

УДК 517.982+517.984.48

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-524-546

EDN: FOVYRO

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ САМОСОПРЯЖЁННЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОНТЯГИНА И КРЕЙНА

В. А. ШТРАУС

*Южно-Уральский государственный университет (Национальный исследовательский университет),
Россия, Челябинск*

Аннотация. Рассмотрен самосопряжённый оператор, действующий в пространстве Крейна и обладающий инвариантным подпространством, которое является максимальным неотрицательным и распадается в прямую сумму равномерно положительного (т. е. эквивалентного гильбертову пространству по отношению к внутреннему псевдоскалярному произведению) и конечномерного нейтрального подпространств. Доказано существование разностного выражения, преобразующего порождённую этим оператором последовательность моментов в последовательность, представляемую как разность позитивных последовательностей моментов. В случае циклического оператора этот результат применён для построения функционального пространства, в котором исследуемый оператор моделируется как оператор умножения на независимую переменную.

Ключевые слова: самосопряжённый оператор, пространство Крейна, пространство Понтягина, инвариантное подпространство, спектральное разложение.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2025-1543.

Для цитирования: В. А. Штраус. Спектральное разложение самосопряжённых операторов в пространствах Понтягина и Крейна // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 3. С. 524–546. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-524-546>

1. ВВЕДЕНИЕ

Как хорошо известно (см. [24, гл. 5, следствие 5.7]), унитарные и самосопряжённые операторы в пространствах Понтягина являются примерами обобщённых спектральных операторов. В случае пространств Крейна те же типы операторов, вообще говоря, теряют это свойство. Вместе с тем для некоторых подклассов самосопряжённых операторов удаётся доказать их обобщённую спектральность.

Одному из таких классов и посвящена настоящая работа. Она тесно примыкает к другой работе автора, и ряд результатов будет только кратко описан в первом разделе, затем во втором разделе кратко упоминается предложенное Х. Лангером аналитическое разложение резольвенты самосопряжённого оператора в пространстве Понтягина. Исследованию связанной с самосопряжённым оператором в пространстве Крейна последовательности моментов и смежным вопросам посвящён очередной раздел. В четвёртом разделе предыдущие результаты применяются к построению функциональной модели для исследуемого класса.

2. НЕКОТОРЫЕ КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В наиболее общей постановке (см. [2,6]) *пространство с индефинитной метрикой* определяется как (комплексное) линейное пространство $\mathcal{L}$ с заданной на нём эрмитовой полуторалинейной формой (внутренним эрмитовым произведением) $Q(x, y)$, причём такой, что соответствующая квадратичная форма $q(x) := Q(x, x)$ является знаконеопределённой (т. е. $Q(x, x)$ принимает положительные, отрицательные и нулевые значения). В случае конечномерного пространства $\mathcal{L}$ используется также (см. [13]) термин *псевдоунитарное пространство*.

Теорема 2.1. Пусть $q(x)$ — вещественнозначная функция, заданная на линейном пространстве $\mathcal{L}$. Функция $q(x)$ тогда и только тогда порождается некоторой квадратичной формой, когда она удовлетворяет следующим условиям:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а. } q(\alpha x) = |\alpha|^2 q(x), \quad x \in \mathcal{L}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \\ \text{б. для любых } x, y \in \mathcal{L} \text{ выражение } q(x + \lambda y) \text{ опре-} \\ \text{деляет функцию, непрерывную по переменной} \\ \lambda \in \mathbb{C}, \\ \text{с. для } q(\cdot) \text{ верно тождество параллелограмма} \\ q(x + y) + q(x - y) = 2(q(x) + q(y)). \end{array} \right\}$$

Обычно пространство с индефинитной метрикой снабжается той или иной топологией. В частности, пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$. Пространство $\mathcal{H}$ называется *гильбертовым пространством с индефинитной метрикой*, если оно дополнительно оснащено непрерывной эрмитовой полуторалинейной формой $[\cdot, \cdot]$, такой что соответствующая квадратичная форма знакопеременна.

Заметим, что именно внутреннее произведение $[\cdot, \cdot]$ является для нас основным, а вот гильбертово скалярное произведение играет вспомогательную роль и может меняться на топологически ему эквивалентное. В силу непрерывности внутреннее произведение может быть представлено в форме $[\cdot, \cdot] = (G\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$, где G — так называемый оператор Грама, который необходимо является ограниченным. Кроме того, эрмитовость внутреннего произведения влечёт за собой самосопряжённость G как оператора в гильбертовом пространстве.

Такие пространства с индефинитной метрикой обычно называют *гильбертовыми пространствами с G -метрикой* (см. [1,19]). Теория операторов в них сравнительно бедна результатами и, возможно, ещё ждёт своих исследователей. Намного более развитой является теория операторов в гильбертовых пространствах с G -метрикой в случае ограниченно обратимого оператора Грама (т. е. в регулярных гильбертовых пространствах с G -метрикой [1,19]).

Предложение 2.1. Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ с G -метрикой будет регулярным тогда и только тогда, когда для любого действующего на всём $\mathcal{H}$ непрерывного линейного функционала f найдётся такой вектор y_f , что

$$fx = [x, y_f], \quad x \in \mathcal{H}.$$

Гильбертово скалярное произведение в регулярном гильбертовом пространстве с G -метрикой может быть заменено топологически эквивалентным ему произведением так, что $[\cdot, \cdot] = (J\cdot, \cdot)$, где $J = P_+ - P_-$, P_+ и P_- — (гильбертовы) ортопроекторы, $P_+ + P_- = I$. Последнее равенство влечёт равенство $P_+(P_+ + P_-) = P_+$, откуда следует

$$P_+P_- = 0 \quad \text{и} \quad P_-P_+ = 0. \quad (2.1)$$

Положим $\mathcal{H}_+ = P_+\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_- = P_-\mathcal{H}$. В силу (2.1) подпространства $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$ образуют прямую сумму и, кроме того, ортогональны в смысле внутреннего произведения $[\cdot, \cdot]$.

Разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+[\cdot] \mathcal{H}_-$ называется *каноническим разложением*, а оператор J — *канонической симметрией*. Пространство с индефинитной метрикой, в котором оператор Грама является канонической симметрией, называется *J -пространством*, или *пространством Крейна*.

В этих заметках мы будем предполагать, что $\mathcal{H}$ является пространством Крейна или его частным случаем — пространством Понтрягина: J -пространство называется *пространством Понтрягина*, или *пространством Π_κ* , если $\dim \mathcal{H}_- = \kappa < \infty$.

Вектор $0 \neq x \in \mathcal{H}$ называется *положительным*, *неотрицательным* или *нейтральным* если, соответственно, $[x, x] > 0$, $[x, x] \geq 0$ или $[x, x] = 0$. Аналогично определяются отрицательные и

неположительные векторы. Два вектора $x, y \in \mathcal{H}$ называются J -ортогональными ($x \perp y$), если $[x, y] = 0$. Аналогично вводятся определения J -ортогональных множеств, J -ортогонального дополнения и т. п. J -ортогональное дополнение к множеству $X \subset \mathcal{H}$ обозначается $X^{[\perp]}$.

Термин «подпространство» у нас всегда обозначает замкнутое линейное многообразие, а линейное многообразие, которое может быть незамкнутым, называется *линеалом*. Линеал называется *положительным*, если все его ненулевые векторы положительны, аналогично определяются *отрицательные*, *неотрицательные* и т. п. линеалы.

Положительное подпространство называется *максимальным положительным*, если оно не является собственным подпространством другого положительного подпространства. Аналогично определяются *максимальные отрицательные*, *максимальные неположительные* и т. п. подпространства. Далее, подпространство $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ называется *невыврожденным*, если $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]} = \{0\}$, в противном случае подпространство $\mathcal{L}$ называется *вырожденным*. Если $\mathcal{L}$ является вырожденным подпространством, то подпространство $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]}$ называется *изотропной частью* $\mathcal{L}$. Если $\mathcal{L}$ — невырожденное подпространство, то можно образовать J -ортогональную прямую сумму $\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{L}^{[\perp]}$. В общем случае эта сумма плотна в J -пространстве, но не совпадает с ним, если же $\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{L}^{[\perp]} = \mathcal{H}$, то подпространство $\mathcal{L}$ называется *проекционно полным*.

Предложение 2.2. *Подпространство $\mathcal{L}$ является проекционно полным тогда и только тогда, когда оно является регулярным гильбертовым G -пространством, на котором внутреннее произведение — это $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{L}}$.*

Заметим, что в пространстве Π_{κ} подпространство является проекционно полным тогда и только тогда, когда оно невырождено. Все определения, равно как и большинство упомянутых результатов и их доказательства, а также дальнейшее описание геометрии J -пространств можно найти в монографии [3, 20] и лекциях [4, 5]. Мы будем придерживаться стандартных обозначений в случае понятий, связанных с гильбертовой структурой на $\mathcal{H}$ (ортогональность, ортогональное дополнение, ортогональная сумма и т. п.).

Все операторы, упомянутые в этой работе, полагаются, если только прямо не оговорено противное, линейными и ограниченными. Символами $\sigma(A)$ и $\rho(A)$ обозначаются, соответственно, спектр и множество регулярных точек (в другой терминологии — резольвентное множество) оператора A . Итак, пусть $A: \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ — некоторый оператор.

Оператор A^c называется J -сопряжённым (J -с.) к оператору A , если $[Ax, y] = [x, A^c y]$ для всех $x, y \in \mathcal{H}$. Отметим, что спектры операторов A и A^c расположены симметрично относительно вещественной оси (т. е. $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A^c)$). Оператор A называется J -самосопряжённым (J -с.с.), если $A = A^c$. Заметим, что часть спектра J -с.с. оператора может быть невещественной, а собственным значениям оператора могут соответствовать нетривиальные жордановы цепочки из собственных и присоединённых векторов, причём это верно не только для операторов в пространстве Крейна, но и в псевдоунитарном пространстве (см. [3–5, 13, 20]).

Замечание 2.1. Структура пространства Крейна позволяет переформулировать в терминах внутреннего произведения $[\cdot, \cdot]$ многие результаты, обычно формулируемые в терминах гильбертова скалярного произведения. Приведём два примера.

1. Пусть $\langle x, y \rangle$ — дополнительная непрерывная полуторалинейная форма, заданная в пространстве Крейна $\mathcal{H}$. Тогда найдётся такой оператор D , что $\langle x, y \rangle = [Dx, y]$, если форма $\langle x, y \rangle$ — эрмитова, то D — J -с.с. оператор, а если соответствующая квадратичная форма $\langle x, x \rangle$ неотрицательна, то D — J -неотрицательный оператор.
2. Если C — J -неотрицательный оператор, то $\|C\| = \sup_{x: \|x\|=1} \{[Cx, x]\}$.

3. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ J -С.С. ОПЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ ПОНТРЯГИНА

В этом разделе пространство с индефинитной метрикой — это пространство Понтрягина, и указанное условие дальше оговариваться не будет. Если J -с.с. оператор A имеет только вещественный спектр, то у него есть собственная спектральная функция (с.с.ф.) E_{λ} с конечным множеством критических точек Λ . Точные формулировки будут приведены ниже. Поскольку некоторые формулы, полученные в процессе доказательства существования с.с.ф., используются для построения

модельного пространства по версии [25], то мы приведём его набросок по схеме, предложенной в [27] (класс операторов, охваченный в [27], шире, чем рассматриваемый нами). На первом этапе вещественность спектра оператора A предполагаться не будет. Итак, по известной теореме Понтрягина найдётся такое максимальное неположительное подпространство $\mathcal{L}_-$, что $A\mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}_-$. В силу определения пространства Понтрягина размерность подпространства $\mathcal{L}_-$ равна κ , поэтому оператор $A|_{\mathcal{L}_-}$ действует в конечномерном пространстве, и его спектр — конечное множество. Пусть $N(t)$ — минимальный аннулирующий многочлен для $A|_{\mathcal{L}_-}$ (т. е. $N(A|_{\mathcal{L}_-}) = 0$ и $N(t)$ имеет минимальную степень среди всех многочленов с таким свойством), коэффициент которого при старшей степени для определённости равен единице, $\bar{N}(t)$ — многочлен, коэффициенты которого сопряжены к коэффициентам многочлена $N(t)$. Тогда

$$0 = [N(A)x, y] = [x, \bar{N}(A)y], \text{ где } x \in \mathcal{L}_-, y \in \mathcal{H}$$

и $\bar{N}(A)\mathcal{H} \subset \mathcal{L}_+$, где $\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_-^{\perp}$ — максимальное неотрицательное подпространство. Введём на $\mathcal{H}$ новую полуторалинейную форму $\langle x, y \rangle := [N(A)x, \bar{N}(A)y]$. Тогда

$$\langle x, x \rangle = [\bar{N}(A)N(A)x, x] = [N(A)\bar{N}(A)x, x] = [\bar{N}(A)x, \bar{N}(A)x] \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}. \quad (3.1)$$

Отметим, что свойство (3.1) называется *дефинизируемостью* оператора A , при этом многочлен $N(A)\bar{N}(A)$ называется *дефинизирующим*.

Рассмотрим последовательность степенных моментов

$$\{c_k = \langle A^k x, x \rangle\}_{k=0}^{+\infty}, \quad (3.2)$$

которая, очевидно, удовлетворяет следующему условию роста:

$$|c_k| \leq \|x\|^2 \|N(A)\|^2 \|A\|^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.3)$$

Так как квадратичная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ неотрицательна, то по теореме Гамбургера (см., например, [7, теорема 2.1.1]) последовательность $\{c_k\}_{k=0}^{+\infty}$ допускает представление

$$c_k = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k d\sigma^{(x)}(t), \quad (3.4)$$

где $\sigma^{(x)}(t)$ — неубывающая функция, $\sigma^{(x)}(-\infty) = 0$, $\sigma^{(x)}(t-0) = \sigma^{(x)}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$. В силу условия (3.3) функция $\sigma^{(x)}(t)$ не имеет точек роста на полубесконечных интервалах $(-\infty, -\|A\|)$ и $(\|A\|, +\infty)$, а именно

$$\sigma^{(x)}(t) = 0 \text{ при } t < -\|A\| \text{ и } \sigma^{(x)}(t) = [N(A)x, \bar{N}(A)x] \text{ при } t > \|A\|. \quad (3.5)$$

Благодаря (3.5) представление (3.4) может быть переписано в виде

$$c_k = \int_{-\|A\|}^{\|A\|+\epsilon} t^k d\sigma^{(x)}(t), \quad \epsilon = \text{const} > 0.$$

Из последнего равенства следует (см., например, [7, теорема 2.6.4]), что функция $\sigma^{(x)}(t)$ определяется единственным образом (проблема моментов является определённой). Укажем также, что $\sigma^{(x)}(t)$ может быть восстановлена по $\{c_k\}_0^\infty$ с помощью аналитической функции $f(\xi)$, первоначально заданной в окрестности бесконечно удалённой точки рядом:

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^{-(k+1)},$$

а затем аналитически продолженной на область $\mathbb{C} \setminus [-\|A\|, \|A\|]$ формулой

$$f(\xi) = \int_{-\|A\|}^{\|A\|+\epsilon} \frac{1}{\xi - t} d\sigma^{(x)}(t), \quad \epsilon = \text{const} > 0. \quad (3.6)$$

Несложно показать, что

$$\frac{\sigma^{(x)}(t-0) + \sigma^{(x)}(t+0)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} f(\xi) d\xi, \quad (3.7)$$

где $\Gamma_\delta^{(t)}$ — положительно ориентированная граница прямоугольной области $[-\|A\| - 1, t] \times i[-1, 1]$ без участка границы между точками $(t, -i\delta)$ и $(t, i\delta)$. Чтобы не усложнять формулы, мы будем использовать дальше представление (3.4), но при этом иметь в виду, что соответствующие интегралы фактически берутся по конечному промежутку. Далее, для фиксированного t функция $\sigma^{(x)}(t)$ определяет неотрицательную числовую функцию по отношению к x . Поскольку эта функция порождена (как следует из (3.4)) эрмитовыми полуторалинейными формами $\langle A^k x, x \rangle$, для которых, очевидно, выполняются тождество параллелограмма и соотношение однородности, то, в силу единственности представления (3.4) и формулы восстановления (3.7), оба эти условия выполнены и для $\sigma^{(x)}(t)$. Кроме того, $\sigma^{(x)}(t) \leq [N(A)x, N(A)x]$, поэтому функция $\sigma^{(x)}(t)$ непрерывна по x в нормированной топологии. Итак, для $\sigma^{(x)}(t)$ выполнены условия теоремы 2.1. Последнее обстоятельство открывает возможность ввести эрмитову полуторалинейную форму

$$\prec x, y \succ^{(t)} := \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 i^m \cdot \sigma^{(x+im y)}(t).$$

Поскольку квадратичная форма $\sigma^{(x)}(t)$ непрерывна по x , введённая полуторалинейная форма $\prec x, y \succ^{(t)}$ непрерывна в гильбертовой нормированной топологии. В силу сказанного (см. также замечание 2.1) найдётся операторнозначная функция G_t , такая что (s-lim — предел в сильной операторной топологии)

- $G_{-\infty} = 0$, $G_t = \text{s-lim}_{\tau \rightarrow t-0} G_\tau$ для любого $t \in \mathbb{R}$;
- для любого $t \in \mathbb{R}$ и $\tau \in (-\infty, t)$ оператор $(G_t - G_\tau)$ является J -неотрицательным;
- $N(A)\bar{N}(A)A^k x = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k dG_t x$ для любого $x \in \mathcal{H}$ и $k = 0, 1, 2, \dots$

Указанное интегральное представление степеней оператора A и стандартное разложение его резольвенты $R_\xi(A)$ в окрестности бесконечно удалённой точки (см. [15, гл. XI, § 1, п. 148, формула (5)]) приводит к следующему представлению:

$$N(A)\bar{N}(A)R_\xi(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t - \xi} dG_t, \quad (3.8)$$

где $\xi \in \mathbb{C} \setminus [-\|A\|, \|A\|]$. Далее, выражение $M(t, \xi) = \frac{N(\xi)\bar{N}(\xi) - N(t)\bar{N}(t)}{t - \xi}$ превращается после его очевидного доопределения в исключительной подобласти $t = z$ в полином от двух переменных, т. е. выражению $M(A, \xi) = R_\xi(A)(N(\xi)\bar{N}(\xi)I - N(A)\bar{N}(A))$ можно придать корректный смысл. Последняя формула и представление (3.8) приводят к новому представлению

$$R_\xi(A) = \frac{1}{N(\xi)\bar{N}(\xi)} \left(M(A, \xi) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t - \xi} dG_t \right), \quad (3.9)$$

где сходимость интеграла можно понимать как в сильной, так и в равномерной операторной топологиях. Непосредственно из этого представления следует, что вне вещественной оси функция $R_\xi(A)$ аналитична всюду за исключением, быть может, конечного числа полюсов. Последнее означает, что не вещественный спектр A состоит из конечного числа собственных значений с конечной длиной жордановых цепочек. Несложно показать, что инвариантное подпространство оператора A , состоящее из всех его собственных и присоединённых векторов, отвечающих ровно одному собственному значению, нейтрально и потому в случае пространства Понтрягина конечномерно. Кроме того, спектр любого J -с.с. оператора (как в случае пространства Понтрягина, так и пространства Крейна) симметричен относительно вещественной оси. Всё сказанное позволяет отделить инвариантное подпространство оператора A , отвечающее его не вещественному спектру,

от инвариантного подпространства, отвечающего его вещественному спектру. Эти подпространства оказываются J -ортогональными и проекционно полными, а первое подпространство — ещё и конечномерным. Соответствующие J -ортогональные проекторы могут быть построены как проекторы Рисса (по поводу последних см., например, [15, гл. XI, § 1, п. 148, теорема о разложении]). J -с.с. операторы в конечномерных J -пространствах полностью описываются методами линейной алгебры [13], поэтому в дальнейшем, если прямо не оговорено противное, мы будем предполагать, что

$$\sigma(A) \subset \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

При условии (3.10) все коэффициенты многочлена $N(\xi)$ вещественны, поэтому формула (3.9) может быть заменена на формулу

$$R_\xi(A) = \frac{1}{N^2(\xi)} \left(M(A, \xi) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t - \xi} dG_t \right). \quad (3.11)$$

Положим

$$\Lambda := \{\lambda : N(\lambda) = 0\}.$$

Множество Λ в дальнейшем называется *множеством критических точек* для оператора A и для его спектральной функции, к определению которой мы переходим.

Обозначим $\mathbb{R}_G$ множество тех $t \in \mathbb{R}$, для которых G_t непрерывна в сильной операторной топологии. Действуя так же, как и в (3.7), положим

$$E_t = \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} R_\xi(A) d\xi \quad (3.12)$$

для всех $t \in \mathbb{R}_G \setminus \Lambda$, и доопределим E_t по формуле $E_t = \lim_{\tau \in \mathbb{R}_G, \tau \rightarrow t-0} E_\tau$ для остальных $t \in \mathbb{R} \setminus \Lambda$.

Существование предела в (3.12) следует, грубо говоря, из теоремы о существовании сильного предела у монотонной ограниченной последовательности операторов в гильбертовом пространстве (см. [15, гл. II, § 1, п. 104, теорема Вижье—С.-Надя]) и формулы (3.11), однако соответствующее доказательство не вполне тривиально, по этому поводу см. [26, 27] или [18]. Результатом вычисления (3.12) является следующая теорема.

Теорема 3.1. *В пространстве Понтрягина J -с.с. оператор A с вещественным спектром обладает спектральной функцией E_t , такой что (здесь $\Delta = [a, b)$, $a, b \notin \Lambda$)*

- | | |
|---|---|
| <p>a. для любого $t \in \mathbb{R} \setminus \Lambda$ верно $AE_t = E_tA$;</p> <p>b. если $E(\Delta)\mathcal{H} \neq \{0\}$, то $\sigma(A _{E(\Delta)\mathcal{H}}) \subset \bar{\Delta}$;</p> <p>c. если $\Delta \cap \Lambda = \emptyset$ и $E(\Delta)\mathcal{H} \neq \{0\}$, то подпространство $E(\Delta)\mathcal{H}$ положительно и $AE(\Delta) = \int_{\Delta} t dE_t$;</p> <p>d. если $\Delta \cap \Lambda \neq \emptyset$, то подпространство $E(\Delta)\mathcal{H}$ либо отрицательно, либо индефинитно.</p> | } |
|---|---|

Поясним последний пункт. В условиях этого пункта подпространство $E(\Delta)\mathcal{H}$ содержит либо отрицательный, либо нейтральный собственный вектор оператора A , вместе с тем оно проекционно полно. Проекционно полное подпространство не может быть семидефинитным (в данном случае — неположительным), поэтому оно либо отрицательно, либо (если найдётся нейтральный собственный вектор) индефинитно. Продолжим тему. Пусть $\lambda_0 \in \Lambda$. Тогда возможны три взаимоисключающих варианта:

- для некоторого интервала $\Delta = [a, b)$, такого что $(a, b) \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$ и $a, b \notin \Lambda$, спектральная функция $E_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ ограничена и после доопределения $E_{\lambda_0} = \lim_{t \rightarrow \lambda_0-0} E_t$ справедливо $AE(\Delta) = \int_{\Delta} t dE_t$;

- для некоторого интервала $\Delta = [a, b)$, такого что $(a, b) \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$ и $a, b \notin \Lambda$, спектральная функция $E_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ ограничена, но после доопределения $E_{\lambda_0} = \text{s-lim}_{t \rightarrow \lambda_0-0} E_t$ имеем $AE(\Delta) \neq \int_{\Delta} t dE_t$;
- для некоторого интервала $\Delta = [a, b)$, такого что $(a, b) \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$ и $a, b \notin \Lambda$, спектральная функция $E_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ неограничена.

Отметим, что ограниченность спектральной функции $E_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ имеет (или не имеет) место одновременно для всех интервалов $\Delta = [a, b)$, подчинённых условиям $(a, b) \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$ и $a, b \notin \Lambda$ с фиксированным λ_0 , а наличие предела $\text{s-lim}_{t \rightarrow \lambda_0-0} E_t$ следует из теоремы Вижье—С.-Надя (см. [15, гл. VII, § 1, п. 104]). Интерпретируем теперь каждую из этих опций в терминах теории спектральных операторов (см. [9]). Первый вариант означает, что оператор $A|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ подобен самосопряжённому оператору, т. е. является скалярным спектральным оператором с вещественным спектром. Второй вариант соответствует случаю, когда оператор $\lambda_0 \in \Lambda$ является спектральным оператором, состоящим из суммы скалярного спектрального оператора и нетривиального конечномерного нильпотентного оператора. Итак, только третий вариант отвечает случаю обобщённых спектральных операторов.

4. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ J -С.С. ОПЕРАТОРА КЛАССА D_{κ}^{+}

В этом разделе пространство с индефинитной метрикой — это сепарабельное гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, а операторы, если не оговорено противное, ограничены и действуют в $\mathfrak{H}$.

Вначале отметим следующий геометрический факт.

Предложение 4.1. *Если $\mathfrak{L}$ является максимальным семидефинитным подпространством из $\mathfrak{H}$, а P есть J -ортотпроектор и $P\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}$, то линейал $P\mathfrak{L}$ является максимальным семидефинитным подпространством относительно $P\mathfrak{H}$.*

Пусть $\mathcal{L}$ — подпространство пространства Крейна, символ $\mathcal{L}^0 = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]}$ — это его изотропную часть. Говорят, что подпространство $\mathcal{L}_+$ ($\mathcal{L}_-$) принадлежит классу $\mathbf{h}^+$ ($\mathbf{h}^-$), если $\mathcal{L}_+^0$ ($\mathcal{L}_-^0$) конечномерно, а фактор-пространство $\widehat{\mathcal{L}}_+ = \mathcal{L}_+/\mathcal{L}_+^0$ ($\widehat{\mathcal{L}}_- = \mathcal{L}_-/\mathcal{L}_-^0$) является гильбертовым (антигильбертовым) относительно индуцированной индефинитной метрики, или, что эквивалентно, $\mathcal{L}_+ \in \mathbf{h}^+$ ($\mathcal{L}_- \in \mathbf{h}^-$), если оно разлагается в сумму конечномерного изотропного и равномерно положительного (равномерно отрицательного) подпространств.

Множество максимальных неотрицательных и максимальных неположительных подпространств обозначим через $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$, соответственно.

Будем говорить, что оператор T принадлежит классу $\mathbf{H}$ и писать $T \in \mathbf{H}$, если у него существуют инвариантные подпространства $\mathcal{L}_{\pm} \in \mathfrak{M}^{\pm}$ и все такие подпространства принадлежат классу $\mathbf{h}^{\pm}$, соответственно.

Определение 4.1. Множество $\mathfrak{A} = \{A\}$ самосопряжённых линейных операторов, действующих в пространстве Крейна, принадлежит классу $\mathbf{K}(\mathbf{H})$, $\mathfrak{A} \in \mathbf{K}(\mathbf{H})$, если существует такой самосопряжённый оператор $B \in \mathcal{H}$ в этом пространстве, что $BA = AB$ при всех $A \in \mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ состоит из одного оператора A , то будем говорить, что A принадлежит классу $\mathbf{K}(\mathbf{H})$ и писать $A \in \mathbf{K}(\mathbf{H})$.

Определение 4.2. Скажем, что семейство $\mathfrak{A} = \{A\}$ самосопряжённых линейных операторов, действующих в пространстве Крейна, принадлежит классу $\mathbf{D}_{\kappa}^{+}$, $\mathfrak{A} \in \mathbf{D}_{\kappa}^{+}$, если для него найдётся пара инвариантных подпространств $\mathcal{L}_{\pm} \in \mathfrak{M}^{\pm} \cap \mathbf{h}^{\pm}$, $\mathcal{L}_+[\perp]\mathcal{L}_-$ с размерностью подпространства $\mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_-$, равной κ , $\kappa < \infty$. Если семейство $\mathfrak{A} = \{A\}$ состоит из единственного оператора A , то мы будем также писать $A \in \mathbf{D}_{\kappa}^{+}$.

Предложение 4.2. *Если J -с.с. оператор A принадлежит к классу $\mathbf{D}_{\kappa}^{+}$, $\mathfrak{L}_+$ — соответствующее инвариантное подпространство из определения 4.2, то его не вещественный спектр либо пуст, либо состоит из конечного числа собственных значений. При этом максимальная длина присоединённой цепочки векторов, отвечающих такому собственному значению, не превосходит размерности изотропной части подпространства $\mathfrak{L}_+$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L}_- = \mathfrak{L}_+^{[1]}$. Положим

$$\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_+ \cap \mathfrak{L}_-, \quad \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_+ \ominus \mathfrak{L}_1, \quad \mathfrak{L}_3 = \mathfrak{L}_- \ominus \mathfrak{L}_1, \quad \mathfrak{L}_0 = J\mathfrak{L}_1. \quad (4.1)$$

Поскольку по условию подпространства $\mathfrak{L}_2$ и $\mathfrak{L}_3$ являются равномерно дефинитными, то без ограничения общности можно считать, что относительно разложения

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_0 \oplus \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2 \oplus \mathfrak{L}_3 \quad (4.2)$$

оператор J имеет матричное представление

$$J = \begin{pmatrix} 0 & V^{-1} & 0 & 0 \\ V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_3 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

где $V: \mathfrak{L}_0 \rightarrow \mathfrak{L}_1$ — изометрический оператор, а I_2 и I_3 — тождественные операторы в соответствующих подпространствах. Относительно того же разложения (4.2) оператор A имеет представление

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & 0 & 0 & 0 \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & 0 & A_{22} & 0 \\ A_{30} & 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

откуда

$$JA = \begin{pmatrix} V^{-1}A_{10} & V^{-1}A_{11} & V^{-1}A_{12} & V^{-1}A_{13} \\ VA_{00} & 0 & 0 & 0 \\ A_{20} & 0 & A_{22} & 0 \\ -A_{30} & 0 & 0 & -A_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Оператор JA является самосопряжённым в обычном гильбертовом смысле, поэтому

$$\left. \begin{aligned} V^{-1}A_{10} &= A_{10}^*V, \quad A_{00} = V^{-1}A_{11}^*V, \quad A_{20} = A_{12}^*V, \\ A_{30} &= -A_{13}^*V, \quad A_{22} = A_{22}^*, \quad A_{33} = A_{33}^*. \end{aligned} \right\}. \quad (4.6)$$

Непосредственные вычисления показывают, что резольвента $R_\xi(A)$ определена для тех значений $\xi \in \mathbb{C}$, для которых одновременно имеют смысл операторы $R_\xi(A_{00})$, $R_\xi(A_{11})$, $R_\xi(A_{22})$, $R_\xi(A_{33})$ и

$$R_\xi(A) = \begin{pmatrix} R_\xi(A_{00}) & 0 & 0 & 0 \\ R_{10} & R_\xi(A_{11}) & R_{12} & R_{13} \\ R_{20} & 0 & R_\xi(A_{22}) & 0 \\ R_{30} & 0 & 0 & R_\xi(A_{33}) \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

где

$$\begin{aligned} R_{30} &= -R_\xi(A_{33})A_{30}R_\xi(A_{00}), \quad R_{20} = -R_\xi(A_{22})A_{20}R_\xi(A_{00}), \\ R_{12} &= -R_\xi(A_{11})A_{12}R_\xi(A_{22}), \quad R_{13} = -R_\xi(A_{11})A_{13}R_\xi(A_{33}), \\ R_{10} &= \{R_\xi(A_{11})A_{10} + R_{12}A_{20} + R_{13}A_{30}\}R_\xi(A_{00}). \end{aligned}$$

Поскольку операторы A_{22} и A_{33} самосопряжены, не вещественный спектр оператора A совпадает с объединением не вещественных спектров конечномерных операторов A_{00} и A_{11} , и поэтому он конечен. Кроме того, из представления (4.7) следует, что при $\xi \rightarrow \xi_0 \in \sigma(A)$, $\xi \neq \xi_0$, $\xi_0 \neq \bar{\xi}_0$ резольвента $R_\xi(A)$ имеет степенной рост, не превосходящий сумму показателей роста резольвент $R_\xi(A_{00})$ и $R_\xi(A_{11})$. Если одновременно $\xi_0 \in \sigma(A_{00})$, $\xi_0 \in \sigma(A_{11})$, то и $\bar{\xi}_0 \in \sigma(A_{00})$, $\bar{\xi}_0 \in \sigma(A_{11})$, причём $\dim RS_{\xi_0}(A_{00}) = \dim RS_{\xi_0}(A_{11})$ и $\dim RS_{\bar{\xi}_0}(A_{00}) = \dim RS_{\bar{\xi}_0}(A_{11})$. Итак, показатель роста резольвенты $R_\xi(A)$ при $\xi \rightarrow \xi_0$ не превосходит суммы $\dim RS_{\bar{\xi}_0}(A_{00}) + \dim RS_{\xi_0}(A_{00})$, которая, в свою очередь, не больше $\dim \mathfrak{L}_0$. $\square$

Предложение 4.3. Пусть J -с.с. оператор A принадлежит к классу D_κ^+ , $\mathfrak{L}_+$ — соответствующее инвариантное подпространство из определения 4.2 и $\sigma(A) \setminus \mathbb{R} \neq \emptyset$. Тогда пространство $\mathfrak{H}$ однозначно представимо в виде

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'[+]\mathfrak{H}'',$$

где $\mathfrak{H}'$ и $\mathfrak{H}''$ — инвариантные подпространства оператора A , $\sigma(A|_{\mathfrak{H}'}) \subset \mathbb{R}$, $\sigma(A|_{\mathfrak{H}''}) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\dim \mathfrak{H}'' < \infty$ и оператор $A|_{\mathfrak{H}'}$ принадлежит к классу $D_{\kappa'}$, $\kappa' < \kappa$ (возможно, $\kappa' = 0$).

Доказательство. Существование разложения $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'[+] \mathfrak{H}''$ со свойствами $\sigma(A|_{\mathfrak{H}'}) \subset \mathbb{R}$, $\sigma(A|_{\mathfrak{H}''}) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ и его единственность тривиально следуют из предложения 4.2, поскольку в силу этого предложения невещественная часть $\sigma(A)$ является изолированным подмножеством множества $\sigma(A)$ и проектор Рисса (см. [8, 15])

$$P' = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R_{\xi}(A) d\xi,$$

где Γ — такой простой положительно ориентированный симметричный относительно $\mathbb{R}$ контур, $\Gamma \subset \rho(A)$, что весь невещественный спектр оператора A лежит вне Γ и, наоборот, его вещественная часть располагается внутри Γ , определяет подпространство $\mathfrak{H}'$ ($\mathfrak{H}' = P'\mathfrak{H}$), а двойственный ему проектор $P'' = I - P'$ — подпространство $\mathfrak{H}''$. Поскольку контур Γ симметричен относительно $\mathbb{R}$ и поэтому $P' - J$ -с.с. оператор, то $\mathfrak{H}'[\perp] \mathfrak{H}''$.

Далее, из вида оператора P' следует, что подпространство $\mathfrak{L}_+$ будет для него инвариантным, поэтому из предложения 4.1 вытекает, что подпространство $P'\mathfrak{L}_+$ является искомым инвариантным подпространством оператора $A|_{\mathfrak{H}'}$ и, таким образом, нам осталось лишь проверить конечномерность подпространства $\mathfrak{H}''$. Итак, подпространство $P''\mathfrak{L}_+$ является для оператора $A|_{\mathfrak{H}''}$ максимальным неотрицательным инвариантным подпространством, которое к тому же псевдорегулярно, а его изотропная часть конечномерна. Покажем, что в действительности $P''\mathfrak{L}_+$ нейтрально. В самом деле, если мы допустим противное, т. е. что в $P''\mathfrak{L}_+$ есть хоть один положительный вектор, то получим, что $\sigma(A|_{\mathfrak{H}''}) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$, однако это невозможно в силу выбора $\mathfrak{H}''$. Итак, подпространство $P''\mathfrak{L}_+$ нейтрально и, следовательно (см. 4.1), $P''\mathfrak{L}_+ \subset \mathfrak{L}_1$, поэтому $\dim P''\mathfrak{L}_+ = \kappa'' \leq \kappa$. Наконец, поскольку $P''\mathfrak{L}_+$ — максимальное нейтральное подпространство относительно $\mathfrak{H}''$, то $\dim \mathfrak{H}'' = 2\kappa''$. $\square$

Замечание 4.1. В условиях предложения 4.3 справедливо $\mathfrak{H}'' \cap \mathfrak{L}_1 \neq \emptyset$.

Представление (4.7) полезно в том смысле, что позволяет локализовать спектр оператора $A \in D_{\kappa}^+$, но непосредственно с его помощью сложно доказать существование у A спектрального разложения того же типа, что у самосопряжённого оператора в пространстве Понтрягина. Наша ближайшая цель — построить аналитическое представление резольвенты оператора A , аналогичное представлению, изложенному в работах [18, 26, 27]. Оно будет похоже на представление (3.9), для чего так же, как в работе [18], будут рассмотрены последовательности вида $\{[P(A)A^n x, x]\}_{n=0}^{\infty}$, где $x \in \mathfrak{H}$, а $P(\xi)$ — некоторый фиксированный полином. В [18] это был дефинирующий полином, но в наших условиях такой полином, вообще говоря, не существует.

Рассмотрим теперь матричное представление оператора $A^+ = A|_{\mathcal{L}_+}$ и его резольвенты. Итак,

$$A^+ = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad R_{\xi}(A^+) = \begin{pmatrix} R_{\xi}(A_{11}) & -R_{\xi}(A_{11})A_{12}R_{\xi}(A_{22}) \\ 0 & R_{\xi}(A_{22}) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим структуру операторов A_{12} и $R_{\xi}(A_{11})A_{12}R_{\xi}(A_{22})$. Для упрощения предположим, что оператор A_{11} представляет собой одну жорданову клетку с собственным числом μ и базисом $\{e_j\}_1^k$, т. е.

$$A_{11}e_j = \mu e_j + e_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, k-1, \quad A_{11}e_k = \mu e_k, \quad \text{Lin}\{e_j\}_1^k = \mathfrak{L}_1. \quad (4.8)$$

Далее, найдётся такая система $\{y_j\}_1^k \subset \mathfrak{L}_1$, что $A_{12}x = \sum_{j=1}^k (x, y_j)e_j$. Поскольку образ оператора

A_{12} может быть, вообще говоря, подпространством пространства $\mathfrak{L}_1$, система $\{y_j\}_1^k$ может быть линейно зависимой. Более того, благодаря предложению 4.3 гильбертова структура пространства $\mathfrak{H}$ может быть выбрана так, что в случае невещественного μ все $y_j = 0$, поэтому в дальнейшем предполагается, что собственное число μ вещественно. Наконец, пусть $E_{\lambda}^{(22)}$ непрерывная слева спектральная функция оператора A_{22} , т. е. $A_{22} = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_{\lambda}^{(22)}$. Тогда

$$R_{\xi}(A_{22}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - \xi} dE_{\lambda}^{(22)}, \quad R_{\xi}(A_{11})e_l = \sum_{j=l}^k (-1)^{j-l} \frac{1}{(\mu - \xi)^{j-l+1}} e_j, \quad l = 1, 2, \dots, k,$$

$$\begin{aligned}
R_\xi(A_{11})A_{12}R_\xi(A_{22})x &= \sum_{l=1}^k \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - \xi} dE_\lambda^{(22)} x, y_l \right) \sum_{j=l}^k (-1)^{j-l} \frac{1}{(\mu - \xi)^{j-l+1}} e_j = \\
&= \sum_{j=1}^k \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - \xi} \left(\sum_{l=1}^j (-1)^{j-l} \frac{1}{(\mu - \xi)^{j-l+1}} d(E_\lambda^{(22)} x, y_l) \right) \right) e_j.
\end{aligned}$$

Интегральное представление оператора $R_\xi(A_{11})A_{12}R_\xi(A_{22})$ получено нами в предположении (4.8), но от этого частного случая достаточно легко перейти к общей ситуации: если жордановых клеток несколько, то надо взять сумму по всем этим клеткам. Итак, пусть оператор A_{11} состоит из p клеток и соответствующий базис пространства $\mathfrak{L}_1$ разбит на p групп: $\{e_j^{(m)}\}_{j=1}^{k_m}$, $m = 1, 2, \dots, p$, $k_1 + k_2 + \dots + k_p = \kappa$. Тогда

$$R_\xi(A_{11})A_{12}R_\xi(A_{22})x = \sum_{m=1}^p \sum_{j=1}^{k_m} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - \xi} \left(\sum_{l=1}^j (-1)^{j-l} \frac{1}{(\mu_m - \xi)^{j-l+1}} d(E_\lambda^{(22)} x, y_l^{(m)}) \right) \right) e_j^{(m)}. \quad (4.9)$$

Возьмём открытый промежуток $\Delta = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, такой что

$$[\alpha, \beta] \cap \sigma(A_{11}) = \emptyset, \quad \alpha, \beta \notin \sigma_p(A_{22}), \quad (4.10)$$

и построим прямоугольник $[\alpha, \beta] \times i[-h, h]$ с соблюдением одного из условий того же типа $[\alpha, \beta] \times i[-h, h] \cap \sigma(A_{11}) = \emptyset$. Обозначим $\Gamma(\Delta)$ положительно ориентированную границу этого прямоугольника. Наша задача — найти значение проектора Рисса, трактуя последний как интеграл в смысле главного значения:

$$E^+(\Delta) = \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) \text{s-lim}_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta(\Delta)} R_\xi(A^+) d\xi, \quad (4.11)$$

где $\Gamma_\delta(\Delta)$ — часть контура $\Gamma(\Delta)$ без двух участков границы, первый из которых находится между точками $(\alpha, -i\delta)$ и $(\alpha, i\delta)$, а второй — между точками $(\beta, -i\delta)$ и $(\beta, i\delta)$. Проектор Рисса как интеграл в смысле главного значения был использован в сообщении [11], посвящённом существованию спектральной функции у J -с.с. оператора в пространстве Понтрягина. Детальное изложение доказательства сходимости указанного интеграла можно найти в работе [27] (см. также [18]). Непосредственный подсчёт даёт следующий результат:

$$E^+(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & E^{(12)}(\Delta) \\ 0 & E^{(22)}(\Delta) \end{pmatrix},$$

где

$$E^{(12)}(\Delta)x = - \sum_{m=1}^p \sum_{j=1}^{k_m} \left(\int_{\Delta} \left(\sum_{l=1}^j (-1)^{j-l} \frac{1}{(\mu_m - \lambda)^{j-l+1}} d(E_\lambda^{(22)} x, y_l^{(m)}) \right) \right) e_j^{(m)}. \quad (4.12)$$

Представление (4.12) наглядным образом показывает, что условие $\alpha, \beta \notin \sigma_p(A_{22})$ не является существенным и от него можно отказаться, но, вообще говоря, связанный с J -с.с. оператором проектор $E^+(\Delta)$ является неограниченной функцией от α и β .

Перейдём к представлению оператора $A^+E^+(\Delta)$. Равенство $A^+R_\xi(A^+) = I + \xi R_\xi(A^+)$ позволяет представить этот оператор в виде, аналогичном (4.11)

$$A^+E^+(\Delta) = \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) \text{s-lim}_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta(\Delta)} \xi R_\xi(A^+) d\xi,$$

откуда рассуждениями, подобными приведённым выше, получаем представление

$$A^+E^+(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & A_{12}(\Delta) \\ 0 & A_{22}(\Delta) \end{pmatrix},$$

где

$$A_{12}(\Delta)x = - \sum_{m=1}^p \sum_{j=1}^{k_m} \left(\int_{\Delta} \left(\sum_{l=1}^j (-1)^{j-l} \frac{\lambda}{(\mu_m - \lambda)^{j-l+1}} d(E_\lambda^{(22)} x, y_l^{(m)}) \right) \right) e_j^{(m)}.$$

Аналогичным образом выглядит оператор $(A^+)^n E^+(\Delta)$ для любого натурального n . Для упрощения записи можно учесть что операторы A^+ и $E^+(\Delta)$ коммутируют, а к тому же $E^+(\Delta)$ идемпотентен, поэтому

$$(A^+)^n E^+(\Delta) = (A^+ E^+(\Delta))^n = \begin{pmatrix} 0 & A_{12}(\Delta)(A_{22}(\Delta))^{(n-1)} \\ 0 & (A_{22}(\Delta))^n \end{pmatrix},$$

где

$$A_{12}(\Delta)(A_{22}(\Delta))^{(n-1)}x = - \sum_{m=1}^p \sum_{j=1}^{k_m} \left(\int_{\Delta} \left(\sum_{l=1}^j (-1)^{j-l} \frac{\lambda^n}{(\mu_m - \lambda)^{j-l+1}} d(E_{\lambda}^{(22)} x, y_l^{(m)}) \right) \right) e_j^{(m)}. \quad (4.13)$$

Доопределим теперь оператор $E^+(\Delta)$ на всём пространстве $\mathfrak{H}$ как J -ортогональный проектор $E_+(\Delta)$ с помощью матричного представления (сопоставьте с (4.4), (4.5), (4.6)):

$$E_+(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ E^{(12)}(\Delta)(E^{(12)}(\Delta))^*V & 0 & E^{(12)}(\Delta) & 0 \\ (E^{(12)}(\Delta))^*V & 0 & E^{(22)}(\Delta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подпространство $E_+(\Delta)\mathfrak{H}$ инвариантно относительно оператора A , поэтому $AE_+(\Delta) = E_+(\Delta)AE_+(\Delta)$. Применив к последнему равенству операцию сопряжения, мы получим $E_+(\Delta)A = E_+(\Delta)AE_+(\Delta)$, поэтому $AE_+(\Delta) = E_+(\Delta)A$.

Зафиксируем произвольный интервал (a, b) , содержащий носитель спектральной меры $E_{\lambda}^{(22)}$. Пусть $\{\mu_j\}_1^k$ — совокупность всех попарно различных (т. е. кратность не учитывается) вещественных собственных чисел оператора A_{11} , так что $k \leq \kappa$, $X_{\epsilon} = \bigcup_{j=1}^k [\mu_j - \epsilon, \mu_j + \epsilon]$, где $\epsilon > 0$ — достаточно малое число, при котором отрезки, из которых состоит множество X_{ϵ} , не пересекаются между собой, $Y_{\epsilon} = (a, b) \setminus X_{\epsilon}$. Поскольку Y_{ϵ} — это объединение непересекающихся интервалов, то операторы $E_+(Y_{\epsilon})$ и $E^+(Y_{\epsilon})$ корректно определяются по принципу аддитивности, в частности

$$E_+(Y_{\epsilon}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ E^{(12)}(Y_{\epsilon})(E^{(12)}(Y_{\epsilon}))^*V & 0 & E^{(12)}(Y_{\epsilon}) & 0 \\ (E^{(12)}(Y_{\epsilon}))^*V & 0 & E^{(22)}(Y_{\epsilon}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$M(\xi) — \text{минимальный аннулирующий многочлен оператора } A_{11} \text{ со старшим коэффициентом, равным единице, } \widetilde{M}(\xi) — \text{аналогичный многочлен для оператора } A_{00}, \quad (4.14)$$

так что их коэффициенты будут сопряжены. Пусть $x \in \mathfrak{H}, y \in \mathfrak{L}_1$, тогда $[\widetilde{M}(A)x, y] = [x, M(A)y] = 0$, т. е. $\widetilde{M}(A)\mathfrak{H}[\perp]\mathfrak{L}_1$, иными словами

$$\widetilde{M}(A)\mathfrak{H} \subset \mathfrak{L}_1 \dot{+} \mathfrak{L}_2 \dot{+} \mathfrak{L}_3. \quad (4.15)$$

Далее, пусть

$$\{\tau_{\nu}\}_1^q = \sigma(A_{11}) \cap \sigma_p(A_{22}), \quad Q(\xi) = \Pi_1^q(\xi - \tau_{\nu}), \quad \widetilde{N}(\xi) = \widetilde{M}(\xi)Q(\xi). \quad (4.16)$$

Тогда благодаря (4.15) для многочлена $\widetilde{N}(\xi)$ и любого $x \in \mathfrak{H}$ верно

$$\widetilde{N}(A)x = z_1 + z_2 + z_3, \quad z_1 \in \mathfrak{L}_1, \quad z_2 \in \mathfrak{L}_2, \quad z_3 \in \mathfrak{L}_3 \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} E^{(22)}(Y_{\epsilon})z_2 = z_2. \quad (4.17)$$

Итак, пусть $N(\xi) = M(\xi)Q(\xi)$. С учётом (4.4) мы имеем

$$\left. \begin{aligned} N(A) &= \begin{pmatrix} N(A_{00}) & 0 & 0 & 0 \\ N_{10} & 0 & N_{12} & N_{13} \\ N_{20} & 0 & N(A_{22}) & 0 \\ N_{30} & 0 & 0 & N(A_{33}) \end{pmatrix}, \\ \tilde{N}(A) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{N}_{10} & \tilde{N}(A_{11}) & \tilde{N}_{12} & \tilde{N}_{13} \\ \tilde{N}_{20} & 0 & \tilde{N}(A_{22}) & 0 \\ \tilde{N}_{30} & 0 & 0 & \tilde{N}(A_{33}) \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}, \quad (4.18)$$

откуда

$$\begin{aligned} N(A)\tilde{N}(A) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{12}\tilde{N}_{20} + N_{13}\tilde{N}_{30} & 0 & N_{12}\tilde{N}(A_{22}) & N_{13}\tilde{N}(A_{33}) \\ N(A_{22})\tilde{N}_{20} & 0 & N(A_{22})\tilde{N}(A_{22}) & 0 \\ N(A_{33})\tilde{N}_{30} & 0 & 0 & N(A_{33})\tilde{N}(A_{33}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{12}\tilde{N}_{20} & 0 & N_{12}\tilde{N}(A_{22}) & 0 \\ N(A_{22})\tilde{N}_{20} & 0 & N(A_{22})\tilde{N}(A_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{13}\tilde{N}_{30} & 0 & 0 & N_{13}\tilde{N}(A_{33}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ N(A_{33})\tilde{N}_{30} & 0 & 0 & N(A_{33})\tilde{N}(A_{33}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Проанализируем первое слагаемое:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{12}\tilde{N}_{20} & 0 & N_{12}\tilde{N}(A_{22}) & 0 \\ N(A_{22})\tilde{N}_{20} & 0 & N(A_{22})\tilde{N}(A_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N_+(A)\tilde{N}_+(A), \quad (4.19)$$

где

$$N_+(A) = \begin{pmatrix} N(A_{00}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{12} & 0 \\ N_{20} & 0 & N(A_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{N}_+(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{N}(A_{11}) & \tilde{N}_{12} & 0 \\ \tilde{N}_{20} & 0 & \tilde{N}(A_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что операторы $N(A)$ и $\tilde{N}(A)$ J -сопряжены, поэтому J -сопряжены операторы $N_+(A)$ и $\tilde{N}_+(A)$. Далее, оператор $N_+(A)\tilde{N}_+(A)$ является в некотором смысле дефинизирующим, поскольку

$$[N_+(A)\tilde{N}_+(A)x, x] = [\tilde{N}_+(A)x, \tilde{N}_+(A)x] \geq 0, \quad x \in \mathfrak{H}. \quad (4.20)$$

Чтобы с его помощью построить позитивную последовательность моментов, надо проверить, что операторы A и $N_+(A)\tilde{N}_+(A)$ коммутируют. Мы это сделаем с помощью проектора $E_+(Y_\epsilon)$. Рассмотрим выражение $N(A)E_+(Y_\epsilon)\tilde{N}(A)x$, где $x \in \mathfrak{H}$. Согласно (4.17) $\tilde{N}(A)x = z_1 + z_2 + z_3$, откуда

$$\begin{aligned} N(A)E_+(Y_\epsilon)\tilde{N}(A)x &= N(A)E_+(Y_\epsilon)(z_1 + z_2 + z_3) = N(A)(E_{12}(Y_\epsilon)z_2 + E_{22}(Y_\epsilon)z_2) = \\ &= (N_{12}E_{22}(Y_\epsilon)z_2 + N(A_{22})E_{22}(Y_\epsilon)z_2). \end{aligned}$$

В силу (4.17) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(A)E_+(Y_\epsilon)\tilde{N}(A)x = (N_{12}z_2 + N(A_{22})z_2)$. Поскольку $z_2 = \tilde{N}_{20}x_0 + \tilde{N}(A_{22})x_2$, то

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(A)E_+(Y_\epsilon)\tilde{N}(A)x = N_+(A)\tilde{N}_+(A)x.$$

Осталось заметить, что проектор $E_+(Y_\epsilon)$ коммутирует с оператором A^n , поэтому для любого натурального n верно $A^n N(A)E_+(Y_\epsilon)\tilde{N}(A) = N(A)E_+(Y_\epsilon)\tilde{N}(A)A^n$, откуда

$$A^n N_+(A)\tilde{N}_+(A) = N_+(A)\tilde{N}_+(A)A^n.$$

Аналогично (4.19) введём разложение

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{13}\tilde{N}_{30} & 0 & 0 & N_{13}\tilde{N}(A_{33}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ N(A_{33})\tilde{N}_{30} & 0 & 0 & N(A_{33})\tilde{N}(A_{33}) \end{pmatrix} = N_-(A)\tilde{N}_-(A), \quad (4.21)$$

где

$$N_-(A) = \begin{pmatrix} N(A_{00}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{30} & 0 & 0 & N(A_{33}) \end{pmatrix}, \quad \tilde{N}_-(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{N}(A_{11}) & 0 & \tilde{N}_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{N}_{30} & 0 & 0 & \tilde{N}(A_{33}) \end{pmatrix}.$$

Итак, рассмотрим три последовательности:

$$c_n = [N(A)\tilde{N}(A)A^n x, x], \quad c_n^+ = [N_+(A)\tilde{N}_+(A)A^n x, x], \quad c_n^- = [N_-(A)\tilde{N}_-(A)A^n x, x], \quad n = 0, 1, \dots$$

В силу (4.20) последовательность $\{c_n^+\}_0^\infty$ положительна и имеет следующее ограничение на рост: $|c_n^+| \leq C\|A\|^n$. По аналогичной причине последовательность $\{c_n^-\}_0^\infty$ отрицательна и имеет аналогичную оценку роста. Как хорошо известно (см., напр, [7]) найдутся такие неубывающие непрерывные слева функции $\sigma_+^{(x)}(t)$ и $\sigma_-^{(x)}(t)$, что

$$c_n^+ = \int_{-\|A\|}^{\|A\|+0} t^n d\sigma_+^{(x)}(t), \quad c_n^- = - \int_{-\|A\|}^{\|A\|+0} t^n d\sigma_-^{(x)}(t), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.22)$$

причём эти функции определяются с точностью до константы. Символ $\|A\|+0$ означает, что мы учитываем возможный скачок функций $\sigma_\pm^{(x)}(t)$ в точке $\|A\|$. Из приведённых формул следует, что

$$c_n = \int_{-\|A\|}^{\|A\|+0} t^n d\eta^{(x)}(t), \quad \eta^{(x)}(t) = \sigma_+^{(x)}(t) - \sigma_-^{(x)}(t), \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.23)$$

Отметим удивительный факт [23], что представление последнего типа допускает произвольная вещественная последовательность, но в этом случае верхний предел интегрирования будет бесконечен. На основании представлений (4.22) в [18, 27] показано, что найдутся такие неубывающие операторные функции $G_t^\pm$, что

- $G_{-\infty}^\pm = 0$, $G_t^\pm = \text{s-lim}_{\tau \rightarrow t-0} G_\tau^\pm$ для любого $t \in \mathbb{R}$;
- для любого $t \in \mathbb{R}$ и $\tau \in (-\infty, t)$ оператор $(G_t^\pm - G_\tau^\pm)$ является J -неотрицательным;
- $N_\pm(A)\tilde{N}_\pm(A)A^k x = \pm \int_{-\|A\|}^{\|A\|+0} t^k dG_t^\pm x$ для любого $x \in \mathcal{H}$ и $k = 0, 1, 2, \dots$

Связь между операторами $N(A)\tilde{N}(A)$, $N_+(A)\tilde{N}_+(A)$ и $N_-(A)\tilde{N}_-(A)$ (см. (4.19) и (4.21)) приводит к представлению

$$N(A)\tilde{N}(A)A^k x = \int_{-\|A\|}^{\|A\|+0} t^k dG_t x \quad (4.24)$$

для любого $x \in \mathcal{H}$ и $k = 0, 1, 2, \dots$, где $G_t = G_t^+ - G_t^-$. Представление (4.24) и стандартное разложение резольвенты $R_\xi(A)$ в окрестности бесконечно удалённой точки (см. [15, гл. XI, § 1, п. 148]) приводит к представлению

$$N(A)\tilde{N}(A)R_\xi(A) = \int_{-\|A\|}^{\|A\|+0} \frac{1}{t-\xi} dG_t, \quad (4.25)$$

где $\xi \in \mathbb{C} \setminus [-\|A\|, \|A\|]$. Далее, выражение $M(t, \xi) = \frac{N(\xi)\tilde{N}(\xi) - N(t)\tilde{N}(t)}{t - \xi}$ превращается после его очевидного доопределения в особой подобласти $t = z$ в полином от двух переменных, т. е. выражению

$$M(A, \xi) = R_\xi(A)(N(\xi)\tilde{N}(\xi)I - N(A)\tilde{N}(A))$$

можно придать корректный смысл. Последняя формула и представление (4.25) приводят к новому представлению

$$R_\xi(A) = \frac{1}{N(\xi)\tilde{N}(\xi)} \left(M(A, \xi) + \int_{-\|A\|}^{\|A\|+0} \frac{1}{t - \xi} dG_t \right). \quad (4.26)$$

Предложение 4.4. Пусть спектр J -с.с. оператора $A \in D_\kappa^+$ веществен, $\mathfrak{L}_+$ — отвечающее определению 4.2 подпространство, инвариантное относительно A . Тогда оператор A обладает вещественной с.с.ф. E_λ с конечным множеством спектральных особенностей Λ ($\mathfrak{R}_\Lambda$ — множество промежутков $\Delta = [a, b)$ $a, b \notin \Lambda$), причём

$$\left. \begin{aligned} \text{a.} \quad & \text{для любого } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \Lambda \text{ верно } E_\lambda \in \text{Alg } A; \\ \text{b.} \quad & \text{если } \Delta \in \mathfrak{R}_\Lambda \text{ и } \Delta \cap \Lambda = \emptyset, \text{ то } E(\Delta)\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\Delta^+[+] \mathfrak{H}_\Delta^-, A\mathfrak{H}_\Delta^+ \subset \mathfrak{H}_\Delta^+, \\ & A\mathfrak{H}_\Delta^- \subset \mathfrak{H}_\Delta^-, \mathfrak{H}_\Delta^+ \text{ — равномерно положительное, а } \mathfrak{H}_\Delta^- \text{ — равно-} \\ & \text{мерно отрицательное подпространство (каждое из подпро-} \\ & \text{странств } \mathfrak{H}_\Delta^+ \text{ и } \mathfrak{H}_\Delta^- \text{ может вырождаться в } \{0\}); \\ \text{c.} \quad & \text{если } \Delta \in \mathfrak{R}_\Lambda \text{ и } \Delta \cap \Lambda \neq \emptyset, \text{ то } E(\Delta)\mathfrak{L}_+ \cap \mathfrak{L}_1 \neq \{0\} \text{ и оператор} \\ & A|_{E(\Delta)\mathfrak{H}} \text{ не является скалярным спектральным оператором.} \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Доказательство. Демонстрация справедливости этого предложения может быть реализована по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.1 из [18], которая посвящена аналогичному результату для пространства Понтрягина, поэтому мы покажем только путь, приводящий к этой схеме. Итак, пусть $N(\xi)$ — тот же многочлен, что и в (4.14), (4.16), (4.18), который в силу вещественности спектра соответствующего оператора будет иметь вещественные коэффициенты, так что формула (4.26) может быть заменена на формулу

$$R_\xi(A) = \frac{1}{N^2(\xi)} \left(M(A, \xi) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t - \xi} dG_t \right). \quad (4.28)$$

Положим

$$\Lambda := \{\lambda : N(\lambda) = 0\}.$$

Множество Λ является кандидатом в множество особых точек для оператора A и для его спектральной функции, к определению которой мы переходим.

Обозначим $\mathbb{R}_G$ множество тех $t \in \mathbb{R}$, для которых G_t непрерывна в сильной операторной топологии. Действуя так же, как и в (3.7), положим

$$E_t = \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) \text{s-lim}_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} R_\xi(A) d\xi \quad (4.29)$$

для всех $t \in \mathbb{R}_G \setminus \Lambda$ и доопределим E_t по формуле $E_t = \text{s-lim}_{\tau \in \mathbb{R}_G, \tau \rightarrow t-0} E_\tau$ для остальных $t \in \mathbb{R} \setminus \Lambda$.

Существование предела в (4.29) следует, в первом приближении, из теоремы о существовании сильного предела у монотонной ограниченной последовательности операторов в гильбертовом пространстве (см. [15, гл. VII, § 1, п. 104, теорема Вижье—С.-Надя]) и формулы (4.28), однако соответствующее доказательство имеет ряд особенностей. С учётом структуры G_t из (4.24) они исчерпывающим образом описаны в [18]. В заключение остановимся на пунктах **b** и **c** (4.27). Первый из этих пунктов гарантирует, что при условии $\Delta \in \mathfrak{R}_\Lambda$ и $\Delta \cap \Lambda = \emptyset$ оператор $A|_{E(\Delta)\mathfrak{H}}$

является скалярным спектральным оператором, т. е. $A|_{E(\Delta)\mathfrak{H}} = \int_{\Delta} \lambda dE_{\lambda}|_{E(\Delta)\mathfrak{H}}$. Второе условие имеет отчасти противоположный смысл, т. е. исключает из Λ те точки, в которых оператор $A|_{E(\Delta)\mathfrak{H}}$ оказался спектральным оператором. Это может произойти, если соответствующее собственное подпространство оператора A регулярно и индефинитно. В этом состоит отличие множества критических точек для J -с.с. оператора в пространстве Понтрягина и множеством особых точек для J -с.с. оператора в пространстве Крейна. $\square$

Заметим, что последнее предложение можно было бы доказать, не повторяя путь доказательства аналогичной теоремы в пространстве Понтрягина, а используя саму теорему, однако формулы (4.24) и (4.25) полезны и сами по себе, поскольку открывают естественную постановку вопроса о создании модели J -с.с. оператора по схеме Йонаса—Лангера—Тексториуса, которую они использовали в случае пространства Понтрягина (об этом см. ниже). При этом вопрос о связи дефинируемой числовой последовательности (интегро-полиномиальное представление такой последовательности получено в [28]) и циклического J -с.с. оператора достаточно сложен. Приведём следующий пример.

Пример 4.1. Пусть $\{e_j^+, e_j^-\}_0^\infty$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, индефинитная структура на котором задана оператором $J : Je_j^\pm = \pm e_j^\pm$, $j = 0, 1, \dots$. Зададим в $\mathfrak{H}$ дополнительную J -ортонормированную систему, которая полна в $\mathfrak{H}$, но базисом не является:

$$h_j^+ = \frac{j}{\sqrt{2j-1}}(e_j^+ + \frac{j-1}{j}e_j^-), \quad h_j^- = \frac{j}{\sqrt{2j-1}}(\frac{j-1}{j}e_j^+ + e_j^-), \quad j = 0, 1, \dots,$$

и два оператора $Ae_j^\pm = \frac{\pm 1}{j+1}e_j^\pm$ и $Bh_j^\pm = \frac{\pm 1}{j+1}h_j^\pm$, $j = 0, 1, \dots$. Далее, пусть

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2}(e_j^+ + e_j^-), \quad y = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2}(h_j^+ + h_j^-).$$

Тогда

$$\begin{aligned} A^n x &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^{2+n}}(e_j^+ + (-1)^n e_j^-), & B^n y &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^{2+n}}(h_j^+ + (-1)^n h_j^-), \\ [A^n x, x] &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^{4+n}}(1 + (-1)^{n+1}), & [B^n y, y] &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^{4+n}}(1 + (-1)^n). \end{aligned}$$

Итак, две последовательности моментов совпадают, но порождающие эти последовательности операторы A и B подобными не являются, в частности, $A \in D_0^+$, а оператор B не принадлежит к D_κ^+ ни при каком κ . Отметим при этом, что последовательность

$$d_n = [A^{n+1}x, x] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^{4+n}}(1 + (-1)^{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots$$

положительна, т. е. операторы A и B дефинируемы.

Пример 4.2. Пусть система $e, g, f, h_1, h_2, h_3, \dots$ образует ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, и пусть полуторалинейная форма на $\mathfrak{H}$ задаётся формулой

$$[x, y] = (x, e)(g, y) + (x, g)(e, y) + (x, f)(f, y) + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j (x, h_j)(h_j, y).$$

Тогда это пространство превращается в пространство Крейна. Зададим на $\mathcal{H}$ оператор A с помощью следующих условий:

$$Ae = 0, \quad Ah_j = \frac{1}{j} \cdot (h_j + e), \quad j = 1, 2, \dots, \quad Ag = f + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1)^j}{j} \cdot h_j, \quad Af = e.$$

Расширяя область определения A по линейности и непрерывности на всё пространство $\mathcal{H}$ получим, что A — это компактный J -с.с. оператор, $A(h_j + e) = \frac{1}{j} \cdot (h_j + e)$, $j = 1, 2, \dots$. Спектральная функция оператора A может быть полностью описана равенством

$$E\left(\left\{\frac{1}{j}\right\}\right)x = (-1)^j[x, (h_j + e)] \cdot (h_j + e),$$

так что

$$E_t x = \left(I - E\left(\left\{\frac{1}{j}\right\}_{j=1}^n\right)\right)x = x - \sum_{j=1}^n (-1)^j[x, (h_j + e)] \cdot (h_j + e),$$

где $n = [1/t]$, $[1/t]$ — целая часть числа $1/t$.

Этот пример будет проанализирован в следующем разделе.

5. СХЕМА ЙОНАСА—ЛАНГЕРА—ТЕКСТОРИУСА

В работе [25] была предложена модель ограниченного циклического J -с.с. оператора в пространстве Понтрягина, базирующегося на интегральном представлении последовательности вида (3.2).

Напомним для начала определение циклического вектора и циклического оператора (см., например, [17, гл. 14, п. 126], [14, гл. VII, п. 2]).

Если B — некоторый оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то *циклическим вектором* этого оператора называется любой вектор $x \in \mathcal{H}$, такой что система векторов $\{B^n x\}_{n=0}^\infty$ полна в $\mathcal{H}$.

Далеко не для всякого оператора существуют циклические векторы. В случае самосопряжённого оператора B в гильбертовом пространстве наличие циклического вектора эквивалентно простоте спектра у B , но для спектральных или обобщённых спектральных операторов картина усложняется. Если оператор B обладает циклическим вектором, то он называется *циклическим*. Циклическим, в частности, является оператор A из примера 4.2, а его циклическим вектором будет, скажем, g .

Далее, всякий ограниченный J -с.с. оператор A , действующий в пространстве Понтрягина $\mathcal{H}$, полиномиально дефинизируем, т. е. для A найдётся такой (дефинизирующий) полином $\mathcal{P}(\cdot)$, для которого оператор $\mathcal{P}(A)$ J -неотрицателен. В (3.1) показано, что можно положить $\mathcal{P}(\cdot) = N(\cdot)\tilde{N}(\cdot)$, однако, вообще говоря, для одного и того же оператора существуют разные дефинизирующие полиномы и для дальнейшего конкретный вид $\mathcal{P}(\cdot)$ неважен, дальше лишь предполагается, что коэффициенты у $\mathcal{P}(\cdot)$ вещественны, а коэффициент при его старшей степени равен единице. Итак, пусть A — фиксированный ограниченный J -с.с. оператор, действующий в пространстве Понтрягина $\mathcal{H}$, и для него найдётся такой вектор g , что последовательность $\{A^n g\}_0^\infty$ полна в $\mathcal{H}$. Выберем и зафиксируем полином $\mathcal{P}(\xi) = \xi^m + \eta_{m-1}\xi^{m-1} + \eta_{m-2}\xi^{m-2} + \dots + \eta_0$, который дефинирует A . Последовательность $\{d_n = [\mathcal{P}(A)A^n g, g]\}_0^\infty$ является позитивной последовательностью моментов и поэтому допускает уже упомянутое представление (3.4)

$$d_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n d\sigma(t),$$

которое мы используем для регуляризованного интегрального представления последовательности моментов

$$\{c_n = [A^n g, g]\}_0^\infty.$$

Указанные последовательности моментов связаны соотношениями

$$d_n = c_{n+m} + \eta_{m-1}c_{n+m-1} + \eta_{m-2}c_{n+m-2} + \dots + \eta_0 c_n,$$

которое в результате ряда преобразований приводит (ср. с [28])

$$c_n = \sum_{j=0}^m \alpha_j^{(n)} c_j + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^n - \sum_{j=0}^m \alpha_j^{(n)} t^j}{\mathcal{P}(t)} d\sigma(t), \quad (5.1)$$

где $\sum_{j=0}^m \alpha_j^{(n)} t^j$ — интерполяционный многочлен для t^n , $n = 0, 1, \dots$. Поясним, что для $n < m$ представление (5.1) сводится к тривиальному равенству $c_n = c_n$.

Перейдём теперь к формированию модельного пространства Понтрягина как некоторого пространства функций. отождествим (циклический) вектор g с тождественной единицей, вектор Ag — с t , A^2g — с t^2 и т. д. Итак, стартовым линейным многообразием функций у нас будет множество полиномов $\mathfrak{P}$. Превратим множество $\mathfrak{P}$ в линейное пространство с внутренним скалярным произведением $[\cdot, \cdot]$ полагая $[t^j, t^l] = c_{j+l}$, $j, l = 0, 1, \dots$, где величины c_{j+l} заданы в (5.1).

По построению линейал $\mathfrak{P}$ изометричен плотному подмножеству пространства Понтрягина $\mathcal{H}$, поэтому он после пополнения превращается в пространство Понтрягина, которое мы обозначим $\Pi(\Phi)$, а исходный оператор будет подобен действующему в $\Pi(\Phi)$ оператору умножения A_T на независимую переменную.

Указанное пополнение можно реализовать разными способами, но все эти способы топологически эквивалентны. Один из вариантов — выделить в $\mathfrak{P}$ максимальное отрицательное подпространство $\mathcal{L}_-$ и найти в $\mathfrak{P}$ J -ортогональное дополнение $\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_-^{\perp}$. Линейал $\mathcal{L}_+$ с внутренним эрмитовым произведением $[\cdot, \cdot]$ — это предгильбертово пространство, пополнив которое, мы и получим (в прямой сумме с $\mathcal{L}_-$) пространство Понтрягина $\Pi(\Phi)$.

Формулы (5.1) показывают, что, вообще говоря, как гильбертова структура, так и структура пространства Понтрягина на функциональном пространстве $\Pi(\Phi)$ может задаваться не обычной мерой Лебега—Стилтьеса, а некоторым распределением (обобщённой функцией) Φ . Разбор конкретного примера можно найти в м [18].

Перейдём теперь к проблеме модельного представления циклического J -с.с. оператора класса D_κ^+ . Отметим, что такой оператор относится к классу **H**. Обратное неверно главным образом потому, что для циклического оператора допустимы жордановы цепочки, отвечающие одному собственному вектору, но невозможны собственные подпространства размерностью больше единицы. Различие, впрочем, невелико, так как у оператора класса **H** собственных подпространств размерностью больше единицы может быть только конечное число и каждое из них должно иметь конечную размерность.

Итак, пусть $\mathfrak{H}$ — это гильбертово J -пространство, оператор $A \in D_\kappa^+$ действует в этом пространстве, J -самосопряжён и существует такой вектор $g \in \mathfrak{H}$, что система $\{A^j g\}_0^\infty$ полна в $\mathfrak{H}$. Поскольку $A \in D_\kappa^+$, то существует разложение (4.2) и соответствующие матричные представления (4.3) и (4.4). Вектор g может быть представлен в соответствии с (4.2) в виде $g = g_0 + g_1 + g_2 + g_3$. Структура угловых операторов $E^{(12)}(\Delta)$ и $A_{12}(\Delta)(A_{22}(\Delta))^{(n-1)}$ (см. (4.12) (4.13)), отвечающих операторам $E^+(\Delta)$ и $(A^+)^n E^+(\Delta)$ соответственно, показывает, что у них есть совместное ядро $\mathfrak{K}_2 \subset \mathfrak{L}_2$ — ортогональное дополнение к векторам $\{E^{(22)}(\Delta)y_j^{(m)}\}_{j=1}^{k_m}\}_{m=1}^p$ (см. (4.9)), Δ пробегает множество интервалов вида (4.10). $\mathfrak{K}_2$ является положительным инвариантным подпространством оператора A и его можно отделить. Итак, мы можем допустить, что совместного нетривиального ядра у указанной системы угловых операторов нет. Тогда в силу соотношения сопряжённости (4.6) матричных элементов A_{20} и A_{12} оператора A , а также его степеней, ясно, что замыкание линейной оболочки системы подпространств $\{(A^k)_{20}\mathfrak{L}_0\}_0^\infty$, где $(A^k)_{20}$ — соответствующий угловой оператор оператора A^k , совпадает с $\mathfrak{L}_2$. Итак, без ограничения общности можно считать, что $g = g_0$.

Тогда существует многочлен $\mathcal{P}(t)$ с вещественными коэффициентами, при котором последовательность $d_n = [\mathcal{P}(A)A^n g, g]$, $n = 0, 1, \dots$ представима в виде (4.23)

$$d_n = \int_{-\|A\|}^{\|A\|+0} t^n d\eta(t), \quad \eta(t) = \sigma_+(t) - \sigma_-(t), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5.2)$$

где $\sigma_+(t)$ и $\sigma_-(t)$ неубывающие непрерывные слева функции. В силу простоты спектра оператора A разложение $\eta(t) = \sigma_+(t) - \sigma_-(t)$ является разложением Хана (см. [10]). Наряду с последовательностью $\{d_n\}_0^\infty$ рассмотрим последовательность моментов

$$\{c_n = [A^n g, g]\}_0^\infty. \quad (5.3)$$

Указанные последовательности моментов связаны соотношениями

$$d_n = c_{n+m} + \gamma_{m-1}c_{n+m-1} + \gamma_{m-2}c_{n+m-2} + \dots + \gamma_0c_n,$$

где коэффициентами являются коэффициенты многочлена $\mathcal{P}(\xi)$. Нам в дальнейшем будет удобно считать, что степень многочлена чётная, и он представлен в виде $\mathcal{P}(\xi) = N(\xi)\tilde{N}(\xi)$, где $N(\xi)$ и $\tilde{N}(\xi)$ — многочлены с сопряжёнными коэффициентами. На возможность манипуляции со степенями многочленов указывается в [28], а элементы соответствующих представлений могут быть восстановлены через равенство

$$c_n = \sum_{j=0}^m \alpha_j^{(n)} c_j + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^n - \sum_{j=0}^m \alpha_j^{(n)} t^j}{\mathcal{P}(t)} d\eta(t), \quad (5.4)$$

где $\sum_{j=0}^m \alpha_j^{(n)} t^j$ — интерполяционный многочлен для t^n , $n = 0, 1, \dots$, функция $\eta(t)$ та же, что и в (5.3). При $n < m$ представление (5.4) превращается в тривиальное равенство $c_n = c_n$.

Приступим к построению модельного пространства Крейна как некоторого пространства функций. отождествим вектор g с тождественной единицей, вектор Ag — с t , A^2g — с t^2 и т. д. Итак, стартовым линейным многообразием функций у нас будет множество полиномов $\mathfrak{P}$. Превратим множество $\mathfrak{P}$ в линейное пространство с внутренним скалярным произведением $[\cdot, \cdot]$ полагая $[t^j, t^l] = c_{j+l}$, $j, l = 0, 1, \dots$, где величины c_{j+l} заданы в (5.3). По построению линейал $\mathfrak{P}$ изометричен плотному подмножеству пространства Крейна $\mathfrak{H}$, поэтому он после пополнения превращается в пространство Крейна, которое мы обозначим $\mathfrak{K}$, а исходный оператор будет подобен действующему в $\mathfrak{K}$ оператору умножения A_T на независимую переменную. Как было показано выше (пример 4.1), такие пополнения определяются неоднозначно, и они топологически могут быть неэквивалентны, в этом состоит радикальное различие между случаями пространств Понтрягина и Крейна. Мы воспользуемся представлением (5.2), элементы которого определяются в существенном однозначно. Итак, рассмотрим сначала линейал $\mathfrak{L}$ — линейную оболочку полиномов вида $N(t)t^k$, $k = 0, 1, \dots$. При этом

$$\langle N(t)t^j, N(t)t^l \rangle = \int_{-\|A\|}^{\|A\|+0} t^{l+j} d(\sigma_+(t) + \sigma_-(t)), \quad j, l = 0, 1, \dots$$

Линейал $\mathfrak{L}$ линейно изоморфен плотному линейному подмножеству в $\mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2 \oplus \mathfrak{L}_3$, но внутреннее произведение $[\cdot, \cdot]$ вырождается на $\mathfrak{L}_1$, поэтому полунормы $\langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$ недостаточно для пополнения подпространства $\mathfrak{L}$. Введём на $\mathfrak{L}$ дополнительные полунормы

$$p_j(Q(t)) = |[Q(t), t^j]|, \quad j = 0, 1, (m/2) - 1,$$

где m — степень многочлена $\mathcal{P}(\xi)$ (напомним, что она чётна). Далее, для произвольного многочлена $u(t) \in \mathfrak{L}$ введём норму

$$\|u(t)\|^2 = \sum_{j=1}^{(m/2)-1} |p_j(u(t))|^2 + \langle Q(t), Q(t) \rangle.$$

Тогда пополнение $\mathfrak{L}$ по этой норме превращает $\mathfrak{L}$ в гильбертово пространство. Следующий этап — это дополнение пополненного пространства до пополнения $\mathfrak{P}$, но это уже не является проблемой, поскольку дополняющее подпространство конечномерно и его элементы известны, это система t^j $j = 0, 1, (m/2) - 1$. Дальнейшее очевидно.

Проиллюстрируем предложенную схему на примере 4.2. Имеем

- $Ag = f + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} \cdot h_j,$
- $A^2g = e + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^2} \cdot (h_j + e),$

$$\begin{aligned}
& \bullet A^3 g = e + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^3} \cdot (h_j + e), \\
& \dots \\
& \bullet A^k g = e + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^k} \cdot (h_j + e),
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
& \bullet c_0 = 0, \\
& \bullet c_1 = [Ag, g] = 0, \\
& \bullet c_2 = [A^2 g, g] = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^2}, \\
& \bullet c_3 = [A^3 g, g] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^3}, \\
& \dots \\
& \bullet c_k = [A^k g, g] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^k}.
\end{aligned}$$

Итак, первым членом последовательности моментов, который может быть задан через знакопеременную меру (заряд) является c_2 , а функция, задающая знакопеременную меру, выглядит следующим образом:

$$\forall t \leq 0 \quad \sigma(t) = 0, \quad \forall t > 0 \quad \sigma(t) = 1 + \sum_{j \geq t^{-1}} \frac{(-1)^j}{j^2}.$$

Аналогично находится функция, задающая соответствующую положительную меру:

$$\forall t \leq 0 \quad \eta(t) = 0, \quad \forall t > 0 \quad \eta(t) = 1 + \sum_{j \geq t^{-1}} \frac{1}{j^2}.$$

Наконец, норма, по которой будет пополняться подпространство $\mathfrak{L}$ многочленов, выглядит следующим образом:

$$\|u(t)\|^2 = |[u(t), 1]|^2 + \langle u(t), u(t) \rangle,$$

или в терминах скалярного произведения $[\cdot, \cdot]$ полиномов $u(t)$ и $v(t)$

$$[u(t), v(t)] = [u(t), 1][1, v(t)] + \langle u(t), v(t) \rangle.$$

Так как $\sigma(t)$ и $\eta(t)$ являются функциями, графически состоящими из счётного числа ступеней, то для функций, входящих в пополнение $\mathfrak{L}$, имеет смысл только то, какое значение имеет та или иная функция в точках скачков функций, задающих меру. С этой точки зрения величина $[1, u(t)]$ для полинома $u(t) = t^2 v(t)$, где $v(t)$ — другой полином, задаётся формулой

$$[1, u(t)] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^2} v\left(\frac{1}{j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j u\left(\frac{1}{j}\right). \quad (5.5)$$

Прямая проверка показывает, что последовательность функций t^n , $n = 2, 3, \dots$ является последовательностью Коши и сходится к функции $\varphi_1(t)$: $\varphi_1(t) = 0$ при $t \in [0, 1)$, $\varphi_1(1) = -1$, последовательность функций $4^n t^n (1-t)^n$ — к функции $\varphi_2(t)$: $\varphi_2(t) = 0$ при $t \in [0, 1/2) \cup (1/2, 1]$, $\varphi_2(1/2) = 1$ и т. д. Функция $\varphi_n(t)$ в этой схеме задаётся равенствами $\varphi_n(t)$: $\varphi_n(t) = 0$ при $t \in [0, 1/n) \cup (1/n, 1]$, $\varphi_n(1/n) = (-1)^n$. Подсчитывая с помощью предельного перехода значения внутреннего скалярного для этих функций, имеем $[\varphi_n(t), u(t)] = (-1)^n \bar{u}(1/n)$ и, в частности, $[\varphi_n(t), \varphi_l(t)] = (-1)^n \delta_{nl}$, где δ_{nl} — символ Кронекера. Одновременно

$$\langle \varphi_n(t), u(t) \rangle = \bar{u}(1/n), \quad \langle \varphi_n(t), \varphi_l(t) \rangle = \delta_{nl}.$$

Рассмотрим теперь последовательность

$$\psi_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \varphi_{2l}(t).$$

Внешне эта последовательность функций равномерно сходится к нулю, однако $[\psi_n(t), 1] = 1$ для любого $n = 1, 2, \dots$. С другой стороны, согласно методу средних арифметических для последовательностей (см. [12, теорема 4.1.П Сильвермана—Теплица]), для произвольного полинома $u(t)$ верно $\lim_{n \rightarrow \infty} [\psi_n(t), tu(t)] = 0$. Итак, для любого полинома $u(t)$ мы имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} [\psi_n(t), u(t)] = \overline{u(0)}$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t)$ можно отождествить с дельта-функцией Дирака $\delta(t)$, причём $[\delta(t), \delta(t)] = 0$ $\langle \delta(t), \delta(t) \rangle = 0$.

Перейдём к подсчёту скалярного произведения $[\cdot, \cdot]$ (см. (5.5)) для найденных элементов. Итак, $[\varphi_n(t), \varphi_l(t)] = (-1)^{n+l} + (-1)^n \delta_{nl}$, т. е. рассматриваемые функции не ортогональны! Но $[1, \varphi_n(t) - (-1)^n \delta(t)] = 0$, поэтому

$$(\varphi_n(t) - \delta(t), \varphi_l(t) - \delta(t)) = (-1)^n \delta_{nl}.$$

Последнее равенство означает, что система $\{\varphi_l(t) - \delta(t)\}_{l=1}^{\infty}$ является ортонормированной системой, поэтому ряд $\sum_{l=1}^{\infty} \nu_l(\varphi_l(t) - \delta(t))$ сходится тогда и только тогда, когда $\sum_{l=1}^{\infty} |\nu_l|^2 < \infty$.

Рассмотрим теперь последовательность

$$\vartheta_n(t) = \sum_1^n \frac{\varphi_l(t) - \delta(t)}{l}.$$

Наша цель — найти $\lim_{n \rightarrow \infty} [\vartheta_n(t), v(t)]$ для произвольного полинома $v(t)$, который, очевидно, может быть представлен в виде $v(t) = v(0) + v'(0)t + t^2 w(t)$. Итак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\vartheta_n(t), v(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(v'(0) \sum_1^n \frac{(-1)^l}{l^2} + \sum_1^n (-1)^l \frac{w(1/l)}{l^3} \right) = v'(0) \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^l}{l^2} + \sum_1^{\infty} (-1)^l \frac{w(1/l)}{l^3}.$$

С другой стороны,

$$[t, v(t)] = v'(0) \left(1 + \sum_1^{\infty} (-1)^l \frac{1}{l^2} \right) + \sum_1^{\infty} V \frac{w(1/l)}{l^3},$$

поэтому элемент $t - \lim_{n \rightarrow \infty} [\vartheta_n(t)$ из $\mathfrak{K}$ может быть отождествлён с обобщённой функцией $-\delta'(t)$.

Резюмируя вышеприведённые соображения, можно утверждать, что все элементы пространства $\mathfrak{K}$ могут быть представлены в виде $\alpha + \beta \delta(t) + \gamma \delta'(t) + \sum_{l=1}^{\infty} \nu_l(\varphi_l(t) - \delta(t))$, где $\sum_{l=1}^{\infty} |\nu_l|^2 < \infty$. При этом надо иметь ввиду, что $\sigma(t)$ — функция скачков, поэтому значения какой либо функции из $\mathfrak{K}$ на множестве $\bigcup_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l+1}, \frac{1}{l} \right)$ несущественны и, скажем, функции t и $-\delta'(t) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l}(\varphi_l(t) - \delta(t))$ представляют один и тот же элемент из $\mathfrak{K}$. Аналогичное замечание верно для пары функций t^2 и $\delta'(t) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \varphi_l(t) - \delta(t)$ и т. п. Оператор A_T после его замыкания задаётся равенствами

$$A_T \delta(t) = 0, \quad A_T \delta'(t) = -\delta(t), \quad A_T 1 = -\delta'(t) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l}(\varphi_l(t) - \delta(t)), \quad A_T \varphi_l(t) = \frac{1}{l} \varphi_l(t),$$

где $l = 1, 2, \dots$. Этим завершается описание модели оператора A из примера 4.2.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Самосопряжённые и унитарные операторы в пространствах Крейна — это, в целом, очень широкий класс операторов для того, чтобы его представители обладали таким набором свойств, которые были бы полезны при их использовании в смежных разделах теории операторов. Операторы, которые, наряду с самосопряжённостью, обладают инвариантным подпространством специального вида, имеют свойства, близкие к свойствам самосопряжённых операторов в пространстве Понтрягина, включая и возможность их модельного представления, что и было продемонстрировано в настоящей работе. Автор глубоко признателен доценту Д. А. Закоре, который много сделал для того, чтобы эта работа была написана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Линейные операторы в гильбертовых пространствах с G -метрикой // Усп. мат. наук. — 1971. — 26, № 4. — С. 43–92.
2. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой и их приложения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. — 1979. — 17. — С. 113–205
3. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
4. Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д. Введение в теорию пространств Понтрягина: Специальный курс лекций. — Симферополь: ТНУ, 2008.
5. Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д. Введение в теорию пространств Крейна: Специальный курс лекций. — Симферополь: ФОРМА, 2010.
6. Ароншайн Н. Квадратичные формы на векторных пространствах // Математика. — 1964. — 8, № 5. — С. 102–155.
7. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. — М.: Физматгиз, 1961.
8. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
9. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 3. Спектральные операторы. — М.: Мир, 1974.
10. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Физматлит, 2009.
11. Крейн М. Г., Лангер Г. К. О спектральной функции самосопряжённого оператора в пространстве с индефинитной метрикой // Докл. АН СССР. — 1963. — 152, № 1. — С. 39–42.
12. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. — М.: ФМЛ, 1960.
13. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. — СПб: Лань, 2009.
14. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1977.
15. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979.
16. Севастьянов В. А. Курс теории вероятностей и математической статистики. — М.: Наука, 1982.
17. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. — М.: Мир, 1970.
18. Штраус В. А. Модели унитарных и самосопряжённых операторов в пространствах Понтрягина // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2022. — 68, № 3. — С. 522–552.
19. Azizov T. Ya., Iokhvidov I. S. Linear operators in Hilbert spaces with G -metric // Russ. Math. Surv. — 1971. — 26, № 4. — С. 45–97.
20. Azizov T. Ya., Iokhvidov I. S. Linear operators in spaces with indefinite metric. — New York: Wiley, 1989.
21. Azizov T. Ya., Strauss V. A. Spectral decompositions for special classes of self-adjoint and normal operators on Krein spaces. Spectral Theory and its Applications // В сб.: «Proceedings dedicated to the 70-th birthday of Prof. I. Colojară». — Bucharest: Theta, 2003. — С. 45–67.
22. Azizov T. Ya., Strauss V. A. On a spectral decomposition of a commutative operator family in spaces with indefinite metric // Methods Funct. Anal. Topology — 2005. — 11, № 1. — С. 10–20.
23. Boas R. P. The Stieltjes moment problem for functions of bounded variation // Bull. Am. Math. Soc. — 1939. — 45. — С. 399–404.
24. Colojară I., Foiaş C. Theory of generalized spectral operators. — New York: Gordon and Breach, 1968.
25. Jonas P., Langer H., Textorius B. Models and unitary equivalence of cyclic selfadjoint operators in Pontrjagin spaces // В сб.: «Operator Theory and Complex Analysis». — Basel: Birkhauser, 1992. — С. 252–284.
26. Langer H. Spectraltheorie linearer Operatoren in J -räumen und einige Anwendungen auf die Shar $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C$. // Докт. дисс. — Dresden: Dresden Tech. Univ., 1965.
27. Langer H. Spectral functions of definitizable operators in Krein space // Lect. Notes Math. — 1982. — 948. — С. 1–46.
28. Navarro L. J., Strauss V. Some class of real sequences having indefinite Hankel forms. // Methods Funct. Anal. Topology. — 2011. — 17, № 1. — С. 65–74.

В. А. Штраус

Южно-Уральский государственный университет (Национальный исследовательский университет), Россия, Челябинск

E-mail: vstrauss@mail.ru

UDC 517.982+517.984.48

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-524-546

EDN: FOVYRO

Spectral decomposition of self-adjoint operators in Pontryagin and Krein spaces

V. A. Strauss

South Ural State University (national research university), Chelyabinsk, Russia

Abstract. We consider a self-adjoint operator acting in a Krein space and possessing an invariant subspace that is maximal nonnegative and decomposes into a direct sum of a uniformly positive (i.e., equivalent to a Hilbert space with respect to the inner pseudoscalar product) and a finite-dimensional neutral subspace. We prove the existence of a difference expression that transforms the moment sequence generated by this operator into a sequence representable as the difference of positive moment sequences. In the case of a cyclic operator, this result is applied to construct a function space in which the operator under study is modeled as the operator of multiplication by an independent variable.

Keywords: self-adjoint operator, Krein space, Pontryagin space, invariant subspace, spectral decomposition.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement No. 075-02-2025-1543.

For citation: V. A. Strauss, “Spectral decomposition of self-adjoint operators in Pontryagin and Krein spaces,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. 71, No. 3, 524–546. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-524-546>

REFERENCES

1. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, “Lineynye operatory v gil’bertovykh prostranstvakh s G -metrikoy” [Linear operators in Hilbert spaces with G -metric], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1971, **26**, No. 4, 43–92 (in Russian).
2. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, “Lineynye operatory v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy i ikh prilozheniya” [Linear operators in spaces with indefinite metric and their applications], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Mat. analiz* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1979, **17**, 113–205 (in Russian).
3. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Osnovy teorii lineynykh operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy* [Fundamentals of the Theory of Linear Operators in Spaces with Indefinite Metric], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
4. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevskiy, *Vvedenie v teoriyu prostranstv Pontryagina: Spetsial’nyy kurs lektsiy* [Introduction to the Theory of Pontryagin Spaces: A Special Course], TNU, Simferopol’, 2008 (in Russian).
5. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevskiy, *Vvedenie v teoriyu prostranstv Kreyna: Spetsial’nyy kurs lektsiy* [Introduction to the Theory of Krein Spaces: A Special Course], FORMA, Simferopol’, 2010 (in Russian).
6. N. Aronszajn, “Kvadratichnye formy na vektornykh prostranstvakh” [Quadratic forms on vector spaces], *Matematika* [Mathematics], 1964, **8**, No. 5, 102–155 (Russian translation).
7. N. I. Akhiezer, *Klassicheskaya problema momentov i nekotorye voprosy analiza, svyazannye s neyu* [The Classical Problem of Moments and Some Related Analytical Questions], Fizmatgiz, Moscow, 1961 (in Russian).
8. I. Ts. Gokhberg and M. G. Krein, *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov v gil’bertovom prostranstve* [Introduction to the Theory of Linear Non-Self-Adjoint Operators in Hilbert Space], Nauka, Moscow, 1965 (in Russian).

9. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Lineynye operatory. T. 3. Spektral'nye operatory* [Linear Operators, Pt. 3: Spectral Operators], Mir, Moscow, 1974 (Russian translation).
10. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis], Fizmatlit, Moscow, 2009 (in Russian).
11. M. G. Krein and G. K. Langer, "O spektral'noy funtsii samosopryazhennogo operatora v prostranstve s indefinitnoy metrikoy" [On the spectral function of a self-adjoint operator in a space with an indefinite metric], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1963, **152**, No. 1, 39–42 (in Russian).
12. R. G. Cooke, *Beskonechnye matritsy i prostranstva posledovatel'nostey* [Infinite Matrices and Sequence Spaces], FML, Moscow, 1960 (Russian translation).
13. A. I. Mal'tsev, *Osnovy lineynoy algebrы* [Fundamentals of Linear Algebra], Lan', SPb, 2009 (in Russian).
14. M. Reed and B. Simon, *Metody sovremennoy matematicheskoy fiziki. T. 1. Funktsional'nyy analiz* [Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 1. Functional analysis], Mir, Moscow, 1977 (Russian translation).
15. F. Riesz and B. Szőkefalvi-Nagy, *Lektsii po funktsional'nomu analizu* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1979 (Russian translation).
16. V. A. Sevast'yanov, *Kurs teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistiki* [Course in Probability Theory and Mathematical Statistics], Nauka, Moscow, 1982 (in Russian).
17. P. R. Halmos, *Gil'bertovo prostranstvo v zadachakh* [A Hilbert Space Problem Book], Mir, Moscow, 1970 (Russian translation).
18. V. A. Strauss, "Modeli unitarnykh i samosopryazhennykh operatorov v prostranstvakh Pontryagina" [Models of unitary and self-adjoint operators in Pontryagin spaces], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2022, **68**, No. 3, 522–552 (in Russian).
19. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, "Linear operators in Hilbert spaces with G -metric," *Russ. Math. Surv.*, 1971, **26**, No. 4, 45–97.
20. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Linear operators in spaces with indefinite metric*, Wiley, New York, 1989.
21. T. Ya. Azizov and V. A. Strauss, "Spectral decompositions for special classes of self-adjoint and normal operators on Krein spaces. Spectral Theory and its Applications," In: *Proceedings dedicated to the 70-th birthday of Prof. I. Colojoară*, Theta, Bucharest, 2003, pp. 45–67.
22. T. Ya. Azizov and V. A. Strauss, "On a spectral decomposition of a commutative operator family in spaces with indefinite metric," *Methods Funct. Anal. Topology*, 2005, **11**, No. 1, 10–20.
23. R. P. Boas, "The Stieltjes moment problem for functions of bounded variation," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1939, **45**, 399–404.
24. I. Colojoară and C. Foiaş, *Theory of generalized spectral operators*, Gordon and Breach, New York, 1968.
25. P. Jonas, H. Langer, and B. Textorius, "Models and unitary equivalence of cyclic selfadjoint operators in Pontryagin spaces," In: *Operator Theory and Complex Analysis*, Birkhauser, Basel, 1992, pp. 252–284.
26. H. Langer, "Spectraltheorie linearer Operatoren in J -räumen und einige Anwendungen auf die Shar $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C$," *Doctoral Thesis*, Dresden Tech. Univ., Dresden, 1965.
27. H. Langer, "Spectral functions of definitizable operators in Krein space," *Lect. Notes Math.*, 1982, **948**, 1–46.
28. L. J. Navarro and V. Strauss, "Some class of real sequences having indefinite Hankel forms," *Methods Funct. Anal. Topology*, 2011, **17**, No. 1, 65–74.

V. A. Strauss

South Ural State University (national research university), Chelyabinsk, Russia

E-mail: vstrauss@mail.ru