

УДК 517.984

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-478-507

EDN: DUAASN

ВТОРОЙ ЧЕТЫРЕХЭЛЕКТРОННЫЙ СИНГЛЕТ В ПРИМЕСНОЙ МОДЕЛИ ХАББАРДА

С. М. ТАШПУЛАТОВ, Р. Т. ПАРМАНОВА

Институт ядерной физики АН Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан

Аннотация. Мы рассматриваем оператор энергии четырехэлектронных систем в примесной модели Хаббарда и исследуем структуру существенного спектра и дискретных спектров для второго синглетного состояния системы. Показано, что в одномерном и двумерном случаях для существенного и дискретного спектра существуют такие ситуации: (а). существенный спектр оператора второго синглетного состояния четырех электронов в примесной модели Хаббарда состоит из объединения восьми сегментов, а дискретный спектр оператора состоит из шести собственных значений; (б). существенный спектр оператора состоит из объединения шестнадцати сегментов, а дискретный спектр оператора состоит из четырнадцати собственных значений; (в). существенный спектр оператора состоит из объединения тринадцати сегментов, а дискретный спектр оператора состоит из девяти собственных значений; (г). существенный спектр оператора состоит из объединения трех сегментов, а дискретный спектр оператора состоит из трех собственных значений. В трехмерном случае возникают такие ситуации: (а). существенный спектр оператора состоит из объединений восьми сегментов, а дискретный спектр оператора состоит из шести собственных значений, или существенный спектр оператора состоит из объединений трех сегментов, а дискретный спектр оператора состоит из трех собственных значений; (б). существенный спектр оператора состоит из объединений восьми сегментов, а дискретный спектр оператора состоит из шести собственных значений; (в). существенный спектр оператора состоит из объединений шестнадцати сегментов, а дискретный спектр оператора состоит из четырнадцати собственных значений; (г). существенный спектр оператора состоит из объединений трех сегментов, а дискретный спектр оператора состоит из трех собственных значений.

Ключевые слова: четырёхэлектронная система, примесная модель Хаббарда, квинтетные состояния, триплетные состояния, синглетные состояния, существенный спектр, дискретный спектр.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: С. М. Ташпулатов, Р. Т. Парманова. Второй четырехэлектронный синглет в примесной модели Хаббарда // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 3. С. 478–507. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-478-507>

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1963 г. почти одновременно и независимо появились три работы [5, 6, 10], в которых была предложена простая модель металла, ставшая фундаментальной моделью теории сильно коррелированных электронных систем. В этой модели рассматривается единственная невырожденная зона электронов с локальным кулоновским взаимодействием. Гамильтониан модели содержит

всего два параметра: параметр B перескока электрона с узла на соседний узел решетки и параметр U кулоновского отталкивания двух электронов в одном узле. В представлении вторичного квантования он записывается в виде

$$H = B \sum_{m,\tau,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m+\tau,\gamma} + U \sum_m a_{m,\uparrow}^+ a_{m,\uparrow} a_{m,\downarrow}^+ a_{m,\downarrow}. \quad (1.1)$$

Здесь через $a_{m,\gamma}^+$ ($a_{m,\gamma}$) обозначен Ферми-оператор рождения (уничтожения) электрона со спином γ на узле m , суммирование по τ означает суммирование по ближайшим соседям в решетке.

Предложенная в [5, 6, 10] модель получила название модели Хаббарда в честь Дж. Хаббарда, внесшего фундаментальный вклад в изучение статистической механики этой системы, хотя локальная форма кулоновского взаимодействия впервые введена Андерсоном для примесной модели в металле (см. [3]). Напомним также, что модель Хаббарда является частным случаем полярной модели Шубина—Вонсовского (см. [18]), появившейся за тридцать лет до [5, 6, 10]. В модели Шубина—Вонсовского наряду с кулоновским взаимодействием на одном узле учитывается взаимодействие электронов на соседних узлах.

Модель Хаббарда является приближением, которое используется в физике твердого тела для описания перехода между проводящим и диэлектрическим состояниями. Она представляет собой простейшую модель, описывающую взаимодействие частиц в решетке. Эти частицы могут быть фермионами или бозонами.

Модель Хаббарда и примесная модель Хаббарда в настоящее время являются одними из наиболее изученных многоэлектронных моделей металлов (см. [4, 9, 13], а также [1, гл. III]) и [11, 12, 14, 15, 26]. Обзор [4] суммирует результаты, полученные для модели Хаббарда.

Чем больше прогресса достигается в получении теоретических решений, тем яснее становится, что эта простая модель может демонстрировать поразительный набор фаз и режимов, многие из которых имеют явные параллели с наблюдаемым поведением широкого спектра сложных материалов. Например, имеются убедительные доказательства того, что ферромагнетизм, различные формы антиферромагнетизма, нетрадиционная сверхпроводимость, волны зарядовой плотности, электронные жидкокристаллические фазы и топологически упорядоченные фазы (такие как «спиновые жидкости»), среди прочих фаз, встречаются в конкретных реализациях модели Хаббарда.

Роль модели Хаббарда в изучении высокотемпературной сверхпроводимости в купратах обсуждается в работе [4]. Также показано, что положительные собственные значения модели Хаббарда (соответствующие отталкивательным эффективным взаимодействиям) ослабевают, а отрицательные увеличиваются. Различные собственные функции соответствуют, но не определяются полностью неприводимым представлением точечной группы кристалла в модели Хаббарда. Однако о точных результатах для спектра и волновых функций кристалла, описываемого моделью Хаббарда, известно мало, поэтому получение соответствующих утверждений представляет большой интерес. Спектр и волновые функции системы двух электронов в кристалле, описываемой гамильтонианом Хаббарда, изучались в работе [11]. Известно, что двухэлектронные системы могут находиться в двух состояниях: триплетном и синглетном. В [11] доказано, что спектр гамильтониана системы H^t в триплетном состоянии является чисто непрерывным и совпадает с отрезком $[m, M] = [A - 2B\nu, A + 2B\nu]$, где ν — размерность решетки, а оператор H^s системы в синглетном состоянии, помимо непрерывного спектра $[m, M]$, имеет единственное антисвязанное состояние при некоторых значениях квазиимпульса.

В работе [19] исследованы спектр и волновые функции системы трёх электронов в кристалле, описываемой гамильтонианом Хаббарда. В трёхэлектронных системах существует квартетное состояние и два типа дублетных состояний. В работе [19] доказано, что существенный спектр системы в квартетном состоянии состоит из одного сегмента, а связанное трёхэлектронное состояние отсутствует. Также показано, что существенный спектр системы в дублетных состояниях представляет собой объединение не более трёх сегментов, и доказано, что связанные трёхэлектронные состояния существуют в дублетных состояниях. Кроме того, спектры этих дублетных состояний различны, т. е. эти два дублетных состояния имеют разное происхождение.

1.1. Постановка задачи. В работе [20, 21] исследованы спектр и волновые функции системы четырёх электронов в кристалле, описываемой гамильтонианом Хаббарда. В четырёхэлектронных системах существует шесть состояний: квинтетное, триплетное трёхтипное и синглетное двухтипные. В работе [20] исследованы спектр и волновые функции четырёхэлектронных систем в модели Хаббарда в триплетных состояниях. В работе [21] рассмотрены спектр и волновые функции четырёхэлектронных систем в модели Хаббарда в квинтетном и синглетном состояниях.

В работе [21] доказано, что существенный спектр системы в квинтетном состоянии чисто непрерывный и состоит из отрезка $[4A - 8B\nu, 4A + 8B\nu]$, а четырехэлектронное связанное состояние или четырехэлектронное антисвязанное состояние отсутствуют.

Естественным образом возникает вопрос: если рассматривать четырёхэлектронную систему в примесной модели Хаббарда, то как может измениться спектр системы? И собственно это привело нас к рассмотрению следующей задачи. Кроме того, интенсивное развитие физики плёнок, а также использование плёнок в различных областях физики и техники обуславливают большой интерес к изучению локальных примесных состояний магнетиков. Поэтому важно изучать спектральные свойства электронных систем в примесной модели Хаббарда. Спектр оператора энергии трёхэлектронных систем в примесной модели Хаббарда во втором дублетном состоянии исследовался в [2]. Структура существенных спектров и дискретного спектра трёхэлектронных систем в примесной модели Хаббарда в квинтетном состоянии изучалась в [22]. Структура существенных спектров и дискретного спектра двухэлектронных систем в примесной модели Хаббарда в синглетном состоянии исследовалась в работах С. Ташпулатова [23, 24].

2. ЧЕТЫРЁХЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ В ПРИМЕСНОЙ МОДЕЛИ ХАББАРДА. ВТОРОЕ СИНГЛЕТНОЕ СОСТОЯНИЕ

В настоящей работе рассматривается оператор энергии четырёхэлектронных систем в примесной модели Хаббарда и исследуется структура существенного и дискретного спектров системы для второго синглетного состояния. Гамильтониан выбранной модели имеет вид

$$H = A \sum_{m,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m,\gamma} + B \sum_{m,\tau,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m+\tau,\gamma} + U \sum_m a_{m,\uparrow}^+ a_{m,\uparrow} a_{m,\downarrow}^+ a_{m,\downarrow} + (A_0 - A) \sum_{\gamma} a_{0,\gamma}^+ a_{0,\gamma} + (B_0 - B) \sum_{\tau,\gamma} (a_{0,\gamma}^+ a_{\tau,\gamma} + a_{\tau,\gamma}^+ a_{0,\gamma}) + (U_0 - U) a_{0,\uparrow}^+ a_{0,\uparrow} a_{0,\downarrow}^+ a_{0,\downarrow}. \quad (2.1)$$

Здесь A (A_0) — энергия электрона в регулярном (примесном) узле решетки; B (B_0) — интеграл переноса между электронами (между электроном и примесью) в соседних узлах (для удобства будем считать, что $B > 0$ и $B_0 > 0$), $\tau = \pm e_j$ для $j = 1, 2, \dots, \nu$, где e_j — единичные взаимно ортогональные векторы, т. е. суммирование ведется по ближайшим соседям, U (U_0) — параметр внутриузельного кулоновского взаимодействия двух электронов, соответственно, в регулярном (примесном) узле решетки; γ — индекс спина, $\gamma = \uparrow, \downarrow, \uparrow$ или $\downarrow$ обозначают значения спина $\frac{1}{2}$ или $-\frac{1}{2}$, а $a_{m,\gamma}^+$ и $a_{m,\gamma}$ — соответствующие операторы рождения и уничтожения электрона в узле $m \in Z^\nu$.

Четырёхэлектронное второе синглетное состояние соответствует четырем связанным состояниям электронов (или антисвязанным состояниям) с базисными функциями: ${}^2s_{p,q,r,t}^0 = a_{p,\uparrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{t,\downarrow}^+ \varphi_0$. Подпространство ${}^2\tilde{H}_s^0$, соответствующее четырехэлектронному второму синглетному состоянию, представляет собой множество всех векторов вида

$${}^2\psi_s^0 = \sum_{p,q,r,t \in Z^\nu} f(p, q, r, t) {}^2s_{p,q,r,t}^0, \quad f \in l_2^{as},$$

где l_2^{as} — подпространство антисимметричных функций в $l_2((Z^\nu)^4)$.

В четырехэлектронных системах существуют квинтетные состояния, синглетные состояния двух типов и триплетные состояния трех типов.

Энергия системы зависит от ее полного спина S . Наряду с гамильтонианом, электронная система N_e характеризуется полным спином S , $S = S_{max}, S_{max} - 1, \dots, S_{min}$, $S_{max} = \frac{N_e}{2}$,

$S_{min} = 0, \frac{1}{2}$. Гамильтониан (2.1) коммутирует со всеми компонентами оператора полного спина $S = (S^+, S^-, S^z)$, поэтому структура собственных функций и собственных значений системы зависит от S .

Гамильтониан H действует в антисимметричном пространстве Фока $\tilde{\mathbb{H}}_{as}$. Пусть φ_0 — вакуумный вектор в пространстве $\tilde{\mathbb{H}}_{as}$.

Четырехэлектронное второе синглетное состояние соответствует свободному движению четырех электронов по решетке и их взаимодействию.

Обозначим через ${}^2H_s^0$ ограничение оператора H на подпространство ${}^2\tilde{\mathbb{H}}_s^0$. Оператор ${}^2H_s^0$ мы называем оператором четырехэлектронного второго синглетного состояния.

Теорема 2.1 (см. [21]). *Подпространство ${}^2\tilde{\mathbb{H}}_s^0$ инвариантно относительно оператора H , а оператор ${}^2H_s^0$ является ограниченным самосопряженным оператором. Он порождает ограниченный самосопряженный оператор ${}^2\overline{H}_s^0$, действующий в пространстве l_2^{as} следующим образом:*

$$\begin{aligned} {}^2H_s^0 {}^2\psi_s^0 = & 4Af(p, q, r, t) + B \sum_{\tau} \left[f(p+\tau, q, r, t) + f(p, q+\tau, r, t) + f(p, q, r+\tau, t) + f(p, q, r, t+\tau) \right] + \\ & + U(\delta_{p,q} + \delta_{p,t} + \delta_{q,r} + \delta_{r,t})f(p, q, r, t) + (A_0 - A)(\delta_{p,0} + \delta_{q,0} + \delta_{r,0} + \delta_{t,0})f(p, q, r, t) + \\ & + (B_0 - B) \sum_{\tau} \left[\delta_{p,0}f(\tau, q, r, t) + \delta_{q,0}f(p, \tau, r, t) + \delta_{r,0}f(p, q, \tau, t) + \delta_{t,0}f(p, q, r, \tau) + \right. \\ & \left. + \delta_{p,\tau}f(0, q, r, t) + \delta_{q,\tau}f(p, 0, r, t) + \delta_{r,\tau}f(p, q, 0, t) + \delta_{t,\tau}f(p, q, r, 0) \right] + \\ & + (U_0 - U) \left[\delta_{p,q}\delta_{p,0} + \delta_{q,r}\delta_{q,0} + \delta_{p,t}\delta_{p,0} + \delta_{r,t}\delta_{r,0} \right] f(p, q, r, t), \quad (2.2) \end{aligned}$$

где $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера. Оператор ${}^2H_s^0$ действует на вектор ${}^2\psi_s^0 \in {}^2\tilde{\mathbb{H}}_s^0$ следующим образом:

$${}^2H_s^0 {}^2\psi_s^0 = \sum_{p,q,r,t} ({}^2\overline{H}_s^0 f)(p, q, r, t) {}^2s_{p,q,r,t}^0. \quad (2.3)$$

Доказательство. Действуем гамильтонианом H на векторы $\psi \in {}^2\tilde{\mathbb{H}}_s^0$, используя стандартные антикоммутационные соотношения между операторами рождения и уничтожения электронов в узлах решетки, $\{a_{m,\gamma}, a_{n,\beta}^+\} = \delta_{m,n}\delta_{\gamma,\beta}$, $\{a_{m,\gamma}, a_{n,\beta}\} = \{a_{m,\gamma}^+, a_{n,\beta}^+\} = \theta$, а также учитываем, что $a_{m,\gamma}\varphi_0 = \theta$, где θ — нулевой элемент ${}^2\tilde{\mathbb{H}}_s^0$. Это даёт утверждение теоремы. $\square$

Лемма 2.1. *Спектры операторов ${}^2H_s^0$ и ${}^2\overline{H}_s^0$ совпадают.*

Доказательство. Поскольку ${}^2H_s^0$ и ${}^2\overline{H}_s^0$ являются ограниченными самосопряженными операторами, то отсюда следует, что если $\lambda \in \sigma({}^2H_s^0)$, то критерий Вейля (см. [16, гл. VII, с. 262-263]) подразумевает, что существует последовательность $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ такая, что $\psi_i = \sum_{p,q,r,t} f_i(p, q, r, t) {}^2s_{p,q,r,t}^0$, $\|\psi_i\| = 1$, и

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|({}^2H_s^0 - \lambda)\psi_i\| = 0. \quad (2.4)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|({}^2H_s^0 - \lambda)\psi_i\|^2 &= \|({}^2H_s^0 - \lambda)\psi_i, ({}^2H_s^0 - \lambda)\psi_i\| = \\ &= \sum_{p,q,r,t} \|({}^2\overline{H}_s^0 - \lambda)f_i(p, q, r, t)\|^2 (a_{p,\uparrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{t,\downarrow}^+ \varphi_0, a_{p,\uparrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{t,\downarrow}^+ \varphi_0) = \\ &= \sum_{p,q,r,t} \|({}^2\overline{H}_s^0 - \lambda)f_i(p, q, r, t)\|^2 (a_{t,\downarrow} a_{r,\uparrow} a_{q,\downarrow} a_{p,\uparrow} a_{p,\uparrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{t,\downarrow}^+ \varphi_0, \varphi_0) = \\ &= \sum_{p,q,r,t} \|({}^2\overline{H}_s^0 - \lambda)f_i(p, q, r, t)\|^2 (\varphi_0, \varphi_0) = \|({}^2\overline{H}_s^0 - \lambda)F_i\|^2 \end{aligned}$$

и $\|F_i\|^2 = \sum_{p,q,r,t} |f_i(p,q,r,t)|^2 = \|\psi_i\|^2 = 1$. Отсюда и из формул (2.4) следует, что $\|{}^2\overline{H}_s^0 F_i - \lambda F_i\| \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, и $F_i = \sum_{p,q,r,t} f_i(p,q,r,t)$. Следовательно, $\lambda \in \sigma({}^2\overline{H}_s^0)$. Таким образом, $\sigma({}^2H_s^0) \subset \sigma({}^2\overline{H}_s^0)$.

С другой стороны, пусть $\bar{\lambda} \in \sigma({}^2\overline{H}_s^0)$. Опять же по критерию Вейля существует последовательность $\{F_i\}_{i=1}^\infty$ такая, что $\|F_i\| = 1$ и

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|({}^2\overline{H}_s^0 - \bar{\lambda})\psi_i\| = 0. \quad (2.5)$$

Приняв $F_i = \sum_{p,q,r,t} f_i(p,q,r,t)$, имеем $\|F_i\| = \left(\sum_{p,q,r,t} |f_i(p,q,r,t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ и заключаем, что $\|\psi_i\| = \|F_i\| = 1$ и $\|({}^2\overline{H}_s^0 - \bar{\lambda})F_i\| = \|({}^2\overline{H}_s^0 - \bar{\lambda})\psi_i\| \rightarrow 0$, поскольку $i \rightarrow \infty$. Это означает, что $\bar{\lambda} \in \sigma({}^2H_s^0)$ и, следовательно, $\sigma({}^2\overline{H}_s^0) \subset \sigma({}^2H_s^0)$. Эти два отношения дают равенство $\sigma({}^2\overline{H}_s^0) = \sigma({}^2H_s^0)$. $\square$

Обозначим через F преобразование Фурье: $F : l_2((T^\nu)^4) \rightarrow L_2((T^\nu)^4) \equiv {}^2\tilde{H}_s^0$, где T^ν — это ν -мерный тор, наделенный нормализованной мерой Лебега $d\lambda$, $\lambda(T^\nu) = 1$.

Положим ${}^2\tilde{H}_s^0 = F {}^2\overline{H}_s^0 F^{-1}$. В квазиимпульсном представлении оператор ${}^2\overline{H}_s^0$ действует в гильбертовом пространстве $L_2^{as}((T^\nu)^4)$, где L_2^{as} — подпространство антисимметричных функций в $L_2((T^\nu)^4)$.

Теорема 2.2 (см. [21]). *Преобразование Фурье оператора ${}^2\overline{H}_s^0$ — это ограниченный самосопряженный оператор ${}^2\tilde{H}_s^0 = F {}^2\overline{H}_s^0 F^{-1}$, действующий в пространстве ${}^2\tilde{H}_s^0$ по формуле*

$$\begin{aligned} {}^2\tilde{H}_s^0 \{ {}^2\psi_s^0 \} = & \{ 4A + 2B \sum_{i=1}^\nu [\cos \lambda_i + \cos \mu_i + \cos \gamma_i + \cos \theta_i] \} \tilde{f}(\lambda, \mu, \gamma, \theta) + \\ & + U \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, \mu, \lambda + \gamma - s, \eta) ds + U \int_{T^\nu} \tilde{f}(t, \mu, \gamma, \lambda + \theta - t) dt + U \int_{T^\nu} \tilde{f}(\lambda, \xi, \mu + \gamma - \xi, \theta) d\xi + \\ & + U \int_{T^\nu} \tilde{f}(\lambda, \eta, \gamma, \mu + \theta - \eta) d\eta + \varepsilon_1 \left[\int_{T^\nu} f(s, \mu, \gamma, \theta) ds + \int_{T^\nu} f(\lambda, t, \gamma, \theta) dt + \right. \\ & + \int_{T^\nu} f(\lambda, \mu, \xi, \theta) d\xi + \int_{T^\nu} f(\lambda, \mu, \gamma, \eta) d\eta \left. \right] + 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \sum_{i=1}^\nu [\cos \lambda_i + \cos s_i] \times \\ & \times \tilde{f}(s, \mu, \gamma, \theta) ds + 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \sum_{i=1}^\nu [\cos \mu_i + \cos t_i] \tilde{f}(\lambda, t, \gamma, \theta) dt + 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \sum_{i=1}^\nu [\cos \gamma_i + \cos \xi_i] \times \\ & \times \tilde{f}(\lambda, \mu, \xi, \theta) d\xi + 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \sum_{i=1}^\nu [\cos \theta_i + \cos \eta_i] \tilde{f}(\lambda, \mu, \gamma, \eta) d\eta + \varepsilon_3 \left[\int_{T^\nu} \int_{T^\nu} f(s, \mu, \xi, \theta) ds d\xi + \right. \\ & + \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} f(\lambda, t, \xi, \theta) dt d\xi + \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} f(s, \mu, \gamma, \eta) ds d\eta + \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} f(\lambda, t, \xi, \theta) dt d\xi \left. \right]. \quad (2.6) \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы 2.2 рассмотрим преобразование Фурье (2.2).

Используя тензорные произведения гильбертовых пространств и тензорные произведения операторов в гильбертовых пространствах [17], можно проверить, что оператор ${}^2\tilde{H}_0^s$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} {}^2\tilde{H}_0^s = & \{ \tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1 + 2U \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, \lambda + \mu - s) ds + 2(U_0 - U) \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, t) ds dt \} \otimes \\ & \otimes I \otimes I + I \otimes I \otimes \{ \tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1 + 2U \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, \lambda + \mu - s) ds + 2(U_0 - U) \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, t) ds dt \}, \quad (2.7) \end{aligned}$$

где

$$(\tilde{H}_1 \tilde{f})(\lambda) = \{A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \lambda_i]\} \tilde{f}(\lambda) + \varepsilon_1 \int_{T^{\nu}} \tilde{f}(s) ds + 2\varepsilon_2 \sum_{i=1}^{\nu} \int_{T^{\nu}} [\cos \lambda_i + \cos s_i] f(s) ds$$

— оператор энергии одноэлектронных систем в примесной модели Хаббарда.

Спектральные свойства четырёхэлектронных систем в примесной модели Хаббарда в первом синглетном состоянии тесно связаны со свойствами её одноэлектронных подсистем в примесной модели Хаббарда. Поэтому сначала исследуется спектр и локализованные примесные состояния одноэлектронных систем.

Использование плёнок в различных областях физики и техники обуславливает большой интерес к изучению локализованного примесного состояния (ЛПС) магнетика. В связи с этим изучение спектральных свойств электронных систем в примесной модели Хаббарда представляется важным.

3. ОДНОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ В ПРИМЕСНОЙ МОДЕЛИ ХАББАРДА

Гамильтониан одноэлектронных систем в примесной модели Хаббарда имеет вид

$$H = A \sum_{m,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m,\gamma} + B \sum_{m,\tau,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m+\tau,\gamma} + (A_0 - A) \sum_{\gamma} a_{0,\gamma}^+ a_{0,\gamma} + (B_0 - B) \sum_{\tau,\gamma} (a_{0,\gamma}^+ a_{\tau,\gamma} + a_{\tau,\gamma}^+ a_{0,\gamma}), \quad (3.1)$$

где A (A_0) — энергия электрона в регулярном (примесном) узле решетки; $B > 0$ ($B_0 > 0$) — интеграл переноса между электронами (между электроном и примесью) в соседних узлах, $\tau = \pm e_j$, $j = 1, 2, \dots, \nu$, где e_j — единичные взаимно ортогональные векторы, что означает, что суммирование производится по ближайшим соседям; γ — индекс спина, $\gamma = \uparrow$ или $\gamma = \downarrow$, $\uparrow$ и $\downarrow$ обозначают значения спина $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$, а $a_{m,\gamma}^+$ и $a_{m,\gamma}$ — соответствующие операторы рождения и уничтожения электрона в узле $m \in Z^{\nu}$.

Обозначим через $\tilde{H}_1$ гильбертово пространство, натянутое на векторы вида $\psi = \sum_p a_{p,\uparrow}^+ \varphi_0$. Оно называется *пространством одноэлектронных состояний* оператора H . Пространство $\tilde{H}_1$ инвариантно относительно действия оператора H . Обозначим через $H_1 = H|_{\tilde{H}_1}$ ограничение H на подпространство $\tilde{H}_1$.

Как и при доказательстве теоремы 2.1, используя стандартные антикоммутиационные соотношения между операторами рождения и уничтожения электронов в узлах решетки, получаем следующее утверждение.

Теорема 3.1 (см. [23]). *Подпространство $\tilde{H}_1$ инвариантно относительно действия оператора H , а ограничение H_1 является линейным ограниченным самосопряженным оператором, действующим в $\tilde{H}_1$ по формуле*

$$H_1 \psi = \sum_p (\bar{H}_1 f)(p) a_{p,\uparrow}^+ \varphi_0, \quad \psi \in \tilde{H}_1, \quad (3.2)$$

где $\bar{H}_1$ — линейный ограниченный самосопряженный оператор, действующий в пространстве l_2 по формуле

$$(\bar{H}_1 f)(p) = A f(p) + B \sum_{\tau} f(p + \tau) + \varepsilon_1 \delta_{p,0} f(p) + \varepsilon_2 \sum_{\tau} (\delta_{p,\tau} f(0) + \delta_{p,0} f(\tau)). \quad (3.3)$$

Лемма 3.1. *Спектры операторов $\bar{H}_1$ и H_1 совпадают.*

Доказательство леммы 3.1 аналогично доказательству леммы 2.1.

Как и в разделе 2, обозначим через $F : l_2(Z^{\nu}) \rightarrow L_2(T^{\nu}) \equiv \tilde{H}_1$ преобразование Фурье. Полагая $\tilde{H}_1 = F \bar{H}_1 F^{-1}$, получаем, что оператор $\bar{H}_1$ действует в гильбертовом пространстве $L_2(T^{\nu})$.

Используя равенство (3.3) и свойства преобразования Фурье, получаем следующее утверждение.

Теорема 3.2 (см. [23]). *Оператор $\tilde{H}_1$ действует в пространстве $\tilde{H}_1$ по формуле*

$$\begin{aligned}
(\tilde{H}_1 f)(\mu) = & [A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} \cos \mu_i] f(\mu) + \varepsilon_1 \int_{T^\nu} f(s) ds + \\
& + 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \mu_i + \cos s_i] f(s) ds, \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n), s = (s_1, \dots, s_n) \in T^\nu. \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Ясно, что непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_1$ не зависит от чисел ε_1 и ε_2 и равен отрезку $[m_\nu, M_\nu] = [A - 2B\nu, A + 2B\nu]$, где $m_\nu = \min_{x \in T^\nu} h(x)$, $M_\nu = \max_{x \in T^\nu} h(x)$ (здесь $h(x) = A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} \cos x_i$).

Для нахождения собственных значений и собственных функций оператора $\tilde{H}_1$ перепишем (3.4) в следующем виде:

$$\{A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} \cos \mu_i - z\} f(\mu) + \varepsilon_1 \int_{T^\nu} f(s) ds + 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \mu_i + \cos s_i] f(s) ds = 0, \quad (3.5)$$

где $z \in \mathbb{R}$.

Пусть $\nu = 1$. Обозначим $a = \int_T f(s) ds$, $b = \int_T f(s) \cos s ds$, $h(\mu) = A + 2B \cos \mu$. Из (3.5) следует, что

$$f(\mu) = -\frac{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \cos \mu)a + 2\varepsilon_2 b}{h(\mu) - z}. \quad (3.6)$$

Теперь подставим (3.6) в выражение для a и b , что даёт следующую систему двух линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
(1 + \int_T \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \cos s}{h(s) - z} ds) a + 2\varepsilon_2 \int_T \frac{ds}{h(s) - z} b &= 0; \\
\int_T \frac{\cos s (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \cos s)}{h(s) - z} ds a + (1 + 2\varepsilon_2 \int_T \frac{\cos s ds}{h(s) - z}) b &= 0.
\end{aligned}$$

Эта система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель $\Delta_1(z)$ этой системы равен нулю, где

$$\Delta_1(z) = (1 + \int_T \frac{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \cos s) ds}{h(s) - z}) \cdot (1 + 2\varepsilon_2 \int_T \frac{\cos s ds}{h(s) - z}) - 2\varepsilon_2 \int_T \frac{ds}{h(s) - z} \int_T \frac{\cos s (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \cos s)}{h(s) - z} ds.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.2. Если действительное число $z \notin [m_1, M_1]$, то z является собственным значением оператора $\tilde{H}_1$ тогда и только тогда, когда $\Delta_1(z) = 0$.

Доказательство. Если z_0 является собственным значением оператора $\tilde{H}_1$, то правая часть (3.5) равна $z_0 f(\lambda)$. Следовательно, $\Delta_1(z_0) = 0$.

Теперь пусть $\Delta_1(z_0) = 0$. Тогда однородное уравнение

$$f(\lambda) + \varepsilon_1 \int_{T^\nu} \frac{f(s) ds}{A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} \cos s_i - z} + 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \frac{\sum_{i=1}^{\nu} [\cos s_i + \cos \lambda_i] ds}{A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} \cos s_i - z} = 0$$

имеет нетривиальное решение. Следовательно, число $z = z_0$ является собственным значением оператора $\tilde{H}_1$. $\square$

Спектр оператора $\tilde{H}_1$ подробно описан в работах [23] и [24]. Для полноты изложения приведем эти теоремы.

Теорема 3.3 (см. [23, 24]).

- A) Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -2B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 2B$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z = A + \varepsilon_1$, лежащее ниже (выше) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- B) Если $\varepsilon_1 < 0$ и $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ (соответственно, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z = A - \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$ (соответственно, $z = A + \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$), лежащее ниже (выше) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- C) Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ или $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$, то оператор $\tilde{H}_1$ имеет два собственных значения $z_1 = A - \frac{2BE}{\sqrt{E^2 - 1}}$ и $z_2 = A + \frac{2BE}{\sqrt{E^2 - 1}}$, где $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$, лежащие ниже и выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- D) Если $\varepsilon_1 = \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_1 = -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z = A + \frac{2B(E^2 + 1)}{E^2 - 1}$ (соответственно, $z = A - \frac{2B(E^2 + 1)}{E^2 - 1}$), где $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$, лежащее выше (ниже) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- E) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}$, где $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$ и $\alpha > 1$, лежащее выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- F) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1} < m_1$, где $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$ и $\alpha > 1$, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- G) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения $z_1 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1} < m_1$ и $z_2 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1} > M_1$, где $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$ и $0 < \alpha < 1$, лежащие соответственно ниже и выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- H) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $-\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $-\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения $z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1} < m_1$ и $z_2 = A - \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1} > M_1$, где $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$ и $0 < \alpha < 1$, лежащие, соответственно, ниже и выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- I) Если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то оператор $\tilde{H}_1$ не имеет собственных значений, лежащих вне непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

Доказательство. В одномерном случае непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_1$ совпадает с отрезком $[m_1, M_1] = [A - 2B, A + 2B]$. Выражая все интегралы в уравнении $\Delta_1(z) = 0$ через интеграл

$J(z) = \int_T \frac{ds}{A + 2B \cos s - z}$, находим, что уравнение $\Delta_1(z) = 0$ эквивалентно уравнению

$$[\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)]J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0. \quad (3.7)$$

Более того, функция $J(z) = \int_T \frac{ds}{A + 2B \cos s - z}$ является дифференцируемой функцией на множестве $\mathbb{R} \setminus [m_1, M_1]$, при этом $J'(z) = \int_T \frac{ds}{[A + 2B \cos s - z]^2} > 0, z \notin [m_1, M_1]$. Таким образом, функция $J(z)$ является монотонно возрастающей функцией на $(-\infty, m_1)$ и на $(M_1, +\infty)$. Кроме того, $J(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$, $J(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow m_1 - 0$, $J(z) \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow M_1 + 0$, и $J(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$.

Если $\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A) \neq 0$, то из (3.7) следует, что

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}.$$

Функция $\psi(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}$ имеет точку асимптотического разрыва $z_0 = A - \frac{B^2 \varepsilon_1}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. Так как $\psi'(z) = \frac{(B + \varepsilon_2)^2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{[\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)]^2}$ для всех $z \neq z_0$, то функция $\psi(z)$ является монотонно возрастающей (убывающей) функцией на $(-\infty, z_0)$ и на $(z_0, +\infty)$ в случае $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 > 0$ (соответственно, $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 < 0$), кроме того, и если $\varepsilon_2 > 0$, или $\varepsilon_2 < -2B$, тогда $\psi(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$, $\psi(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow z_0 - 0$, $\psi(z) \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow z_0 + 0$, $\psi(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$ (соответственно, если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, тогда $\psi(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow -\infty$, $\psi(z) \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow z_0 - 0$, $\psi(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow z_0 + 0$, $\psi(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow +\infty$).

А) Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -2B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 2B$), то уравнение для собственных значений и собственных функций (3.7) имеет вид

$$\{\varepsilon_1 B^2 - B^2(z - A)\}J(z) = 0. \quad (3.8)$$

Ясно, что $J(z) \neq 0$ для значений $z \notin \sigma_{cont}(\tilde{H}_1)$. Следовательно, $\varepsilon_1 - z + A = 0$, т. е. $z = A + \varepsilon_1$. Если $\varepsilon_1 < -2B$ ($\varepsilon_1 > 2B$), то это собственное значение лежит ниже (выше) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

В) Если $\varepsilon_1 < 0$ и $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ (соответственно $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$), то уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид $\varepsilon_1 B^2 J(z) + B^2 = 0$, т. е. $J(z) = -\frac{1}{\varepsilon_1}$. Ясно, что интеграл $J(z)$, вычисленный снизу (сверху) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$, больше (меньше) нуля, следовательно, $\varepsilon_1 < 0$ ($\varepsilon_1 > 0$). Вычисленный снизу непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ интеграл $J(z) = \int_{T^+} \frac{ds}{A + 2B \cos s - z}$ имеет уравнение вида

$$\frac{1}{\sqrt{(A - z)^2 - 4B^2}} = -\frac{1}{\varepsilon_1}.$$

Это уравнение имеет решение $z = A - \sqrt{\varepsilon_1^2 + 4B^2}$, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ уравнение принимает вид

$$-\frac{1}{\sqrt{(z - A)^2 - 4B^2}} = -\frac{1}{\varepsilon_1}.$$

Это уравнение имеет решение вида $z = A + \sqrt{\varepsilon_1^2 + 4B^2}$, лежащее выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

С) Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ или $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$, то уравнения для собственных значений и собственных функций принимают вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2$$

или

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}.$$

Обозначим $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. Тогда $J(z) = -\frac{E}{z - A}$ или $J(z) = \frac{E}{A - z}$. Ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имеем уравнение вида

$$\frac{1}{\sqrt{(A - z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A - z}.$$

Это уравнение имеет решение $z = A - \frac{2BE}{\sqrt{E^2 - 1}}$. Очевидно, что $E^2 > 1$. Это собственное значение, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид

$$-\frac{1}{\sqrt{(z - A)^2 - 4B^2}} = -\frac{E}{z - A}.$$

Отсюда находим $z = A + \frac{2BE}{\sqrt{E^2 - 1}}$. Это собственное значение лежит выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

D) Если $\varepsilon_1 = \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, то уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2B)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2.$$

Отсюда

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2B)}. \quad (3.9)$$

Обозначим $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. В первом случае рассмотрим уравнение (3.9) ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Из уравнения (3.9) получаем

$$\frac{1}{\sqrt{(A - z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A - z - 2B}.$$

Отсюда находим $z_1 = A + \frac{2B(E^2 + 1)}{E^2 - 1}$ и $z_2 = A - 2B$. Теперь проверим условия $z_i < A - 2B, i = 1, 2$. Неравенство $z_1 < A - 2B$ неверно, и неравенство $z_2 < A - 2B$ также неверно. Выше непрерывной части спектра имеем

$$-\frac{1}{\sqrt{(z - A)^2 - 4B^2}} = -\frac{E}{z - A + 2B}.$$

В этом уравнении находим решения для непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Проверим условия $z_i > A + 2B, i = 1, 2$. Неравенство $z_1 > A + 2B$ верно, а неравенство $z_2 > A + 2B$ неверно. Следовательно, в этом случае оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z_1 = A + \frac{2B(E^2 + 1)}{E^2 - 1}$, лежащее выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

Пусть $\varepsilon_1 = -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, тогда уравнение собственных значений и собственных функций примет вид

$$J(z) = -\frac{E}{z - A - 2B},$$

где $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$.

Ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имеем уравнение вида

$$\frac{1}{\sqrt{(A - z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A - z + 2B}.$$

Отсюда находим $z_1 = A - \frac{2B(E^2 + 1)}{E^2 - 1}$ и $z_2 = A + 2B$. Полученное неравенство $z_1 < A - 2B$ верно, а $z_2 < A - 2B$ неверно. В приведенном выше уравнении непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имеем уравнение вида

$$-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2 - 4B^2}} = -\frac{E}{z-A-2B}.$$

Отсюда следует, что $z_1 = A - \frac{2B(E^2 + 1)}{E^2 - 1}$ и $z_2 = A + 2B$. Неравенства $z_1 > A + 2B$ и $z_2 > A + 2B$ неверны. Следовательно, в этом случае оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z_1 = A - \frac{2B(E^2 + 1)}{E^2 - 1}$, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

Е) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то необходимо считать, что $\varepsilon_1 = \alpha \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, где $\alpha > 1$ — действительное число. Тогда уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид

$$\left\{ \alpha \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A) \right\} J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0$$

или

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2\alpha B)J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0.$$

Отсюда

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2\alpha B)}.$$

Обозначим $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$, тогда $J(z) = -\frac{E}{z - A + 2\alpha B}$. В первом случае рассмотрим это уравнение ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A - z - 2\alpha B}.$$

Это уравнение имеет решения

$$z_1 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad z_2 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}.$$

Теперь проверим условия $z_i < A - 2B$, $i = 1, 2$. Решение z_1 не удовлетворяет условию $z_1 < A - 2B$, но z_2 удовлетворяют условию $z_2 < A - 2B$. Теперь проверим условие $z_2 < A - 2\alpha B$. Оказывается, это неравенство неверно. Неравенство $z_1 > A + 2B$ верно, а $z_2 > A + 2B$ неверно. Проверим теперь условие $z_1 > A - 2\alpha B$. Поскольку $A - 2\alpha B < A + 2B$, это неравенство верно. Следовательно, в этом случае оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение

$$z_1 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1},$$

расположенное выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

Ф) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то мы предполагаем, что $\varepsilon_1 = -\alpha \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, где $\alpha > 1$ — действительное число. Уравнение для собственных значений и собственных функций принимает вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A - 2\alpha B)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2.$$

Отсюда

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A - 2\alpha B)}.$$

Вводим обозначение $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. Тогда

$$J(z) = -\frac{E}{z - A - 2\alpha B}. \quad (3.10)$$

Ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имеем уравнение

$$J(z) = \frac{E}{A - z + 2\alpha B},$$

откуда

$$\frac{1}{\sqrt{(A - z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A - z + 2\alpha B}.$$

Это уравнение принимает вид

$$(E^2 - 1)(A - z)^2 - 4\alpha B(A - z) - 4B^2(E^2 + \alpha^2) = 0.$$

Находим

$$z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad z_2 = A - \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}.$$

Теперь проверим условия $z_i < m_1 = A - 2B$, $i = 1, 2$. Видно, что $z_1 < A - 2B$ верно, а $z_2 < A - 2B$ неверно. Теперь рассмотрим уравнение (3.10) выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Тогда $J(z) = -\frac{E}{z - A - 2\alpha B}$. Отсюда

$$-\frac{1}{\sqrt{(z - A)^2 - 4B^2}} = -\frac{E}{z - A - 2\alpha B}.$$

Находим

$$z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad z_2 = A + \frac{2B(-\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}.$$

Проверяем условия $z_i > A + 2B$, $i = 1, 2$. Таким образом, $z_1 > A + 2B$ неверно, а $z_2 > A + 2B$ верно. Проверим теперь условие $z_2 > A + 2\alpha B$. Это неравенство неверно. Следовательно, в этом случае оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение

$$z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1} < m_1,$$

т. е. лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

G) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$),

то мы предполагаем, что $\varepsilon_1 = \alpha \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, где $0 < \alpha < 1$ — действительное число. Уравнение для собственных значений и собственных функций принимает вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2\alpha B)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3.11)$$

Обозначим $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$.

Тогда уравнение (3.11) примет вид

$$J(z) = -\frac{E}{z - A + 2\alpha B}.$$

Ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имеем уравнение вида

$$\frac{1}{\sqrt{(A - z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A - z - 2\alpha B}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Это уравнение имеет решения

$$z_1 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad z_2 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}.$$

Неравенства $z_1 < A - 2B$ и $z_1 < A - 2\alpha B$ выполняются. Неравенство $z_2 < A - 2B$ верно, а неравенство $z_1 < A - 2B$ неверно. Проверим теперь условие $z_2 < A - 2\alpha B$. Так как $A - 2B < A - 2\alpha B$, это неравенство верно. Рассмотрим теперь уравнение (3.11) выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Уравнение имеет вид

$$-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2 - 4B^2}} = -\frac{E}{z-A+2\alpha B}.$$

Это уравнение имеет решения

$$z_1 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad z_2 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}.$$

Неравенства $z_1 > A + 2B$ и $z_1 > A - 2\alpha B$ верны. Так как $A + 2B > A - 2\alpha B$, то неравенство $z_1 > A - 2\alpha B$ верно. Неравенства $z_2 > A + 2B$ и $z_2 > A + 2\alpha B$ неверны. Следовательно, в этом случае оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения

$$z_1 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad z_2 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1},$$

лежащие снизу и сверху непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

Н) Если $-\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $-\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$), то принимаем $\varepsilon_1 = -\alpha\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, где $0 < \alpha < 1$ — действительное число. Тогда уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A - 2\alpha B)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Обозначим $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. Тогда уравнение (3.7) примет вид

$$J(z) = -\frac{E}{z - A - 2\alpha B}.$$

Внизу непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имеем уравнение вида

$$\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A-z+2\alpha B}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Решения этого уравнения:

$$z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad z_2 = A - \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}.$$

Неравенства $z_1 < A - 2B$ и $z_1 < A - 2\alpha B$ выполняются. Неравенства $z_2 < A - 2B$ верны, и неравенство $z_1 < A - 2B$ верно. Проверим теперь условие $z_2 < A - 2\alpha B$. Так как $A - 2B < A - 2\alpha B$, это неравенство неверно. Рассмотрим теперь уравнение (3.11) верхней части непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Мы имеем уравнение вида

$$-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2 - 4B^2}} = -\frac{E}{z-A+2\alpha B}.$$

Решения этого уравнения:

$$z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad z_2 = A - \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}.$$

Неравенства $z_1 > A + 2B$ и $z_1 > A - 2\alpha B$ неверны. Так как $A + 2B > A - 2\alpha B$, неравенство $z_1 > A - 2\alpha B$ неверно. Неравенства $z_2 > A + 2B$ и $z_2 > A + 2\alpha B$ верны. Следовательно, в этом случае оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения

$$z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad z_2 = A - \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1},$$

лежащие снизу и сверху непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

I) Если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 < 0$ и функция $\psi(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}$ является убывающей функцией в интервалах $(-\infty, z_0)$ и $(z_0, +\infty)$. Имеем $\psi(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow -\infty$; $\psi(z) \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow z_0 - 0$; $\psi(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow +\infty$; $\psi(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow z_0 + 0$. Также $J(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$; $J(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow m_1 - 0$; $J(z) \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow M_1 + 0$; $J(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$. Следовательно, уравнение $\psi(z) = J(z)$ не может иметь решений вне непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Следовательно, в этом случае оператор $\tilde{H}_1$ не имеет собственных значений, лежащих вне непрерывного спектра оператор $\tilde{H}_1$. $\square$

Теперь рассмотрим двумерный случай. В двумерном случае имеем, что уравнение $\Delta_2(z) = 0$ эквивалентно уравнению вида

$$(\varepsilon_2 + B)^2 + \{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)\}J(z) = 0,$$

где

$$J(z) = \int_{T^2} \frac{ds_1 ds_2}{A + 2B(\cos s_1 + \cos s_2) - z}.$$

В этом случае также $J(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $J(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow m_2 - 0$; $J(z) \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow M_2 + 0$; $J(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$. В одномерном и двумерном случаях поведение функции $J(z)$ аналогично. Следовательно, получаем аналогичные результаты для одномерного случая.

Рассмотрим трёхмерный случай. Обозначим через W интеграл Ватсона [25]:

$$W = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{3dx dy dz}{3 - \cos x - \cos y - \cos z} \cong 1,516.$$

Поскольку мера λ нормирована,

$$J = \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \frac{dx dy dz}{3 - \cos x - \cos y - \cos z} = \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \frac{dx dy dz}{3 + \cos x + \cos y + \cos z} = \frac{W}{3}.$$

В трёхмерном случае спектр оператора $\tilde{H}_1$ также хорошо описан в работах [23, 24]. Для полноты изложения приведём эти теоремы.

Теорема 3.4 (см. [23, 24]). Пусть $\nu = 3$. Тогда:

- A) 1) Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -6B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 6B$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z = A + \varepsilon_1$, лежащее ниже (выше) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
 2) Если $\varepsilon_2 = -B$ и $-6B \leq \varepsilon_1 < -2B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $2B < \varepsilon_1 \leq 6B$), то оператор $\tilde{H}_1$ не имеет собственных значений, лежащих ниже (выше) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- B) Если $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 < 0$, $\varepsilon_1 \leq -\frac{6B}{W}$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 \geq \frac{6B}{W}$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1 (соответственно, z_2), лежащее ниже (выше) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Если $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 < 0$ и $-\frac{6B}{W} \leq \varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 < 0$ и $0 < \varepsilon_1 \leq \frac{6B}{W}$), то оператор $\tilde{H}_1$ не имеет собственных значений вне непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- C) Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $E < W$ (соответственно, $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$, $E < W$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z ($\tilde{z}$), где $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$, лежащее ниже (выше) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $E > W$ (соответственно, $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$, $E > W$), то оператор $\tilde{H}_1$ не имеет собственных значений вне непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

- D) Если $\varepsilon_1 = \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $E < \frac{4}{3}W$ (соответственно, $\varepsilon_1 = -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $E < \frac{4}{3}W$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z (соответственно, $\tilde{z}$), лежащее выше (ниже) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- E) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z , лежащее выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- F) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1 , лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- G) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)W < E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)W < E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения z_1 и z_2 , лежащие выше и ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- H) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $-\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$ и $\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)W < E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $-\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$ и $\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)W < E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения z_1 и z_2 , лежащие выше и ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- I) Если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то оператор $\tilde{H}_1$ не имеет собственных значений, лежащих вне непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

Доказательство. В случае $\nu = 3$ непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_1$ совпадает с отрезком $[m_3, M_3] = [A - 6B, A + 6B]$. Выражая все интегралы в уравнении

$$\Delta_3(z) = \left(1 + \int_{T^3} \frac{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \sum_{i=1}^3 \cos s_i) ds_1 ds_2 ds_3}{A + 2B \sum_{i=1}^3 \cos s_i - z}\right) \left(1 + 6\varepsilon_2 \int_{T^3} \frac{\cos s_i ds_1 ds_2 ds_3}{A + 2B \sum_{i=1}^3 \cos s_i - z}\right) -$$

$$- 6\varepsilon_2 \int_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{A + 2B \sum_{i=1}^3 \cos s_i - z} \int_{T^3} \frac{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \sum_{i=1}^3 \cos s_i) \cos s_1 ds_1 ds_2 ds_3}{A + 2B \sum_{i=1}^3 \cos s_i - z} = 0$$

через интеграл $J(z) = \int_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{A + 2B \sum_{i=1}^3 \cos s_i - z}$, мы находим, что уравнение $\Delta_3(z) = 0$ эквивалентно

$$\text{уравнению } [\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)] J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0.$$

Более того, функция $J(z) = \int_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{A + 2B \sum_{i=1}^3 \cos s_i - z}$ является дифференцируемой функцией на

множестве $\mathbb{R} \setminus [m_3, M_3]$ с производной $J'(z) = \int_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{[A + 2B \sum_{i=1}^3 \cos s_i - z]^2} > 0, z \notin [m_3, M_3]$.

В трехмерном случае интеграл $\int_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{3 + \cos s_1 + \cos s_2 + \cos s_3} = \int_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{3 - \cos s_1 - \cos s_2 - \cos s_3}$ имеет конечное значение, равное $\frac{W}{3}$. Выражая эти интегралы через интеграл Ватсона и учитывая, что мера нормирована, имеем, что $J(z) = \frac{W}{6B}$. Таким образом, функция $J(z)$ является монотонно возрастающей функцией как на $(-\infty, m_3)$, так и на $(M_3, +\infty)$. Кроме того, в трехмерном случае $J(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $J(z) = \frac{W}{6B}$ при $z = A - 6B$; $J(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$; $J(z) = -\frac{W}{6B}$ при $z = A + 6B$.

Если $\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A) \neq 0$, то из (3.7) следует, что

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}.$$

Функция $\psi(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}$ имеет точку асимптотического разрыва $z_0 = A - \frac{B^2 \varepsilon_1}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. Так как $\psi'(z) = \frac{(B + \varepsilon_2)^2 (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{[\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)]^2}$ для всех $z \neq z_0$, то функция $\psi(z)$ является монотонно возрастающей (убывающей) функцией на $(-\infty, z_0)$ и на $(z_0, +\infty)$ в случае $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 > 0$ (соответственно, $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 < 0$), кроме того, если $\varepsilon_2 > 0$ или $\varepsilon_2 < -2B$, то $\psi(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$, $\psi(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow z_0 - 0$, $\psi(z) \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow z_0 + 0$, $\psi(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$ (соответственно, если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то $\psi(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow -\infty$, $\psi(z) \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow z_0 - 0$, $\psi(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow z_0 + 0$, $\psi(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow +\infty$).

А) Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -6B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 6B$), то уравнение для собственных значений и собственных функций (3.7) имеет вид (3.8):

$$\{\varepsilon_1 B^2 - B^2(z - A)\}J(z) = 0.$$

Ясно, что $J(z) \neq 0$ для значений $z \notin \sigma_{cont}(\tilde{H}_1)$. Следовательно, $\varepsilon_1 - z + A = 0$, т. е. $z = A + \varepsilon_1$. Если $\varepsilon_1 < -6B$ ($\varepsilon_1 > 6B$), то это собственное значение, лежащее ниже (выше) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Если $-6B \leq \varepsilon_1 < -2B$ (соответственно, $2B < \varepsilon_1 \leq 6B$), то это собственное значение, не лежащее вне непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

В) Если $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 > 0$), то уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид $\varepsilon_1 B^2 J(z) + B^2 = 0$, т. е. $J(z) = -\frac{1}{\varepsilon_1}$. В трехмерном случае $J(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $J(z) = \frac{W}{6B}$ при $z = A - 6B$; $J(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$; $J(z) = -\frac{W}{6B}$ при $z = A + 6B$. Следовательно, для того чтобы уравнение $J(z) = -\frac{1}{\varepsilon_1}$ в области снизу (соответственно, сверху) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имело решение, необходимо выполнение неравенства $-\frac{1}{\varepsilon_1} < \frac{W}{6B}$ (соответственно, $-\frac{1}{\varepsilon_1} > -\frac{W}{6B}$), т. е. $\varepsilon_1 < -\frac{6B}{W}$, $\varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_1 > \frac{6B}{W}$, $\varepsilon_1 > 0$). Если $-\frac{6B}{W} < \varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $0 < \varepsilon_1 < \frac{6B}{W}$), то оператор $\tilde{H}_1$ не имеет собственных значений вне непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

С) Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ (соответственно, $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$), то уравнения для собственных значений и собственных функций принимают вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2$$

или

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}.$$

Обозначим $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. Тогда $J(z) = -\frac{E}{z - A}$ или $J(z) = \frac{E}{A - z}$. В трехмерном случае $J(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $J(z) = \frac{W}{6B}$ при $z = A - 6B$; $J(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$; $J(z) = -\frac{W}{6B}$ при

$z = A + 6B$. Поэтому, для того чтобы уравнение $J(z) = -\frac{E}{z-A}$ снизу (соответственно, сверху) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имело решение, необходимо выполнение неравенства $\frac{E}{6B} < \frac{W}{6B}$ (соответственно, $-\frac{E}{6B} > -\frac{W}{6B}$), т. е. $E < W$. Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $E > W$ (соответственно, $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$, $E > W$), то оператор $\tilde{H}_1$ не имеет собственных значений вне непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

D) Если $\varepsilon_1 = \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, то уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2B)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2,$$

откуда имеем уравнение вида (3.9):

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2B)}.$$

Обозначим $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. В первом случае рассмотрим уравнение (3.9) снизу непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. В области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$, функция $\frac{E}{A - z - 2B} \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $\frac{E}{A - z - 2B} = \frac{E}{4B}$ при $z = A - 6B$; а в трехмерном случае $J(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $J(z) = \frac{W}{6B}$ при $z = A - 6B$; $J(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$; $J(z) = -\frac{W}{6B}$ при $z = A + 6B$. Следовательно, уравнение $J(z) = \frac{E}{A - z - 2B}$ имеет единственное решение, если $\frac{E}{4B} > \frac{W}{6B}$, т. е. $E > \frac{2W}{3}$. Это неравенство неверно. Следовательно, уравнение $\tilde{H}_1$ не имеет решения.

Рассмотрим теперь уравнение для собственных значений и собственных функций $J(z) = -\frac{E}{z - A + 2B}$ сверху непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ функция $\frac{E}{A - z - 2B} \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$; $\frac{E}{A - z - 2B} = -\frac{E}{8B}$ при $z = A + 6B$; а в трехмерном случае $J(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$; и $J(z) = -\frac{W}{6B}$ при $z = A + 6B$. Следовательно, выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ уравнение $J(z) = \frac{E}{A - z - 2B}$ имеет единственное решение, если $-\frac{E}{8B} > -\frac{W}{6B}$, т. е. $E < \frac{4W}{3}$. Это неравенство верно. Следовательно, из условия непрерывности спектра оператора $\tilde{H}_1$ следует, что это уравнение имеет единственное решение z .

Если $\varepsilon_1 = -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, то уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A - 2B)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2,$$

отсюда уравнение вида (3.9):

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2B)}.$$

Обозначим $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. В первом случае рассмотрим уравнение (3.9) ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ функция $\frac{E}{A - z + 2B} \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $\frac{E}{A - z + 2B} = \frac{E}{8B}$ при $z = A - 6B$; а в трехмерном случае $J(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $J(z) = \frac{W}{6B}$ при $z = A - 6B$; $J(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$; $J(z) = -\frac{W}{6B}$ при $z = A + 6B$. Следовательно,

уравнение $J(z) = \frac{E}{A - z + 2B}$ имеет единственное решение, если $\frac{E}{8B} < \frac{W}{6B}$, т. е. $E < \frac{4W}{3}$. Это неравенство верно. Следовательно, уравнение $\tilde{H}_1$ имеет единственное решение.

Рассмотрим теперь уравнение для собственных значений и собственных функций $J(z) = -\frac{E}{z - A - 2B}$, выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ функция $\frac{E}{A - z + 2B} \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$; $\frac{E}{A - z + 2B} = -\frac{E}{4B}$ при $z = A + 6B$; а в трехмерном случае $J(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$; $J(z) = -\frac{W}{6B}$ при $z = A + 6B$. Следовательно, выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ уравнение $J(z) = \frac{E}{A - z + 2B}$ имеет единственное решение, если $-\frac{E}{4B} > -\frac{W}{6B}$, т. е. $E < \frac{2W}{3}$. Это неравенство неверно. Следовательно, это уравнение не имеет решения.

Е) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то необходимо считать, что $\varepsilon_1 = \alpha \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, где $\alpha > 1$ — действительное число. Тогда уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид

$$\left\{ \alpha \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A) \right\} J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0$$

или

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2\alpha B)J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0.$$

Отсюда $J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2\alpha B)}$. Обозначим $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$, тогда $J(z) = -\frac{E}{z - A + 2\alpha B}$. В первом случае мы рассматриваем это уравнение ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Тогда $J(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $J(z) = \frac{W}{6B}$ при $z = A - 6B$; $-\frac{E}{z - A + 2\alpha B} \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $-\frac{E}{z - A + 2\alpha B} = \frac{E}{(6 - 2\alpha)B}$ при $z = A - 6B$. Уравнение

$$J(z) = -\frac{E}{z - A + 2\alpha B}$$

имеет единственное решение, если $\frac{E}{(6 - 2\alpha)B} < \frac{W}{6B}$. Отсюда $E < \frac{(3 - \alpha)W}{3}$. Это неравенство неверно. Следовательно, ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$, оператор $\tilde{H}_1$ не имеет собственных значений.

Выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имеем $J(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$; $J(z) = -\frac{W}{6B}$ при $z = A - 6B$. Кроме того, $-\frac{E}{z - A + 2\alpha B} \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$; $-\frac{E}{z - A + 2\alpha B} = -\frac{E}{6B + 2\alpha B}$ при $z = A + 6B$.

Уравнение

$$J(z) = -\frac{E}{z - A + 2\alpha B}$$

имеет единственное решение, если $-\frac{E}{(6 + 2\alpha)B} > -\frac{W}{6B}$. Отсюда $E < \frac{(3 + \alpha)W}{3}$. Это неравенство верно. Следовательно, из вышесказанного следует, что ниже непрерывного спектра оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1 .

Ф) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то мы предполагаем, что $\varepsilon_1 = -\alpha \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, где $\alpha > 1$ — действительное число. Уравнение для

собственных значений и собственных функций принимает вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A - 2\alpha B)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2.$$

Отсюда

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A - 2\alpha B)}.$$

Вводим обозначение $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. Тогда уравнение принимает вид

$$J(z) = -\frac{E}{z - A - 2\alpha B}. \quad (3.12)$$

Ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имеем уравнение

$$J(z) = \frac{E}{A - z + 2\alpha B}.$$

Ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1 - \frac{E}{z - A - 2\alpha B} \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $-\frac{E}{z - A - 2\alpha B} = \frac{E}{6B + 2\alpha B}$ при $z = A - 6B$.
Уравнение

$$J(z) = -\frac{E}{z - A + 2\alpha B}$$

имеет единственное решение, если $\frac{E}{(6 + 2\alpha)B} < \frac{W}{6B}$. Отсюда $E < \frac{(3 + \alpha)W}{3}$. Это неравенство верно. Следовательно, ниже непрерывного спектра оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение.

Выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1 - \frac{E}{z - A - 2\alpha B} \rightarrow -0$ при $z \rightarrow -\infty$; имеем $-\frac{E}{z - A - 2\alpha B} = -\frac{E}{6B - 2\alpha B}$ при $z = A + 6B$. Следовательно, выше непрерывного спектра оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение, если $-\frac{E}{6B - 2\alpha B} > -\frac{W}{6B}$. Отсюда $E < \frac{(3 - \alpha)W}{3}$, что неверно. Следовательно, выше непрерывного спектра оператор $\tilde{H}_1$ не имеет собственных значений.

Г) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то принимаем $\varepsilon_1 = \alpha \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, где $0 < \alpha < 1$ — действительное число. Тогда уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2\alpha B)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2, 0 < \alpha < 1. \quad (3.13)$$

Обозначим $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. Тогда уравнение (3.13) примет вид

$$J(z) = -\frac{E}{z - A + 2\alpha B}.$$

Ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имеем $-\frac{E}{z - A + 2\alpha B} \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $-\frac{E}{z - A + 2\alpha B} = \frac{E}{2B(3 - \alpha)}$ при $z = A - 6B$. Уравнение

$$J(z) = -\frac{E}{z - A + 2\alpha B}$$

имеет единственное решение ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$, если $\frac{E}{(6-2\alpha)B} > \frac{W}{6B}$.

Отсюда $E > \frac{(3-\alpha)W}{3}$. Это неравенство справедливо. Следовательно, ниже непрерывного спектра оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1 .

Выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имеем $-\frac{E}{z-A+2\alpha B} \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$;
 $-\frac{E}{z-A+2\alpha B} = -\frac{E}{2B(3+\alpha)}$ при $z = A+6B$. Уравнение

$$J(z) = -\frac{E}{z-A+2\alpha B}$$

имеет единственное решение выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$, если $-\frac{E}{2B(3+\alpha)} > -\frac{W}{6B}$,
 т. е. $E < \frac{(3+\alpha)W}{3}$. Это неравенство верно.

Следовательно, в этом случае оператор $\tilde{H}_1$ имеет два собственных значения z_1 и z_2 , лежащие снизу и сверху непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

Н) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $-\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $-\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$),
 то принимаем $\varepsilon_1 = -\alpha \times \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, где $0 < \alpha < 1$ — действительное число. Тогда уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид (3.13):

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A - 2\alpha B)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Обозначим $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. Тогда уравнение (3.13) примет вид

$$J(z) = -\frac{E}{z-A-2\alpha B}.$$

Ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имеем $-\frac{E}{z-A-2\alpha B} \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$;
 $-\frac{E}{z-A-2\alpha B} = \frac{E}{2B(3+\alpha)}$ при $z = A-6B$. Уравнение

$$J(z) = -\frac{E}{z-A-2\alpha B}$$

имеет единственное решение ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$, если $\frac{E}{(6+2\alpha)B} < \frac{W}{6B}$.

Отсюда $E < \frac{(3+\alpha)W}{3}$. Это неравенство справедливо. Следовательно, ниже непрерывного спектра оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1 .

Выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имеем $-\frac{E}{z-A-2\alpha B} \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$;
 $-\frac{E}{z-A-2\alpha B} = -\frac{E}{2B(3-\alpha)}$ при $z = A+6B$. Уравнение

$$J(z) = -\frac{E}{z-A-2\alpha B}$$

имеет единственное решение выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$, если $-\frac{E}{2B(3-\alpha)} < -\frac{W}{6B}$,

т. е. $E > \frac{(3-\alpha)W}{3}$. Это неравенство верно.

Следовательно, в этом случае оператор $\tilde{H}_1$ имеет два собственных значения z_1 и z_2 , лежащие ниже и выше непрерывного спектра $\tilde{H}_1$.

И) Если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 < 0$, и функция $\psi(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}$ является убывающей функцией на интервалах $(-\infty, z_0)$ и $(z_0, +\infty)$. Имеем $\psi(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow -\infty$; $\psi(z) \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow z_0 - 0$; $\psi(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow +\infty$; $\psi(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow z_0 + 0$. Также $J(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $J(z) = \frac{W}{6B}$ при $z = A - 6B$; $J(z) = \frac{W}{6B}$ при $z = A + 6B$; $J(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$. Следовательно, уравнение $\psi(z) = J(z)$ не может иметь решений вне непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Значит, в этом случае оператор $\tilde{H}_1$ не имеет собственных значений, лежащих вне непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. $\square$

Из полученных результатов очевидно, что спектр оператора $\tilde{H}_1$ состоит из непрерывного спектра и не более, чем из двух собственных значений.

Спектр оператора $A \otimes I + I \otimes B$, где A и B — плотно определённые ограниченные линейные операторы, изучался в [7, 8]. Там же приведены явные формулы, выражающие существенный спектр $\sigma_{ess}(A \otimes I + I \otimes B)$ и дискретный спектр $\sigma_{disc}(A \otimes I + I \otimes B)$ оператора $A \otimes I + I \otimes B$ через спектр $\sigma(A)$ и дискретный спектр $\sigma_{disc}(A)$ оператора A , а также через спектр $\sigma(B)$ и дискретный спектр $\sigma_{disc}(B)$ оператора B :

$$\sigma_{disc}(A \otimes I + I \otimes B) = \{\sigma(A) \setminus \sigma_{ess}(A) + \sigma(B) \setminus \sigma_{ess}(B)\} \cup \{(\sigma_{ess}(A) + \sigma(B)) \cup (\sigma(A) + \sigma_{ess}(B))\}, \quad (3.14)$$

и

$$\sigma_{ess}(A \otimes I + I \otimes B) = (\sigma_{ess}(A) + \sigma(B)) \cup (\sigma(A) + \sigma_{ess}(B)) \quad (3.15)$$

Ясно, что $\sigma(A \otimes I + I \otimes B) = \{\lambda + \mu : \lambda \in \sigma(A), \mu \in \sigma(B)\}$.

Из представления (2.7) видно, что сначала необходимо исследовать спектры оператора

$$\tilde{H}_2 = \tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1 + 2U \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, \lambda + \mu - s) ds + 2\varepsilon_3 \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, t) ds dt.$$

4. СТРУКТУРА СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА И ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ВТОРОГО СИНГЛЕТНОГО СОСТОЯНИЯ

Пусть оператор представлен в виде

$${}^2\tilde{H}_s^0 = \tilde{H}_2 \otimes I \otimes I + I \otimes I \otimes \tilde{H}_2. \quad (4.1)$$

Сначала рассмотрим оператор

$$\tilde{H}(U) = \tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1 + 2U \int_{T^\nu} f(s, \lambda + \mu - s) ds.$$

Поскольку семейство операторов $\tilde{H}(U)$ является семейством ограниченных операторов, то $\tilde{H}(U)$ является семейством ограниченных операторнозначных аналитических функций. Следовательно, к этому семейству применима теорема Като—Реллиха.

Теорема 4.1 (теорема Като—Реллиха, см. [17]). Пусть $T(\beta)$ — аналитическое по Като семейство. Пусть E_0 — невырожденное собственное значение $T(\beta_0)$. Тогда при приближении β к β_0 найдётся ровно одна точка $E(\beta) \in \sigma(T(\beta))$ вблизи E_0 , и эта точка изолирована и невырождена. $E(\beta)$ является аналитической функцией по β , поскольку при приближении β к β_0 , существует аналитический собственный вектор $\Omega(\beta)$. Если при действительном $\beta - \beta_0$ оператор $T(\beta)$ является самосопряжённым оператором, то $\Omega(\beta)$ можно выбрать таким образом, чтобы он был нормализован относительно действительного $\beta - \beta_0$.

Поскольку оператор $\tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1$ имеет невырожденное собственное значение, например, близкое к собственному значению $2z_1$ оператора $\tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1$, то оператор $\tilde{H}(U)$ при U , вблизи $U_0 = 0$, имеет ровно одно собственное значение $E(U) \in \sigma(\tilde{H}(U))$, близкое к $2z_1$, и эта точка изолирована и невырождена. $E(U)$ является аналитической функцией U при U , близком к $U_0 = 0$.

При больших значениях существование не более одного дополнительного собственного значения оператора $\tilde{H}(U)$ следует из того же, что возмущение $(K_1 \tilde{f})(\lambda, \mu) = 2U \int_{T^\nu} f(s, \lambda + \mu - s) ds$

является одномерным оператором при фиксированном значении полного квазиимпульса двух электронов. Это дополнительное собственное значение оператора $\tilde{H}_2$ обозначим через z_3 .

Рассмотрим новое семейство операторов

$$\tilde{H}(\varepsilon_3) = \tilde{H}(U) + 2\varepsilon_3 \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, t) ds dt.$$

У оператора $\tilde{H}(U)$ есть невырожденное собственное значение вблизи собственного значения $E(U)$ оператора $\tilde{H}(U)$, оператор $\tilde{H}(\varepsilon_3)$ в окрестности точки $\varepsilon_3 = 0$ имеет ровно одно собственное значение $E(\varepsilon_3) \in \sigma(\tilde{H}(\varepsilon_3))$ в окрестности $E(U)$, и эта точка является изолированной и невырожденной. Функция $E(\varepsilon_3)$ аналитична по ε_3 вблизи $\varepsilon_3 = 0$.

Так как оператор $\tilde{H}(U)$ имеет невырожденное собственное значение, следовательно, оператор $\tilde{H}(U)$, оператор $\tilde{H}(\varepsilon_3)$ при ε_3 , близком к $\varepsilon_3 = 0$, имеет ровно одно собственное значение $E(\varepsilon_3) \in \sigma(\tilde{H}(\varepsilon_3))$ в окрестности $E(U)$, и эта точка является изолированной и невырожденной. $E(\varepsilon_3)$ является аналитической функцией ε_3 вблизи $\varepsilon_3 = 0$.

Эти собственные значения мы обозначим через z_4 .

Теперь, используя полученные результаты (теоремы (3.3) и (3.4)) и представления (2.7) и (4.1), опишем структуру существенного спектра и дискретного спектра оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$.

Теорема 4.2 (см. [21]). Пусть $\nu = 1$. Тогда:

- A) Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -2B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 2B$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z, 3A + 6B + z] \cup [2A - 4B + 2z, 2A + 4B + 2z] \cup [A - 2B + 3z, A + 2B + 3z] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [A - 2B + z + z_3, A + 2B + z + z_3] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + z + z_4, A + 2B + z + z_4]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z, 2z + z_3, 2z + z_4, 2z_3, 2z_4, z_3 + z_4\}$, где $z = A + \varepsilon_1$, а z_3 и z_4 — дополнительные собственные значения оператора $\tilde{H}_2$.
- B) Если $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 > 0$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z, 3A + 6B + z] \cup [2A - 4B + 2z, 2A + 4B + 2z] \cup [A - 2B + 3z, A + 2B + 3z] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [A - 2B + z + z_3, A + 2B + z + z_3] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + z + z_4, A + 2B + z + z_4]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z, 2z + z_3, 2z + z_4, 2z_3, 2z_4, z_3 + z_4\}$, где $z = A - \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$ (соответственно $z = A + \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$).
- C) Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ или $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$, то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения тринадцати отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z_1, 3A + 6B + z_1] \cup [3A - 6B + z_2, 3A + 6B + z_2] \cup [2A - 4B + 2z_1, 2A + 4B + 2z_1] \cup [2A - 4B + 2z_2, 2A + 4B + 2z_2] \cup [A - 2B + 3z_1, A + 2B + 3z_1] \cup [A - 2B + 3z_2, A + 2B + 3z_2] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + z_1 + z_4, A + 2B + z_1 + z_4] \cup [A - 2B + z_2 + z_4, A + 2B + z_2 + z_4] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [A - 2B + z_1 + z_3, A + 2B + z_1 + z_3] \cup [A - 2B + z_2 + z_3, A + 2B + z_2 + z_3]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из девяти собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z_1, 2z_1 + z_4, 4z_2, 2z_2 + z_4, 2z_1 + z_3, 2z_2 + z_3, z_3 + z_4, 2z_3, 2z_4\}$, где $z_1 = A - \frac{2BE}{\sqrt{E^2 - 1}}$ и $z_2 = A + \frac{2BE}{\sqrt{E^2 - 1}}$ и $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$.
- D) Если $\varepsilon_1 = \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_1 = -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z, 3A + 6B + z] \cup [2A - 4B + 2z, 2A + 4B + 2z] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + 3z, A + 2B + 3z] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [A - 2B + z + z_3, A + 2B + z + z_3] \cup [A - 2B + z + z_4, A + 2B + z + z_4]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений:

$\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z, 2z + z_3, 2z + z_4, 2z_3, 2z_4, z_3 + z_4\}$, где $z = A + \frac{2B(E^2 + 1)}{E^2 - 1}$ (соответственно, $z = A - \frac{2B(E^2 + 1)}{E^2 - 1}$) и $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$.

- Е) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z, 3A + 6B + z] \cup [2A - 4B + 2z, 2A + 4B + 2z] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + 3z, A + 2B + 3z] \cup [2A - 4B + z + z_4, 2A + 4B + z + z_4] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [A - 2B + z + z_3, A + 2B + z + z_3]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z, 2z + z_4, 2z + z_3, 2z_3, 2z_4, z_3 + z_4\}$, где $z = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}$ и $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$, а $\alpha > 1$ — действительное число.
- Ф) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z, 3A + 6B + z] \cup [2A - 4B + 2z, 2A + 4B + 2z] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + 3z, A + 2B + 3z] \cup [2A - 4B + z + z_4, 2A + 4B + z + z_4] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [A - 2B + z + z_3, A + 2B + z + z_3]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z, 2z + z_4, 2z + z_3, 2z_3, 2z_4, z_3 + z_4\}$, где $z = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}$ и $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$, а $\alpha > 1$ — действительное число.
- Г) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения шестнадцати отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z_1, 3A + 6B + z_1] \cup [3A - 6B + z_2, 3A + 6B + z_2] \cup [2A - 4B + 2z_1, 2A + 4B + 2z_1] \cup [2A - 4B + 2z_2, 2A + 4B + 2z_2] \cup [2A - 4B + z_1 + z_2, 2A + 4B + z_1 + z_2] \cup [A - 2B + 3z_1, A + 2B + 3z_1] \cup [A - 2B + 3z_2, A + 2B + 3z_2] \cup [A - 2B + 2z_1 + z_2, A + 2B + 2z_1 + z_2] \cup [A - 2B + z_1 + 2z_2, A + 2B + z_1 + 2z_2] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + z_1 + z_3, A + 2B + z_1 + z_3] \cup [A - 2B + z_1 + z_4, A + 2B + z_1 + z_4] \cup [A - 2B + z_2 + z_3, A + 2B + z_2 + z_3] \cup [A - 2B + z_2 + z_4, A + 2B + z_2 + z_4]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из четырнадцати собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z_1, 3z_1 + z_2, 2z_1 + 2z_2, z_1 + 3z_2, 4z_2, 2z_1 + z_3, z_1 + z_2 + z_3, 2z_2 + z_3, 2z_1 + z_4, 2z_2 + z_4, z_1 + z_2 + z_4, z_3 + z_4, 2z_3, 2z_4\}$, где $z_1 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}$, $z_2 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}$ и $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$ с действительным числом $0 < \alpha < 1$.
- Н) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $-\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $-\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения шестнадцати отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z_1, 3A + 6B + z_1] \cup [3A - 6B + z_2, 3A + 6B + z_2] \cup [2A - 4B + 2z_1, 2A + 4B + 2z_1] \cup [2A - 4B + 2z_2, 2A + 4B + 2z_2] \cup [2A - 4B + z_1 + z_2, 2A + 4B + z_1 + z_2] \cup [A - 2B + 3z_1, A + 2B + 3z_1] \cup [A - 2B + 3z_2, A + 2B + 3z_2] \cup [A - 2B + 2z_1 + z_2, A + 2B + 2z_1 + z_2] \cup [A - 2B + z_1 + 2z_2, A + 2B + z_1 + 2z_2] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + z_1 + z_3, A + 2B + z_1 + z_3] \cup [A - 2B + z_1 + z_4, A + 2B + z_1 + z_4] \cup [A - 2B + z_2 + z_3, A + 2B + z_2 + z_3] \cup [A - 2B + z_2 + z_4, A + 2B + z_2 + z_4]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из четырнадцати собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z_1, 3z_1 + z_2, 2z_1 + 2z_2, z_1 + 3z_2, 4z_2, 2z_1 + z_3, z_1 + z_2 + z_3, 2z_2 + z_3, 2z_1 + z_4, 2z_2 + z_4, z_1 + z_2 + z_4, z_3 + z_4, 2z_4, 2z_3\}$, где $z_1 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}$, $z_2 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}$ и $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$ с действительным числом $0 < \alpha < 1$.
- И) Если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения трёх отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4]$,

а дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из трёх собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{2z_3, z_3 + z_4, 2z_4\}$.

Доказательство.

А) Из представлений (2.7), (4.1) и формул (3.14) и (3.15), а также теоремы 3.3 следует, что в одномерном случае непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_1$ состоит из $\sigma_{cont}(\tilde{H}_1) = [A - 2B, A + 2B]$, а дискретный спектр оператора $\tilde{H}_1$ состоит из единственного собственного значения $z = A + \varepsilon_1$. Следовательно, существенный спектр оператора $\tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1$ состоит из отрезков $[2A - 4B, 2A + 4B]$ и $[A - 2B + z, A + 2B + z]$. Дискретный спектр оператора $\tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1$ состоит из собственного значения $2z$. Оператор

$$\tilde{H}_2 = \tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1 + 2U \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, \Lambda - s) ds + 2\varepsilon_3 \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} f(s, t) ds dt,$$

где $\Lambda = \lambda + \mu$, имеет дополнительные собственные значения z_3 и z_4 . Из этого следует, что существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков, а дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений. Это и есть утверждение А) теоремы 4.2.

В) В этом случае оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1 , лежащее вне непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Следовательно, существенный спектр оператора $\tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1$ состоит из объединения двух отрезков, а дискретный спектр оператора $\tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1$ состоит из одной точки. Это даёт утверждение В) теоремы 4.2.

Остальные утверждения теоремы 4.2 доказываются аналогично. $\square$

Следующая теорема описывает структуру существенного спектра оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ в трехмерном случае.

Теорема 4.3 (см. [21]). Пусть $\nu = 3$. Тогда:

- А) 1) Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -6B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 6B$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [3A - 18B + z, 3A + 18B + z] \cup [2A - 12B + 2z, 2A + 12B + 2z] \cup [A - 6B + 3z, A + 6B + 3z] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + z + z_3, A + 6B + z + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [A - 6B + z + z_4, A + 6B + z + z_4]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z, 2z + z_3, 2z + z_4, 2z_3, z_3 + z_4, 2z_4\}$, где $z = A + \varepsilon_1$, z_3 и z_4 — собственные значения оператора $\tilde{H}_2$.
- 2) Если $\varepsilon_2 = -B$ и $-6B \leq \varepsilon_1 < -2B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $2B < \varepsilon_1 \leq 6B$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения трёх отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из трёх собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{2z_3, 2z_4, z_3 + z_4\}$.
- В) Если $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$, и $\varepsilon_1 < 0$, $\varepsilon_1 \leq -\frac{6B}{W}$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$, и $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 \geq \frac{6B}{W}$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [3A - 18B + z_1, 3A + 18B + z_1] \cup [2A - 12B + 2z_1, 2A + 12B + 2z_1] \cup [A - 6B + 3z_1, A + 6B + 3z_1] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + z_1 + z_3, A + 6B + z_1 + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [A - 6B + z_1 + z_4, A + 6B + z_1 + z_4]$ (соответственно, $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [3A - 18B + z_2, 3A + 18B + z_2] \cup [2A - 12B + 2z_2, 2A + 12B + 2z_2] \cup [A - 6B + 3z_2, A + 6B + 3z_2] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + z_2 + z_3, A + 6B + z_2 + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [A - 6B + z_2 + z_4, A + 6B + z_2 + z_4]$), и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z_1, 2z_1 + z_3, 2z_1 + z_4, 2z_3, z_3 + z_4, 2z_4\}$ (соответственно, $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z_2, 2z_2 + z_3, 2z_2 + z_4, 2z_3, 2z_4, z_3 + z_4\}$), где z_1 (соответственно, z_2) — собственное значение оператора $\tilde{H}_1$.

Если $-\frac{6B}{W} \leq \varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $0 < \varepsilon_1 \leq \frac{6B}{W}$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения трёх отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4]$, а дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из трёх собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{z_3 + z_4, 2z_3, 2z_4\}$.

- C) Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0, E < W$ (соответственно, $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B, E < W$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [3A - 18B + z, 3A + 18B + z] \cup [2A - 12B + 2z, 2A + 12B + 2z] \cup [A - 6B + 3z, A + 6B + 3z] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + z + z_3, A + 6B + z + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [A - 6B + z + z_4, A + 6B + z + z_4]$ (соответственно, $\sigma_{ess}({}^1\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [3A - 18B + \tilde{z}, 3A + 18B + \tilde{z}] \cup [2A - 12B + 2\tilde{z}, 2A + 12B + 2\tilde{z}] \cup [A - 6B + 3\tilde{z}, A + 6B + 3\tilde{z}] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + \tilde{z} + z_3, A + 6B + \tilde{z} + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [A - 6B + \tilde{z} + z_4, A + 6B + \tilde{z} + z_4]$), и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z, 2z + z_3, 2z + z_4, 2z_3, z_3 + z_4, 2z_4\}$ (соответственно, $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4\tilde{z}, 2\tilde{z} + z_3, 2\tilde{z} + z_4, 2z_3, z_3 + z_4, 2z_4\}$), где z (соответственно, $\tilde{z}$) – собственное значение оператора $\tilde{H}_1$ и $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0, E > W$

(соответственно, $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B, E > W$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения трёх отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4]$, а дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из трёх собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{z_3 + z_4, 2z_3, 2z_4\}$.

- D) Если $\varepsilon_1 = \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $E < \frac{4}{3}W$ (соответственно, $\varepsilon_1 = -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $E < \frac{4}{3}W$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [3A - 18B + z, 3A + 18B + z] \cup [2A - 12B + 2z, 2A + 12B + 2z] \cup [A - 6B + 3z, A + 6B + 3z] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + z + z_3, A + 6B + z + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [A - 6B + z + z_4, A + 6B + z + z_4]$ (соответственно, $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [3A - 18B + \tilde{z}, 3A + 18B + \tilde{z}] \cup [2A - 12B + 2\tilde{z}, 2A + 12B + 2\tilde{z}] \cup [A - 6B + 3\tilde{z}, A + 6B + 3\tilde{z}] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + \tilde{z} + z_3, A + 6B + \tilde{z} + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [A - 6B + \tilde{z} + z_4, A + 6B + \tilde{z} + z_4]$), и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z, 2z + z_3, 2z + z_4, 2z_3, z_3 + z_4, 2z_4\}$ (соответственно, $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4\tilde{z}, 2\tilde{z} + z_3, 2\tilde{z} + z_4, 2z_3, z_3 + z_4, 2z_4\}$), где z (соответственно, $\tilde{z}$) – собственное значение оператора $\tilde{H}_1$.

- E) Если $\varepsilon_2 > 0, \varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B, \varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [3A - 18B + z_1, 3A + 18B + z_1] \cup [2A - 12B + 2z_1, 2A + 12B + 2z_1] \cup [A - 6B + 3z_1, A + 6B + 3z_1] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + z_1 + z_3, A + 6B + z_1 + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [A - 6B + z_1 + z_4, A + 6B + z_1 + z_4]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z_1, 2z_1 + z_3, 2z_1 + z_4, 2z_3, z_3 + z_4, 2z_4\}$, где z_1 – собственное значение оператора $\tilde{H}_1$.

- F) Если $\varepsilon_2 > 0, \varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B, \varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [3A - 18B + z_1, 3A + 18B + z_1] \cup [2A - 12B + 2z_1, 2A + 12B + 2z_1] \cup [A - 6B + 3z_1, A + 6B + 3z_1] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + z_1 + z_3, A + 6B + z_1 + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [A - 6B + z_1 + z_4, A + 6B + z_1 + z_4]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z_1, 2z_1 + z_3, 2z_1 + z_4, 2z_3, z_3 + z_4, 2z_4\}$, где z_1 – собственное значение оператора $\tilde{H}_1$.

- Г) Если $\varepsilon_2 > 0$, $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)W < E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$, $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)W < E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения шестнадцати отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [3A - 18B + z_1, 3A + 18B + z_1] \cup [3A - 18B + z_2, 3A + 18B + z_2] \cup [2A - 12B + 2z_1, 2A + 12B + 2z_1] \cup [2A - 12B + z_1 + z_2, 2A + 12B + z_1 + z_2] \cup [2A - 12B + 2z_2, 2A + 12B + 2z_2] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [A - 6B + 3z_1, A + 6B + 3z_1] \cup [A - 6B + 2z_1 + z_2, A + 6B + 2z_1 + z_2] \cup [A - 6B + z_1 + 2z_2, A + 6B + z_1 + 2z_2] \cup [A - 6B + z_1 + z_4, A + 6B + z_1 + z_4] \cup [A - 6B + 3z_2, A + 6B + 3z_2] \cup [A - 6B + z_2 + z_4, A + 6B + z_2 + z_4] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + z_1 + z_3, A + 6B + z_1 + z_3] \cup [A - 6B + z_2 + z_3, A + 6B + z_2 + z_3]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из четырнадцати собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z_1, 4z_2, 3z_1 + z_2, 2z_1 + 2z_2, 2z_1 + z_3, 2z_3, 2z_4, z_3 + z_4, 2z_1 + z_4, z_1 + 3z_2, z_1 + z_2 + z_3, z_1 + z_2 + z_4, 2z_2 + z_3, 2z_2 + z_4\}$, где z_1 и z_2 — собственные значения оператора $\tilde{H}_1$.
- Н) Если $\varepsilon_2 > 0$, $-\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$ и $\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)W < E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$, $-\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$ и $\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)W < E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения шестнадцати отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [3A - 18B + z_1, 3A + 18B + z_1] \cup [3A - 18B + z_2, 3A + 18B + z_2] \cup [2A - 12B + 2z_1, 2A + 12B + 2z_1] \cup [2A - 12B + z_1 + z_2, 2A + 12B + z_1 + z_2] \cup [2A - 12B + 2z_2, 2A + 12B + 2z_2] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [A - 6B + 3z_1, A + 6B + 3z_1] \cup [A - 6B + 2z_1 + z_2, A + 6B + 2z_1 + z_2] \cup [A - 6B + z_1 + 2z_2, A + 6B + z_1 + 2z_2] \cup [A - 6B + z_1 + z_4, A + 6B + z_1 + z_4] \cup [A - 6B + 3z_2, A + 6B + 3z_2] \cup [A - 6B + z_2 + z_4, A + 6B + z_2 + z_4] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + z_1 + z_3, A + 6B + z_1 + z_3] \cup [A - 6B + z_2 + z_3, A + 6B + z_2 + z_3]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из четырнадцати собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z_1, 2z_1 + 2z_2, 3z_1 + z_2, 2z_1 + z_3, 2z_1 + z_4, z_1 + 3z_2, 4z_2, 2z_2 + z_3, 2z_2 + z_4, 2z_4, z_1 + z_2 + z_4, z_1 + z_2 + z_3, 2z_3, z_3 + z_4\}$, где z_1 и z_2 — собственные значения оператора $\tilde{H}_1$.
- И) Если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения трёх отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3]$, а дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из трёх собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{z_3 + z_4, 2z_3, 2z_4\}$.

Доказательство.

А) Из представлений (2.7), (4.1) и формул (3.14) и (3.15), а также теоремы 3.4 следует, что в трехмерном случае непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_1$ состоит из $\sigma_{cont}(\tilde{H}_1) = [A - 6B, A + 6B]$, а дискретный спектр оператора $\tilde{H}_1$ состоит из единственного собственного значения $z = A + \varepsilon_1$. Следовательно, существенный спектр оператора $\tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1$ состоит из отрезков $[2A - 12B, 2A + 12B]$ и $[A - 6B + z, A + 6B + z]$. Дискретный спектр оператора $\tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1$ состоит из собственного значения $2z$. Оператор

$$\tilde{H}_2 = \tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1 + 2U \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, \Lambda - s) ds + 2\varepsilon_3 \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} f(s, t) ds dt,$$

где $\Lambda = \lambda + \mu$, имеет дополнительные собственные значения z_3 и z_4 . Из этого следует, что существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений. Это и есть утверждение А) теоремы 4.3.

Г) Из представления (2.7), (4.1) и формул (3.14) и (3.15), а также теоремы 3.4 следует, что в трехмерном случае непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_1$ состоит из $\sigma_{cont}(\tilde{H}_1) = [A - 6B, A + 6B]$, а дискретный спектр оператора $\tilde{H}_1$ состоит ровно из двух собственных значений z_1 и z_2 . Следовательно, существенный спектр оператора $\tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1$ состоит из отрезков $[2A - 12B, 2A + 12B]$, $[A - 6B + z_1, A + 6B + z_1]$ и $[A - 6B + z_2, A + 6B + z_2]$. Дискретный спектр оператора $\tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1$

состоит из собственных значений $2z_1$, $z_1 + z_2$ и $2z_2$. Оператор

$$\tilde{H}_2 = \tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1 + 2U \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, \Lambda - s) ds + 2\varepsilon_3 \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} f(s, t) ds dt,$$

где $\Lambda = \lambda + \mu$, имеет дополнительные собственные значения z_3 и z_4 . Отсюда следует, что существенный спектр оператора ${}^1\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения шестнадцати отрезков, а дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из четырнадцати собственных значений. Это и есть утверждение G) теоремы 4.3.

Остальные утверждения теоремы 4.3 доказываются аналогично. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Изюмов Ю. А., Чащин Н. И., Алексеев Д. С. Теория сильно коррелированных систем. Метод производящего функционала. — М.-Ижевск: Инст. комп. исслед., 2006.
2. Ташпулатов С. М. Спектр оператора энергии в трехэлектронных системах с примесью в модели Хаббарда. Второе дублетное состояние // Современ. мат. Фундам. направл. — 2019. — 65, № 3. — С. 109–123. — DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-109-123.
3. Anderson P. W. Localized Magnetic States in Metals // Phys. Rev. — 1961. — **124**. — С. 41–53.
4. Arovas D. P., Berg E., Kivelson S. A., Raghy S. The Hubbard model // Annu. Rev. Condens. Matt. Phys. — 2022. — **13**. — С. 239–274. — DOI: 10.1146/annurev-conmatphys-031620-102024.
5. Gutzwiller M. C. Effect of correlation on the ferromagnetism of transition metals // Phys. Rev. Lett. — 1963. — **10**. — С. 159–162.
6. Hubbard J. Electron correlations in narrow energy bands // Proc. Roy. Soc. A — 1963. — **276**. — С. 238–257.
7. Ichinose T. Spectral properties of tensor products of linear operators, 1 // Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — **235**. — С. 75–113.
8. Ichinose T. Spectral properties of tensor products of linear operators, 2: The approximate point spectrum and Kato essential spectrum // Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — **237**. — С. 223–254.
9. Izyumov U. A. Hubbard model of strong correlations // Phys.-Uspekhi — 1995. — **38**, No. 4. — С. 385–408. — DOI: 10.1070/PU1995v038n04ABEH000081.
10. Kanamori J. Electron correlation and ferromagnetism of transition metals // Prog. Theor. Phys. — 1963. — **30**. — С. 275–289.
11. Karpenko B. V., Dyakin V. V., Budrina G. L. Two electrons in the Hubbard Model // Phys. Met. Metallogr. — 1986. — **61**. — С. 702–706.
12. Moskalenko V. A., Dohotaru L. A., Digor D. F., Cebotari I. D. Diagram theory for the two fold degenerate Anderson impurity model // Theor. Math. Phys. — 2014. — **178**. — С. 115–129. — DOI: 10.1007/s11232-014-0133-6.
13. Ovchinnikov S. G., Shneider E. I. Spectral functions in the Hubbard model with half-filling // Phys. Solid State — 2004. — **46**. — С. 1469–1473. doi: 10.1134/1.1788780
14. Öz Ya., Klumper A. A Hubbard model with integrable impurity // J. Phys. A. Math. Theor. — 2019. — **52**, No. 32. — 325001. — DOI: 10.1088/1751-8121/ab2cf4.
15. Rammelmüller L., Huber D. u др. Magnetic impurity in a one-dimensional fewfermion system // SciPost Phys. — 2023. — **14**, No. 1. — 006. — DOI: 10.21468/SciPostPhys.14.1.006.
16. Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics. 1. Functional Analysis. — New York: Acad. Press, 1972.
17. Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics. 4. Operator Analysis. — New York: Acad. Press, 1978.
18. Shubin S. P., Wonsowsky S. V. On the electron theory of metals // Proc. Roy. Soc. A — 1934. — **145**. — С. 159–180.
19. Tashpulatov S. M. Spectral properties of three-electron systems in the Hubbard Model // Theor. Math. Phys. — 2014. — **179**, No. 5. — С. 712–728.
20. Tashpulatov S. M. Spectra of the energy operator of four-electron systems in the triplet state in the Hubbard Model // J. Phys. Conf. Ser. — 2016. — **697**. — 012025. — DOI: 10.1088/1742-6596/697/1/012025.
21. Tashpulatov S. M. The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the Hubbard model in a singlet state // Lobachevskii J. Math. — 2017. — **38**, No. 3. — С. 530–541.
22. Tashpulatov S. M. The structure of essential spectra and discrete spectrum of three-electron systems in the impurity Hubbard model. quartet state // J. Appl. Math. Phys. — 2021. — **9**. — С. 1391–1421.
23. Tashpulatov S. M. Spectra of the energy operator of two-electron system in the impurity Hubbard model // J. Appl. Math. Phys. — 2022. — **10**. — С. 2743–2779.

24. *Tashpulatov S. M.* Spectra of the Two-Electron System in the Impurity Hubbard Model. — Lambert Academic Publishing, 2022.
25. *Val'kov V. V., Ovchinnikov S. G., Petrakovskii O. P.* The excitation spectra of two-magnon systems in easy-axis quasidimensional ferromagnets // Sov. Phys. Solid State — 1988. — **30**. — С. 3044–3047.
26. *Zvyagin A. A., Schlottmann P.* Magnetic impurity in the one-dimensional Hubbard model // Phys. Rev. B — 1997. — **56**. — С. 300–306. — DOI: 10.1103/PhysRevB.56.300.

С. М. Ташпулатов

Институт ядерной физики АН Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан

E-mail: sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.tu

Р. Т. Парманова

Институт ядерной физики АН Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан

E-mail: parmanova.r@inp.uz

UDC 517.984

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-478-507

EDN: DUAASN

The second four-electron singlet in the Hubbard impurity model

S. M. Tashpulatov and R. T. Parmanova

Institute of Nuclear Physics of the Uzbekistanian Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

Abstract. We consider the energy operator of four-electron systems in the Hubbard impurity model and investigate the structure of the essential spectrum and discrete spectra for the second singlet state of the system. It is shown that in the one-dimensional and two-dimensional cases the following situations exist for the essential and discrete spectrum: (a). the essential spectrum of the operator of the second singlet state of four electrons in the Hubbard impurity model consists of a union of eight segments, and the discrete spectrum of the operator consists of six eigenvalues; (b). the essential spectrum of the operator consists of a union of sixteen segments, and the discrete spectrum of the operator consists of fourteen eigenvalues; (c). the essential spectrum of the operator consists of a union of thirteen segments, and the discrete spectrum of the operator consists of nine eigenvalues; (d). the essential spectrum of the operator consists of a union of three segments, and the discrete spectrum of the operator consists of three eigenvalues. In the three-dimensional case the following situations arise: (a). the essential spectrum of an operator consists of unions of eight segments, and the discrete spectrum of the operator consists of six eigenvalues, or the essential spectrum of an operator consists of unions of three segments, and the discrete spectrum of the operator consists of three eigenvalues; (b). the essential spectrum of an operator consists of unions of eight segments, and the discrete spectrum of the operator consists of six eigenvalues; (c). the essential spectrum of an operator consists of unions of sixteen segments, and the discrete spectrum of the operator consists of fourteen eigenvalues; (d). the essential spectrum of an operator consists of unions of three segments, and the discrete spectrum of the operator consists of three eigenvalues.

Keywords: four-electron system, Hubbard impurity model, quintet states, triplet states, singlet states, essential spectrum, discrete spectrum.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: S. M. Tashpulatov, R. T. Parmanova, “The second four-electron singlet in the Hubbard impurity model,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 3, 478–507. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-478-507>

REFERENCES

1. Yu. A. Izyumov, N. I. Chashchin, and D. S. Alekseev, *Teoriya sil'no korrelirovannykh sistem. Metod proizvodnyashchego funktsionala* [Theory of Strongly Correlated Systems. Generating Functional Method], Inst. Komp. Issled., Moscow–Izhevsk (2006).
2. S. M. Tashpulatov, “Spektr operatora energii v trekhelektronnykh sistemakh s primes'yu v modeli Khabbarda. Vtoroe dubletnoe sostoyanie” [The spectrum of the energy operator in three-electron systems with an impurity in the Hubbard model. The second doublet state] *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], **65**, No. 3, 109–123 (2019), DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-109-123.
3. P. W. Anderson, “Localized Magnetic States in Metals,” *Phys. Rev.*, **124**, 41–53 (1961).
4. D. P. Arovas, E. Berg, S. A. Kivelson, and S. Raghy, “The Hubbard model,” *Annu. Rev. Condens. Matt. Phys.*, **13**, 239–274 (2022), DOI: 10.1146/annurev-conmatphys-031620-102024.
5. M. C. Gutzwiller, “Effect of correlation on the ferromagnetism of transition metals,” *Phys. Rev. Lett.*, **10**, 159–162 (1963).
6. J. Hubbard, “Electron correlations in narrow energy bands,” *Proc. Roy. Soc. A*, **276**, 238–257 (1963).
7. T. Ichinose, “Spectral properties of tensor products of linear operators, 1,” *Trans. Am. Math. Soc.*, **235**, 75–113 (1978).
8. T. Ichinose, “Spectral properties of tensor products of linear operators, 2: The approximate point spectrum and Kato essential spectrum,” *Trans. Am. Math. Soc.*, **237**, 223–254 (1978).
9. U. A. Izyumov, “Hubbard model of strong correlations,” *Phys.-Uspekhi*, **38**, No. 4, 385–408 (1995), DOI: 10.1070/PU1995v038n04ABEH000081.
10. J. Kanamori, “Electron correlation and ferromagnetism of transition metals,” *Prog. Theor. Phys.*, **30**, 275–289 (1963).
11. B. V. Karpenko, V. V. Dyakin, and G. L. Budrina, “Two electrons in the Hubbard Model,” *Phys. Met. Metallogr.*, **61**, 702–706 (1986).
12. V. A. Moskalenko, L. A. Dohotaru, D. F. Digor, and I. D. Cebotari, “Diagram theory for the two fold degenerate Anderson impurity model,” *Theor. Math. Phys.*, **178**, 115–129 (2014), DOI: 10.1007/s11232-014-0133-6.
13. S. G. Ovchinnikov and E. I. Shneider, “Spectral functions in the Hubbard model with half-filling,” *Phys. Solid State*, **46**, 1469–1473 (2004). doi: 10.1134/1.1788780
14. Ya. Öz and A. Klumper, “A Hubbard model with integrable impurity,” *J. Phys. A: Math. Theor.*, **52**, No. 32, 325001 (2019), DOI: 10.1088/1751-8121/ab2cf4.
15. L. Rammelmuller, D. Huber et al., “Magnetic impurity in a one-dimensional fewfermion system,” *SciPost Phys.*, **14**, No. 1, 006 (2023), DOI: 10.21468/SciPostPhys.14.1.006.
16. M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. 1. Functional Analysis*, Acad. Press, New York (1972).
17. M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. 4. Operator Analysis*, Acad. Press, New York (1978).
18. S. P. Shubin and S. V. Wonsowsky, “On the electron theory of metals,” *Proc. Roy. Soc. A*, **145**, 159–180 (1934).
19. S. M. Tashpulatov, “Spectral properties of three-electron systems in the Hubbard Model,” *Theor. Math. Phys.*, **179**, No. 5, 712–728 (2014).
20. S. M. Tashpulatov, “Spectra of the energy operator of four-electron systems in the triplet state in the Hubbard Model,” *J. Phys. Conf. Ser.*, **697**, 012025 (2016), DOI: 10.1088/1742-6596/697/1/012025.
21. S. M. Tashpulatov, “The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the Hubbard model in a singlet state,” *Lobachevskii J. Math.*, **38**, No. 3, 530–541 (2017).
22. S. M. Tashpulatov, “The structure of essential spectra and discrete spectrum of three-electron systems in the impurity Hubbard model. quartet state,” *J. Appl. Math. Phys.*, **9**, 1391–1421 (2021).
23. S. M. Tashpulatov, “Spectra of the energy operator of two-electron system in the impurity Hubbard model,” *J. Appl. Math. Phys.*, **10**, 2743–2779 (2022).
24. S. M. Tashpulatov, *Spectra of the Two-Electron System in the Impurity Hubbard Model*, Lambert Academic Publishing (2022).

25. V. V. Val'kov, S. G. Ovchinnikov, and O. P. Petrakovskii, "The excitation spectra of two-magnon systems in easy-axis quasidimensional ferromagnets," *Sov. Phys. Solid State*, **30**, 3044–3047 (1988).
26. A. A. Zvyagin and P. Schlottmann, "Magnetic impurity in the one-dimensional Hubbard model," *Phys. Rev. B*, **56**, 300–306 (1997), DOI: 10.1103/PhysRevB.56.300.

S. M. Tashpulatov

Institute of Nuclear Physics of the Uzbekistanian Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

E-mail: sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.tu

R. T. Parmanova

Institute of Nuclear Physics of the Uzbekistanian Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

E-mail: parmanova.r@inp.uz