Современная математика. Фундаментальные направления. Том 71, № 3 (2025). С. 508–523
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.98
DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-508-523
EDN: EBRWZE

КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С ИНЕРЦИОННОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Д. О. Цветков

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия

Аннотация. Исследуется задача о малых движениях и нормальных колебаниях вязкой жидкости, когда на свободной поверхности находятся весомые частицы некоторого вещества, которые в процессе колебания свободной поверхности не взаимодействуют друг с другом, или их взаимодействие пренебрежимо мало. Исходная начально-краевая задача сводится к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в некотором гильбертовом пространстве. После детального изучения свойств операторных коэффициентов доказана теорема о разрешимости полученной задачи Коши. На этой основе найдены достаточные условия существования решения начально-краевой задачи, описывающей эволюцию исходной гидросистемы. Доказаны утверждения о структуре спектра задачи и о базисности системы собственных функций.

Ключевые слова: вязкая жидкость, инерционная свободная поверхность, малые движения, нормальные колебания, начально-краевая задача.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *Д. О. Цветков.* Колебания вязкой жидкости с инерционной свободной поверхностью// Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. **71**, № 3. С. 508–523. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-508-523

Введение

Предположим, что на свободной поверхности жидкости плавают весомые частицы некоторого вещества, которые в процессе колебаний свободной поверхности не взаимодействуют друг с другом, или их взаимодействие пренебрежимо мало. Жидкость с такой поверхностью принято называть *флотирующей жидкостью*, или *жидкостью с инерционной свободной поверхностью* [2, 16]. Первоначально модель жидкости с инерционной поверхностью использовалась при описании динамических явлений поверхности северных морей, покрытых сплошным ковром из крошки битого льда.

Подробную библиографию и изложение наиболее важных результатов по изучению динамических характеристик идеальной однородной флотирующей жидкости можно найти в работе [2]. Отметим отдельно работы [11, 18], где с позиции функционального анализа изучались вопросы разрешимости линейных краевых задач, исследовались структуры и характер спектра нормальных колебаний однородной, а также стратифицированной идеальной жидкости, свободная поверхность которой состоит из трех областей: поверхности жидкости без льда, области упругого льда и области, состоящей из крошки битого льда (крошеного льда). Упругий лед моделировался упругой пластиной.

Также отметим работу [12], где изучалась задача с внутренней флотацией. Интерес к таким проблемам может быть связан с тем, что при экспериментальных исследованиях распределения характеристик воды, например, в Черном море было обнаружено, что на границе раздела двух основных слоев (верхнего и нижнего) «плавают» частицы различных материалов, объемная плотность которых больше плотности верхнего слоя, но меньше нижнего. Этими материалами являются намокшее дерево, водоросли, растительные остатки, «экологический мусор» и тому подобное.

Заметим, что если теория динамических свойств идеальной флотирующей жидкости сравнительно хорошо изучена, то число работ, посвященных флотирующей вязкой жидкости, исчисляется единицами. Отметим, например, работу [10], где строится решение линеаризованной задачи о распространении инерционных волн во флотирующей вязкой жидкости, находящейся в полости равномерно вращающегося цилиндра.

В данной работе исследуется задача о малых движениях и нормальных колебаниях вязкой жидкости с инерционной свободной поверхностью, заполняющей неподвижный контейнер. Исследование проводится на основе подхода, связанного с применением теории операторных блок-матриц, действующих в гильбертовом пространстве, и позволяющего перейти от исходной начально-краевой задачи к равносильной задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве, а также на применении абстрактных дифференциально-операторных уравнений и спектральной теории операторных пучков. Методами этих теорий удается установить ряд общих и тонких результатов. Общие идеи применяемых методов можно найти, например, в [14, 15].

1. Исследование начально-краевой задачи

1.1. Постановка начально-краевой задачи. Пусть однородная несжимаемая жидкость плотности ρ, имеющая коэффициент динамической вязкости μ, расположена в некотором неподвижном контейнере и занимает в состоянии покоя область Ω, ограниченную твердой стенкой контейнера S и свободной поверхностью Γ, покрытой плавающими частицами некоторого вещества. Последнее условие эквивалентно предположению о том, что ее свободная поверхность является весомой и имеет поверхностную плотность ρ_0, которая совпадает с массой плавающих частиц на единице поверхности. Предположим также, что начало O декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ выбрано на Γ, которая является плоской и расположена перпендикулярно ускорению силы тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси Ox_3.

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Через $\vec{u} = \vec{u}(t,x)$, $x \in \Omega$, обозначим поле скорости в жидкости, $p = p(t,x)$ — динамическое давление, равное разности полного и статического давлений, а через $\zeta = \zeta(t,\hat{x})$ $(\hat{x} = (x_1,x_2) \in \Gamma)$ — отклонение свободно движущейся поверхности жидкости $\Gamma(t)$ от Γ по нормали $\vec{n}$. Кроме того, полагаем, что на исследуемую гидродинамическую систему дополнительно к гравитационному полю действует малое поле внешних сил $\vec{f} = \vec{f}(t,x)$. Тогда малые движения исходной системы описываются следующей начально-краевой задачей:

$$\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = -\nabla p + \mu\Delta\vec{u} + \rho\vec{f}(x,t) \ (\text{в}\,\Omega), \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0 \ (\text{в}\,\Omega), \tag{1.1}$$

$$\vec{u} = \vec{0} \ (\text{на}\,S), \quad \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \vec{u}\cdot\vec{n} \ (\text{на}\,\Gamma), \quad \int_\Gamma \zeta\,d\Gamma = 0, \tag{1.2}$$

$$\mu\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_k}\right) = 0 \ (k = 1,2, \ \text{на} \ \Gamma), \quad \rho_0\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = p - \rho g\zeta - 2\mu\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (\text{на}\,\Gamma), \tag{1.3}$$

$$\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x) \ (x \in \Omega), \quad \zeta(0,\hat{x}) = \zeta^0(\hat{x}) \ (\hat{x} \in \Gamma). \tag{1.4}$$

Линеаризация уравнения Навье—Стокса и уравнения неразрывности приводит к уравнениям (1.1). На границе S задано условие прилипания жидкости, которое в терминах вектора скорости имеет вид первого уравнения (1.2). После линеаризации кинематическое условие на поверхности Γ принимает вид второго уравнения (1.2), а динамические условия — (1.3). Здесь первое динамическое условие состоит в равенстве касательных напряжений, для вывода второго требуется записать второй закон Ньютона для весомых частиц и линеаризовать его (см., например, [2]).

Далее, третье условие (1.2) — следствие условия сохранения объема Ω при колебаниях системы. Последние два условия — начальные условия, которые добавлены для полноты формулировки.

1.2. Закон баланса полной энергии. Прежде чем исследовать поставленную начально-краевую задачу, выведем для ее решения закон баланса полной энергии. Предположим, что задача (1.1)–(1.4) имеет классическое решение, т. е. такие функции $u(t,x)$, $p(t,x)$ и $\zeta(t,\hat{x})$, для которых непрерывны по всем переменным все слагаемые, входящие в уравнения и краевые условия данной задачи, кроме того, эти уравнения выполнены для указанных функций.

Лемма 1.1. *Для классического решения задачи* (1.1)–(1.4) *имеет место закон баланса полной энергии гидромеханической системы*:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left[\left(\rho\int\limits_{\Omega}|\vec{u}|^2\,d\Omega+\rho_0\int\limits_{\Gamma}\left|\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right|^2 d\Gamma_2\right)+\rho g\int\limits_{\Gamma}|\zeta|^2 d\Gamma\right]=\rho\int\limits_{\Omega}\vec{f}\,\vec{u}\,d\Omega-\mu\,E(\vec{u},\vec{u}). \tag{1.5}$$

Доказательство. Умножим обе части (1.1) скалярно на вектор-функцию $\vec{u}(t,x)$ и проинтегрируем по Ω; соответственно умножим обе части второго уравнения (1.3) скалярно на $\partial\zeta/\partial t$ и проинтегрируем по Γ. Используя формулу Грина для векторного оператора Лапласа (см., например, [14, с. 128, формула (2.10)])

$$\int\limits_{\Omega}\Delta\vec{u}\cdot\vec{v}\,d\Omega=-E(\vec{u},\vec{v})+\int\limits_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_i}\Big)\,v_i\,dS,$$

$$E(\vec{u},\vec{u})=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}|\tau_{ij}(\vec{u})|^2 d\Omega,\quad \tau_{ij}(\vec{u}):=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i},\quad i,j=1,2,3, \tag{1.6}$$

а также формулу Гаусса—Остроградского с условием соленоидальности и прилипания жидкости на твердой стенке:

$$\int\limits_{\Omega}\nabla p\cdot\vec{u}\,d\Omega=\int\limits_{\Omega}\operatorname{div}(p\,\vec{u})\,d\Omega-\int\limits_{\Omega}p\operatorname{div}\vec{u}\,d\Omega=\int\limits_{\partial\Omega}p\,u_n\,dS=\int\limits_{\Gamma}p\,u_n\,d\Gamma.$$

приходим к соотношениям

$$\rho\int\limits_{\Omega}\vec{u}\,\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\,d\Omega=-\mu\,E(\vec{u},\vec{u})+\int\limits_{\Gamma}\Big(2\mu\,\frac{\partial u_3}{\partial x_3}-p\Big)\,\frac{\partial\zeta}{\partial t}\,d\Gamma+\rho\int\limits_{\Omega}\vec{f}\,\vec{u}\,d\Omega,$$

$$\rho_0\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\,\frac{\partial\zeta}{\partial t}\,d\Gamma=\int\limits_{\Gamma}\Big(p-2\mu\,\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\Big)\,\frac{\partial\zeta}{\partial t}\,d\Gamma-\int\limits_{\Gamma}\rho g\zeta\,\frac{\partial\zeta}{\partial t}\,d\Gamma.$$

Складывая левые и правые части полученных равенств, приходим к закону баланса энергии (1.5). □

Отметим, что левая часть (1.5) представляет собой сумму производной по t полной кинетической энергии системы и ее потенциальной энергии. Полная кинетическая энергия (круглая скобка слева) равна сумме кинетической энергии жидкости в области Ω и кинетической энергии весомых частиц. За потенциальную энергию отвечает третье слагаемое слева, обусловленное колебаниями свободной поверхности. Правая часть есть мощность внешних и диссипативных сил.

1.3. Основные функциональные пространства. Вспомогательные краевые задачи и их операторы. Свойства оператора потенциальной энергии. Начально-краевую задачу (1.1)–(1.4) приведем к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. С этой целью для области Ω воспользуемся известным разложением пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega)$ в ортогональную сумму (см. [14, с. 118]):

$$\vec{L}_2(\Omega)=\vec{J}_{0,S}(\Omega)\oplus\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega),\quad \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega):=\{\,\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega)\mid\vec{v}=\nabla\varphi,\ \varphi=0\ (\text{на}\,\Gamma)\},\tag{1.7}$$
$$\vec{J}_{0,S}(\Omega):=\{\,\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega)\mid\operatorname{div}\vec{v}=0\ (\text{в}\,\Omega),\ v_n:=\vec{v}\cdot\vec{n}=0\ (\text{на}\,S)\}.$$

Отметим, что наличие вязких сил приводит к диссипации энергии, скорость которой вычисляется по формуле (1.6).

Совокупность векторных соленоидальных полей, удовлетворяющих условиям прилипания на твердой стенке S и конечной скорости диссипации энергии в вязкой жидкости, образуют подпространство $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, которое плотно в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ (см. [14, с. 132-133], [7, п. 2.3.2]).

Так как в подпространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ квадрат нормы вводится по формуле $\|\vec{u}\|^2_{1,\Omega} := E(\vec{u},\vec{u})$ и эта норма эквивалентна стандартной норме пространства $\vec{H}^1(\Omega)$, то имеют место неравенства

$$0 < c_1 \leqslant \|\vec{u}\|^2_{1,\Omega}/\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1(\Omega)} \leqslant c_2 < \infty,$$

а потому

$$\|\vec{u}\|^2_{1,\Omega} \geqslant c_1\,\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1(\Omega)} \geqslant c_1\,\|\vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega)}, \quad \forall \vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega).$$

Отсюда следует, что $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ и $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ образуют гильбертову пару (см. подробнее, [7, с. 20]), а порождающий оператор A этой пары образует шкалу пространств E^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, такую, что

$$E^0 = \vec{J}_{0,S}(\Omega), \quad E^{1/2} = \vec{J}^1_{0,S}(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \|\vec{u}\|^2_{1,\Omega} = \|A^{1/2}\vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega)}, \quad \forall\, u \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega).$$

Вспомогательная задача I (см. [15, с. 69], [6, теорема 5]). *По заданной функции $\vec{g}_1$ найти функции $\vec{v}$ и p_1, являющиеся решениями задачи*

$$\mu A\vec{v} := -\mu P_{0,S}\Delta\vec{v} + \nabla p_1 = \vec{g}_1, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \ (\textit{в}\,\Omega), \quad \vec{v} = \vec{0} \ (\textit{на}\,S), \tag{1.8}$$
$$\mu\tau_{i3}(\vec{v}) - p_1\delta_{i3} = 0 \ (\textit{на}\,\Gamma),\ i = 1,2,3, \quad \Delta p_1 = 0 \ (\textit{в}\,\Omega), \qquad \partial p_1/\partial n = 0 \ (\textit{на}\,S),$$

где $P_{0,S} : \vec{L}_2(\Omega) \to \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ — ортопроектор на подпространство $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, оператор A является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором, порожденным гильбертовой парой $(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega); \vec{J}_{0,S}(\Omega))$, и обладает следующими свойствами:

1. $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) = \vec{J}^1_{0,S}(\Omega) \subset \vec{J}_{0,S}(\Omega)$, $\overline{\mathcal{D}(A)} = \vec{J}_{0,S}(\Omega)$;
2. *обратный оператор A^{-1} есть компактный и положительный, действующий в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$;*
3. *оператор A имеет дискретный положительный спектр $\{\lambda_n(A)\}_{n=1}^\infty$ с единственной предельной точкой $\lambda = +\infty$ и асимптотическим поведением* [17]:

$$\lambda_n(A) = c_A^{-2/3} n^{2/3}[1 + o(1)] \quad (\,n \to +\infty\,), \quad c_A = (3\pi^2)^{-1} mes\,\Omega. \tag{1.9}$$

Отметим, что если задача (1.8) имеет решение $\vec{v} \in \vec{H}^2(\Omega) \cap \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, то $\nabla p_1 \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$,

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega) := \Big\{\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega) :\ \vec{v} = \nabla p,\ \Delta p = 0 \ (\text{в}\,\Omega),\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \ (\text{на}\,S),\ \int_\Gamma p\,d\Gamma = 0\Big\}.$$

При $\vec{g}_1 \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ задача (1.8) (*см. подробнее* [6, теорема 5]) *имеет единственное обобщенное решение $\vec{v} = \mu^{-1}A^{-1}\vec{g}_1 \in \mathcal{D}(A)$, где обобщенное решение определяется следующим тождеством: $E(\vec{\eta},\vec{v}) = (\vec{\eta},\vec{g}_1)_{\vec{L}_2(\Omega)}$, $\vec{\eta} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$.*

Наряду с введенными пространствами рассмотрим гильбертово пространство $L_2(\Gamma)$ со скалярным произведением

$$(\xi,\eta)_0 = \int_\Gamma \xi(\hat{x})\,\eta(\hat{x})\,d\Gamma, \quad \hat{x} \in \Gamma. \tag{1.10}$$

Из третьего условия (1.2), получаем, что функция $\zeta(t,\hat{x})$ при каждом t должна принадлежать гильбертову пространству $L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$ функций из $L_2(\Gamma)$, которые ортогональны к функции 1_Γ, тождественно равной единице.

Введем оператор нормального следа γ_n, действующий по закону

$$\gamma_n\vec{u} := (\vec{u}\cdot\vec{n})_\Gamma \quad \forall\,\vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega).$$

Так как $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ — подпространство $\vec{H}^1(\Omega)$, а граница области Ω состоит (будем предполагать) из двух частей: равновесной поверхности Γ — достаточно гладкой (бесконечно дифференцируемой) и твердой стенки S — липшицевой, то по теореме Гальярдо (см., например, [7, с. 51]) получаем, что оператор γ_n ограниченно действует из $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ в пространство $H^{1/2}(\Gamma)$ с квадратом нормы

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} := \int\limits_{\Gamma} |\varphi|^2 d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_\eta}\int\limits_{\Gamma_\zeta} \frac{|\varphi(\zeta)-\varphi(\eta)|^2}{|\zeta-\eta|^3}\, d\Gamma_\zeta\, d\Gamma_\eta.$$

Отметим, что для элементов $\vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ выполнено условие $\gamma_n \vec{u} \in L_{2,\Gamma}$. Следовательно, γ_n ограниченно действует из $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ в пространство $H^{1/2}_\Gamma := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}$, плотно вложенное в $L_{2,\Gamma}$. Более того, $H^{1/2}_\Gamma$ и $L_{2,\Gamma}$ образуют гильбертову пару пространств, и по ней строится оснащение $H^{1/2}_\Gamma \subset L_{2,\Gamma} \subset (H^{1/2}_\Gamma)^*$ (см. [7, с. 52], [1, п. 2]).

Вспомогательная задача II (см. [14, с. 107]). *По заданной функции $\psi(\hat{x})$, $\hat{x} \in \Gamma$, найти функцию $p_2(x)$, $x \in \Omega$, являющуюся решением задачи*

$$\Delta p_2 = 0 \ (\text{в}\,\Omega), \quad \frac{\partial p_2}{\partial n} = 0 \ (\text{на}\,S), \quad p_2 = \psi \ (\text{на}\,\Gamma), \quad \int\limits_{\Gamma} \psi d\Gamma = 0.$$

Данная задача является известной задачей Заремба для уравнения Лапласа. *Если $\psi \in H^{1/2}_\Gamma$, то данная задача имеет единственное решение $p_2 \in H^1_\Gamma(\Omega)$,*

$$H^1_\Gamma(\Omega) = \{p \in H^1(\Omega) : \int\limits_{\Gamma} p\, d\Gamma = 0\}, \quad \|p\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} |\nabla p|^2 d\Omega.$$

Отметим, что если $p_2(x)$ — решение задачи II для $\psi \in H^{1/2}_\Gamma$, то $\nabla p_2(x) = G\psi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$.

Лемма 1.2. *Имеют место свойства $\mathcal{D}(\gamma_n) \subset \mathcal{D}(G^*)$, $G^*|_{\mathcal{D}(\gamma_n)} = \gamma_n$.*

Доказательство. Пусть $\vec{v} \in \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$, $\psi \in H^{1/2}_\Gamma$. Тогда

$$(\nabla p_2, \vec{v}) = \int\limits_{\Omega_1} \nabla p_2 \cdot \overline{\vec{v}}\, d\Omega_1 = \int\limits_{\Omega_1} \operatorname{div}(p_2 \overline{\vec{v}})\, d\Omega_1 = \int\limits_{\partial\Omega_1} p_2 \overline{v_n}\, dS = \int\limits_{\Gamma} p_2 \overline{v_n}\, d\Gamma = \int\limits_{\Gamma} \psi \overline{v_n}\, d\Gamma =$$

$$= (\psi, \gamma_n \vec{v})_0 \quad \Rightarrow \quad (G\psi, \vec{v}) = (\psi, \gamma_n \vec{v})_0, \quad \psi \in H^{1/2}_\Gamma, \quad \vec{v} \in \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1), \quad (1.11)$$

следовательно, $\mathcal{D}(\gamma_n) \subset \mathcal{D}(G^*)$, $G^*|_{\mathcal{D}(\gamma_n)} = \gamma_n$. Лемма доказана. □

Замечание 1.1. Из леммы 1.2 следует, что оператор γ_n может быть расширен до оператора $\widetilde{\gamma}_n$ с областью определения $\mathcal{D}(\widetilde{\gamma}_n) = \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$. Действительно, соотношение (1.11) выполняется, когда в правой части имеем $(\psi, \widetilde{\gamma}_n \vec{v})_0$ для $\psi \in H^{1/2}_\Gamma$, $\widetilde{\gamma}_n \vec{v} \in (H^{1/2}_\Gamma)^*$. Эта ситуация имеет место для $\vec{v} \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$. При этом получаем, что на множестве $\vec{J}_0(\Omega_1)$ оператор $\widetilde{\gamma}_n$ равен нулевому оператору, т. е. $\ker \widetilde{\gamma}_n = \vec{J}_0(\Omega_1)$. Так как имеют место вложения $H^{1/2}_\Gamma \subset L_{2,\Gamma} \subset (H^{1/2}_\Gamma)^*$, то, очевидно, $\gamma_n \subset G^* \subset \widetilde{\gamma}_n$. Обозначим через $\widehat{\gamma}_n$ такое расширение γ_n, для которого область значений совпадает с $L_{2,\Gamma}$. Тогда $\widehat{\gamma}_n = G^*$, при этом $\mathcal{D}(G^*) = \{\, \vec{v} \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)|\ \gamma_n \vec{v} \in L_2(\Gamma)\,\}$. В дальнейшем вместо $\widehat{\gamma}_n$ для простоты снова будем писать γ_n.

Как следствие из леммы 1.2 и замечания 1.1 получаем такое утверждение.

Лемма 1.3. *Для операторов A и γ_n выполнены включения*

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) = \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) \subset \mathcal{D}(\gamma_n).$$

1.4. Переход к дифференциально-операторному уравнению и свойства его операторных коэффициентов. Основываясь на разложении (1.7), применим метод ортогонального проектирования к исходной начально-краевой задаче. В силу условия соленоидальности в Ω и условия прилипания на S считаем, что $\vec{u}(t,x) \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$. Далее, представим $\nabla p(t,x)$ в виде $\nabla p(t,x) = \nabla\varphi + \nabla\widetilde{p} \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega) =: \vec{G}(\Omega)$.

Применим ортопроекторы $P_{0,\Gamma}$ и $P_{0,S}$ (ортопроекторы на подпространства $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$ и $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ соответственно, $P_{0,S} + P_{0,\Gamma} = I$) к уравнению (1.1):

$$\vec{0} = -\nabla\varphi + P_{0,\Gamma}(\mu\Delta\vec{u}) + \rho\, P_{0,\Gamma}\vec{f}(t,x), \tag{1.12}$$

$$\rho\,\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = -\nabla\widetilde{p} + P_{0,S}(\mu\Delta\vec{u}) + \rho\, P_{0,S}\vec{f}(t,x). \tag{1.13}$$

Соотношение (1.12) показывает, что $\nabla\varphi$ может быть найдено, если известно решение $\vec{u}$. Поэтому в дальнейшем достаточно ограничиться рассмотрением соотношения (1.13), а также второго условия (1.3) с соответствующей заменой $p \to \widetilde{p}$, так как $p = \widetilde{p} + \varphi$, $\varphi = 0$ (на Γ). Условимся называть решения уравнения (1.12) *тривиальными*.

Представим $\nabla\widetilde{p} \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$ в виде $\nabla\widetilde{p} = \nabla p_1 + \nabla p_2$, где p_1 — функция из вспомогательной задачи I, а p_2 есть решение вспомогательной задачи II для $\psi = \rho_0(\partial^2\zeta/\partial t^2) + \rho g\zeta$.

Итогом приведенных выше преобразований является лемма.

Лемма 1.4. *Решение начально-краевой задачи* (1.1)–(1.4) *с учетом* (1.12) *является решением задачи Коши для системы дифференциально операторных уравнений*

$$\rho\,\frac{d\vec{u}}{dt} + \mu A\vec{u} + \rho g G\zeta + \rho_0 G\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \rho\, P_{0,S}\vec{f} =: \vec{f}_{0,S}, \tag{1.14}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} - \gamma_n\vec{u} = 0, \quad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \quad \zeta(0) = \zeta^0, \quad \zeta^{'}(0) = \zeta^1 = \gamma_n\vec{u}^0.$$

Здесь все искомые и заданные функции переменной t и пространственных переменных считаем функциями одной переменной t со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах, что уже и было учтено в проведенных выше построениях. В связи с этим все производные $\partial/\partial t$ заменили на d/dt.

Будем считать, что функция $(\gamma_n\vec{u})(t)$ непрерывно дифференцируема по t и ее производная принадлежит $\mathcal{D}(G) = H_\Gamma^{1/2}$, тогда $G(d^2\zeta/dt^2) = G\gamma_n(d\vec{u}/dt)$.

С учетом сказанного задачу (1.14) перепишем в виде задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma}$:

$$\mathcal{C}\frac{dy}{dt} + \mathcal{A}_0 y = \mathcal{F}, \quad y(0) = y^0, \tag{1.15}$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \rho\, I + \rho_0 G\gamma_n & 0 \\ 0 & \rho g I_\Gamma \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} \mu A & \rho g G \\ -\rho g\gamma_n & 0 \end{pmatrix}, \quad y = (\vec{u};\zeta)^\tau, \quad \mathcal{F} = (f_{0,S};0)^\tau, \tag{1.16}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(G), \quad \mathcal{D}(\mathcal{C}) = \{\,(\vec{u};\zeta)^\tau \in \mathcal{H} :\, \vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)\,\}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{D}(\mathcal{C}).$$

Здесь индекс $(\ldots)^t$ означает операцию транспонирования матрицы. Кроме того, всюду далее будем считать, что $\mathbb{R}_+ := [0;+\infty)$.

Определение 1.1. *Сильным решением* (по переменной t) исходной начально-краевой задачи (1.1)–(1.4) назовем набор функций $\vec{u}(t)$, $\nabla p(t)$ и $\zeta(t)$, для которых функция $y(t) = (\vec{u}(t);\zeta(t))^\tau$ являются решением задачи (1.15). В свою очередь *решением* задачи (1.15) назовем такую функцию $y(t)$, что $y(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ при $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{A}_0 y \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{H})$, $y(t) \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{H})$, выполнено начальное условие и уравнение (1.15) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Лемма 1.5. *Оператор* $\mathcal{C}$ (*определенный в* (1.16)) *является положительно определенным оператором, действующим в* $\mathcal{H}$.

Доказательство. Оператор $\mathcal{C}$, очевидно, плотно определен. Для $y_1 = (\vec{u}_1,\zeta_1)^\tau$ и $y_2 = (\vec{u}_2,\zeta_2)^\tau$ из $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ имеем

$$(\mathcal{C}y_1,y_2)_\mathcal{H} = \rho\,(\vec{u}_1,\vec{u}_2)_{\vec{L}_2(\Omega)} + \rho_0(G\gamma_n\vec{u}_1,\vec{u}_2)_{\vec{L}_2(\Omega)} + (\zeta_1,\zeta_2)_0 = \\ = \rho\,(\vec{u}_1,\vec{u}_2)_{\vec{L}_2(\Omega)} + \rho_0(\gamma_n\vec{u}_1,\gamma_n\vec{u}_2)_0 + (\zeta_1,\zeta_2)_0 = \ldots = (y_1,\mathcal{C}y_2)_\mathcal{H}.$$

Отсюда следует симметричность оператора $\mathcal{C}$. Пусть теперь $y_1 = y_2 = y$, тогда из последнего получим

$$(\mathcal{C}y,y)_\mathcal{H} = \rho\,\|\vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega)} + \rho_0\|\gamma_n\vec{u}\|_0^2 + \|\zeta\|_0^2 \geqslant \rho\,\|\vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega)} + \|\zeta\|_0^2 \geqslant \min(\rho;1)\cdot\|y\|^2_\mathcal{H}.$$

Таким образом, $\mathcal{C}$ — положительно определенный оператор, действующий в $\mathcal{H}$. □

Введем вспомогательные операторы

$$Q = \gamma_n(\mu A)^{-1/2}, \quad \mathcal{D}(Q) = \vec{J}_{0,S}(\Omega), \quad Q^+ = (\mu A)^{-1/2}G, \quad \mathcal{D}(Q^+) = \mathcal{D}(G).$$

Лемма 1.6. *Для операторов Q и Q^+ справедливы свойства*

$$Q^+ \subset Q^*, \quad Q^+ = Q^*|_{\mathcal{D}(G)}, \quad \overline{Q^+} = Q^*.$$

Доказательство. Для любого $\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и $\eta \in \mathcal{D}(G)$ имеем

$$(Q\vec{v}, \eta)_0 = (\gamma_n(\mu A)^{-1/2}\vec{v}, \eta)_0 = ((\mu A)^{-1/2}\vec{v}, G\eta) = (\vec{v}, (\mu A)^{-1/2}G\eta) = (\vec{v}, Q^+\eta).$$

Отсюда следует, что $Q^+ \subset Q^*$ и $Q^+ = Q^*|_{D(G)}$. Покажем, что оператор Q^+ ограничен на $\mathcal{D}(G)$. Оператор Q ограниченно действует из $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ в $L_{2,\Gamma}$. Действительно, оператор $A^{-1/2}$ отображает $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ на $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, а оператор γ_n, согласно теореме о следах, компактен как оператор из $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ в $L_{2,\Gamma}$. Таким образом, оператор Q ограничен (даже компактен). Отсюда следует, что оператор Q^* тоже ограничен. Тогда для любого $\eta \in \mathcal{D}(G)$ имеет место следующее неравенство:

$$\|Q^+\eta\| = \|Q^*\eta\| \leqslant \|Q^*\| \cdot \|\eta\|_0.$$

Откуда следует, что Q^+ ограничен на $\mathcal{D}(G)$, а поэтому расширяется по непрерывности до ограниченного оператора Q^*, т. е. $\overline{Q^+} = Q^*$. □

Покажем, что оператор $\mathcal{A}_0$ замыкаем и замыкание $\overline{\mathcal{A}_0}$ есть замкнутый максимальный аккретивный оператор, т. е. других замкнутых аккретивных расширений у оператора $\mathcal{A}_0$ нет. Подобные построения для операторных блоков проводились в работах [5, 13].

Лемма 1.7. *Оператор $\mathcal{A}_0$ замыкаем и $\overline{\mathcal{A}_0} =: \mathcal{A}$, при этом оператор $\mathcal{A}$ — максимальный аккретивный и представим в следующем виде*:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} (\mu A)^{1/2} & 0 \\ 0 & I_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \rho g\, Q^* \\ -\rho g\, Q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mu A)^{1/2} & 0 \\ 0 & I_\Gamma \end{pmatrix}, \tag{1.17}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{ y = (\vec{u}; \zeta)^\tau \in \mathcal{H} = \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma} \mid \vec{u} + \rho g\,(\mu A)^{-1/2} Q^* \zeta \in \mathcal{D}(A) \Big\}. \tag{1.18}$$

Доказательство. I этап. Оператор $\mathcal{A}_0$, очевидно, плотно определен. Далее непосредственно проверяется, что для любого $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ выполняется $\operatorname{Re}(\mathcal{A}_0 y, y)_{\mathcal{H}} = \|(\mu A)^{1/2}\vec{u}\|^2 \geqslant 0$. Таким образом, оператор $\mathcal{A}_0$ аккретивен, а значит (см., например, [9, с. 109], [3, с. 51]), допускает замыкание.

Построим замыкание оператора $\mathcal{A}_0$, используя включение $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(\gamma_n)$. Пусть

$$y_n := (\vec{u}_n; \zeta_n)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0), \quad y_n \to y = (\vec{u}; \zeta)^\tau, \quad \mathcal{A}_0 y_n \to y_0 := (\vec{u}_0; \zeta_0)^\tau. \tag{1.19}$$

Отсюда, $\vec{u}_n + \rho g\,(\mu A)^{-1} G\zeta_n \in \mathcal{D}(A)$, $A(\vec{u}_n + \rho g\,(\mu A)^{-1} G\zeta_n) \to \vec{u}_0$, кроме того

$$\vec{u}_n + \rho g\,(\mu A)^{-1} G\zeta_n = \vec{u}_n + \rho g\,(\gamma_n(\mu A)^{-1})^* \zeta_n \to \vec{u} + \rho g\,(\gamma_n(\mu A)^{-1})^* \zeta.$$

Оператор A самосопряжен, а потому замкнут, таким образом, имеем

$$\vec{u} + \rho g\,(\gamma_n(\mu A)^{-1})^* \zeta \in \mathcal{D}(A), \quad A(\vec{u} + \rho g\,(\gamma_n(\mu A)^{-1})^* \zeta) = u_0.$$

Из (1.19) следует, что $\vec{u}_n \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(\gamma_n)$, $\vec{u}_n \to \vec{u}$, $-\gamma_n \vec{u}_n \to \zeta_0$. Оператор γ_n замкнут, а значит, $\vec{u} \in \mathcal{D}(\gamma_n)$ и $-\gamma_n \vec{u} = \zeta_0$. Следовательно, $y \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0})$ и $\overline{\mathcal{A}_0} y = y_0$, где

$$\overline{\mathcal{A}_0} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\vec{u} + \rho g\,(\gamma_n(\mu A)^{-1})^* \zeta) \\ -\gamma_n \vec{u} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0}) = \Big\{ (\vec{u}; \zeta)^\tau \in \mathcal{H} \mid \vec{u} \in \mathcal{D}(\gamma_n),\ \vec{u} + \rho g\,(\gamma_n(\mu A)^{-1})^* \zeta \in \mathcal{D}(A) \Big\}.$$

Используем теперь включение $\mathcal{D}(A^{1/2}) \subset \mathcal{D}(\gamma_n)$ (см. лемму 1.3). Отсюда следует равенство

$$(\gamma_n(\mu A)^{-1})^* = (\gamma_n(\mu A)^{-1/2}(\mu A)^{-1/2})^* = (\mu A)^{-1/2}(\gamma_n(\mu A)^{-1/2})^* = (\mu A)^{-1/2} Q^*.$$

Из включения $\vec{u} + \rho g\,(\gamma_n(\mu A)^{-1})^*\zeta = \vec{u} + \rho g\,(\mu A)^{-1/2}Q^*\zeta \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$ и факта, что $\mathcal{D}(A^{1/2})$ является линеалом, следует, что $\vec{u} \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \subset \mathcal{D}(\gamma_n)$. Следовательно, условие $\vec{u} \in \mathcal{D}(\gamma_n)$ в описании множества $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0})$ можно опустить. Из проведенных рассуждений получим, что

$$\overline{\mathcal{A}_0}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \zeta\end{pmatrix} =: \mathcal{A}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \zeta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A(\vec{u} + \rho g\,(\mu A)^{-1/2}Q^*\zeta)\\ -\rho g\,Q(\mu A)^{1/2}\vec{u}\end{pmatrix},$$
$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{(\vec{u};\zeta)^\tau \in \mathcal{H} \mid \vec{u} + \rho g\,(\mu A)^{-1/2}Q^*\zeta \in \mathcal{D}(A)\Big\}.$$

Непосредственными вычислениями проверяется, что множество $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ из (1.18) является естественной областью определения для факторизации (1.17).

II этап. Докажем, что замкнутый аккретивный оператор $\mathcal{A}$ максимален. Для этого достаточно установить (см. [9, с. 109, теорема 4.3]), что $\rho(\mathcal{A}) \cap \{\lambda < 0\} \neq \varnothing$, где $\rho(\mathcal{A})$ — резольвентное множество оператора $\mathcal{A}$.

Действительно, при $\lambda \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I} &= \begin{pmatrix}(\mu A)^{1/2} & 0\\ 0 & I_\Gamma\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}I & \rho g\,Q^*\\ -\rho g\,Q & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\lambda(\mu A)^{-1} & 0\\ 0 & \lambda I_\Gamma\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}(\mu A)^{1/2} & 0\\ 0 & I_\Gamma\end{pmatrix} =\\
&= \begin{pmatrix}(\mu A)^{1/2} & 0\\ 0 & I_\Gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I - \lambda(\mu A)^{-1} & \rho g\,Q^*\\ -\rho g\,Q & -\lambda I_\Gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\mu A)^{1/2} & 0\\ 0 & I_\Gamma\end{pmatrix} =\\
&= \begin{pmatrix}(\mu A)^{1/2} & 0\\ 0 & I_\Gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & -\lambda^{-1}\rho g\,Q^*\\ 0 & I_\Gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I - \lambda(\mu A)^{-1} - \lambda^{-1}(\rho g)^2Q^*Q & 0\\ 0 & -\lambda I_\Gamma\end{pmatrix}\times\\
&\qquad\times\begin{pmatrix}I & 0\\ \lambda^{-1}\rho g\,Q & I_\Gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\mu A)^{1/2} & 0\\ 0 & I_\Gamma\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Определим оператор-функцию $L(\lambda) = I - \lambda(\mu A)^{-1} - \lambda^{-1}(\rho g)^2Q^*Q$. Очевидно, что при $\lambda < 0$ (ограниченный) оператор $L(\lambda)$ самосопряжен и положительно определен, а значит, существует, ограничен и задан на всем пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ оператор $L^{-1}(\lambda)$. Из последнего представления при $\lambda < 0$ найдем, что существует

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{-1} &= \begin{pmatrix}(\mu A)^{-1/2} & 0\\ -\lambda^{-1}\rho g\,Q & I_\Gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L^{-1}(\lambda) & 0\\ 0 & -\lambda I_\Gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\mu A)^{-1/2} & \lambda^{-1}\rho g\,Q^*\\ 0 & I_\Gamma\end{pmatrix} =\\
&= \begin{pmatrix}(\mu A)^{-1/2}L^{-1}(\lambda)(\mu A)^{-1/2} & \lambda^{-1}\rho g\,(\mu A)^{-1/2}L^{-1}(\lambda)Q^*\\ -\lambda^{-1}\rho g\,QL^{-1}(\lambda)(\mu A)^{-1/2} & -\lambda^{-2}(\rho g)^2QL^{-1}(\lambda)Q^* - \lambda I_\Gamma\end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),
\end{aligned}$$

а значит, $\{\lambda < 0\} \subset \rho(\mathcal{A})$. □

1.5. Теорема существования сильного решения.

Теорема 1.1. *Если выполнены условия* $\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A)$, $\zeta^0 \in \mathcal{D}(G) = H_\Gamma^{1/2}$, *а функция* $\vec{f}(t)$ *удовлетворяет условию Гельдера, т. е. для любого* $\tau \in \mathbb{R}_+$ *найдутся такие числа* $K = K(\tau) > 0$, $k = k(\tau) \in (0,1]$, *что*

$$\|\vec{f}(t) - \vec{f}(s)\|_{\vec{L}_2(\Omega)} \leqslant K|t-s|^k \quad \forall\ 0 \leqslant s,t \leqslant \tau.$$

Тогда начально-краевая задача (1.1)–(1.4) *имеет единственное сильное решение* (*в смысле определения* 1.1).

Доказательство. I этап. Согласно лемме 1.5 оператор $\mathcal{C}$ имеет ограниченный обратный оператор $\mathcal{C}^{-1}$, поэтому с операторным уравнением (1.15) будем ассоциировать следующее уравнение с оператором $\mathcal{A}$:

$$\frac{dy}{dt} = -\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}y + \mathcal{C}^{-1}\mathcal{F}, \quad y(0) = y^0. \tag{1.20}$$

Введем в $\mathcal{H}$ новое скалярное произведение $(y,z)_{\mathcal{H}_\mathcal{C}} := (\mathcal{C}y,z)_\mathcal{H}$, порождающее норму, эквивалентную исходной норме $\mathcal{H}$. Соответствующее энергетическое пространство для этой нормы обозначим через $\mathcal{H}_\mathcal{C}$.

Докажем, что оператор $-\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}$ является генератором голоморфной полугруппы в $\mathcal{H}_\mathcal{C}$. Для этого достаточно показать, что оператор $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}$ является максимальным секториальным в $\mathcal{H}_\mathcal{C}$ (см., например, [8, с. 234, 235]).

Проверим, что $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}$ секториален в $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$. Пусть $y=(y_1;y_2)^\tau\in\mathcal{D}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A})$, тогда $y_1\in\mathcal{D}(A^{1/2})$ и из факторизации оператора $\mathcal{A}$ имеем, что

$$\mathrm{Re}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}y,y)_{\mathcal{H}_{\mathcal{C}}}=\mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} & \rho g\,Q^* \\ -\rho g\,Q & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\mu A)^{1/2}y_1\\ y_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}(\mu A)^{1/2}y_1\\ y_2\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}}=\|(\mu A)^{1/2}y_1\|^2_{\mathcal{H}_1};$$

$$\Big|\mathrm{Im}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}y,y)_{\mathcal{H}_{\mathcal{C}}}\Big|=\Big|\mathrm{Im}\Big((\rho g\,Q^*y_2,(\mu A)^{1/2}y_1)_{\mathcal{H}_1}-(\rho g\,Q(\mu A)^{1/2}y_1,y_2)_{\mathcal{H}_2}\Big)\Big|=$$
$$=\Big|2\rho g\,\mathrm{Im}(Q^*y_2,(\mu A)^{1/2}y_1)_{\mathcal{H}_1}\Big|\leqslant 2\rho g\,\|(\mu A)^{1/2}y_1\|_{\mathcal{H}_1}\cdot\|Q^*y_2\|_{\mathcal{H}_1}.$$

Из этих оценок при любом $\theta>0$ получаем, что

$$\mathrm{Re}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}y,y)_{\mathcal{H}_{\mathcal{C}}}-\theta\Big|\mathrm{Im}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}y,y)_{\mathcal{H}_{\mathcal{C}}}\Big|\geqslant\Big(\|(\mu A)^{1/2}y_1\|_{\mathcal{H}_1}-\theta\,\|Q^*y_2\|_{\mathcal{H}_1}\Big)^2-\theta^2\,\|Q^*y_2\|^2_{\mathcal{H}_1}\geqslant$$
$$\geqslant-\theta^2\,\|Q^*\|^2\cdot\|y_2\|^2_{\mathcal{H}_2}\geqslant-\theta^2\,\|Q^*\|^2\cdot\|y\|^2_{\mathcal{H}}=-\theta^2\,\|Q^*\|^2\,\|C^{-1}\|^2\,\|y\|^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{C}}}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Re}\Big((\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}+\gamma(\theta))y,y\Big)_{\mathcal{H}_{\mathcal{C}}}-\theta\,\Big|\mathrm{Im}\Big((\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}+\gamma(\theta))y,y\Big)_{\mathcal{H}_{\mathcal{C}}}\Big|\geqslant 0,$$

где $\gamma(\theta)=-\theta^2\,\|Q^*\|^2\,\|C^{-1}\|^2$. Таким образом,

$$\Big|\mathrm{Im}\Big((\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}+\gamma(\theta))y,y\Big)_{\mathcal{H}_{\mathcal{C}}}\Big|\leqslant\theta^{-1}\,\mathrm{Re}\Big((\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}+\gamma(\theta))y,y\Big)_{\mathcal{H}_{\mathcal{C}}},$$
$$\forall\,0\neq y\in\mathcal{D}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}),\quad \theta>0,$$

Отсюда следует, что оператор $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}$ секториальный с вершиной $\gamma(\theta)$ и полураствором сектора $\mathrm{arctg}\,\theta^{-1}$. Максимальность оператора $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}$ следует из $(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ при достаточно больших $\lambda<0$ (идея доказательства совпадает с этапом II из леммы 1.7).

II этап. Пусть выполнены условия теоремы на начальные данные, тогда

$$y(0)\in\mathcal{D}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}_0)=\mathcal{D}(A)\oplus\mathcal{D}(G)\subset\mathcal{D}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}).$$

Из условия на функцию $\vec{f}(t)$ следует, что функция $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{F}(t)$ также локально гельдерова. Так как оператор $-\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}$ порождает голоморфную полугруппу, приходим к тому, что задача (1.20) имеет единственное решение $y(t)\in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_{\mathcal{C}})\cap C(\mathbb{R}_+;\mathcal{D}(\mathcal{A}))$ (см., например, [3, с. 130, теорема 1.4], [8, с. 248, теорема 6.5]).

II этап. Пусть $y(t)=(\vec{u}(t);\zeta(t))^\tau$ — решение задачи (1.20). Перепишем уравнение (1.20) в следующем виде:

$$\begin{cases} d\vec{u}/dt=-C_0^{-1}\,(\mu\,A)\,\left(\vec{u}+\rho g\,(\mu A)^{-1/2}Q^*\zeta\right)+C_0^{-1}\vec{f}_{0,S},\\ d\zeta/dt=Q(\mu A)^{1/2}\vec{u},\quad C_0:=\rho I+\rho_0G\gamma_n.\end{cases}\tag{1.21}$$

Заметим, что учитывая определение $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, скобки в первом уравнении раскрыть нельзя, так как каждое слагаемое в скобках может принадлежать $\mathcal{D}(A^{1/2})$ и только сумма попадает в $\mathcal{D}(A)$.

Цель дальнейших преобразований — избавиться от упомянутого затруднения и перейти от системы (1.21) к системе уравнений, отвечающей не замкнутому оператору $\mathcal{A}$, а его сужению $\mathcal{A}_0$. Для этого из второго уравнения (1.21) выразим $\zeta(t)$ и подставим в первое уравнение (1.21), в результате получим

$$\frac{d\vec{u}}{dt}=-C_0^{-1}\,(\mu\,A)\,\Big(\vec{u}+\rho g\,(\mu A)^{-1/2}Q^*\zeta^0+\rho g(\mu A)^{-1/2}Q^*\int\limits_0^t Q(\mu A)^{1/2}\vec{u}(s)\,ds\Big)+C_0^{-1}\vec{f}_{0,S}.$$

Так как по условию теоремы $\zeta^0\in\mathcal{D}(G)$, следовательно, из леммы 1.6 следует, что $Q^*\zeta^0=Q^+\zeta^0$ и поэтому $(\mu A)^{-1/2}Q^*\zeta^0=(\mu A)^{-1}G\zeta^0\in\mathcal{D}(A)$. Таким образом,

$$\vec{u}+\rho g\int\limits_0^t A^{-1/2}Q^*QA^{1/2}\vec{u}(s)\,ds=:\vec{u}_0(t),\quad \vec{u}_0(t)\in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{D}(A)).\tag{1.22}$$

Определим на $\mathcal{D}(A)$ норму $\|\vec{u}\|_{\mathcal{D}(A)} := \|(\mu A)\vec{u}\|_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)}$ и превратим его тем самым в банахово пространство E_A. Будем рассматривать уравнение (1.22) как уравнение Вольтерра второго порядка в E_A. Ядро $K(t,s) := A^{-1/2}Q^*QA^{1/2}$ интегрального оператора в (1.22) есть сильно непрерывная оператор-функция, так как оператор $A^{-1/2}Q^*QA^{1/2}$ ограничен в E_A. Докажем данный факт.

Для любого $\vec{u}(t) \in E_A$ имеем

$$\|(\mu A)^{-1/2}Q^*Q(\mu A)^{1/2}\vec{u}\|_{E_A} = \|(\mu A)^{1/2}Q^*Q(\mu A)^{1/2}\vec{u}\|_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} =$$
$$= \|(\mu A)^{1/2}Q^*|_{\mathcal{D}(G)}(\gamma_n(\mu A)^{-1/2})(\mu A)^{-1/2}(\mu A\vec{u})\|_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} = \|G\gamma_n(\mu A)^{-1}(\mu A\vec{u})\|_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \|G\gamma_n(\mu A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\vec{J}_{0,S}(\Omega))} \cdot \|(\mu A)\vec{u}\|_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} = \|G\gamma_n(\mu A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\vec{J}_{0,S}(\Omega))} \cdot \|\vec{u}\|_{E_A}.$$

Таким образом, $(\mu A)^{-1/2}Q^*Q(\mu A)^{1/2} \in \mathcal{L}(E_A)$ и уравнение (1.22) имеет единственное решение $\vec{u}(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A))$. Отсюда следует, что в первом уравнении системы (1.21) можно раскрыть скобки. Это означает, что функция $y(t)$ — решение задачи (1.15) (в смысле определения 1.1). Теорема доказана. □

2. Задача о нормальных колебаниях

2.1. Формулировка задачи. Рассмотрим так называемые нормальные колебания данной гидросистемы. Прежде чем это сделать, заметим следующее обстоятельство. При исследовании начально-краевой задачи (1.1)–(1.4) выяснилось, что этой задаче можно сопоставить матричный оператор $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}$, являющийся максимальным аккретивным оператором, действующим в $\mathcal{H}$. Поэтому естественным является следующее определение.

Определение 2.1. Назовем *нормальными движениями* (*колебаниями*) изучаемой гидросистемы такие решения $y(t)$ однородного уравнения (1.20), которые зависят от t по закону $\exp(-\lambda t)$.

Полагая в (1.20) $\mathcal{F} \equiv 0$ (свободные движения гидросистемы) и

$$y(t) = \exp(-\lambda t)y, \quad y \in \mathcal{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

приходим к спектральной задаче

$$\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}y = \lambda y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}_{\mathcal{C}}. \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *Число $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи* (2.1).

Доказательство. Пусть $\lambda = 0$, тогда для $y = (\vec{u}, \zeta)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$:

$$(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}_{\mathcal{C}}} = (\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}} = 0, \quad \operatorname{Re}(\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}} = \|(\mu A)^{1/2}\vec{u}\|^2_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} = 0,$$

откуда $\vec{u} = 0$. Далее, из факторизации для оператора $\mathcal{A}$ (см. подробнее лемму 1.7) при $\vec{u} = 0$ имеем $\zeta \in \operatorname{Ker} Q^* = \{0\}$. Таким образом, $\zeta = 0$, а значит, $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (2.1). □

Лемма 2.2. *Спектр задачи* (2.1) *совпадает со спектром операторного пучка*

$$L(\lambda) = I - \lambda V_1 - \lambda^{-1}V_2, \tag{2.2}$$
$$V_1 := \rho\,(\mu A)^{-1} + \rho_0\, Q^*Q, \quad V_2 := \rho g\, Q^*Q.$$

Доказательство. Пусть $\lambda \neq 0$, тогда (с учетом обозначения $C_0 = \rho\, I + \rho_0 G\gamma_n$)

$$\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I} =$$
$$= \begin{pmatrix} C_0^{-1} & 0 \\ 0 & (\rho g)^{-1}I_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mu A)^{1/2} & 0 \\ 0 & I_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - \lambda(\mu A)^{-1/2}C_0(\mu A)^{-1/2} & \rho g\, Q^* \\ -\rho g\, Q & -\lambda\,\rho g\, I_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mu A)^{1/2} & 0 \\ 0 & I_\Gamma \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} C_0^{-1} & 0 \\ 0 & (\rho g)^{-1}I_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mu A)^{1/2} & 0 \\ 0 & I_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\lambda^{-1}Q^* \\ 0 & I_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & -\lambda\,\rho g\, I_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \lambda^{-1}Q & I_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mu A)^{1/2} & 0 \\ 0 & I_\Gamma \end{pmatrix},$$

где $L(\lambda) = I - \lambda(\rho(\mu A)^{-1} + \rho_0 Q^*Q) - \lambda^{-1}\,\rho g\, Q^*Q$.

Если $\lambda \neq 0$ принадлежит резольвентному множеству операторного пучка $L(\lambda)$ ($\lambda \in \rho(L(\lambda))$, тогда из последних преобразований $\lambda \in \rho(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A})$, а потому $\sigma(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}) \subset \sigma(L(\lambda))$.

Докажем обратное включение. Пусть λ — собственное значение операторного пучка $L(\lambda)$, т. е. существует $x \neq 0$ такой, что $L(\lambda)x = 0$. Определим

$$y = (\vec{u};\zeta)^\tau := ((\mu A)^{-1/2}x; -\lambda^{-1}(\rho g)^{-1}Qx)^\tau, \tag{2.3}$$

тогда $0 \neq y \in \mathcal{D}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A})$ и $(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A} - \lambda I)y = 0$. Действительно, согласно равенству $L(\lambda)x = 0$, непосредственно проверяется равенство $(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A} - \lambda I)y = 0$. Далее, из факторизации

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\rho g\, Q\,(\mu A)^{-1/2} & I_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu A & 0 \\ 0 & (\rho g)^2 Q^* Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \rho g\,(\mu A)^{-1/2}Q^* \\ 0 & I_\Gamma \end{pmatrix}$$

имеем

$$\begin{gathered} \vec{u} + \rho g\,(\mu A)^{-1/2}Q^*\zeta = (\mu A)^{-1/2}x + \rho g\,(\mu A)^{-1/2}Q^*(-\lambda^{-1}(\rho g)^{-1}Qx) = \\ = (\mu A)^{-1/2}x - (\mu A)^{-1/2}(I - \lambda V_1)x = \lambda\,(\mu A)^{-1/2}V_1 x = \lambda\,(\mu A)^{-1}C_0(\mu A)^{-1/2}x \in \mathcal{D}(A). \end{gathered}$$

Таким образом, $\sigma(L(\lambda)) \subset \sigma(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A})$. □

Лемма 2.3. *Оператор $V_1 = \rho\,(\mu A)^{-1} + \rho_0\, Q^*Q$, действующий в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, является компактным положительным оператором, имеющим асимптотику*

$$\lambda_n(V_1) = \rho_0 \lambda_n(Q^*Q)[1 + o(1)] = \rho_0 \mu^{-1} \left(\frac{mes\,\Gamma}{16\pi}\right)^{1/2} n^{-1/2}\,[1 + o(1)], \quad n \to \infty. \tag{2.4}$$

Доказательство. Очевидно, что оператор Q^*Q — неотрицателен. Кроме того, как доказано (см. доказательство леммы 1.6), оператор $\gamma_n A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(\vec{J}_{0,S}(\Omega); L_{2,\Gamma})$, а потому компактен и Q^*Q. Далее, имеет место асимптотическая формула (см. [15, с. 75])

$$\lambda_n(Q^*Q) = \mu^{-1} \left(\frac{\mathrm{mes}\,\Gamma}{16\pi}\right)^{1/2} n^{-1/2}\,[1 + o(1)], \quad n \to \infty. \tag{2.5}$$

Оператор A^{-1} является компактным положительным оператором, действующим в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ с асимптотическим поведением собственных значений (см. свойства вспомогательной задачи I):

$$\lambda_n(A^{-1}) = \left(\frac{\mathrm{mes}\,\Omega}{3\pi^2}\right)^{2/3} n^{-2/3}\,[1 + o(1)], \quad n \to +\infty. \tag{2.6}$$

Далее, так как операторы Q^*Q и A^{-1} — вполне непрерывные самосопряженные неотрицательные операторы, то для ненулевых s-чисел справедливо:

$$s_n(Q^*Q) = \lambda_n(Q^*Q), \quad s_n(A^{-1}) = \lambda_n(A^{-1}). \tag{2.7}$$

С учетом (2.5), (2.6) и (2.7) имеем:

$$\begin{gathered} \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\, s_n(Q^*Q) = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\, \lambda_n(Q^*Q) = \left(\frac{\mathrm{mes}\,\Gamma}{16\pi}\right)^{1/2}, \\ \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\, s_n(A^{-1}) = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\, \lambda_n(A^{-1}) = 0. \end{gathered}$$

Таким образом (см., например, [4, с. 52]),

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\, \lambda_n(Q^*Q + A^{-1}) = \left(\frac{\mathrm{mes}\,\Gamma}{16\pi}\right)^{1/2},$$

отсюда следует (2.4). □

2.2. Основные свойства спектра. Рассмотрим операторный пучок $L(\lambda)$ из (2.2). Так как

$$0 < V_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\vec{J}_{0,S}(\Omega)), \quad 0 \leqslant V_2 \in \mathfrak{S}_\infty(\vec{J}_{0,S}(\Omega)),$$

то $L(\lambda)$ — фредгольмова оператор-функция в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. В силу свойств операторов V_1 и V_2 при отрицательных λ оператор $L(\lambda)$ положительно определен и, следовательно, обратим. Поэтому к нему можно применить утверждения [14, п. 1.6.3, с. 66], из которых следует, что спектр $L(\lambda)$ в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности, точками сгущения спектра могут быть только 0 и ∞. При этом имеют место следующие асимптотические формулы [15, с. 99]:

$$\lambda_n^{(0)} = \lambda_n(V_2)[1 + o(1)], \quad \lambda_n^{(\infty)} = \lambda_n^{-1}(V_1)[1 + o(1)], \quad n \to \infty.$$

Пусть λ_0 — собственное значение операторного пучка $L(\lambda)$ и x_0 — соответствующий ему собственный элемент: $x_0 = \lambda_0 V_1 + \lambda^{-1} V_2 x_0$. Умножая обе части этого равенства на x_0, приходим к квадратному уравнению

$$\lambda_0^2 (V_1 x_0, x_0) - \lambda_0 (x_0, x_0) + (V_2 x_0, x_0) = 0, \tag{2.8}$$

откуда

$$\lambda_0 = \frac{(x_0, x_0) \pm \sqrt{(x_0, x_0)^2 - 4(V_1 x_0, x_0)(V_2 x_0, x_0)}}{2(V_1 x_0, x_0)}. \tag{2.9}$$

Из данного представления следует, что $\operatorname{Re} \lambda_0 > 0$. Пусть $\operatorname{Im} \lambda_0 \neq 0$, что означает

$$(x_0, x_0)^2 < 4(V_1 x_0, x_0)(V_2 x_0, x_0) \iff \frac{(x_0, x_0)}{2(V_1 x_0, x_0)} < \frac{2(V_2 x_0, x_0)}{(x_0, x_0)}. \tag{2.10}$$

Из (2.9) следует, что

$$|\lambda_0|^2 = \frac{(V_2 x_0, x_0)}{(V_1 x_0, x_0)} = \frac{2(V_2 x_0, x_0)}{(x_0, x_0)} \cdot \frac{(x_0, x_0)}{2(V_1 x_0, x_0)}.$$

Отсюда, с учетом (2.10), имеем

$$\left(\frac{(x_0, x_0)}{2(V_1 x_0, x_0)}\right)^2 < |\lambda_0|^2 < \left(\frac{2(V_2 x_0, x_0)}{(x_0, x_0)}\right)^2 \implies (2\,\|V_1\|)^{-1} \leqslant |\lambda_0| \leqslant 2\,\|V_2\|.$$

Так как из (2.9) при $\operatorname{Im} \lambda_0 \neq 0$ следует неравенство

$$\operatorname{Re} \lambda_0 = \frac{(x_0, x_0)}{2(V_1 x_0, x_0)} \geqslant (2\,\|V_1\|)^{-1},$$

то все невещественные собственные значения расположены в сегменте

$$\operatorname{Re} \lambda \geqslant (2\,\|V_1\|)^{-1}, \quad |\lambda| \leqslant 2\,\|V_2\|. \tag{2.11}$$

Заметим, что если невещественное число λ_0 является собственным значением пучка $L(\lambda)$, то комплексно-сопряженное число $\overline{\lambda_0}$ также является собственным значением пучка $L(\lambda)$. Так как пучок $L(\lambda)$ самосопряженный, то оператор $L(\lambda_0)$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $(L(\lambda_0))^* = L(\overline{\lambda}_0)$.

Рассмотрим теперь вопрос о присоединенных элементах к элементу x_0, предполагая, что $\operatorname{Im} \lambda_0 = 0$. Первый присоединенный элемент x_1 к собственному элементу x_0 является решением уравнения

$$(I - \lambda_0 V_1 - \lambda_0^{-1} V_2) x_1 + (-V_1 + \lambda_0^{-2} V_2) x_0 = 0.$$

Умножая обе части скалярно на элемент x_0, используя самосопряженность оператора $L(\lambda_0)$ при $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ получаем, что $((-V_1 + \lambda_0^{-2} V_2) x_0, x_0) = 0$. Рассмотрим это уравнение и уравнение (2.8) как систему относительно $(V_1 x_0, x_0)$ и $(V_2 x_0, x_0)$:

$$\lambda_0^2 (V_1 x_0, x_0) + (V_2 x_0, x_0) = \lambda_0 (x_0, x_0), \quad -(V_1 x_0, x_0) + \lambda_0^{-2} (V_2 x_0, x_0) = 0.$$

Решение данной системы можно записать в виде

$$\frac{(x_0, x_0)}{2\,(V_1 x_0, x_0)} = \lambda_0 = \frac{2(V_2 x_0, x_0)}{(x_0, x_0)}.$$

Откуда получаем (2.11). Отметим, что если выполнено условие $(x_0, x_0)^2 > 4(V_1x_0, x_0)(V_2x_0, x_0)$ или более жесткое условие $4\|V_1\| \cdot \|V_2\| < 1$, то последние равенства невыполнимы и, следовательно, присоединенных элементов нет.

С учетом сказанного, сформулируем выводы о структуре спектра задачи (2.1).

Лемма 2.4. *Спектр задачи* (2.1) *состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности, расположенных в правой комплексной полуплоскости и имеющих в качестве точек сгущения точки* 0 *и* ∞.

Справедливы асимптотические формулы

$$\lambda_n^{(0)} = \lambda_n(V_2) = g\rho\lambda_n(Q^*Q) = \frac{g\rho}{\mu}\left(\frac{mes\,\Gamma}{16\pi}\right)^{1/2} n^{-1/2}\,[1+o(1)], \quad n \to \infty,$$

$$\lambda_n^{(\infty)} = \lambda_n^{-1}(V_1) = \frac{\mu}{\rho_0}\left(\frac{mes\,\Gamma}{16\pi}\right)^{-1/2} n^{1/2}\,[1+o(1)], \quad n \to \infty.$$

В сегменте

$$\Big\{\lambda \mid Re\,\lambda \geqslant (2\,\|V_1\|)^{-1},\ |\lambda| \leqslant 2\,\|V_2\|\Big\}, \quad V_1 = \rho\,(\mu A)^{-1} + \rho_0\,Q^*Q, \quad V_2 := \rho g\,Q^*Q.$$

расположены невещественные собственные значения (*симметрично относительно вещественной оси*), *а также вещественные собственные значения, для которых отвечающие им собственные элементы имеют присоединенные элементы. Если выполнено условие* (*так называемое условие сильной демпфированности пучка* $L(\lambda)$)

$$4\,\|V_1\| \cdot \|V_2\| < 1, \tag{2.12}$$

то все собственные значения вещественны и присоединенных элементов нет.

2.3. Базисность. Общие результаты [15, п. 8.2, с. 88–97] позволяют для задачи

$$L(\lambda)x = (I - \lambda V_1 - \lambda^{-1}V_2)x = 0, \tag{2.13}$$

а значит, и для задачи (2.1), установить свойства базисности совокупности мод нормальных колебаний.

Пусть выполнено условие (2.12), тогда спектр задачи (2.13) состоит из двух ветвей вещественных собственных значений (присоединенных нет): $\{\lambda_j^+\}_{j=1}^\infty$ с предельной точкой $+\infty$ и $\{\lambda_j^-\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой 0. В этом случае [15, с. 92] собственные элементы $\{x_j^+\}_{k=1}^\infty$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_j^+\}_{j=1}^\infty$ задачи (2.13), образуют базис Рисса в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$. Далее, для собственных значений $\{\lambda_j^-\}_{j=1}^\infty$ отвечающие им собственные элементы $\{x_j^-\}_{j=1}^\infty$ после проектирования на $\vec{M}_0(\Omega) = \vec{J}_{0,S}(\Omega) \ominus \vec{N}_0(\Omega)$, где $\vec{N}_0(\Omega) = \operatorname{Ker} V_2 = \{\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega) : \gamma_n A^{-1/2}\vec{u} = 0\}$, образуют базис Рисса в $\vec{M}_0(\Omega)$. Более того (см. (2.3)), множество $\{\vec{u}_j^- = (\mu A)^{-1/2}x_j^-\}_{j=1}^\infty$ будет базисом Рисса в $\vec{M}_1(\Omega) = \vec{J}_{0,S}^1(\Omega) \ominus \{\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega) : \gamma_n\vec{u} = 0\}$. Если ввести (см. (2.3)) $\zeta_j^- = -(\lambda_j^-)^{-1}Qx_j^-$, то множество $\{\lambda_k^-\zeta_k^-\}_{k=1}^\infty$ будет базисом Рисса в $H_\Gamma^{1/2}$.

Если условие (2.12) не выполнено, то в этом случае [15, с. 97] собственным значениям $\{\lambda_j^+\}_{j=1}^\infty$ отвечает множество собственных элементов $\{x_j^+\}_{j=1}^\infty$, образующих в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ базис Рисса с точностью до конечного дефекта. Отсюда получаем, что элементы $\{\vec{u}_j^+ = (\mu A)^{-1/2}x_j^+\}_{j=1}^\infty$, образуют базис Рисса в $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ также с точностью до конечного дефекта. Для собственных значений $\{\lambda_j^-\}_{j=1}^\infty$ множество отвечающих им собственных элементов, после проектирования на $\vec{M}_0(\Omega)$ образует базис Рисса в $\vec{M}_0(\Omega)$ с точностью до конечного дефекта. Отсюда, как и выше, устанавливаем, что множество $\{\lambda_k^-\zeta_k^-\}_{k=1}^\infty$ образует базис Рисса в $H_\Gamma^{1/2}$ с точностью до конечного дефекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С.* Спектральные задачи для сильно эллиптичесих систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 5. — С. 3–78.
2. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Математические задачи динамики флотирующей жидкости// Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. — 1990. — *28*. — С. 3–86.

3. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Выща школа, 1989.
4. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
5. *Закора Д. А.* Спектральные свойства операторов в задаче о нормальных колебаниях смеси вязких сжимаемых жидкостей// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2023. — *69*, № 1. — С. 73–97.
6. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложениях к задаче Стокса// ТВИМ. — 2004. — *2*. — С. 52–80.
7. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения. — Симферополь: ФОРМА, 2016.
8. *Копачевский Н. Д., Азизов Т. Я., Закора Д. А., Цветков Д. О.* Операторные методы в прикладной математике. Т. 2. Основные курсы. — Симферополь: АРИАЛ, 2022.
9. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
10. *Солдатов И. Н., Клюева Н. В.* Азимутальные волны во вращающейся вязкой флотирующей жидкости// Прикл. мех. техн. физ. — 2021. — *62*, № 2. — С. 110–121.
11. *Цветков Д. О.* Колебания стратифицированной жидкости, частично покрытой льдом (общий случай)// Мат. заметки. — 2020. — *107*, № 1. — С. 130–144.
12. *Цветков Д. О.* Об одной краевой задаче, связанной с внутренней флотацией// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2024. — *70*, № 3. — С. 498–515.
13. *Atkinson F. V., Langer H., Mennicken R., Shkalikov A. A.* The essential spectrum of some matrix operators// Math. Nachr. — 1994. — *167*. — С. 5–20.
14. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1. — Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 2001.
15. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2. — Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 2003.
16. *Mandal B. N., Kundu K.* A note on the singularities in the theory of water waves with an inertial surf ace// Austral. Math. Soc. — 1986. — *28*, № 2. — С. 271–278.
17. *Metivier G.* Valeurs propres d'operateurs definis par le restriction de systemes variationalles a des sousespaces// J. Math. Pures Appl. — 1978. — *57*, № 2. — С. 133–156.
18. *Tsvetkov D. O.* Oscillations of a liquid partially covered with ice// Lobachevskii J. Math. — 2021. — *42*, № 5. — С. 1078–1093.

Д. О. Цветков
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия
E-mail: tsvetdo@gmail.com

UDC 517.98
DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-508-523
EDN: EBRWZE

Oscillations of a viscous fluid with an inertial free surface

D. O. Tsvetkov

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia

Abstract. The problem of small motions and normal oscillations of a viscous fluid is investigated. The free surface contains heavy particles of some substance. These particles do not interact with each other during the free surface oscillations, or their interaction is negligible. The original initial-boundary value problem is reduced to the Cauchy problem for a first-order differential equation in a Hilbert space. After a detailed study of the properties of the operator coefficients, a theorem on the solvability of the resulting Cauchy problem is proved. Based on this, sufficient conditions for the existence of a solution to the initial-boundary value problem describing the evolution of the original hydraulic system are found. Statements regarding the structure of the problem spectrum and the basis property of the system of eigenfunctions are proved.

Keywords: viscous fluid, inertial free surface, small motions, normal vibrations, initial-boundary value problem.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: D. O. Tsvetkov, "Oscillations of a viscous fluid with an inertial free surface," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 3, 508–523. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-508-523

REFERENCES

1. M. S. Agranovich, "Spektral'nye zadachi dlya sil'no elliptichesikh sistem vtorogo poryadka v oblastyakh s gladkoy i negladkoy granitsey" [Spectral problems for strongly elliptic second-order systems in domains with smooth and nonsmooth boundaries], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2002, **57**, No. 5, 3–78 (in Russian).
2. S. A. Gabov and A. G. Sveshnikov, "Matematicheskie zadachi dinamiki flotiruyushchey zhidkosti" [Mathematical problems of the dynamics of floating fluid], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Mat. analiz* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1990, **28**, 3–86 (in Russian).
3. J. A. Goldstein, *Polugruppy lineynykh operatorov i ikh prilozheniya* [Semigroups of Linear Operators and Applications], Vyshcha shkola, Kiev, 1989 (Russian translation).
4. I. Ts. Gokhberg and M. G. Krein, *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov v gil'bertovom prostranstve* [Introduction to the Theory of Linear Non-Self-Adjoint Operators in Hilbert Space], Nauka, Moscow, 1965 (Russian translation).
5. D. A. Zakora, "Spektral'nye svoystva operatorov v zadache o normal'nykh kolebaniyakh smesi vyazkikh szhimaemykh zhidkostey" [Spectral properties of operators in the problem on normal oscillations of a mixture of viscous compressible fluids], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 1, 73–97 (in Russian).
6. N. D. Kopachevskiy, "Ob abstraktnoy formule Grnina dlya troyki gil'bertovykh prostranstv i ee prilozheniyakh k zadache Stoksa" [On Green's abstract formula for a triple of Hilbert spaces and its applications to the Stokes problem], *TVIM* [Taurida Bull. Inf. Math.], 2004, **2**, 52–80 (in Russian).

7. N. D. Kopachevskiy, *Abstraktnaya formula Grina i nekotorye ee prilozheniya* [Green's Abstract Formula and Some of Its Applications], FORMA, Simferopol', 2016 (in Russian).
8. N. D. Kopachevskiy, T. Ya. Azizov, D. A. Zakora, and D. O. Tsvetkov, *Operatornye metody v prikladnoy matematike. T. 2. Osnovnye kursy* [Operator Methods in Applied Mathematics. Vol. 2. Basic Courses], ARIAL, Simferopol', 2022 (in Russian).
9. S. G. Krein, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
10. I. N. Soldatov and N. V. Klyueva, "Azimutal'nye volny vo vrashchayushcheysya vyazkoy flotiruyushchey zhidkosti" [Azimuthal waves in a rotating viscous floating fluid], *Prikl. mekh. tekhn. fiz.* [Appl. Mech. Techn. Phys.], 2021, **62**, No. 2, 110–121 (in Russian).
11. D. O. Tsvetkov, "Kolebaniya stratifitsirovannoy zhidkosti, chastichno pokrytoy l'dom (obshchiy sluchay)" [Oscillations of a stratified fluid partially covered with ice (general case)], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2020, **107**, No. 1, 130–144 (in Russian).
12. D. O. Tsvetkov, "Ob odnoy kraevoy zadache, svyazannoy s vnutrenney flotatsiey" [On one boundary-value problem related to internal flotation], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2024, **70**, No. 3, 498–515 (in Russian).
13. F. V. Atkinson, H. Langer, R. Mennicken, and A. A. Shkalikov, "The essential spectrum of some matrix operators," *Math. Nachr.*, 1994, **167**, 5–20.
14. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 2001.
15. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 2003.
16. B. N. Mandal and K. Kundu, "A note on the singularities in the theory of water waves with an inertial surf ace," *Austral. Math. Soc.*, 1986, **28**, No. 2, 271–278.
17. G. Metivier, "Valeurs propres d'operateurs definis par le restriction de systemes variationalles a des sousespaces," *J. Math. Pures Appl.*, 1978, **57**, No. 2, 133–156.
18. D. O. Tsvetkov, "Oscillations of a liquid partially covered with ice," *Lobachevskii J. Math.*, 2021, **42**, No. 5, 1078–1093.

D. O. Tsvetkov
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: tsvetdo@gmail.com