корнев В. В., Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях// Мат. сб. — 2001. — 192, № 10. — С. 33–55. — DOI: 10.4213/sm601.
15. Купцов Н. П. Теорема равносходимости для разложения Фурье в пространствах Банаха// Мат. заметки. — 1967. — 1, № 4. — С. 469–474.
16. Курбанов В. М. О неравенстве Хаусдорфа–Юнга для систем корневых вектор-функций дифференциального оператора n -го порядка// Дифф. уравн. — 1997. — 33, № 3. — С. 358–367.
17. Курбанов В. М. О скорости равносходимости спектральных разложений// Докл. РАН. — 1999. — 365, № 4. — С. 444–449.
18. Курбанов В. М. Равносходимость биортогональных разложений по корневым функциям дифференциальных операторов. I// Дифф. уравн. — 1999. — 35, № 12. — С. 1619–1633. — <http://mi.mathnet.ru/de10045>.
19. Курбанов В. М. Равносходимость биортогональных разложений по корневым функциям дифференциальных операторов. II// Дифф. уравн. — 2000. — 36, № 3. — С. 319–335. — <http://mi.mathnet.ru/de10107>.
20. Лажетич Н. О сходимости спектральных разложений, отвечающих неотрицательным самосопряженным расширениям оператора Штурма–Лиувилля, для функций из класса H_p^α // Дифф. уравн. — 1981. — 17, № 12. — С. 2149–2159.
21. Лажетич Н. О сходимости спектральных разложений, отвечающих неотрицательным самосопряженным расширениям оператора Штурма–Лиувилля, для функций из класса H_p^α // Дифф. уравн. — 1984. — 20, № 1. — С. 61–68.
22. Лебедь Г. К. Нервенства для полиномов и их производных// Докл. АН СССР. — 1957. — 117, № 4. — С. 570–572.
23. Ломов И. С. О скорости равносходимости рядов Фурье по собственным функциям операторов Штурма–Лиувилля в интегральной метрике// Дифф. уравн. — 1982. — 18, № 9. — С. 1480–1493.
24. Ломов И. С. Об аппроксимации функций на отрезке спектральными разложениями оператора Шредингера// Докл. РАН. — 1995. — 342, № 6. — С. 735–738.
25. Ломов И. С. Об аппроксимации функций на отрезке спектральными разложениями оператора Шредингера// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1995. — № 4. — С. 43–54.
26. Ломов И. С. Коэффициентные условия сходимости в $L_p(0, 1)$ биортогональных разложений функций// Дифф. уравн. — 1998. — 34, № 1. — С. 31–39.
27. Ломов И. С. О влиянии степени суммируемости коэффициентов дифференциальных операторов на скорость равносходимости спектральных разложений. I// Дифф. уравн. — 1998. — 34, № 5. — С. 619–628. — <https://mi.mathnet.ru/de9712>.

28. Ломов И. С. О влиянии степени суммируемости коэффициентов дифференциальных операторов на скорость равносходимости спектральных разложений. II// Дифф. уравн. — 1998. — 34, № 8. — С. 1066–1077. — <https://www.mathnet.ru/rus/de9749>.
29. Ломов И. С. Формула среднего значения Е. И. Моисеева для обыкновенных дифференциальных операторов четного порядка с негладкими коэффициентами// Дифф. уравн. — 1999. — 35, № 8. — С. 1046–1057.
30. Ломов И. С. О локальной сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами с негладкими коэффициентами. I// Дифф. уравн. — 2001. — 37, № 3. — С. 328–342. — DOI: 10.1023/A:1019242515472.
31. Ломов И. С. О локальной сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами с негладкими коэффициентами. II// Дифф. уравн. — 2001. — 37, № 5. — С. 648–660. — DOI: 10.1023/A:1019268615898.
32. Ломов И. С. Равномерная сходимость и сходимость в L_p на замкнутом интервале спектральных разложений неклассических обыкновенных дифференциальных операторов// Дисс. д.ф.-м.н. — Москва, 2002.
33. Ломов И. С. Сходимость биортогональных разложений функций на отрезке для дифференциальных операторов высокого порядка// Дифф. уравн. — 2005. — 41, № 5. — С. 632–646.
34. Ломов И. С. Зависимость оценок скорости локальной сходимости спектральных разложений от расстояния внутреннего компакта до границы// Дифф. уравн. — 2010. — 46, № 10. — С. 1409–1420.
35. Ломов И. С. Оценки скорости сходимости и равносходимости спектральных разложений обыкновенных дифференциальных операторов// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2015. — 15, № 4. — С. 405–418. — DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-405-418.
36. Ломов И. С., Марков А. С. Оценки скорости локальной сходимости спектральных разложений дифференциальных операторов четного порядка// Дифф. уравн. — 2013. — 49, № 5. — С. 557–563. — DOI: 10.1134/S03740641130.
37. Минкин А. М. Теоремы равносходимости для дифференциальных операторов// Дисс. к.ф.-м.н. — Саратов, 1982.
38. Минкин А. М. Разложение по собственным функциям одного класса негладких дифференциальных операторов// Дифф. уравн. — 1990. — 26, № 2. — С. 356–358.
39. Моисеев Е. И. Формула среднего значения для регулярного решения обыкновенного дифференциального уравнения// Докл. АН СССР. — 1975. — 223, № 3. — С. 562–565.
40. Моисеев Е. И. Асимптотическая формула среднего значения для регулярного решения дифференциального уравнения// Дифф. уравн. — 1980. — 16, № 5. — С. 827–844.
41. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
42. Никольская Е. И. Оценка разности между частичными суммами разложений абсолютно непрерывной функции по корневым функциям, отвечающим двум одномерным операторам Шредингера с комплексными потенциалами из класса L_1 // Дифф. уравн. — 1992. — 28, № 4. — С. 598–612.
43. Радзиевский Г. В. Краевые задачи и связанные с ними модули непрерывности// Функц. анализ и его прил. — 1995. — 29, № 3. — С. 87–90.
44. Рыхлов В. С. Разложение по собственным и присоединенным функциям квазидифференциальных и интегральных операторов// Дисс. к.ф.-м.н. — Саратов, 1981.
45. Рыхлов В. С. Асимптотика системы решений квазидифференциального уравнения// В сб.: «Дифференциальные уравнения и теория функций. Разложение и сходимость. Вып. 5». — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1983. — С. 51–59.
46. Рыхлов В. С. О скорости равносходимости для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n - 1)$ -й производной// Докл. АН СССР. — 1984. — 279, № 5. — С. 1053–1056.
47. Рыхлов В. С. Скорость равносходимости для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n - 1)$ -й производной// Дифф. уравн. — 1990. — 26, № 6. — С. 975–989.
48. Рыхлов В. С. О скорости равносходимости в аналоге теоремы Штейнгауза// ТВИМ. — 2015. — № 3. — С. 62–81.
49. Савчук А. М., Шкаликов А. А. Операторы Штурма—Лиувилля с сингулярными потенциалами// Мат. заметки. — 1999. — 66, № 6. — С. 897–912.
50. Садовничая И. В. О скорости равносходимости разложений в ряды по тригонометрической системе и по собственным функциям оператора Штурма—Лиувилля с потенциалом-распределением// Дифф. уравн. — 2008. — 44, № 5. — С. 656–664.
51. Садовничая И. В. О равносходимости разложений в ряды по собственным функциям операторов Штурма—Лиувилля с потенциалами-распределениями// Мат. сб. — 2010. — 201, № 9. — С. 61–76. — DOI: 10.4213/sm7598.

52. Садовничая И. В. Равносходимость в пространствах Соболева и Гельдера разложений по собственным функциям операторов Штурма—Лиувилля с потенциалами-распределениями// Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 162–163.
53. Садовничая И. В. Равносходимость спектральных разложений для системы Дирака с потенциалом из пространств Лебега// Тр. МИАН. — 2016. — 293. — С. 296–324. — DOI: 10.1134/S0371968516020205.
54. Садовничая И. В. Вопросы равносходимости для операторов Штурма—Лиувилля и Дирака// Дисс. д.ф.-м.н. — Москва, 2016.
55. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985.
56. Стеклов В. А. Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions définies par les equations différentielles du second ordre et leurs applications au problème du développement d'une fonction arbitraire en série procédant suivant les dites fonctions// Сообщ. Харьк. мат. об-ва. — 1907. — 10. — С. 97–199.
57. Стеклов В. А. Об асимптотическом выражении некоторых функций, определяемых линейным дифференциальным уравнением второго порядка и их применении к задаче разложения произвольной функции в ряд по этим функциям. — Харьков: Изд-во Харьк. гос. ун-та, 1956.
58. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и разложение произвольных функций в ряды. — Петроград: Тип. М. П. Фроловой, 1917.
59. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 2. — М.: ИЛ, 1961.
60. Хромов А. П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов// Мат. сб. — 1981. — 114, № 3. — С. 378–405. — DOI: 10.1070/SM1982v042n03ABEH002257.
61. Хромов А. П. Спектральный анализ дифференциальных операторов на конечном интервале// Дифф. уравн. — 1995. — 31, № 10. — С. 1691–1696.
62. Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям конечномерных возмущений оператора интегрирования// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2000. — № 2. — С. 21–26.
63. Хромов А. П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях// Мат. сб. — 2006. — 197, № 11. — С. 115–142. — DOI: 10.4213/sm1534.
64. Черных Н. И. О приближении функций полиномами со связями// Тр. МИАН. — 1967. — 88. — С. 75–130.
65. Юрко В. А. О дифференциальных операторах высших порядков с регулярной особенностью// Мат. сб. — 1995. — 186, № 6. — С. 133–160.
66. Alimov Š. A., Joó I. Equiconvergence theorem with exact order// Stud. Sci. Math. Hung. — 1980. — 15. — С. 431–439.
67. Djakov P., Mityagin B. Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions// Indiana Univ. Math. J. — 2012. — 61, № 1. — С. 359–398.
68. Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme// Math. Ann. — 1910. — 69. — С. 331–371. — DOI: 10.1007/BF01456326.
69. Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme// Math. Ann. — 1911. — 71. — С. 38–53. — DOI: 10.1007/BF01456927.
70. Hobson E. W. On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by series of normal functions// Proc. London Math. Soc. — 1908. — 6. — С. 349–395.
71. Karamata J. Sur certains «Tauberian theorems» de M. M. Hardy et Littlewood// Mathematica (Cluj). — 1930. — 3. — С. 33–48.
72. Kurbanov V. M. Dependence rate of equiconvergence on the module of continuity of potential of the Sturm—Liouville operator// Stud. Sci. Math. Hung. — 2004. — 41, № 3. — С. 347–364.
73. Minkin A. M. Equiconvergence theorems for differential operators// J. Math. Sci. — 1999. — 96, № 6. — С. 3631–3715. — DOI: 10.1007/bf02172664.
74. Parameswaran S. Partition functions whose logarithms are slowly oscillating// Trans. Am. Math. Soc. — 1961. — 100. — С. 217–240.
75. Radzieskii G. V. The rate of convergence of decompositions of ordinary functional-differential operators by eigenfunctions// В сб.: «Some Problems of the Modern Theory of Differential Equations». — Kiev: Inst. Math. Ukr. Nat. Acad. Sci., 1994. — С. 14–27.
76. Rykhlov V. S. On the rate of equiconvergence for differential operators with nonzero coefficient of the $(n - 1)$ -st derivative// Sov. Math. Dokl. — 1984. — 30, № 3. — С. 777–779.
77. Rykhlov V. S. Rate of equiconvergence for differential operators with nonzero coefficient of the $(n - 1)$ -th derivative// Differ. Equ. — 1990. — 26, № 6. — С. 704–715.
78. Rykhlov V. S. Equiconvergence rate in terms of general moduli of continuity for differential operators// Res. Math. — 1996. — 29. — С. 153–168. — DOI: 10.1007/BF03322215.

79. *Sadovnichaya I. V.* Equiconvergence theorems for Sturm–Liouville operators with singular potentials (rate of equiconvergence in W_2^θ -norm) // Eurasian Math. J. — 2010. — 1, № 1. — С. 137–146.
80. *Steinhaus H.* Sur le développement du produit de deux fonctions en une série de Fourier // Bull. Intern. de l'Acad. de Cracovie. — Kraków, 1913. — С. 113–116.
81. *Stone M. H.* A comparison of the series of Fourier and Birkhoff // Trans. Am. Math. Soc. — 1926. — 28. — С. 695–761.
82. *Tamarkine J. D.* Sur quelques points de la theory des equations differentielles lineaires ordinaires et sur la generalisation de la serie de Fourier // Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1912. — 34. — С. 345–382.
83. *Tamarkin J. D.* Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions // Math. Z. — 1928. — 27, № 1. — С. 1–54. — DOI: 10.1007/bf01171084.

В. С. РЫХЛОВ

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

E-mail: RykhlovVS@yandex.ru

UDC 517.984

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-452-477

EDN: FMENVB

Equiconvergence of expansions in root functions of a differential operator and in a trigonometric Fourier series

V. S. Rykhlov

Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky, Saratov, Russia

Abstract. We consider a non-self-adjoint ordinary differential operator defined on a finite interval by an n th-order linear differential expression with a nonzero coefficient of the $(n - 1)$ th derivative and two-point Birkhoff regular boundary conditions. We study the uniform equiconvergence of expansions of a given function in a biorthogonal series in eigenfunctions and associated functions (or, briefly, root functions) of this operator and in an ordinary trigonometric Fourier series, as well as an estimate of the difference of the corresponding partial sums (or, briefly, the rate of equiconvergence) under the most general conditions on the expanded function and the coefficient of the $(n - 1)$ th derivative. We obtain estimates for the difference of the expansions in terms of general (integral) moduli of continuity of the expanded function and the coefficient of the $(n - 1)$ th derivative uniform inside the fundamental interval. From these estimates, corresponding estimates are derived in the case where moduli of continuity are bounded from above by slowly varying functions and, in particular, by logarithmic functions. Based on this, sufficient conditions for equiconvergence in the indicated cases are formulated. These results are obtained using the author's previously obtained estimate for the difference between the partial sums of expansions of a given function in a biorthogonal series in eigenfunctions and associated functions of the differential operator under consideration and in a modified trigonometric Fourier series, as well as analogues of the Steinhaus theorem. The modification of the trigonometric Fourier series consisted in applying a very specific bounded operator to the ordinary trigonometric Fourier series expressed through the coefficient of the $(n - 1)$ th derivative and its inverse operator to the expanded function.

Keywords: non-self-adjoint ordinary differential operator, expansion in root functions, Fourier series, equiconvergence of expansion, rate of equiconvergence.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: V. S. Rykhlov, “Equiconvergence of expansions in root functions of a differential operator and in a trigonometric Fourier series,” *Sovrem. Mat. Fundam. Naprav.*, 2025, vol. **71**, No. 3, 452–477. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-452-477>

REFERENCES

1. S. V. Afonin and I. S. Lomov, “O skhodimosti biortogonal’nykh ryadov, svyazannykh s differentsial’nymi operatorami nechetnogo poryadka s negladkimi koeffitsientami” [On the convergence of biorthogonal series associated with odd-order differential operators with nonsmooth coefficients], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2010, **431**, No. 2, 151–153 (in Russian).
2. N. K. Bari, *Trigonometricheskie ryady* [Trigonometric Series], Fizmatgiz, Moscow, 1961 (in Russian).
3. V. A. Vinokurov and V. A. Sadovnichiy, “Ravnomernaya ravnoskhodimost’ ryada Fur’e po sobstvennym funktsiyam pervoy kraevoy zadachi i trigonometricheskogo ryada Fur’e” [Uniform equiconvergence of the Fourier series in eigenfunctions of the first boundary-value problem and the trigonometric Fourier series], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2001, **380**, No. 6, 731–735 (in Russian).
4. V. E. Volkov and I. Yo, “Otsenka raznosti chastichnykh summ spektral’nykh razlozheniy, otvechayushchikh dvum operatoram Shredingera” [Estimate of the difference between partial sums of spectral decompositions corresponding to two Schrödinger operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1986, **22**, No. 11, 1865–1876 (in Russian).
5. A. M. Gomilko and G. V. Radzievskiy, “Ravnoskhodimost’ ryadov po sobstvennym funktsiyam obyknennykh funktsional’no-differentsial’nykh operatorov” [Equiconvergence of series in eigenfunctions of ordinary functional differential operators], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1991, **316**, No. 2, 265–270 (in Russian).
6. V. A. Il’in, “O ravnomernoy ravnoskhodimosti razlozheniy po sobstvennym i prisoedinennym funktsiyam nesamosopryazhennogo obyknennogo differentsial’nogo operatora i v trigonometricheskiy ryad Fur’e” [On the uniform equiconvergence of expansions in eigenfunctions and associated functions of a non-self-adjoint ordinary differential operator and in a trigonometric Fourier series], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1975, **223**, No. 3, 548–551 (in Russian).
7. V. A. Il’in, “O ravnoskhodimosti razlozheniy v trigonometricheskiy ryad Fur’e i po sobstvennym funktsiyam puchka M. V. Keldysha obyknennykh nesamosopryazhennykh differentsial’nykh operatorov” [On the equiconvergence of expansions in trigonometric Fourier series and in eigenfunctions of the M. V. Keldysh pencil of ordinary non-self-adjoint differential operators], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1975, **225**, No. 3, 497–499 (in Russian).
8. V. A. Il’in, “Neobkhodimye i dostatochnye usloviya bazisnosti i ravnoskhodimosti s trigonometricheskim ryadom spektral’nykh razlozheniy. I” [Necessary and sufficient conditions for the basis property and equiconvergence with the trigonometric series of spectral decompositions. I], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1980, **16**, No. 5, 771–794 (in Russian).
9. V. A. Il’in, “Neobkhodimye i dostatochnye usloviya bazisnosti i ravnoskhodimosti s trigonometricheskim ryadom spektral’nykh razlozheniy. II” [Necessary and sufficient conditions for the basis property and equiconvergence with the trigonometric series of spectral decompositions. II], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1980, **16**, No. 6, 980–1009 (in Russian).
10. V. A. Il’in, “Ravnoskhodimost’ s trigonometricheskim ryadom razlozheniy po kornevym funktsiyam odnomernogo operatora Shredingera s kompleksnym potentsialom iz klassa L_1 ” [Equiconvergence with the trigonometric series of expansions in root functions of the one-dimensional Schrödinger operator with a complex potential of the class L_1], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1991, **27**, No. 4, 577–597 (in Russian).
11. V. A. Il’in, “Pokomponentnaya ravnoskhodimost’ s trigonometricheskim ryadom razlozheniy po kornevym vektor-funktsiyam operatora Shredingera s matrichnym neermitovym potentsialom, vse elementy kotorogo tol’ko summiruemy” [Componentwise equiconvergence with a trigonometric series of expansions in root vector functions of the Schrödinger operator with a matrix non-Hermitian potential, all elements of which are only summable], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1991, **27**, No. 11, 1862–1879 (in Russian).
12. V. A. Il’in and I. Yo, “Otsenka raznosti chastichnykh summ razlozheniy, otvechayushchikh dvum proizvol’nym neotritsatel’nym samosopryazhennym rasshireniyam dvukh operatorov tipa Shturma—Liuvillya, dlya absolutno nepreryvnoy funktsii” [Estimate of the difference of partial sums of expansions corresponding to two arbitrary nonnegative self-adjoint extensions of two Sturm—Liouville-type operators for an absolutely continuous function], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1978, **243**, No. 6, 1381–1383 (in Russian).
13. V. A. Il’in and I. Yo, “Otsenka raznosti chastichnykh summ razlozheniy, otvechayushchikh dvum proizvol’nym neotritsatel’nym samosopryazhennym rasshireniyam dvukh operatorov tipa Shturma—Liuvillya, dlya absolutno nepreryvnoy funktsii” [Estimate of the difference of partial sums of expansions corresponding to

- two arbitrary nonnegative self-adjoint extensions of two Sturm–Liouville-type operators for an absolutely continuous function], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1979, **15**, No. 7, 1175–1193 (in Russian).
14. V. V. Kornev and A. P. Khromov, “O ravnoskhodimosti razlozheniy po sobstvennym funktsiyam integral’nykh operatorov s yadrami, dopuskayushchimi razryvy proizvodnykh na diagonalnykh” [On the equiconvergence of expansions in eigenfunctions of integral operators with kernels that admit discontinuities of derivatives on the diagonals], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2001, **192**, No. 10, 33–55 (in Russian), DOI: 10.4213/sm601.
 15. N. P. Kuptsov, “Teorema ravnoskhodimosti dlya razlozhenii Fur’e v prostranstvakh Banakha” [Equiconvergence theorem for Fourier expansions in Banach spaces], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1967, **1**, No. 4, 469–474 (in Russian).
 16. V. M. Kurbanov, “O neravenstve Khausdorfa–Yunga dlya sistem kornevykh vektor-funktsiy differentsial’nogo operatora n -go poryadka” [On the Hausdorff–Young inequality for systems of root vector functions of an n th-order differential operator], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1997, **33**, No. 3, 358–367 (in Russian).
 17. V. M. Kurbanov, “O skorosti ravnoskhodimosti spektral’nykh razlozheniy” [On the rate of equiconvergence of spectral decompositions], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1999, **365**, No. 4, 444–449 (in Russian).
 18. V. M. Kurbanov, “Ravnoskhodimost’ biortogonal’nykh razlozheniy po kornevym funktsiyam differentsial’nykh operatorov. I” [Equiconvergence of biorthogonal expansions in root functions of differential operators. I], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1999, **35**, No. 12, 1619–1633 (in Russian). — <http://mi.mathnet.ru/de10045>.
 19. V. M. Kurbanov, “Ravnoskhodimost’ biortogonal’nykh razlozheniy po kornevym funktsiyam differentsial’nykh operatorov. II” [Equiconvergence of biorthogonal expansions in root functions of differential operators. II], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2000, **36**, No. 3, 319–335 (in Russian). — <http://mi.mathnet.ru/de10107>.
 20. N. Lazhetich, “O skhodimosti spektral’nykh razlozheniy, otvechayushchikh neotritsatel’nym samosopryazhennym rasshireniyam operatora Shturma–Liuvillya, dlya funktsiy iz klassa H_p^α ” [On the convergence of spectral expansions corresponding to nonnegative self-adjoint extensions of the Sturm–Liouville operator for functions of the class H_p^α], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1981, **17**, No. 12, 2149–2159 (in Russian).
 21. N. Lazhetich, “O skhodimosti spektral’nykh razlozheniy, otvechayushchikh neotritsatel’nym samosopryazhennym rasshireniyam operatora Shturma–Liuvillya, dlya funktsiy iz klassa H_p^α ” [On the convergence of spectral expansions corresponding to nonnegative self-adjoint extensions of the Sturm–Liouville operator for functions of the class H_p^α], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1984, **20**, No. 1, 61–68 (in Russian).
 22. G. K. Lebed’, “Nerventstva dlya polinomov i ikh proizvodnykh” [Inequalities for polynomials and their derivatives], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1957, **117**, No. 4, 570–572 (in Russian).
 23. I. S. Lomov, “O skorosti ravnoskhodimosti ryadov Fur’e po sobstvennym funktsiyam operatorov Shturma–Liuvillya v integral’noy metrike” [On the rate of equiconvergence of Fourier series in eigenfunctions of Sturm–Liouville operators in the integral metric], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1982, **18**, No. 9, 1480–1493 (in Russian).
 24. I. S. Lomov, “Ob approksimatsii funktsiy na otrezke spektral’nymi razlozheniyami operatora Shredingera” [On the approximation of functions on an interval by spectral decompositions of the Schrödinger operator], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1995, **342**, No. 6, 735–738 (in Russian).
 25. I. S. Lomov, “Ob approksimatsii funktsiy na otrezke spektral’nymi razlozheniyami operatora Shredingera” [On the approximation of functions on an interval by spectral decompositions of the Schrödinger operator], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 1995, No. 4, 43–54 (in Russian).
 26. I. S. Lomov, “Koeffitsientnye usloviya skhodimosti v $L_p(0,1)$ biortogonal’nykh razlozheniy funktsiy” [Coefficient conditions for convergence in $L_p(0,1)$ of biorthogonal expansions of functions], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1998, **34**, No. 1, 31–39 (in Russian).
 27. I. S. Lomov, “O vliyani stepeni summiruемости koeffitsientov differentsial’nykh operatorov na skorost’ ravnoskhodimosti spektral’nykh razlozheniy. I” [On the influence of the degree of summability of the coefficients of differential operators on the rate of equiconvergence of spectral decompositions. I], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1998, **34**, No. 5, 619–628 (in Russian). — <https://mi.mathnet.ru/de9712>.
 28. I. S. Lomov, “O vliyani stepeni summiruемости koeffitsientov differentsial’nykh operatorov na skorost’ ravnoskhodimosti spektral’nykh razlozheniy. II” [On the influence of the degree of summability of the coefficients of differential operators on the rate of equiconvergence of spectral decompositions. II], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1998, **34**, No. 8, 1066–1077 (in Russian). — <https://www.mathnet.ru/rus/de9749>.
 29. I. S. Lomov, “Formula srednego znacheniya E. I. Moiseeva dlya obyknovennykh differentsial’nykh operatorov chetnogo poryadka s negladkimi koeffitsientami” [E. I. Moiseev’s mean value formula for even-order ordinary

- differential operators with nonsmooth coefficients], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1999, **35**, No. 8, 1046–1057 (in Russian).
30. I. S. Lomov, “O lokal’noy skhodimosti biortogonal’nykh ryadov, svyazannykh s differentsial’nymi operatorami s negladykimi koeffitsientami. I” [On local convergence of biorthogonal series associated with differential operators with nonsmooth coefficients. I], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2001, **37**, No. 3, 328–342 (in Russian), DOI: 10.1023/A:1019242515472.
 31. I. S. Lomov, “O lokal’noy skhodimosti biortogonal’nykh ryadov, svyazannykh s differentsial’nymi operatorami s negladykimi koeffitsientami. II” [On local convergence of biorthogonal series associated with differential operators with nonsmooth coefficients. II], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2001, **37**, No. 5, 648–660 (in Russian), DOI: 10.1023/A:1019268615898.
 32. I. S. Lomov, “Ravnomernaya skhodimost’ i skhodimost’ v L_p na zamknutom intervale spektral’nykh razlozheniy neklassicheskikh obyknovennykh differentsial’nykh operatorov” [Uniform convergence and convergence in L_p on a closed interval of spectral expansions of nonclassical ordinary differential operators], *Diss. d.f.-m.n.* [Doctoral thesis], Moskva, 2002 (in Russian).
 33. I. S. Lomov, “Skhodimost’ biortogonal’nykh razlozheniy funktsiy na otrezke dlya differentsial’nykh operatorov vysokogo poriyadka” [Convergence of orthogonal expansions of functions on an interval for higher-order differential operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2005, **41**, No. 5, 632–646 (in Russian).
 34. I. S. Lomov, “Zavisimost’ otsenok skorosti lokal’noy skhodimosti spektral’nykh razlozheniy ot rasstoyaniya vnutrennego kompakta do granitsy” [Dependence of estimates of the rate of local convergence of spectral decompositions on the distance of the inner compact set to the boundary], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2010, **46**, No. 10, 1409–1420 (in Russian).
 35. I. S. Lomov, “Otsenki skorosti skhodimosti i ravnoskhodimosti spektral’nykh razlozheniy obyknovennykh differentsial’nykh operatorov” [Estimates of the rate of convergence and equiconvergence of spectral decompositions of ordinary differential operators], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.* [Bull. Saratov Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inf.], 2015, **15**, No. 4, 405–418 (in Russian), DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-405-418.
 36. I. S. Lomov and A. S. Markov, “Otsenki skorosti lokal’noy skhodimosti spektral’nykh razlozheniy differentsial’nykh operatorov chetnogo poriyadka” [Estimates of the rate of local convergence of spectral expansions of even-order differential operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2013, **49**, No. 5, 557–563 (in Russian), DOI: 10.1134/S037406411130.
 37. A. M. Minkin, “Teoremy ravnoskhodimosti dlya differentsial’nykh operatorov” [Equiconvergence theorems for differential operators], *Disc. k.f.-m.n.* [PhD thesis], Saratov, 1982 (in Russian).
 38. A. M. Minkin, “Razlozhenie po sobstvennym funktsiyam odnogo klassa negladykikh differentsial’nykh operatorov” [Expansion in eigenfunctions of one class of nonsmooth differential operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1990, **26**, No. 2, 356–358 (in Russian).
 39. E. I. Moiseev, “Formula srednego znacheniya dlya regulyarnogo resheniya obyknovennogo differentsial’nogo uravneniya” [The mean value formula for the regular solution of an ordinary differential equation], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1975, **223**, No. 3, 562–565 (in Russian).
 40. E. I. Moiseev, “Asimptoticheskaya formula srednego znacheniya dlya regulyarnogo resheniya differentsial’nogo uravneniya” [Asymptotic formula for the mean value of a regular solution of a differential equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1980, **16**, No. 5, 827–844 (in Russian).
 41. M. A. Naimark, *Lineynye differentsial’nye operatory* [Linear Differential Operators], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
 42. E. I. Nikol’skaya, “Otsenka raznosti mezhdu chastichnymi summami razlozheniy absolyutno nepreryvnoy funktsii po kornevym funktsiyam, otvechayushchim dvum odnomernym operatoram Shredingera s kompleksnymi potsentsialami iz klassa L_1 ” [Estimate of the difference between partial sums of expansions of an absolutely continuous function in root functions corresponding to two one-dimensional Schrödinger operators with complex potentials from the class L_1], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1992, **28**, No. 4, 598–612 (in Russian).
 43. G. V. Radzievskiy, “Kraevye zadachi i svyazannye s nimi moduli nepreryvnosti” [Boundary-value problems and related moduli of continuity], *Funkts. anal. i ego pril.* [Funct. Anal. Appl.], 1995, **29**, No. 3, 87–90 (in Russian).
 44. V. S. Rykhlov, “Razlozhenie po sobstvennym i prisoedinennym funktsiyam kvazidifferentsial’nykh i integral’nykh operatorov” [Expansion in eigenfunctions and associated functions of quasi-differential and integral operators], *Diss. k.f.-m.n.* [PhD thesis], Saratov, 1981 (in Russian).
 45. V. C. Rykhlov, “Asimptotika sistemy resheniy kvazidifferentsial’nogo uravneniya” [Asymptotics of a system of solutions of a quasi-differential equation], In: *Differentsial’nye uravneniya i teoriya funktsiy. Razlozhenie*

- i skhodimost'. Vyp. 5* [Differential Equations and Function Theory. Expansion and Convergence. Iss. 5], Saratov Univ., Saratov, 1983, pp. 51–59 (in Russian).
46. V. S. Rykhlov, “O skorosti ravnoskhodimosti dlya differentsial’nykh operatorov s nenulevym koeffitsientom pri $(n-1)$ -y proizvodnoy” [On the rate of equiconvergence for differential operators with a nonzero coefficient at the $(n-1)$ th derivative], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1984, **279**, No. 5, 1053–1056 (in Russian).
 47. V. S. Rykhlov, “Skorost’ ravnoskhodimosti dlya differentsial’nykh operatorov s nenulevym koeffitsientom pri $(n-1)$ -y proizvodnoy” [Rate of equiconvergence for differential operators with a nonzero coefficient at the $(n-1)$ th derivative], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1990, **26**, No. 6, 975–989 (in Russian).
 48. V. S. Rykhlov, “O skorosti ravnoskhodimosti v analoge teoremy Shteyngauza” [On the rate of equiconvergence in the analogue of the Steinhaus theorem], *TVIM* [Taurida Bull. Inf. Math.], 2015, No. 3, 62–81 (in Russian).
 49. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, “Operatory Shturma—Liuvillya s singulyarnymi potentsialami” [Sturm–Liouville operators with singular potentials], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1999, **66**, No. 6, 897–912 (in Russian).
 50. I. V. Sadovnichaya, “O skorosti ravnoskhodimosti razlozheniy v ryady po trigonometricheskoy sisteme i po sobstvennym funktsiyam operatora Shturma—Liuvillya s potentsialom-raspredeleniem” [On the rate of equiconvergence of expansions in series in the trigonometric system and in eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator with a distribution potential], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2008, **44**, No. 5, 656–664 (in Russian).
 51. I. V. Sadovnichaya, “O ravnoskhodimosti razlozheniy v ryady po sobstvennym funktsiyam operatorov Shturma—Liuvillya s potentsialami-raspredeleniyami” [On the equiconvergence of expansions in series in eigenfunctions of Sturm–Liouville operators with distribution potentials], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2010, **201**, No. 9, 61–76 (in Russian), DOI: 10.4213/sm7598.
 52. I. V. Sadovnichaya, “Ravnoskhodimost’ v prostranstvakh Soboleva i Gel’dera razlozheniy po sobstvennym funktsiyam operatorov Shturma—Liuvillya s potentsialami-raspredeleniyami” [Equiconvergence in Sobolev and Hölder spaces of expansions in eigenfunctions of Sturm–Liouville operators with distribution potentials], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2011, **437**, No. 2, 162–163 (in Russian).
 53. I. V. Sadovnichaya, “Ravnoskhodimost’ spektral’nykh razlozheniy dlya sistemy Diraka s potentsialom iz prostranstv Lebeaga” [Equiconvergence of spectral expansions for the Dirac system with a potential from Lebesgue spaces], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2016, **293**, 296–324 (in Russian), DOI: 10.1134/S0371968516020205.
 54. I. V. Sadovnichaya, “Voprosy ravnoskhodimosti dlya operatorov Shturma—Liuvillya i Diraka” [Equiconvergence issues for Sturm–Liouville and Dirac operators], *Diss. d.f.-m.n.* [Doctoral thesis], Moskva, 2016 (in Russian).
 55. E. Seneta, *Pravil’no menyayushchiesya funktsii* [Regularly Varying Functions], Nauka, Moscow, 1985 (Russian translation).
 56. V. A. Steklov, “Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions definies par les equations différentielles du second ordre et leurs applications au problème du développement d’une fonction arbitraire en série procédant suivant les dites fonctions” [Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions definies par les equations différentielles du second ordre et leurs applications au problème du développement d’une fonction arbitraire en série procédant suivant les dites fonctions], *Soobshch. Khar’k. mat. ob-va* [Commun. Kharkov Math. Soc.], 1907, **10**, 97–199 (in Russian).
 57. V. A. Steklov, *Ob asimptoticheskom vyrazhenii nekotorykh funktsiy, opredelyaemykh lineynym differentsial’nym uravneniem vtorogo poryadka i ikh primenenii k zadache razlozheniya proizvol’noy funktsii v ryad po etim funktsiyam* [On the Asymptotic Expression of Some Functions Defined by a Linear Second-Order Differential Equation and Their Application to the Problem of Expanding an Arbitrary Function into a Series in Terms of These Functions], Kharkov State Univ., Kharkov, 1956 (in Russian).
 58. Ya. D. Tamarkin, *O nekotorykh obshchikh zadachakh teorii obyknovennykh differentsial’nykh uravneniy i razlozhenie proizvol’nykh funktsiy v ryady* [On some general problems of the theory of ordinary differential equations and expansion of arbitrary functions into series], Frolova, Petrograd, 1917 (in Russian).
 59. E. Ch. Titchmarsh, *Razlozheniya po sobstvennym funktsiyam, svyazannye s differentsial’nymi uravneniyami vtorogo poryadka. T. 2* [Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations. Pt. 2], IL, Moscow, 1961 (Russian translation).
 60. A. P. Khromov, “Teoremy ravnoskhodimosti dlya integro-differentsial’nykh i integral’nykh operatorov” [Equiconvergence theorems for integro-differential and integral operators], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1981, **114**, No. 3, 378–405 (in Russian), DOI: 10.1070/SM1982v042n03ABEH002257.

61. A. P. Khromov, “Spektral’nyy analiz differentsial’nykh operatorov na konechnom intervale” [Spectral analysis of differential operators on a finite interval], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1995, **31**, No. 10, 1691–1696 (in Russian).
62. A. P. Khromov, “O ravnoskhodimosti razlozheniy po sobstvennym funktsiyam konechnomernykh vozmushcheniy operatora integrirovaniya” [On the equiconvergence of expansions in eigenfunctions of finite-dimensional perturbations of the integration operator], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 2000, No. 2, 21–26 (in Russian).
63. A. P. Khromov, “Integral’nye operatory s yadrami, razryvnymi na lomanykh liniyakh” [Integral operators with kernels discontinuous at broken lines], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2006, **197**, No. 11, 115–142 (in Russian), DOI: 10.4213/sm1534.
64. N. I. Chernykh, “O priblizhenii funktsiy polinomami so svyazyami” [On the approximation of functions by polynomials with constraints], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1967, **88**, 75–130 (in Russian).
65. V. A. Yurko, “O differentsial’nykh operatorakh vysshikh poryadkov s regul’arnoy osobennost’yu” [On higher-order differential operators with a regular singularity], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1995, **186**, No. 6, 133–160 (in Russian).
66. Š. A. Alimov and I. Joó, “Equiconvergence theorem with exact order,” *Stud. Sci. Math. Hung.*, 1980, **15**, 431–439.
67. P. Djakov and B. Mityagin, “Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions,” *Indiana Univ. Math. J.*, 2012, **61**, No. 1, 359–398.
68. A. Haar, “Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme,” *Math. Ann.*, 1910, **69**, 331–371, DOI: 10.1007/BF01456326.
69. A. Haar, “Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme,” *Math. Ann.*, 1911, **71**, 38–53, DOI: 10.1007/BF01456927.
70. E. W. Hobson, “On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by series of normal functions,” *Proc. London Math. Soc.*, 1908, **6**, 349–395.
71. J. Karamata, “Sur certains «Tauberian theorems» de M. M. Hardy et Littlewood,” *Mathematica (Cluj)*, 1930, **3**, 33–48.
72. V. M. Kurbanov, “Dependence rate of equiconvergence on the module of continuity of potential of the Sturm–Liouville operator,” *Stud. Sci. Math. Hung.*, 2004, **41**, No. 3, 347–364.
73. A. M. Minkin, “Equiconvergence theorems for differential operators,” *J. Math. Sci.*, 1999, **96**, No. 6, 3631–3715, DOI: 10.1007/bf02172664.
74. S. Parameswaran, “Partition functions whose logarithms are slowly oscillating,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1961, **100**, 217–240.
75. G. V. Radzieskii, “The rate of convergence of decompositions of ordinary functional-differential operators by eigenfunctions,” In: *Some Problems of the Modern Theory of Differential Equations*, Inst. Math. Ukr. Nat. Acad. Sci., Kiev, 1994, pp. 14–27.
76. V. S. Rykhlov, “On the rate of equiconvergence for differential operators with nonzero coefficient of the $(n - 1)$ -st derivative,” *Sov. Math. Dokl.*, 1984, **30**, No. 3, 777–779.
77. V. S. Rykhlov, “Rate of equiconvergence for differential operators with nonzero coefficient of the $(n - 1)$ -th derivative,” *Differ. Equ.*, 1990, **26**, No. 6, 704–715.
78. V. S. Rykhlov, “Equiconvergence rate in terms of general moduli of continuity for differential operators,” *Res. Math.*, 1996, **29**, 153–168, DOI: 10.1007/BF03322215.
79. I. V. Sadovnichaya, “Equiconvergence theorems for Sturm–Liouville operators with singular potentials (rate of equiconvergence in W_2^θ -norm),” *Eurasian Math. J.*, 2010, **1**, No. 1, 137–146.
80. H. Steinhaus, “Sur le développement du produit de deux fonctions en une série de Fourier,” *Bull. Intern. de l’Acad. de Cracovie*, Kraków, 1913, 113–116.
81. M. H. Stone, “A comparison of the series of Fourier and Birkhoff,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1926, **28**, 695–761.
82. J. D. Tamarkine, “Sur quelques points de la theory des equations differentielles lineaires ordinaires et sur la generalisation de la serie de Fourier,” *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 1912, **34**, 345–382.
83. J. D. Tamarkin, “Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions,” *Math. Z.*, 1928, **27**, No. 1, 1–54, DOI: 10.1007/bf01171084.

V. S. Rykhlov

Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky, Saratov, Russia

E-mail: RykhlovVS@yandex.ru