

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ



СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ
НАПРАВЛЕНИЯ

Том 71, № 3, 2025

Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.

Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Главный редактор

А. Л. Скубачевский,

д.ф.-м.н., профессор,
Российский университет
дружбы народов, Москва,
Россия

E-mail: skubachevskii-al@rudn.ru

Зам. главного редактора

А. Ю. Савин,

д.ф.-м.н., профессор,
Российский университет
дружбы народов, Москва,
Россия

E-mail: savin-ayu@rudn.ru

Ответственный секретарь

Е. М. Варфоломеев,

к.ф.-м.н.,
Российский университет
дружбы народов, Москва,
Россия

E-mail: varfolomeev-em@rudn.ru

Члены редакционной коллегии

А. А. Азгачев, д.ф.-м.н., профессор, Международная школа передовых исследований (SISSA), Триест, Италия; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

П. С. Красильников, д.ф.-м.н., профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

А. Б. Муравник, д.ф.-м.н., Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

А. В. Овчинников, к.ф.-м.н., доцент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва, Россия

В. Л. Попов, д.ф.-м.н., профессор, член-корр. РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

А. В. Сарычев, д.ф.-м.н., профессор, Флорентийский университет, Флоренция, Италия

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

4 выпуска в год

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Включен в Единый государственный перечень научных изданий («Белый список»)

Индексируется в РИНЦ и международных базах данных *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.

Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences (New York)*.

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты.

Правила оформления статей, архив публикаций в открытом доступе и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала: <http://journals.rudn.ru/cmfd>, <http://www.mathnet.ru/cmfd>.

Редактор: Е. М. Варфоломеев

Компьютерная верстка: Е. М. Варфоломеев

Адрес редакции:

115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Подписано в печать 29.09.2025. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.

Усл. печ. л. 23,25. Тираж 110 экз. Заказ 1279.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» (РУДН)

117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-08-61; e-mail: publishing@rudn.ru

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba



CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 71, No. 3, 2025

Proceedings of the Crimean Autumn Mathematical School-Symposium

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Founded in 2003

Founder: Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

EDITOR-IN-CHIEF

Alexander Skubachevskii,

RUDN University

Moscow, Russia

E-mail: skubachevskii-al@rudn.ru

DEPUTY EDITOR

Anton Savin,

RUDN University

Moscow, Russia

E-mail: savin-ayu@rudn.ru

EXECUTIVE SECRETARY

Evgeniy Varfolomeev,

RUDN University

Moscow, Russia

E-mail: varfolomeev-em@rudn.ru

EDITORIAL BOARD

Andrei Agrachev, International School for Advanced Studies (SISSA), Trieste, Italy; Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Pavel Krasil'nikov, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

Andrey Muravnik, RUDN University, Moscow, Russia

Alexey Ovchinnikov, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; Russian Institute for Scientific and Technical Information of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Vladimir Popov, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Andrei Sarychev, University of Florence, Florence, Italy

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Published by the Peoples' Friendship University of Russia
named after Patrice Lumumba, Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

4 issues per year

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Indexed by *Russian Index of Science Citation*, *MathSciNet*, *Zentralblatt Math*.

Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences (New York)*.

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results.

Guidelines for authors, free accessible archive of issues, and other information can be found at the journal's website: <http://journals.rudn.ru/cmfd>, <http://www.mathnet.ru/eng/cmfd>.

Editor: *E. M. Varfolomeev*
Computer design: *E. M. Varfolomeev*

Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Print run 110 copies.

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-08-61; e-mail: publishing@rudn.ru

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Безродных С. И., Пикулин С. В.</i> Об одном методе решения начально-краевой задачи для уравнения Гарднера	353
<i>Зеленчук П. А., Цибулин В. Г.</i> Моделирование эволюционных стратегий взаимодействующих популяций на неоднородном ареале	370
<i>Нескородев Р. Н., Зыза А. В.</i> Моделирование исследования вязкоупругого деформирования упругих тел	385
<i>Ноговищева В. Ю., Прокудин Д. А.</i> Существование и единственность решения начально-краевой задачи для одномерных уравнений динамики сжимаемой вязкой смеси	395
<i>Орлова Н. Р.</i> Формула Лефшеца для нелокальных эллиптических задач, ассоциированных с расслоением	417
<i>Переварюха А. Ю.</i> Непрерывная популяционная модель поколений с разрывными характеристиками жизненного цикла	443
<i>Рыхлов В. С.</i> Равносходимость разложений по корневым функциям дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье	452
<i>Ташипулатов С. М., Парманова Р. Т.</i> Второй четырехэлектронный синглет в примесной модели Хаббарда	478
<i>Цветков Д. О.</i> Колебания вязкой жидкости с инерционной свободной поверхностью	508
<i>Штраус В. А.</i> Спектральное разложение самосопряжённых операторов в пространствах Понтрягина и Крейна	524

CONTENTS

<i>Bezrodnykh S. I., Pikulin S. V.</i> On one method for solving the initial-boundary value problem for the Gardner equation	353
<i>Zelenchuk P. A., Tsybulin V. G.</i> Modeling of evolutionary strategies of interacting populations in a heterogeneous habitat	370
<i>Neskorodev R. N., Zyza A. V.</i> Modeling of the study of viscoelastic deformation of elastic bodies	385
<i>Nogovishcheva V. Yu., Prokudin D. A.</i> Existence and uniqueness of the solution of the initial-boundary value problem for one-dimensional equations of the dynamics of a compressible viscous mixture	395
<i>Orlova N. R.</i> Lefschetz formula for nonlocal elliptic problems associated with fibration	417
<i>Perevaryukha A. Yu.</i> Continuous generation population model with discontinuous life cycle characteristics	443
<i>Rykhlov V. S.</i> Equiconvergence of expansions in root functions of a differential operator and in a trigonometric Fourier series	452
<i>Tashpulatov S. M., Parmanova R. T.</i> The second four-electron singlet in the Hubbard impurity model	478
<i>Tsvetkov D. O.</i> Oscillations of a viscous fluid with an inertial free surface	508
<i>Strauss V. A.</i> Spectral decomposition of self-adjoint operators in Pontryagin and Krein spaces .	524

УДК 517.956.4, 519.633

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-353-369

EDN: FAKSTK

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГАРДНЕРА

С. И. Безродных, С. В. Пикулин

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается вопрос об эффективном решении начально-краевой задачи для уравнения Гарднера — пространственно одномерного нелинейного эволюционного уравнения, описывающего широкий класс дисперсионных автоволновых процессов. В работе предложен численно-аналитический метод, основанный на сочетании явной и неявной схемы дискретизации по времени для различных членов дифференциального оператора. Для решения последовательности вспомогательных линейных задач разработан новый эффективный алгоритм, опирающийся на аналитические представления с использованием явного вида фундаментальной системы решений. Рассмотрен пример численного решения начально-краевой задачи для уравнения Гарднера и проведено сопоставление результата с известным точным решением типа уединенной бегущей волны.

Ключевые слова: уравнение Гарднера, эффективный численно-аналитический метод, функция Грина, явно-неявная схема.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: С. И. Безродных, С. В. Пикулин. Об одном методе решения начально-краевой задачи для уравнения Гарднера // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 3. С. 353–369. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-353-369>

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Начально-краевая задача для уравнения Гарднера. Будем рассматривать начально-краевую задачу для квазилинейного эволюционного уравнения в прямоугольнике $x \in [0, L]$, $t \in [0, T]$, заданного нелинейным оператором $\Xi[u](x, t)$, следующего вида:

$$\Xi[u] := \partial_t u + (\alpha u + \beta u^2) \partial_x u + \gamma \partial_{xxx}^3 u = f(x, t), \quad u = u(x, t), \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, T], \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (1.2)$$

$$u(0, t) = \varphi_0(t), \quad u(L, t) = \psi_0(t), \quad \partial_x u(L, t) = \psi_1(t), \quad (1.3)$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$. При $\beta = 0$ уравнение (1.1) превращается в уравнение Кортевега—де-Фриза [5]. В общем виде уравнение (1.1) может быть сведено к уравнению Кортевега—де-Фриза при помощи преобразования Миуры [20, 21]. Вопросы разрешимости начально-краевых задач для уравнения Кортевега—де-Фриза изучены, например, в работе [17].

Уравнение (1.1), называемое *уравнением Гарднера*, описывает волновые процессы в многокомпонентных стратифицированных жидкостях, в том числе внутренние волны в океане [15, 16], волны перепада уровня на мелкой воде — т. н. боры, или дисперсионные ударные волны [19], волны в конденсированной квантовой жидкости [14], а также ионно-звуковые волны в плазме [22, 24]. Отметим, что различные постановки задач для уравнения (1.1) привлекают внимание специалистов по численному анализу как содержательный пример для верификации различных вычислительных алгоритмов, см. [10], а также [11, 13, 23, 25].

Как правило, при численном решении нелинейных эволюционных уравнений отыскание искомой аппроксимации сводится к серии вспомогательных линейных задач (см., например, [8]). Поэтому при построении таких численных алгоритмов следует использовать адекватную решаемой задаче процедуру приближения нелинейного дифференциального оператора, а также опираться на достаточно точный и эффективный метод решения получаемых вспомогательных линейных задач.

Настоящая работа является продолжением исследований [3, 4] по разработке вычислительных алгоритмов решения начально-краевых нелинейных параболических задач, применимых, в том числе, для уравнений типа Колмогорова—Петровского—Пискунова и Бюргерса. В разделе 2 развита аналитико-численный алгоритм решения начально-краевой задачи (1.1)–(1.3), в основе которого лежит сочетание явной экстраполяции по времени нелинейного слагаемого $(\alpha u + \beta u^2) \partial_x u$ в левой части уравнения (1.1) и неявной аппроксимации его линейных членов в соответствии с модифицированной схемой Кранка—Николсон [12].

Новизна разработанного в разделе 2 численного алгоритма для уравнения (1.1) заключается в предложенном методе решения вспомогательных линейных задач. Решения этих задач мы строим в полуаналитическом виде с использованием явного вида частных решений линейного уравнения и его фундаментальной системы решений. Применяемый метод позволяет эффективно решать возникающие линейные краевые задачи с алгоритмической сложностью $O(K)$, где K — число отрезков дискретизации по пространственной переменной. Отметим также, что близкий подход использовался в работе [2] при решении сингулярно возмущенной краевой задачи, возникающей в теории полупроводниковых приборов [1].

В разделе 3 предложенный метод проиллюстрирован с помощью численной реализации для начально-краевой задачи о распространении солитона «большой амплитуды» (см. [7]) при отрицательном значении коэффициента β в уравнении (1.1). Полученные при сопоставлении численного результата с явным аналитическим решением данные подтверждают высокую точность и эффективность предложенного метода.

1.2. Общая схема вычислительного алгоритма. Зададим равномерную дискретизацию временного отрезка $[0, T]$ с шагом $\tau = T/N$, $N \in \mathbb{N}$ и введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} u_n(x) &\approx u(x, t_n), & x &\in [0, L], & t_n &= n\tau, & n &= 0, \dots, N, \\ F_n(x) &:= (\alpha u_n(x) + \beta u_n^2(x)) \frac{d}{dx} u_n(x), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $u_n(x)$ — искомое приближенное решение задачи (1.1)–(1.3) в момент времени $t = t_n$, причем функция $u_0(x)$ задана начальным условием (1.2). Будем вычислять приближения $u_n(x)$ последовательно при $n = 1, \dots, N$.

Для получения функции $u_1(x)$ из $u_0(x)$ можно воспользоваться любой двухслойной вычислительной схемой, например, явно-неявной схемой на основе приближения Кранка—Николсон [8]. В настоящей работе при сопоставлении численных результатов с явным решением в разделе 3 функция $u_1(x)$ и ее производные по x задаются в качестве известных величин наряду с начальными данными (1.2).

Предполагая, что приближенные значения $u(x, t)$ известны на первых n слоях, т. е. заданы функции

$$u_0(x), \quad u_1(x), \quad \dots, \quad u_n(x),$$

найдем приближение на $(n+1)$ -м слое, т. е. функцию $u_{n+1}(x)$. Для этого будем использовать следующую аппроксимацию нелинейного дифференциального оператора $\Xi[u]$ из (1.1), центрированную в точке $t = t_n + \tau/2$, на основе трехслойной явно-неявной схемы [12, 18]:

$$\begin{aligned} \Xi[u] = \partial_t u + (\alpha u + \beta u^2) \partial_x u + \gamma \partial_{xxx}^3 u \approx & \frac{u_{n+1}(x) - u_n(x)}{\tau} + \frac{3}{2} F_n(x) - \frac{1}{2} F_{n-1}(x) + \\ & + \frac{9}{16} \gamma \frac{d^3}{dx^3} u_{n+1}(x) + \frac{3}{8} \gamma \frac{d^3}{dx^3} u_n(x) + \frac{1}{16} \gamma \frac{d^3}{dx^3} u_{n-1}(x); \end{aligned} \quad (1.5)$$

здесь для нелинейного члена применена явная экстраполяция Адамса–Бэшфорта, а линейное слагаемое со старшей производной приближено по модифицированной схеме Кранка–Николсон [12].

Подставляя приближение (1.5) в уравнение (1.1), получаем уравнение относительно значений искомой аппроксимации $u_{n+1}(x)$ на $(n+1)$ -м слое:

$$\frac{9}{16} \tau \gamma \frac{d^3}{dx^3} u_{n+1}(x) + u_{n+1}(x) = g_{n+1}(x), \quad (1.6)$$

где правая часть определяется по формуле

$$g_{n+1}(x) = u_n(x) - \frac{3}{8} \tau \gamma \frac{d^3}{dx^3} u_n - \frac{1}{16} \tau \gamma \frac{d^3}{dx^3} u_{n-1} - \tau \left(\frac{3}{2} F_n(x) - \frac{1}{2} F_{n-1}(x) \right). \quad (1.7)$$

Используя уравнения вида (1.6), отвечающие индексам n , $n-1$, перепишем выражение (1.7) следующим образом:

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= u_n(x) + \frac{2}{3} (u_n(x) - g_n(x)) + \frac{1}{9} (u_{n-1}(x) - g_{n-1}(x)) + \tau \left(\frac{3}{2} F_n(x) - \frac{1}{2} F_{n-1}(x) \right) = \\ &= \frac{5}{3} u_n(x) + \frac{1}{9} u_{n-1}(x) - \frac{2}{3} g_n(x) - \frac{1}{9} g_{n-1}(x) + \tau \left(\frac{3}{2} F_n(x) - \frac{1}{2} F_{n-1}(x) \right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Отметим, что правая часть (1.7) уравнения (1.6) зависит только от функций, уже вычисленных на предыдущих шагах алгоритма. Кроме того, форма (1.8) представления $g_{n+1}(x)$ исключает явную зависимость этой правой части от старших производных функций $u_j(x)$, $j = 0, \dots, n-1$, хотя их первые производные входят в выражения (1.4) для нелинейных членов $F_n(x)$, $F_{n-1}(x)$.

Уравнение (1.6), (1.8) дополняется краевыми условиями

$$u_{n+1}(0) = \varphi_0(t_{n+1}), \quad u_{n+1}(L) = \psi_0(t_{n+1}), \quad \frac{du}{dx}(L) = \psi_1(t_{n+1}) \quad (1.9)$$

в соответствии с условиями (1.3) исходной задачи.

Таким образом, решение исходной нелинейной задачи (1.1)–(1.3) сведено к последовательному решению линейной задачи (1.6), (1.8), (1.9) с изменяющимися на каждом шаге алгоритма правой частью $g_{n+1}(x)$ и граничными значениями в (1.9). В следующем разделе 2 представлен численно-аналитический метод, позволяющий эффективно вычислять решение основной линейной задачи (1.6), (1.8), (1.9).

2. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОСНОВНОЙ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Для удобства изложения предлагаемого метода решения краевой задачи (1.6), (1.8), (1.9) перепишем уравнение (1.6) в новых обозначениях:

$$\mathcal{L}[y](x) \equiv \frac{1}{\omega^3} \frac{d^3 y}{dx^3} + y(x) = g(x), \quad \omega > 0, \quad x \in [0, L], \quad (2.1)$$

а краевые условия (1.9) — в виде

$$y(0) = \Phi_0, \quad y(L) = \Psi_0, \quad \frac{dy}{dx}(L) = \Psi_1. \quad (2.2)$$

Нетрудно убедиться в том, что следующий набор функций составляет фундаментальную систему решений уравнения (2.1)

$$\mathcal{F}_1(x) := e^{\mu x}, \quad \mathcal{F}_2(x) := e^{\rho x}, \quad \mathcal{F}_3(x) := e^{\bar{\rho} x} \quad (2.3)$$

где $\mu, \rho, \bar{\rho}$ — корни характеристического уравнения $\lambda^3/\omega^3 + 1 = 0$:

$$\lambda_1 =: \mu = -\omega, \quad \lambda_2 =: \rho = \omega \epsilon, \quad \lambda_3 =: \bar{\rho} = \omega \epsilon^{-1}, \quad \epsilon := e^{\pi i/3} = \sqrt[3]{-1}; \quad (2.4)$$

при этом $\mathcal{F}_1(x)$ является вещественной, а $\mathcal{F}_2(x)$ и $\mathcal{F}_3(x)$ — комплексными функциями. Нам потребуются следующие соотношения между величинами μ и ρ :

$$\rho \bar{\rho} = \omega^2, \quad \rho^2 = -\omega \bar{\rho}, \quad \bar{\rho}^2 = -\omega \rho, \quad \rho - \bar{\rho} = \omega \sqrt{3} i, \quad \rho - \mu = \omega \sqrt{3} e^{\pi i/6} = i \sqrt{3} \bar{\rho}. \quad (2.5)$$

$$\mu + \rho + \bar{\rho} = \omega(-1 + \epsilon + \bar{\epsilon}) = 0 = \omega^2(1 - \bar{\epsilon} - \epsilon) = \mu^2 + \rho^2 + \bar{\rho}^2. \quad (2.6)$$

Введем на отрезке $[0, L]$ сетку, образованную узлами

$$0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_K = L \quad (2.7)$$

и обозначим через $\mathcal{P}_m$ пространство многочленов от переменной x степени не выше $m \geq 0$ ($\dim \mathcal{P}_m = m + 1$). Будем предполагать, что правая часть $g(x)$ уравнения (2.1) является кусочно полиномиальной функцией, совпадающей на каждом из интервалов $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ с некоторым полиномом $f_k(x)$, т. е. справедливы соотношения

$$g(x)|_{[\xi_{k-1}, \xi_k]} =: f_k(x) \in \mathcal{P}_m, \quad k = 1, \dots, K. \quad (2.8)$$

Функция (2.8), вообще говоря, может иметь разрывы в точках ξ_k . Решение $y(x)$ уравнения (2.1) с такой правой частью будем искать в классе $C^2[0, L]$, понимая решение уравнения в смысле выполнения интегрального тождества, эквивалентного (2.1) (см. [9]).

Предлагаемый численный алгоритм решения задачи (2.1), (2.2) состоит из двух этапов. На первом этапе (см. п. 2.1) построим частные решения уравнения (2.1) отдельно на каждом из промежутков пространственного разбиения (2.7). На втором этапе (см. п. 2.2) с помощью этих частных решений получим решение краевой задачи (2.1), (2.2) на всем отрезке интегрирования $x \in [0, L]$.

2.1. Построение частных решений на отрезках разбиения. Построим частное решение уравнения (2.1) с правой частью вида (2.8) на k -м отрезке разбиения (2.7) при помощи интегрального представления

$$\tilde{y}_k(x) = \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} f_k(\xi) \mathcal{E}(x, \xi) d\xi, \quad x \in [\xi_{k-1}, \xi_k], \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.9)$$

где функция $f_k(\xi)$ задана равенством (2.8), а через $\mathcal{E}(x, \xi)$ обозначено фундаментальное решение уравнения (2.1), т. е. решение уравнения

$$\mathcal{L}[\mathcal{E}(x, \xi)] = \delta(x - \xi); \quad (2.10)$$

здесь $\xi \in \mathbb{R}$ — параметр, а $\delta(\cdot)$ — функция Дирака.

Утверждение 2.1. *Функция*

$$\mathcal{E}(x, \xi) = \frac{1}{3} \begin{cases} -\mu e^{\mu(x-\xi)}, & \xi \leq x, \\ \rho e^{\rho(x-\xi)} + \bar{\rho} e^{\bar{\rho}(x-\xi)}, & \xi > x \end{cases} \quad (2.11)$$

является фундаментальным решением уравнения (2.1), т. е. удовлетворяет равенству (2.10) при всех $\xi \in \mathbb{R}$.

Отметим, что функция (2.11) является вещественной и экспоненциально убывает с ростом расстояния $|x - \xi|$.

Доказательство. Фундаментальное решение (2.11) может быть получено следующим образом (см. [4, 6]). Образует из функций фундаментальной системы решений (2.3) и их производных матрицу

$$\mathbf{D}(x) := \begin{pmatrix} e^{\mu x} & e^{\rho x} & e^{\bar{\rho} x} \\ \mu e^{\mu x} & \rho e^{\rho x} & \bar{\rho} e^{\bar{\rho} x} \\ \mu^2 e^{\mu x} & \rho^2 e^{\rho x} & \bar{\rho}^2 e^{\bar{\rho} x} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \times \text{diag}(e^{\mu x}, e^{\rho x}, e^{\bar{\rho} x}), \quad (2.12)$$

где постоянная матрица $\mathbf{M}$ имеет вид

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu & \rho & \bar{\rho} \\ \mu^2 & \rho^2 & \bar{\rho}^2 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, \omega, \omega^2) \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \epsilon & \bar{\epsilon} \\ 1 & -\bar{\epsilon} & -\epsilon \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Первую строку матрицы $\mathbf{D}(x)$ составляют функции (2.3), вторую и третью строки — соответственно первые и вторые производные этих функций. Здесь и далее $\text{diag}(\cdot, \cdot, \cdot)$ означает диагональную матрицу с указанными элементами на главной диагонали. Обратим матрицу (2.12) и запишем результат, заменяя независимую переменную x на ξ :

$$\mathbf{D}^{-1}(\xi) = \text{diag}(e^{-\mu\xi}, e^{-\rho\xi}, e^{-\bar{\rho}\xi}) \times \mathbf{M}^{-1},$$

где

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \bar{\epsilon} & -\epsilon \\ 1 & \epsilon & -\bar{\epsilon} \end{pmatrix} \times \text{diag}(1, \omega^{-1}, \omega^{-2}). \quad (2.14)$$

Тогда произведение

$$\mathbf{G}(x, \xi) := \mathbf{D}(x) \times \mathbf{D}^{-1}(\xi) = \mathbf{M} \times \text{diag}(e^{\mu(x-\xi)}, e^{\rho(x-\xi)}, e^{\bar{\rho}(x-\xi)}) \times \mathbf{M}^{-1} \quad (2.15)$$

обращается в единичную матрицу $\mathbf{E}$ при $x = \xi$, т. е.

$$\mathbf{G}(x, \xi) \Big|_{x=\xi} = \mathbf{E}, \quad x, \xi \in \mathbb{R}, \quad (2.16)$$

причем вторая и третья строки матрицы-функции $\mathbf{G}(x, \xi)$ являются в силу построения (2.15) соответственно первой и второй производной по x от ее первой строки, поскольку тем же свойством обладает матрица-функция $\mathbf{G}(x)$.

Из (2.16) следует, что матричный элемент

$$G_{(1)}^{(3)}(x, \xi) = \frac{1}{3\omega^2} (e^{\mu(x-\xi)} - \epsilon e^{\rho(x-\xi)} - \bar{\epsilon} e^{\bar{\rho}(x-\xi)}), \quad (2.17)$$

занимающий правый верхний угол матрицы (2.15), удовлетворяет равенствам

$$G_{(1)}^{(3)}(x, \xi) \Big|_{x=\xi} = \frac{d}{dx} G_{(1)}^{(3)}(x, \xi) \Big|_{x=\xi} = 0, \quad \frac{d^2}{dx^2} G_{(1)}^{(3)}(x, \xi) \Big|_{x=\xi} = 1,$$

откуда получаем, что функция

$$\mathcal{E}_0(x, \xi) := \omega^3 G_{(1)}^{(3)}(x, \xi) \theta(x - \xi) \quad (2.18)$$

является фундаментальным решением уравнения (2.1); здесь $\theta(\cdot)$ — функция Хевисайда.

Покажем, что функция (2.11) отличается от $\mathcal{E}_0(x, \xi)$ прибавлением линейной комбинации функций $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_3$, принадлежащих фундаментальной системе (2.3) и, следовательно, также удовлетворяет условию (2.10). В самом деле, из (2.17), (2.18) с учетом равенств (2.5) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0(x, \xi) + \frac{\omega\epsilon}{3} \mathcal{F}_2 + \frac{\omega\bar{\epsilon}}{3} \mathcal{F}_3 &= \mathcal{E}_0(x, \xi) + \frac{\omega}{3} (\epsilon e^{\rho(x-\xi)} + \bar{\epsilon} e^{\bar{\rho}(x-\xi)}) = \\ &= \frac{\omega}{3} \begin{cases} e^{\mu(x-\xi)}, & x \geq \xi \\ \epsilon e^{\rho(x-\xi)} + \bar{\epsilon} e^{\bar{\rho}(x-\xi)}, & x < \xi \end{cases} = \mathcal{E}(x, \xi). \end{aligned}$$

Утверждение доказано. $\square$

Частное решение $\tilde{y}_k(x)$ уравнения (2.1) на отрезке $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ может быть вычислено по формулам (2.9), (2.11) путем численного интегрирования на основе квадратурных формул. Для случая кусочно полиномиальной правой части $g(x)$ этого уравнения, имеющей вид (2.8), проведем такое вычисление в явном виде.

Подставляя фундаментальное решение $\mathcal{E}(x, \xi)$ в виде (2.11) в интегральное представление (2.9), находим

$$\tilde{y}_k(x) = \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} f_k(\xi) \mathcal{E}(x, \xi) d\xi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \left(-\mu \int_{\xi_{k-1}}^x e^{\mu(x-\xi)} f_k(\xi) d\xi + \rho \int_x^{\xi_k} e^{\rho(x-\xi)} f_k(\xi) d\xi + \bar{\rho} \int_x^{\xi_k} e^{\bar{\rho}(x-\xi)} f_k(\xi) d\xi \right) = \\
&= \frac{1}{3} \left(\mu \int_x^{\xi_{k-1}} e^{\mu(x-\xi)} f_k(\xi) d\xi + \rho \int_x^{\xi_k} e^{\rho(x-\xi)} f_k(\xi) d\xi + \bar{\rho} \int_x^{\xi_k} e^{\bar{\rho}(x-\xi)} f_k(\xi) d\xi \right). \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Для того, чтобы вычислить интегралы, стоящие в правой части равенства (2.19), рассмотрим следующую более общую ситуацию. Предположим, что заданы некоторый многочлен $f(x) \in \mathcal{P}_m$ степени $m \geq 0$ и число $\nu \in \mathbb{C}$, $\nu \neq 0$, и найдем первообразную функции $e^{-\nu x} f(x)$. Применяя несколько раз интегрирование по частям, получим

$$\int e^{-\nu x} f(x) dx = -\frac{e^{-\nu x}}{\nu} \sum_{j=0}^m \frac{1}{\nu^j} \frac{d^j}{dx^j} f(x) + C = -\frac{e^{-\nu x}}{\nu} \left\{ \sum_{j=0}^m \left(\frac{1}{\nu} \mathcal{D}(m) \right)^j \right\} f(x) + C, \quad (2.20)$$

где через $\mathbf{1}_{m+1}$ обозначен тождественный оператор в пространстве $\mathcal{P}_m$, а через $\mathcal{D}_m$ — оператор дифференцирования по x , действующий в этом же линейном пространстве, т. е.

$$\mathcal{D}(m) : \mathcal{P}_m \rightarrow \mathcal{P}_m, \quad f \xrightarrow{\mathcal{D}(m)} \frac{df}{dx}, \quad f(x), \frac{df}{dx} \in \mathcal{P}_m. \quad (2.21)$$

Отметим, что оператор (2.21) является нильпотентным:

$$\forall f \in \mathcal{P}_m : \quad \frac{d^{m+1}f}{dx^{m+1}} = 0 \quad \implies \quad (\mathcal{D}(m))^{m+1} = 0. \quad (2.22)$$

Используя свойство (2.22), перепишем формулу (2.20) в виде

$$\int e^{-\nu x} f(x) dx = -\frac{e^{-\nu x}}{\nu} \left\{ \mathbf{1}_{m+1} - \frac{1}{\nu} \mathcal{D}(m) \right\}^{-1} f(x) + C, \quad C = \text{const}. \quad (2.23)$$

Отметим, что входящее в правую часть формулы (2.23) выражение

$$F(x; \nu)[f] := \left\{ \mathbf{1}_m - \frac{1}{\nu} \mathcal{D}(m) \right\}^{-1} f(x) \quad (2.24)$$

также задает многочлен из пространства $\mathcal{P}_m$.

Вычислим, исходя из (2.23), определенный интеграл от функции $e^{-\nu \xi} f(\xi)$ в пределах от x до Ξ , где $x, \Xi \in \mathbb{R}$ — некоторые числа, пользуясь формулой Ньютона—Лейбница:

$$\begin{aligned}
\int_x^\Xi e^{-\nu \xi} f(\xi) d\xi &= \left[-\frac{e^{-\nu \xi}}{\nu} F(\xi; \nu) \right]_{\xi=x}^{\xi=\Xi} = \frac{1}{\nu} \left(e^{-\nu x} F(x; \nu) - e^{-\nu \Xi} F(\Xi; \nu) \right) = \\
&= \frac{1}{\nu e^{\nu x}} \left(F(x; \nu) - F(\Xi; \nu) e^{\nu(x-\Xi)} \right); \quad (2.25)
\end{aligned}$$

здесь в выражениях $F(\cdot; \nu)[f]$ для простоты опущен параметр f .

Введем следующее обозначение:

$$\mathcal{J}(x; \nu, \Xi)[f] := \nu e^{\nu x} \int_x^\Xi e^{-\nu \xi} f(\xi) d\xi. \quad (2.26)$$

Тогда с учетом формулы (2.25) имеем

$$\mathcal{J}(x; \nu, \Xi)[f] = F(x; \nu)[f] - F(\Xi; \nu)[f] e^{\nu(x-\Xi)}. \quad (2.27)$$

Введем также обозначения для выражений (2.24) и (2.26) при $f = f_k(\xi)$:

$$F_k(x; \nu) := F(x; \nu)[f_k] \equiv \left\{ \mathbf{1}_{m+1} - \frac{1}{\nu} \mathcal{D}(m) \right\}^{-1} f_k(x), \quad F_k(x; \nu) \in \mathcal{P}_m, \quad (2.28)$$

$$\mathcal{J}_k(x; \nu, \Xi) := \mathcal{J}(x; \nu, \Xi)[f_k] = F_k(x; \nu) - F_k(\Xi; \nu) e^{\nu(x-\Xi)}. \quad (2.29)$$

Вычислим интегралы в правой части равенства (2.19) по формуле (2.25) при $f = f_k$ и $\nu = \mu$ или $\nu = \rho$. Используя введенные обозначения (2.24) (2.26), (2.28), (2.29), получим

$$\tilde{y}_k(x) = \frac{1}{3} (\mathcal{J}_k(x; \mu, \xi_{k-1}) + \mathcal{J}_k(x; \rho, \xi_k) + \mathcal{J}_k(x; \bar{\rho}, \xi_k)), \quad x \in [\xi_{k-1}, \xi_k]. \quad (2.30)$$

Найдем первую и вторую производные полученного частного решения (2.30) уравнения (2.1) на отрезке $[\xi_{k-1}, \xi_k]$. Для этого сначала продифференцируем по x выражение (2.26):

$$\frac{d}{dx} \mathcal{J}(x; \nu, \Xi)[f] = \nu^2 e^{\nu x} \int_x^{\Xi} e^{-\nu \xi} f(\xi) d\xi - \nu e^{\nu x} e^{-\nu x} f(x) = \nu \mathcal{J}(x; \nu, \Xi)[f] - \nu f(x). \quad (2.31)$$

Дифференцируя по x равенство (2.30), с учетом формул (2.31) и (2.6) находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tilde{y}_k(x) &= \frac{1}{3} \left(\frac{d}{dx} \mathcal{J}_k(x; \mu, \xi_{k-1}) + \frac{d}{dx} \mathcal{J}_k(x; \rho, \xi_k) + \frac{d}{dx} \mathcal{J}_k(x; \bar{\rho}, \xi_k) \right) = \\ &= \frac{1}{3} (\mu \mathcal{J}_k(x; \mu, \xi_{k-1}) + \rho \mathcal{J}_k(x; \rho, \xi_k) + \bar{\rho} \mathcal{J}_k(x; \bar{\rho}, \xi_k)) - \frac{1}{3} (\mu + \rho + \bar{\rho}) f_k(x) = \\ &= \frac{1}{3} (\mu \mathcal{J}_k(x; \mu, \xi_{k-1}) + \rho \mathcal{J}_k(x; \rho, \xi_k) + \bar{\rho} \mathcal{J}_k(x; \bar{\rho}, \xi_k)). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Повторно дифференцируя по x полученное выражение (2.32), аналогичным образом находим

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \tilde{y}_k(x) &= \frac{1}{3} (\mu^2 \mathcal{J}_k(x; \mu, \xi_{k-1}) + \rho^2 \mathcal{J}_k(x; \rho, \xi_k) + \bar{\rho}^2 \mathcal{J}_k(x; \bar{\rho}, \xi_k)) - \frac{1}{3} (\mu^2 + \rho^2 + \bar{\rho}^2) f_k(x) = \\ &= \frac{1}{3} (\mu^2 \mathcal{J}_k(x; \mu, \xi_{k-1}) + \rho^2 \mathcal{J}_k(x; \rho, \xi_k) + \bar{\rho}^2 \mathcal{J}_k(x; \bar{\rho}, \xi_k)). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$\tilde{\mathbf{y}}_k(x) := \left(\tilde{y}_k(x), \frac{d\tilde{y}_k}{dx}(x), \frac{d^2\tilde{y}_k}{dx^2}(x) \right)^T; \quad (2.34)$$

здесь и далее $(\cdot)^T$ означает матричное транспонирование. Тогда равенства (2.30), (2.32), (2.33) принимают вид одного векторного соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_k(x) &= \frac{1}{3} \left\{ \mathcal{J}_k(x; \mu, \xi_{k-1}) (1, \mu, \mu^2)^T + \mathcal{J}_k(x; \rho, \xi_k) (1, \rho, \rho^2)^T + \mathcal{J}_k(x; \bar{\rho}, \xi_k) (1, \bar{\rho}, \bar{\rho}^2)^T \right\} = \\ &= \frac{1}{3} \mathbf{M} \times (\mathcal{J}_k(x; \mu, \xi_{k-1}), \mathcal{J}_k(x; \rho, \xi_k), \mathcal{J}_k(x; \bar{\rho}, \xi_k))^T, \quad x \in [\xi_{k-1}, \xi_k], \end{aligned} \quad (2.35)$$

где матрица $\mathbf{M}$ имеет вид (2.13). Таким образом, искомое частное решение (2.9) уравнения (2.1) с полиномиальной правой частью на отрезке $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ построено в виде (2.30) и, вместе с первыми двумя производными, — в векторном виде (2.35).

Для дальнейшего изложения вычислительного алгоритма нам потребуется найти значения вектора (2.35) в концах отрезка $[\xi_{k-1}, \xi_k]$. Для того, чтобы их получить, воспользуемся тождеством

$$\mathcal{J}(\Xi; \nu, \Xi)[f] = 0, \quad \Xi \in \mathbb{R}, \quad \nu \neq 0, \quad f \in \mathcal{P}_m, \quad (2.36)$$

которое непосредственно вытекает из определения (2.26). Подставляя последовательно $x = \xi_{k-1}$ и $x = \xi_k$ в формулу (2.35), с учетом (2.36) находим

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_k(\xi_k) &= \frac{1}{3} \mathbf{M} \times (\mathcal{J}_k(\xi_k; \mu, \xi_{k-1}), 0, 0)^T, \quad k = 1, \dots, K, \\ \tilde{\mathbf{y}}_k(\xi_{k-1}) &= \frac{1}{3} \mathbf{M} \times (0, \mathcal{J}_k(\xi_{k-1}; \rho, \xi_k), \mathcal{J}_k(\xi_{k-1}; \bar{\rho}, \xi_k))^T. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Последнее равенство запишем, производя подстановку $k \mapsto (k+1)$, в следующем виде:

$$\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}(\xi_k) = \frac{1}{3} \mathbf{M} \times (0, \mathcal{J}_{k+1}(\xi_k; \rho, \xi_{k+1}), \mathcal{J}_{k+1}(\xi_k; \bar{\rho}, \xi_{k+1}))^T, \quad k = 0, \dots, K-1. \quad (2.38)$$

Таким образом, приходим к следующему результату.

Утверждение 2.2. Уравнение (2.1) с кусочно-полиномиальной правой частью (2.8) имеет на каждом отрезке $[\xi_{k-1}, \xi_k]$, $k = 1, \dots, K$, частное решение $\tilde{y}_k(x)$ вида (2.30), где выражения $\mathcal{J}_k(x; \cdot, \cdot)$ даны формулами (2.29), (2.28). Вектор (2.34), составленный из производных функции $\tilde{y}_k(x)$, может быть найден по формуле (2.35). Значения таких векторов в узлах ξ_k находятся по формулам (2.37), (2.38).

2.2. Решение линейной краевой задачи на отрезке. Построим решение краевой задачи (2.1), (2.2), (2.8), предполагая, что на отрезках $[\xi_{k-1}, \xi_k]$, разбиения (2.7) заданы какие-либо вещественнозначные частные решения $\tilde{y}_k(x) \in C^2[\xi_{k-1}, \xi_k]$ уравнения (2.1), (2.8):

$$\mathcal{L}[\tilde{y}_k](x) = f_k(x), \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, \dots, K. \quad (2.39)$$

Для этих частных решений мы сохраняем обозначение $\tilde{y}_k(x)$ из предыдущего пункта, не полагая при этом, что они обязательно заданы формулой (2.9). Как и выше, будем обозначать через $\tilde{\mathbf{y}}_k(x)$ вектор-функцию (2.34).

Определим для каждого отрезка $[\xi_{k-1}, \xi_k]$, $k = 1, \dots, K$, разбиения (2.7) фундаментальную систему решений уравнения (2.1), элементы которой запишем в виде строки

$$\mathbf{d}_k(x) := (e^{\mu(x-\xi_{k-1})}, e^{\rho(x-\xi_k)}, e^{\bar{\rho}(x-\xi_k)}). \quad (2.40)$$

Дополняя строку (2.40) ее первой и второй производной по x , образуем по аналогии с матрицей (2.12) матрицу

$$\mathbf{D}_k(x) := \begin{pmatrix} e^{\mu(x-\xi_{k-1})} & e^{\rho(x-\xi_k)} & e^{\bar{\rho}(x-\xi_k)} \\ \mu e^{\mu(x-\xi_{k-1})} & \rho e^{\rho(x-\xi_k)} & \bar{\rho} e^{\bar{\rho}(x-\xi_k)} \\ \mu^2 e^{\mu(x-\xi_{k-1})} & \rho^2 e^{\rho(x-\xi_k)} & \bar{\rho}^2 e^{\bar{\rho}(x-\xi_k)} \end{pmatrix} = \quad (2.41)$$

$$= \mathbf{M} \times \text{diag}(e^{\mu(x-\xi_{k-1})}, e^{\rho(x-\xi_k)}, e^{\bar{\rho}(x-\xi_k)}), \quad (2.42)$$

где постоянная матрица $\mathbf{M}$ дана формулой (2.13); здесь и далее знак $\times$ обозначает матричное умножение.

Обозначим через $\hat{y}(x)$ искомое решение краевой задачи (2.1), (2.2), (2.8), а через $\hat{\mathbf{y}}(x)$ — вектор производных порядка 0, 1, 2 от $\hat{y}(x)$ по аналогии с (2.34). На каждом из отрезков $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ это решение имеет вид

$$\hat{y}(x) = \tilde{y}_k(x) + \mathbf{d}_k(x) \times \mathbf{h}_k, \quad (2.43)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(x) = \tilde{\mathbf{y}}_k(x) + \mathbf{D}_k(x) \times \mathbf{h}_k, \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.44)$$

где

$$\mathbf{h}_k \equiv (a_k, b_k, c_k)^T, \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.45)$$

— некоторый постоянный вектор-столбец коэффициентов, элементы которого будут найдены далее, а строка $\mathbf{d}_k(x)$ и матрица $\mathbf{D}_k(x)$ заданы равенствами (2.40), (2.41).

Условие гладкости $\hat{y}(x) \in C^2[0, L]$ эквивалентно требованию непрерывности вектор-функции $\hat{\mathbf{y}}(x)$ во внутренних узлах ξ_k отрезка $[0, L]$. В силу представления (2.44) это приводит к следующим условиям:

$$\tilde{\mathbf{y}}_k(\xi_k) + \mathbf{D}_k(\xi_k) \times \mathbf{h}_k = \tilde{\mathbf{y}}_{k+1}(\xi_k) + \mathbf{D}_{k+1}(\xi_k) \times \mathbf{h}_{k+1}, \quad k = 1, \dots, K-1. \quad (2.46)$$

Соотношения (2.46) представляют собой систему $(K-1)$ линейных алгебраических уравнений относительно K векторов (2.45). Потребуем в дополнение к этому выполнения краевых условий (2.2), что обеспечит совпадение числа уравнений и числа неизвестных. Для того чтобы сформулировать указанное требование, введем фундаментальные системы решений $\mathbf{d}_{(0)}(x)$ и $\mathbf{d}_{(L)}(x)$ уравнения (2.1), связанные с концевыми точками отрезка $[0, L]$ $x = 0 = \xi_0$ и $x = L = \xi_K$ соответственно:

$$\mathbf{d}_{(0)}(x) := (\mathcal{F}_1(x), \mathcal{F}_2(x), \mathcal{F}_3(x)), \quad \mathbf{d}_{(L)}(x) := \mathbf{d}_0(x-L), \quad (2.47)$$

где функции $\mathcal{F}_j(x)$, $j = 1, 2, 3$, являются экспонентами (2.3). Определим также соответствующие матрицы, составленные из производных фундаментальных систем (2.47):

$$\mathbf{D}_{(0)}(x) := \mathbf{D}(x) = \mathbf{D}_1(x) \times \text{diag}(1, e^{-\rho\xi_1}, e^{-\bar{\rho}\xi_1}), \quad (2.48)$$

$$\mathbf{D}_{(L)}(x) := \mathbf{D}(x - L) = \mathbf{D}_K(x) \times \text{diag}(e^{\mu(L-\xi_{K-1})}, 1, 1), \quad (2.49)$$

где матрица $\mathbf{D}(x)$ имеет вид (2.12), а $\mathbf{D}_1(x)$ и $\mathbf{D}_K(x)$ даны формулой (2.41) при $k = 1$ и $k = K$.

Запишем равенство (2.44) при $k = 1$, $x = \xi_0 = 0$ с учетом (2.48) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}(0) - \tilde{\mathbf{y}}_1(0) &= \mathbf{D}_1(0) \times \mathbf{h}_1 = \mathbf{D}_{(0)}(0) \times \text{diag}(1, e^{-\rho\xi_1}, e^{-\bar{\rho}\xi_1}) \times \mathbf{h}_1 = \\ &= \mathbf{M} \times (a_1, e^{-\rho\xi_1} b_1, e^{-\bar{\rho}\xi_1} c_1)^T. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Аналогичным образом равенство (2.44) при $k = K$, $x = \xi_K = L$ запишем в виде

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}(L) - \tilde{\mathbf{y}}_K(L) &= \mathbf{D}_K(L) \times \mathbf{h}_K = \mathbf{D}_{(L)}(L) \times \text{diag}(e^{\mu(L-\xi_{K-1})}, 1, 1) \times \mathbf{h}_K = \\ &= \mathbf{M} \times (e^{\mu(L-\xi_{K-1})} a_K, b_K, c_K)^T. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Рассмотрим векторные равенства (2.50), (2.51) покомпонентно и выпишем те три уравнения из получившихся шести, в которые входят данные краевых условий (2.2):

$$\Phi_0 - \tilde{y}_1(0) = a_1 + e^{-\rho\xi_1} b_1 + e^{-\bar{\rho}\xi_1} c_1, \quad (2.52)$$

$$\Psi_0 - \tilde{y}_K(L) = e^{\mu(L-\xi_{K-1})} a_K + b_K + c_K, \quad (2.53)$$

$$\Psi_1 - \frac{\tilde{y}_K}{dx}(L) = \mu e^{\mu(L-\xi_{K-1})} a_K + \rho b_K + \bar{\rho} c_K, \quad (2.54)$$

где уравнение (2.52) отвечает первой компоненте равенства (2.50), а уравнение (2.53), (2.54) — первым двум компонентам равенства (2.51).

Уравнения (2.46), (2.52)–(2.54) образуют систему линейных алгебраических уравнений, в которой число уравнений $3K$ совпадает с числом искомых скалярных величин (2.45). Для того, чтобы сформулировать результат о разрешимости этой системы и дать эффективные формулы вычисления коэффициентов a_k , b_k , c_k , введем ряд обозначений. Определим числа u_k , v_k , w_k , $k = 1, \dots, K-1$, характеризующие размер скачков частных решений $\tilde{y}_k(x)$ и их производных во внутренних узлах сетки (2.7), следующим образом:

$$(u_k, v_k, w_k)^T \equiv \mathbf{z}_k := \mathbf{M}^{-1} \times (\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}(\xi_k) - \tilde{\mathbf{y}}_k(\xi_k)), \quad k = 1, \dots, K-1, \quad (2.55)$$

где матрица $\mathbf{M}^{-1}$ имеет вид (2.14). Рассмотрим также следующие линейные комбинации этих чисел:

$$U := \sum_{k=1}^{K-1} e^{\mu(L-\xi_k)} u_k, \quad V := \sum_{k=1}^{K-1} e^{-\rho\xi_k} v_k, \quad W := \sum_{k=1}^{K-1} e^{-\bar{\rho}\xi_k} w_k. \quad (2.56)$$

Определим величины $\tilde{\Phi}_0$, $\tilde{\Psi}_0$, $\tilde{\Phi}_1$ и $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, связанные с краевыми условиями (2.2):

$$\tilde{\Phi}_0 := \Phi_0 - \tilde{y}_1(0), \quad \tilde{\Psi}_0 := \Psi_0 - \tilde{y}_K(L), \quad \tilde{\Phi}_1 := \Psi_1 - \frac{\tilde{y}_K}{dx}(L), \quad (2.57)$$

$$\mathcal{R}_1 := \tilde{\Psi}_0 + \frac{1}{\omega} \tilde{\Phi}_1, \quad \mathcal{R}_2 := \tilde{\Psi}_0 + U - e^{\mu L} (\tilde{\Phi}_0 - V - W). \quad (2.58)$$

Отметим, что из вида матрицы (2.14) и вещественности компонент векторов $\tilde{\mathbf{y}}_k(x)$ и функций, задающих краевые условия (2.2), вытекают следующие соотношения:

$$u_k \in \mathbb{R}, \quad w_k = \overline{v_k}, \quad k = 1, \dots, K-1; \quad U, \tilde{\Phi}_0, \tilde{\Psi}_0, \tilde{\Phi}_1, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathbb{R}, \quad W = \overline{V}. \quad (2.59)$$

Введем в рассмотрение число $\mathcal{B}$, зависящее только от произведения (ωL) :

$$\mathcal{B} := \text{Im}\{(\epsilon + 1)(1 - e^{-(\bar{\epsilon}+1)\omega L})\}, \quad (2.60)$$

где ϵ определено последней из формул (2.4). Заметим, что поскольку $\text{Re}\{\bar{\epsilon} + 1\} = 3/2 > 0$, то при достаточно больших значениях (ωL) величина $\mathcal{B}$ отлична от нуля.

Теорема 2.1. *Предположим, что величина $\mathcal{B}$, определяемая по формуле (2.60), отлична от нуля. Тогда система уравнений (2.45), (2.46), (2.52)–(2.54) однозначным образом разрешима относительно $3K$ искомых величин a_k , b_k , c_k , $k = 1, \dots, K$ — коэффициентов представления (2.43)–(2.45) — при любых значениях параметров $\Phi_0, \Phi_1, \Psi_0 \in \mathbb{R}$ и любых заданных функций $\tilde{y}_k(x) \in C^2[\xi_{k-1}, \xi_k]$, $k = 1, \dots, K$.*

Справедливы следующие формулы для вычисления коэффициентов b_K и a_1 :

$$b_K = \frac{(1 - e^{-(\bar{\epsilon}+1)\omega L}) \mathcal{R}_1 - (\bar{\epsilon} + 1) \mathcal{R}_2}{2i\mathcal{B}}, \quad (2.61)$$

$$a_1 = \tilde{\Phi}_0 - 2 \operatorname{Re}\{V + e^{-\rho L} b_K\}, \quad (2.62)$$

где $\tilde{\Phi}_0$ определено формулой (2.57). Остальные коэффициенты из серий $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ определяются рекуррентным способом:

$$a_{k+1} = e^{\mu(\xi_k - \xi_{k-1})} a_k - u_k, \quad k = 1, \dots, K-1, \quad (2.63)$$

$$b_k = e^{-\rho(\xi_{k+1} - \xi_k)} b_{k+1} + v_k, \quad k = K-1, \dots, 1. \quad (2.64)$$

Для коэффициентов $\{c_k\}$ справедливо соотношение

$$c_k = \bar{b}_k, \quad k = 1, \dots, K. \quad (2.65)$$

Доказательство. Умножая равенство (2.46) слева на матрицу $\mathbf{M}^{-1}$, перепишем его с учетом формулы (2.42) и обозначения (2.55) в виде

$$\begin{aligned} & \operatorname{diag}(e^{\mu(\xi_k - \xi_{k-1})}, 1, 1, \dots) \times \mathbf{h}_k - \operatorname{diag}(1, e^{\rho(\xi_k - \xi_{k+1})}, e^{\bar{\rho}(\xi_k - \xi_{k+1})}) \times \mathbf{h}_{k+1} = \\ & = \mathbf{M}^{-1} \times (\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}(\xi_k) - \tilde{\mathbf{y}}_k(\xi_k)) = \mathbf{z}_k, \quad k = 1, \dots, K-1. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Покомпонентная запись векторного равенства (2.66) приводит к соотношениям (2.63), (2.64) и следующей формуле:

$$c_k = c_{k+1} e^{-\bar{\rho}(\xi_{k+1} - \xi_k)} + w_k, \quad k = 1, \dots, K-1. \quad (2.67)$$

Перейдем к выводу равенств (2.61), (2.62). Последовательно применяя $K-1$ раз формулу (2.63), выразим через a_1 величину $e^{\mu(L - \xi_{K-1})} a_K$, входящую в правые части уравнений (2.53) и (2.54):

$$\begin{aligned} e^{\mu(L - \xi_{K-1})} a_K &= e^{\mu(L - \xi_{K-1})} (e^{\mu(\xi_{K-1} - \xi_{K-2})} a_{K-1} - u_{K-1}) = \\ &= e^{\mu(L - \xi_{K-2})} (e^{\mu(\xi_{K-2} - \xi_{K-3})} a_{K-2} - u_{K-2}) - e^{\mu(L - \xi_{K-1})} u_{K-1} = \dots = \\ &= e^{\mu(L - \xi_1)} (e^{\mu(\xi_1 - \xi_0)} a_1 - u_1) - e^{\mu(L - \xi_2)} u_2 - \dots - e^{\mu(L - \xi_{K-2})} u_{K-2} - e^{\mu(L - \xi_{K-1})} u_{K-1} = \\ &= e^{\mu L} a_1 - U, \end{aligned} \quad (2.68)$$

где U задано первым из равенств (2.56). Аналогичным образом выразим через b_K и c_K слагаемые в правой части уравнения (2.52), содержащие b_1 и c_1 , используя рекуррентные соотношения (2.64) и (2.67) соответственно:

$$e^{-\rho \xi_1} b_1 = e^{-\rho \xi_1} (e^{-\rho(\xi_2 - \xi_1)} b_2 + v_1) = \dots = e^{-\rho L} b_K + V, \quad (2.69)$$

$$e^{-\bar{\rho} \xi_1} c_1 = e^{-\bar{\rho} \xi_1} (e^{-\bar{\rho}(\xi_2 - \xi_1)} c_2 + w_1) = \dots = e^{-\bar{\rho} L} c_K + W, \quad (2.70)$$

где величины V и W также заданы формулами (2.56).

Подставляя выражения (2.68)–(2.70) в уравнения (2.52)–(2.54), исключим величины a_K , b_1 и c_1 из этой системы. Тогда с использованием обозначений (2.57) получаем следующую систему трех линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_1 , b_K и c_K :

$$a_1 + (e^{-\rho L} b_K + V) + (e^{-\bar{\rho} L} c_K + W) = \tilde{\Phi}_0, \quad (2.71)$$

$$(e^{\mu L} a_1 - U) + b_K + c_K = \tilde{\Psi}_0, \quad (2.72)$$

$$\mu (e^{\mu L} a_1 - U) + \rho b_K + \bar{\rho} c_K = \tilde{\Psi}_1, \quad (2.73)$$

Исключим a_1 из уравнений (2.72), (2.73). Для этого умножим первое из них (2.72) на μ и вычтем результат из второго (2.73), получим

$$(\rho - \mu) b_K + (\bar{\rho} - \mu) c_K = \tilde{\Psi}_1 - \mu \tilde{\Psi}_0. \quad (2.74)$$

Затем, подставляя в уравнение (2.72) коэффициент a_1 , выраженный из уравнения (2.71) в виде

$$a_1 = \tilde{\Phi}_0 - V - W - e^{-\rho L} b_K - e^{-\bar{\rho} L} c_K, \quad (2.75)$$

получаем

$$(1 + e^{(\mu-\rho)L}) b_K + (1 + e^{(\mu-\bar{\rho})L}) c_K = \tilde{\Psi}_0 + U - e^{\mu L} (\tilde{\Phi}_0 - V - W). \quad (2.76)$$

Запишем уравнение (2.74), разделив его на $\omega = -\mu$, вместе с уравнением (2.76) с учетом равенств (2.4), (2.5) в следующем векторном виде:

$$\begin{pmatrix} \epsilon + 1 & \bar{\epsilon} + 1 \\ 1 - e^{-(\epsilon+1)\omega L} & 1 - e^{-(\bar{\epsilon}+1)\omega L} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_K \\ c_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 \\ \mathcal{R}_2 \end{pmatrix}, \quad (2.77)$$

где величины $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ заданы формулами (2.58). Решая полученную систему (2.77), находим

$$b_K = \frac{(1 - e^{-(\bar{\epsilon}+1)\omega L}) \mathcal{R}_1 - (\bar{\epsilon} + 1) \mathcal{R}_2}{2i \operatorname{Im}\{(\epsilon + 1)(1 - e^{-(\bar{\epsilon}+1)\omega L})\}}, \quad c_K = \frac{-(1 - e^{-(\epsilon+1)\omega L}) \mathcal{R}_1 + (\epsilon + 1) \mathcal{R}_2}{2i \operatorname{Im}\{(\epsilon + 1)(1 - e^{-(\bar{\epsilon}+1)\omega L})\}},$$

откуда с учетом обозначения (2.60) получаем формулу (2.61), а также соотношение

$$c_K = \overline{b_K}. \quad (2.78)$$

Формула (2.62) вытекает из (2.75), (2.78) и (2.59), а формула (2.65) следует по индукции из (2.78), (2.67), (2.64) и (2.59). Теорема доказана. $\square$

2.3. Вычислительный алгоритм решения линейной краевой задачи. Дадим уточнение формул (2.55) для случая, когда частные решения $\tilde{y}_k(x)$ уравнения (2.1), (2.8) заданы в виде (2.30), (2.35).

Подставляя равенства (2.37), (2.38) в формулу (2.55) при $k = 1, \dots, K-1$, находим

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_k &= \mathbf{M}^{-1} \times (\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}(\xi_k) - \tilde{\mathbf{y}}_k(\xi_k)) = \mathbf{M}^{-1} \times \left(\frac{1}{3} \mathbf{M} \times (0, \mathcal{J}_{k+1}(\xi_k; \rho, \xi_{k+1}), \mathcal{J}_{k+1}(\xi_k; \bar{\rho}, \xi_{k+1}))^T - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \mathbf{M} \times (\mathcal{J}_k(\xi_k; \mu, \xi_{k-1}), 0, 0)^T \right) = \frac{1}{3} (-\mathcal{J}_k(\xi_k; \mu, \xi_{k-1}), \mathcal{J}_{k+1}(\xi_k; \rho, \xi_{k+1}), \mathcal{J}_{k+1}(\xi_k; \bar{\rho}, \xi_{k+1}))^T, \end{aligned}$$

т. е. для коэффициентов $\{u_k\}, \{v_k\}, \{w_k\}$ имеем следующие выражения:

$$u_k = -\frac{1}{3} \mathcal{J}_k(\xi_k; \mu, \xi_{k-1}), \quad v_k = \frac{1}{3} \mathcal{J}_{k+1}(\xi_k; \rho, \xi_{k+1}), \quad w_k = \overline{v_k}, \quad k = 1, \dots, K-1, \quad (2.79)$$

где величины $\mathcal{J}_k(x; \cdot, \cdot)$ определяются по формулам (2.29), (2.28).

Остановимся подробнее на вычислении полиномов $F_k(x; \nu)$ вида (2.28), которые составляют основу построения искомого решения задачи (2.1), (2.2), (2.8) согласно теореме 2.1 и формулам (2.29), (2.79).

Предположим, что многочлен $f_k(x) \in \mathcal{P}_m$, задающий правую часть уравнения (2.1) на k -м отрезке разбиения (2.7), записан в виде линейной комбинации

$$f_k(x) = \sum_{j=0}^m f_{k,j} T_j^{(k)}(x), \quad f_{k,j} \in \mathbb{R}, \quad (2.80)$$

базисных векторов

$$T_j^{(k)}(x) := T_j\left(2 \frac{x - \xi_{k-1}}{\Delta_k} - 1\right), \quad j = 0, \dots, m, \quad (2.81)$$

где $T_j(X)$ — j -й многочлен Чебышева первого рода, $X \in [-1, 1]$, а через Δ_k обозначена длина рассматриваемого отрезка:

$$\Delta_k := \xi_k - \xi_{k-1}, \quad k = 1, \dots, K. \quad (2.82)$$

Обозначим через $\mathbf{T}(m)$ матрицу оператора дифференцирования многочленов от X в базисе $\{T_j(X)\}_{j=0}^m$. Тогда матрица оператора дифференцирования $\mathcal{D}(m)$ в базисе $\{T_j^{(k)}(x)\}_{j=0}^m$ равна $2\mathbf{T}(m)/\Delta_k$, а матрица оператора $(1 - \mathcal{D}(m)/\nu)$, стоящего в правой части определения (2.28), имеет вид

$$\mathbf{R}_{(k)}(m, \nu) := \mathbf{E}_{m+1} - \frac{2}{\nu \Delta_k} \mathbf{T}(m), \quad (2.83)$$

где $\mathbf{E}_{m+1} = \text{diag}(1, \dots, 1)$ — единичная матрица порядка $m + 1$. Матрица $\mathbf{T}(m)$ является верхнетреугольной и имеет нули на главной диагонали. Следовательно, матрица $\mathbf{R}_{(k)}(m, \nu)$, как и обратная к ней, также является верхнетреугольной и имеет единицы на главной диагонали. Вычисляя эту обратную матрицу и применяя ее к вектору (2.80), получаем вектор-столбец

$$(\mathbf{R}_{(k)}(m, \nu))^{-1} \times (f_{k,0}, \dots, f_{k,m})^T$$

коэффициентов разложения искомого многочлена $F_k(x; \nu)$ по базису (2.81). Сформулируем построенный вычислительный алгоритм решения задачи (2.1), (2.2), (2.8) с кусочно полиномиальной правой частью.

Алгоритм 2.1.

1. Предполагаем, что многочлены (2.8), задающие правую часть уравнения (2.1), представлены коэффициентами $f_{k,j}$ разложения (2.80) по базису (2.81), $j = 0, \dots, m$, $k = 1, \dots, K$.
2. Вычисляем матрицы $(\mathbf{R}_{(k)}(\mu, m))^{-1}$ и $(\mathbf{R}_{(k)}(\rho, m))^{-1}$, $k = 1, \dots, K$, обратные к матрицам (2.83) при $\nu = \mu$ и $\nu = \rho$ соответственно.
3. Умножая векторы $(f_{k,j})_{j=0}^m$ слева на найденные матрицы для каждого значения индекса $k = 1, \dots, K$, вычисляем по формуле (2.28) многочлены $F_k(x; \mu)$ и $F_k(x; \rho)$ в виде разложений по базису (2.81).
4. Подставляя в формулу (2.29) последовательно $x = \xi_k$ при $k = 1, \dots, K$ и $\nu = \rho$, $\nu = \mu$, находим значения $\mathcal{J}_{k+1}(\xi_k; \mu, \xi_{k+1})$, $\mathcal{J}_k(\xi_k; \rho, \xi_k)$, $k = 1, \dots, K-1$, из которых по формулам (2.79) получаем числа $\{u_k\}$, $\{v_k = \overline{w_k}\}$.
5. По формулам (2.56)–(2.58), (2.60)–(2.65) находим коэффициенты $\{a_k\}$, $\{b_k = \overline{c_k}\}$.
6. Получаем искомое решение $y = \hat{y}(x)$ вместе с его первыми двумя производными в виде (2.43)–(2.45), где частные решения $\tilde{y}_k(x)$ и их производные представлены формулой (2.35).

При заданном m алгоритм 2.1 имеет сложность $O(K)$, где K — число отрезков разбиения (2.7). Отметим, что если разбиения (2.7) является равномерным, то матрицы (2.83) совпадают между собой при всех $k = 1, \dots, K$, поскольку одинаковы длины (2.82) отрезков $[\xi_{k-1}, \xi_k]$. В этом случае все шаги алгоритма 2.1, кроме шага 5, сводятся к перемножению матриц, что позволяет достичь высокой эффективности при его численной реализации.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим пример численного решения начально-краевой задачи для уравнения Гарднера

$$\partial_t u + (\alpha u + \beta u^2) \partial_x u + \gamma \partial_{xxx}^3 u = 0, \quad (3.1)$$

т. е. для уравнения (1.1) при $f(x) = 0$. Выпишем известное [7] солитонное решение, т. е. решение типа уединенной бегущей волны

$$u^{\text{ex}}(x, t) = \frac{6\gamma\Gamma^2}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 6\beta\gamma\Gamma^2} \text{ch}(\Gamma(x - \Omega t))}, \quad \Gamma > 0, \quad \Omega := \gamma\Gamma^2, \quad (3.2)$$

где Ω — скорость распространения волны вдоль оси x , а Γ — произвольный параметр.

При $\beta < 0$ допустимые значения величины Γ имеют верхнюю грань Γ_{lim} :

$$\Gamma \in (0, \Gamma_{\text{lim}}), \quad \Gamma_{\text{lim}} = \frac{\alpha}{\sqrt{6|\beta|\gamma}}, \quad (3.3)$$

так что при $\Gamma \rightarrow \Gamma_{\text{lim}}$ амплитуда $A := \max_{(x,t)} u^{\text{ex}}(x, t)$ решения (3.2) приближается снизу к своему предельному значению

$$A_{\text{lim}} = \frac{\alpha}{|\beta|},$$

а верхняя часть профиля волны обретает характерную плоскую форму.

Зададим начальное и краевые условия (1.2), (1.3) для уравнения (3.1) в следующем виде:

$$u_0(x) = u^{\text{ex}}(0, x), \quad \varphi_0(t) = u^{\text{ex}}(0, t), \quad \psi_0(t) = u^{\text{ex}}(L, t), \quad \psi_1(t) = \frac{\partial u^{\text{ex}}}{\partial x}(L, t). \quad (3.4)$$

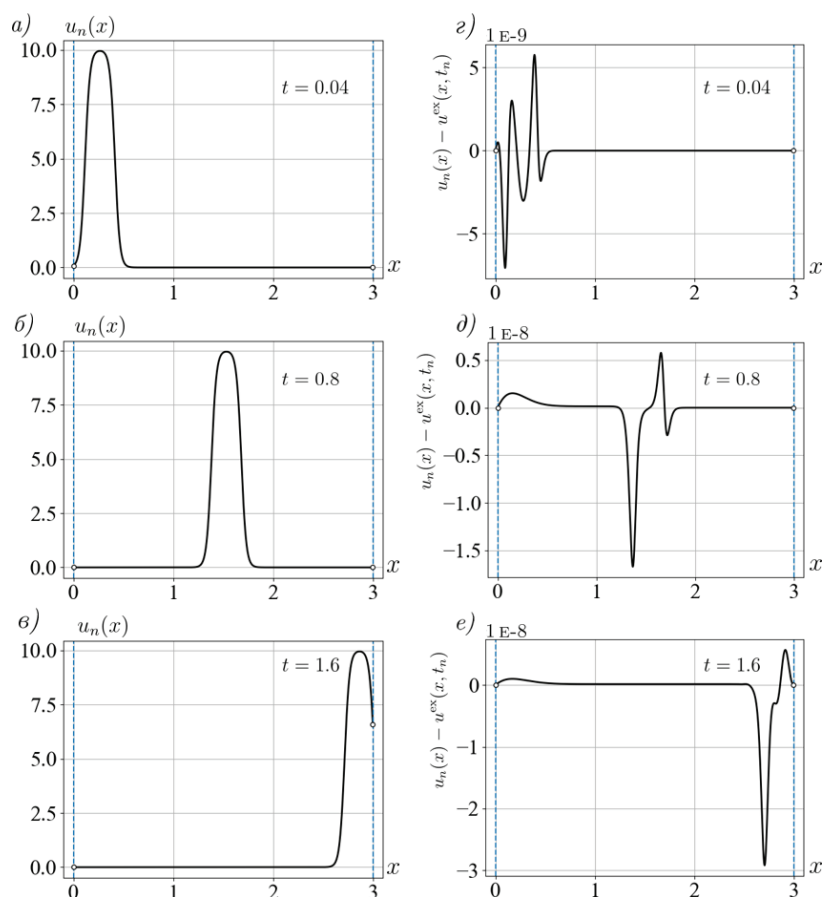


Рис. 1. Решение задачи (3.1), (3.4), (3.5) — распространение солитона (3.2); а, б, в — график решения в различные моменты времени; г, д, е — график абсолютной погрешности в те же моменты времени.

FIG. 1. Solution of the problem (3.1), (3.4), (3.5): propagation of the soliton (3.2); а, б, в: graphs of the solution at different moments of time; г, д, е: graphs of the absolute error at the same moments of time.

τ	m	K	$\ u_n - u^{\text{ex}}(\cdot, t_n)\ _{L_\infty}$	$\ \partial_x u_n - \partial_x u^{\text{ex}}(\cdot, t_n)\ _{L_\infty}$	CPU t, sec
1 E-3	4	100	1.2 E-2	2.7 E-1	0.24
1 E-4	5	200	1.3 E-4	3.2 E-3	3.48
1 E-5	6	300	1.4 E-6	3.2 E-5	50.36
1 E-6	7	400	2.9 E-8	5.1 E-7	658.11

ТАБ. 1. Сопоставление результатов численного алгоритма для задачи (3.1), (3.4), (3.5) с ее точным решением (3.2) при различных значениях параметров τ , m , K .

ТАБ. 1. Comparison of the results of the numerical algorithm for the problem (3.1), (3.4), (3.5) with its exact solution (3.2) for different values of the parameters τ , m , K .

Приведены результаты численного решения начально-краевой задачи (3.1), (3.4), проведенного по схеме из раздела 1.2 с использованием алгоритма 2.1 для решения вспомогательной линейной задачи (1.6), (1.8), (1.9), при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, & \beta &= -0.1, & \gamma &= 10^{-3}, & L &= 3, & T &= 1.6, & x_0 &= 0.2, \\ A_{\text{lim}} &= 10, & \Gamma &= (1 - 10^{-5}) \Gamma_{\text{lim}} \approx 40.82, & \Omega &\approx 1.67. \end{aligned} \quad (3.5)$$

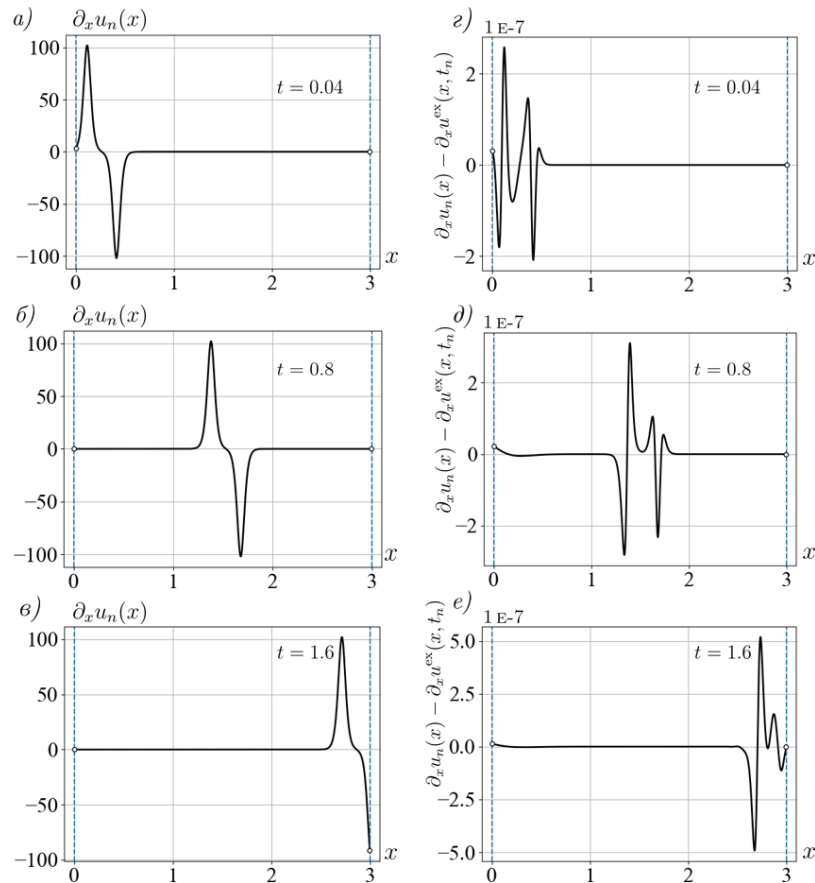


Рис. 2. Найденная численно производная решения (3.2) задачи (3.1), (3.4), (3.5); а, б, в — график производной в различные моменты времени; г, д, е — график абсолютной погрешности этого вычисления в те же моменты времени.

FIG. 2. The numerically found derivative of the solution (3.2) of the problem (3.1), (3.4), (3.5); а, б, в: graphs of the derivative at different moments of time; г, д, е: graphs of the absolute error of this calculation at the same moments of time.

В таб. 1 для различных сочетаний шага по времени τ , степени m кусочно-полиномиальной аппроксимации и количества K отрезков разбиения (2.7) приведена погрешность численного решения задачи (3.1), (3.4), (3.5), вычисленная как максимум L_∞ -норм $\|u_n - u^{\text{ex}}(\cdot, t_n)\|_{L_\infty}$ на отрезке $[0, L]$ по всем $n = 0, \dots, N$ разности аппроксимации $u_n(x)$ с точным решением (3.2) при $t = t_n$. Также в таблице дана погрешность $\|\partial_x u_n - \partial_x u^{\text{ex}}(\cdot, t_n)\|_{L_\infty}$ вычисления первой производной решения и затраченное процессорное время. Численная реализация проводилась при помощи библиотеки *Numeric Python* на ноутбуке с процессором *11th Gen Intel Core i7*. Отметим, что шаг τ по времени может быть выбран очень малым без потери устойчивости численного результата. Это связано с тем, что предложенный в разделе 2 алгоритм 2.1 сохраняет свою эффективность при решении сингулярно возмущенных краевых задач для линейного уравнения (2.1), т. е. при больших значениях параметра ω , что и реализуется для вспомогательного уравнения (1.6) при малом τ . Отметим также, что в тестовых примерах, приведенных в таб. 1, достигаемая точность определяется явно-неявной схемой аппроксимации (1.5), т. е. увеличение указанных в таблице параметров m , K при заданном значении τ не приводит к дальнейшему повышению точности результата.

На рис. 1 приведены графики численного решения задачи (3.1), (3.4), (3.5) при $\tau = 10^{-6}$, $m = 7$, $K = 400$ в различные моменты времени, а также графики погрешности, найденной как разность приближенного и точного решения (3.2). На рис. 2 даны графики вычисленной производной решения и соответствующие графики абсолютной погрешности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безродных С. И., Власов В. И. Краевая задача для моделирования физических полей в полупроводниковом диоде// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2004. — 44, № 12. — С. 2220–2251.
2. Безродных С. И., Власов В. И. Аналитико-численный метод расчета взаимодействия физических полей в полупроводниковом диоде// Мат. модел. — 2015. — 27, № 7. — С. 15–24.
3. Безродных С. И., Пикулин С. В. Численно-аналитический метод для уравнения Бюргерса с периодическим краевым условием// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2023. — 69, № 2. — С. 208–223.
4. Безродных С. И., Пикулин С. В. Численно-аналитический метод для нелинейных уравнений типа Колмогорова—Петровского—Пискунова// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2024. — 64, № 11. — С. 2017–2042.
5. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980.
6. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
7. Пелиновский Е. Н., Слюняев А. В. Генерация и взаимодействие солитонов большой амплитуды// Письма в ЖЭТФ. — 1998. — 67, № 9. — С. 628–633.
8. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989.
9. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.
10. Ablowitz M. A., Clarkson P. A. Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.
11. Ak T., Triki H., Dhanwan S. et al. Theoretical and numerical investigations on solitary wave solutions of Gardner equation// Eur. Phys. J. Plus. — 2018. — 133. — 382.
12. Ascher U. M., Ruuth S. J., Wetton B. T. R. Implicit-explicit methods for time-dependent partial differential equations// SIAM J. Numer. Anal. — 1995. — 32, № 3. — С. 797–823.
13. Dahiya S., Singh A., Singh S. P. Study of the Gardner equation with homogeneous boundary conditions via fourth order modified cubic B-spline collocation method// Comput. Math. Math. Phys. — 2023. — 63, № 12. — С. 2474–2491.
14. Demler E., Maltsev A. Semiclassical solitons in strongly correlated systems of ultracold bosonic atoms in optical lattices// Ann. Phys. — 2011. — 326, № 7. — С. 1775–1805.
15. Grimshaw R. Internal solitary waves// В сб.: «Environmental stratified flows. Topics in environmental fluid mechanics». — Boston: Springer, 2003. — С. 1–27.
16. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T., Kurkin A. Simulation of the transformation of internal solitary waves on oceanic shelves// J. Phys. Oceanogr. — 2004. — 34. — С. 2774–2791.
17. Holmer J. The initial-boundary value problem for the Korteweg–de Vries equation// Commun. Part. Differ. Equ. — 2006. — 31, № 8. — С. 1151–1190.
18. Hundsdorfer W., Verwer J. Numerical solutions of time-dependent advection–diffusion–reaction equations. — Berlin–Heidelberg: Springer, 2003.
19. Kamchatnov A. M. Undular bore theory for the Gardner equation// Phys. Rev. E. — 2012. — № 86. — 036605.
20. Miles J. W. On internal solitary waves// Tellus. — 1979. — 31. — С. 456–462.
21. Miura R., Gardner C., Kruskal M. Korteweg–de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion// J. Math. Phys. — 1968. — 9. — С. 1205–1209.
22. Ruderman M. S., Talipov T., Pelinovsky E. Dynamics of modulationally unstable ion-acoustic wavepackets in plasmas with negative ions// J. Plasma Phys. — 2008. — 74, № 5. — С. 639–656.
23. Wang K. J. Traveling wave solutions of the Gardner equation in dusty plasmas// Results Phys. — 2022. — 33. — 105207.
24. Watanabe S. Ion acoustic soliton in plasma with negative ion// J. Phys. Soc. Japan. — 1984. — 53. — С. 950–956.
25. Wazwaz A. M. New solitons and kink solutions for the Gardner equation// Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. — 2007. — 12, № 8. — С. 1395–1404.

С. И. Безродных

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия
E-mail: sbezrodnykh@mail.ru

С. В. Пикулин

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия
E-mail: spikulin@gmail.com

UDC 517.956.4, 519.633

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-353-369

EDN: FAKSTK

On one method for solving the initial-boundary value problem for the Gardner equation

S. I. Bezrodnykh and S. V. Pikulin

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the RAS, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, the efficient solution is considered for an initial-boundary value problem for the Gardner equation: a spatially one-dimensional nonlinear evolution equation describing a broad class of dispersive autowave processes. A numerical-analytical method is proposed based on a combination of explicit and implicit time discretization schemes for various terms of the differential operator. A new efficient algorithm is developed to solve a sequence of auxiliary linear problems, relying on analytical representations using an explicit form of the fundamental system of solutions. An example of a numerical solution of the initial-boundary value problem for the Gardner equation is considered, and the result is compared with a known exact solution of the solitary traveling wave type.

Keywords: Gardner equation, effective numerical-analytical method, Green’s function, explicit-implicit scheme.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: S. I. Bezrodnykh, S. V. Pikulin, “On one method for solving the initial-boundary value problem for the Gardner equation,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 3, 353–369. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-353-369>

REFERENCES

1. S. I. Bezrodnykh and V. I. Vlasov, “Kraevaya zadacha dlya modelirovaniya fizicheskikh poley v poluprovodnikovom diode” [Boundary-value problem for modeling physical fields in a semiconductor diode], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2004, **44**, No. 12, 2220–2251 (in Russian).
2. S. I. Bezrodnykh and V. I. Vlasov, “Analitiko-chislennyy metod rascheta vzaimodeystviya fizicheskikh poley v poluprovodnikovom diode” [Analytical-numerical method for calculating the interaction of physical fields in a semiconductor diode], *Mat. model.* [Math. Model.], 2015, **27**, No. 7, 15–24 (in Russian).
3. S. I. Bezrodnykh and S. V. Pikulin, “Chislenno-analiticheskiy metod dlya uravneniya Byurgersa s periodicheskim kraevym usloviem” [Numerical-analytical method for the Burgers equation with a periodic boundary condition], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 2, 208–223 (in Russian).
4. S. I. Bezrodnykh and S. V. Pikulin, “Chislenno-analiticheskiy metod dlya nelineynykh uravneniy tipa Kolmogorova–Petrovskogo–Piskunova” [Numerical-analytical method for nonlinear equations of the Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov type], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2024, **64**, No. 11, 2017–2042 (in Russian).
5. V. E. Zakharov, S. V. Manakov, S. P. Novikov, and L. P. Pitaevskiy, *Teoriya solitonov. Metod obratnoy zadachi* [Soliton Theory. Inverse Problem Method], Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).
6. M. A. Naimark, *Lineynye differentsial’nye operatory* [Linear Differential Operators], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).

7. E. N. Pelinovskii and A. V. Slyunyaev, “Generatsiya i vzaimodeystvie solitonov bol’shoi amplitudy” [Generation and interaction of large-amplitude solitons], *Pis’ma v ZhETF* [Commun. J. Exp. Theor. Phys.], 1998, **67**, No. 9, 628–633 (in Russian).
8. A. A. Samarskii, *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
9. A. F. Filippov, *Differentsial’nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast’yu* [Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side], Nauka, Moscow, 1985 (in Russian).
10. M. A. Ablowitz and P. A. Clarkson, *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
11. T. Ak, H. Triki, S. Dhawan et al., “Theoretical and numerical investigations on solitary wave solutions of Gardner equation,” *Eur. Phys. J. Plus*, 2018, **133**, 382.
12. U. M. Ascher, S. J. Ruuth, and B. T. R. Wetton, “Implicit-explicit methods for time-dependent partial differential equations,” *SIAM J. Numer. Anal.*, 1995, **32**, No. 3, 797–823.
13. S. Dahiya, A. Singh, and S. P. Singh, “Study of the Gardner equation with homogeneous boundary conditions via fourth order modified cubic B-spline collocation method,” *Comput. Math. Math. Phys.*, 2023, **63**, No. 12, 2474–2491.
14. E. Demler and A. Maltsev, “Semiclassical solitons in strongly correlated systems of ultracold bosonic atoms in optical lattices,” *Ann. Phys.*, 2011, **326**, No. 7, 1775–1805.
15. R. Grimshaw, “Internal solitary waves,” In: *Environmental stratified flows. Topics in environmental fluid mechanics*, Springer, Boston, 2003, pp. 1–27.
16. R. Grimshaw, E. Pelinovsky, T. Talipova, and A. Kurkin, “Simulation of the transformation of internal solitary waves on oceanic shelves,” *J. Phys. Oceanogr.*, 2004, **34**, 2774–2791.
17. J. Holmer, “The initial-boundary value problem for the Korteweg–de Vries equation,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 2006, **31**, No. 8, 1151–1190.
18. W. Hundsdorfer and J. Verwer, *Numerical solutions of time-dependent advection–diffusion–reaction equations*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2003.
19. A. M. Kamchatnov, “Undular bore theory for the Gardner equation,” *Phys. Rev. E*, 2012, No. 86, 036605.
20. J. W. Miles, “On internal solitary waves,” *Tellus*, 1979, **31**, 456–462.
21. R. Miura, C. Gardner, and M. Kruskal, “Korteweg–de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion,” *J. Math. Phys.*, 1968, **9**, 1205–1209.
22. M. S. Ruderman, T. Talipov, and E. Pelinovsky, “Dynamics of modulationally unstable ion-acoustic wavepackets in plasmas with negative ions,” *J. Plasma Phys.*, 2008, **74**, No. 5, 639–656.
23. K. J. Wang, “Traveling wave solutions of the Gardner equation in dusty plasmas,” *Results Phys.*, 2022, **33**, 105207.
24. S. Watanabe, “Ion acoustic soliton in plasma with negative ion,” *J. Phys. Soc. Japan*, 1984, **53**, 950–956.
25. A. M. Wazwaz, “New solitons and kink solutions for the Gardner equation,” *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2007, **12**, No. 8, 1395–1404.

S. I. Bezrodnykh

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the RAS, Moscow, Russia

E-mail: sbezrodnykh@mail.ru

S. V. Pikulin

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the RAS, Moscow, Russia

E-mail: spikulin@gmail.com

УДК 519.63

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-370-384

EDN: FCHSSL

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СТРАТЕГИЙ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОПУЛЯЦИЙ НА НЕОДНОРОДНОМ АРЕАЛЕ

П. А. Зеленчук, В. Г. Цибулин

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

Аннотация. На примере системы «хищник—жертва» в условиях неоднородного ареала построена математическая модель взаимодействующих популяций, обладающая разнообразными эволюционными стратегиями. Модель основана на системе уравнений в частных производных «диффузия—адвекция—реакция» и позволяет учитывать многофакторный таксис видов. Предложены модифицированные функции локального взаимодействия хищника и жертвы, обеспечивающие многообразие эволюционных стратегий системы. Исследован ряд ключевых параметров, отвечающих за формирование стратегий с идеальным свободным распределением (ИСР). Рассмотрены функции миграции, позволяющие учесть все виды направленного движения особей жертвы и хищника. Приведены условия для потоковых параметров системы, при которых возможна реализация ИСР-подобных стратегий. Представлены результаты вычислительных экспериментов для ряда стационарных и колебательных режимов.

Ключевые слова: эволюционная стратегия, идеальное свободное распределение, уравнения диффузии—адвекции—реакции, хищник—жертва.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы выражают благодарность всем участникам Крымской осенней математической школы-симпозиума Н. Д. Копачевского КРОМШ-2024 за внимание к работе и полезные обсуждения. Работа выполнена в Южном федеральном университете при поддержке РФФ, грант № 25-21-00419.

Для цитирования: П. А. Зеленчук, В. Г. Цибулин. Моделирование эволюционных стратегий взаимодействующих популяций на неоднородном ареале // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 3. С. 370–384. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-370-384>

ВВЕДЕНИЕ

Одной из интереснейших проблем, связанной с применением современной математики к наукам о жизни, является изучение эволюционных стратегий. Под эволюционными стратегиями здесь понимаются не эвристические методы оптимизации или эволюционные алгоритмы [5], а стратегии поведения биологических систем, описываемые некоторым математическим аппаратом [9, 14].

В настоящее время актуальным является поиск и исследование таких эволюционных стратегий, при которых достигается долговременное стабильное существование биологических сообществ, нескольких видов или различных популяций одного вида. Особое внимание уделяется моделям,

учитывающим пространственно-временную неоднородность среды обитания [8]. Важной задачей является изучение таких моделей, которые позволяют реализовать несколько эволюционных стратегий в рамках одной математической формулировки.

Успех той или иной стратегии обычно определяется исходя из некоторого количественного показателя, являющегося аналогом теоретико-игрового понятия полезности или выгоды [19]. Часто в качестве такого показателя используется индивидуальная приспособленность особей популяции в ее тесной связи с процессами рождения и смерти [16]. *Эволюционно стабильной стратегией* (ЭСС) для нескольких взаимодействующих видов называется такая стратегия поведения, при которой устанавливается равновесие системы, смена которого не выгодна ни одному из игроков. В этом случае каждая популяция обеспечивает свое долговременное существование и не может быть вытеснена с ареала популяцией с другой стратегией [21].

С точки зрения неоднородности ареала обитания и сложности рассматриваемых объектов, наиболее подходящим для построения математической модели эволюционных стратегий в биологическом сообществе является использование уравнений в частных производных, учитывающих адвективные и диффузионные процессы [9]. Примером ЭСС, математическая модель которой основана на уравнениях диффузии—адвекции—реакции является идеальное свободное распределение (ИСР) [7].

Анализ литературы показывает, что модели ИСР рассматривались для одного биологического вида [11], нескольких конкурирующих за общий ресурс видов [15] и систем «хищник—жертва» [13, 18]. В работе [22] для системы «хищник—жертва» ИСР определяется как пропорциональность распределения обоих видов имеющемуся на ареале ресурсу в стационарном или осциллирующем режиме. В работе [23] рассмотрен более общий случай ИСР-подобного распределения, когда обобщенному ресурсу пропорционально только распределение жертвы, а для хищника возможны различные варианты.

Цель данной статьи — на примере системы «хищник—жертва» развить математическую модель взаимодействующих популяций, описывающую несколько эволюционных стратегий. Вначале рассматривается базовая модель локального взаимодействия, реализующая ряд стратегий, часть из которых обладает ИСР. Затем модель расширяется за счет введения потоковых слагаемых, описывающих диффузию и многофакторный таксис (направленную миграцию). Полученная система уравнений диффузии—адвекции—реакции дополняется начальными и граничными условиями. Проводится анализ условий на параметры системы, при которых она наследует эволюционные стратегии базовой модели. Для подтверждения реализации ЭСС и ИСР-решений выполнен ряд вычислительных экспериментов при различных комбинациях параметров.

1. МОДЕЛЬ ЛОКАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Рассматривается модель «хищник—жертва» с функциями локального взаимодействия

$$\begin{aligned} F_1 &= \mu_1 u f_{nm}(u, p) - \lambda_1 g(u, v, p), \\ F_2 &= \mu_2 g(u, v, p) - \lambda_2 v, \end{aligned} \quad (1.1)$$

отвечающими концепции ИСР [1, 23]. Закон роста жертвы задается функцией $f_{nm}(u, p)$

$$f_{nm}(u, p) = \frac{1}{p^m} \left(1 - \frac{u}{p}\right) \sum_{i=0}^n r_i u^i, \quad (1.2)$$

где $n, m = 0, 1, 2, \dots$, а $p = p(x, y) > 0$ — ресурс жертвы, неравномерно распределенный по ареалу $D = [0, a] \times [0, b]$. Предполагается, что функция $p(x, y)$ достаточно гладкая и не обращается в нуль. Отметим, что выражение (1.2) накладывает ограничение на рост популяции (плотность жертвы не превышает доступного ресурса). Полином с коэффициентами r_i позволяет описывать различные сценарии роста жертвы: логистический при $n = 0$, гиперболический при $n = 1$ и $r_0 = 0$. В случае $n = 2$, $m = 0$, ($r_0 = 0$, $r_1 = -\eta_1$, $r_2 = \eta_2$) будет иметь место эффект Олли [10]

$$f_{nm}(u, p) = \eta_1 u \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} u - 1 \right) \left(1 - \frac{u}{p} \right). \quad (1.3)$$

В дальнейшем предполагается, что коэффициенты r_i , кроме последнего r_n , равны нулю, т. е.

$$f_{nm}(u, p) = \frac{r_n u^n}{p^m} \left(1 - \frac{u}{p}\right). \quad (1.4)$$

Трофическая функция $g(u, v, p)$ в общем случае зависит от плотностей взаимодействующих популяций [20] и задается в виде [4], учитывающем функциональный отклик Холлинга II рода и неоднородность распределения ресурса:

$$g(u, v, p) = \frac{uv}{p + Cu}. \quad (1.5)$$

Неотрицательный параметр C позволяет учесть инертность хищника, проявляемую им при поиске, охоте, поглощении и переработке жертвы. В случае $C = 0$ и $p(x, y) = \text{const}$ трофическая функция приобретает вид классического отклика Лотки—Вольтерры [17]. Положительные коэффициенты μ_i , λ_i ($i = 1, 2$) не зависят от пространственных координат и времени, μ_1 отвечает за прирост жертвы, λ_2 — за вымирание хищника при отсутствии жертвы, а λ_1 и μ_2 масштабируют эффект хищничества.

Таким образом, модель «хищник—жертва» представляется системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u \left[\mu_1 \frac{u^n}{p^m} \left(1 - \frac{u}{p}\right) - \lambda_1 \frac{v}{p + Cu} \right], \\ \frac{dv}{dt} &= v \left[\mu_2 \frac{u}{p + Cu} - \lambda_2 \right]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Отметим, что фактически получилось континуальное семейство систем ОДУ, т. к. присутствие функции ресурса $p(x, y)$ определяет задачу для каждой точки ареала D .

Система (1.6) имеет три стационарных решения: неустойчивое тривиальное равновесие ($u = 0$, $v = 0$), решение без хищника:

$$u = p(x, y), \quad v = 0, \quad (1.7)$$

и решение для сосуществующих видов

$$u = Ap, \quad v = B_n p^\nu, \quad (1.8)$$

где

$$A = \frac{\lambda_2}{\mu_2 - \lambda_2 C}, \quad B_n = \frac{\mu_1 \mu_2}{\lambda_1 \lambda_2} (1 - A) A^{n+1}, \quad \nu = n - m + 1. \quad (1.9)$$

Решение (1.7) устойчиво при выполнении условия

$$\frac{\mu_2}{1 + C} < \lambda_2. \quad (1.10)$$

При нарушении условия (1.10) от (1.7) ответвляется решение (1.8), которое устойчиво на интервале

$$\frac{n\mu_2}{1 + n(1 + C)} < \lambda_2 < \frac{\mu_2}{1 + C}. \quad (1.11)$$

При нарушении левой части условия (1.11) и $n \neq 0$ в системе возникает колебательный режим [1]. За устойчивость решения (1.8), соответствующего сосуществованию двух видов, отвечают в основном параметры хищника (коэффициенты μ_2 , λ_2 и C). Для выживания хищник должен придерживаться стратегии, обеспечивающей уменьшение смертности λ_2 и увеличение параметра воспроизводства μ_2 .

Решение (1.7) соответствует распределению ресурса (ИСР) и в этом смысле является эволюционно стабильной стратегией (ЭСС) для одного вида при его расселении на площади всего ареала [6, 22]. При сосуществовании обеих популяций, что описывается выражением (1.8), распределение жертвы пропорционально ресурсу и не зависит от параметров m и n , в то время как распределение хищника зависит от параметра $\nu = n - m + 1$.

Справедливо следующее утверждение [23].

Утверждение 1.1. При $n = m$ система (1.6) имеет нетривиальное стационарное решение (1.8), отвечающее ИСР для двух видов.

Доказательство. Подставляя $n = m$ в (1.9), получим для (1.8) выражения $u = Ap$ и $v = B_n p$, так что плотности жертвы и хищника оказываются прямо пропорциональны ресурсу $p(x, y)$ и, следовательно, будут обладать ИСР. $\square$

ТАБ. 1. Эволюционные стратегии в зависимости от параметра ν в (1.8)-(1.9).

	ν	n	m	Колебания	Жертва	Хищник	Распределение
1	-1	0	2	нет	$u \propto p(x)$	$v \propto p(x)^{-1}$	рис. 1(a)
2	0	0	1	нет	$u \propto p(x)$	$v = const$	рис. 1(b)
3	0	1	2	$\mu_2 \leq \lambda_2(2 + C)$	$u \propto p(x)$	$v = const$	рис. 2(b)
4	1	0	0	нет	$u \propto p(x)$	$v \propto p(x)$	рис. 1(c)
5	1	1	1	$\mu_2 \leq \lambda_2(2 + C)$	$u \propto p(x)$	$v \propto p(x)$	рис. 2(a)
6	2	1	0	$\mu_2 \leq \lambda_2(2 + C)$	$u \propto p(x)$	$v \propto p(x)^2$	рис. 1(d)

ТАБ. 1. Evolution strategies depending on the parameter ν in (1.8)-(1.9).

	ν	n	m	Oscillations	Prey	Predator	Distribution
1	-1	0	2	no	$u \propto p(x)$	$v \propto p(x)^{-1}$	Fig. 1(a)
2	0	0	1	no	$u \propto p(x)$	$v = const$	Fig. 1(b)
3	0	1	2	$\mu_2 \leq \lambda_2(2 + C)$	$u \propto p(x)$	$v = const$	Fig. 2(b)
4	1	0	0	no	$u \propto p(x)$	$v \propto p(x)$	Fig. 1(c)
5	1	1	1	$\mu_2 \leq \lambda_2(2 + C)$	$u \propto p(x)$	$v \propto p(x)$	Fig. 2(a)
6	2	1	0	$\mu_2 \leq \lambda_2(2 + C)$	$u \propto p(x)$	$v \propto p(x)^2$	Fig. 1(d)

Таким образом, модель (1.6) допускает несколько эволюционных стратегий, определяемых функцией роста жертвы. С биологической точки зрения параметр ν соответствует одному из возможных сценариев роста жертвы при её выборе соответствующего закона роста (параметр n) и ориентации на ресурс (параметр m). Значения ν , получающиеся при сочетаниях параметров n и m , задают различные эволюционные стратегии, приводящие к соответствующему решению (1.8) со своим уникальным распределением двух популяций на ареале. В таб. 1 приведены некоторые важные для дальнейшего рассмотрения случаи, отвечающие наиболее интересным пространственным распределениям (рис. 1) и возможным колебательным режимам (рис. 2), которые для наглядности изображены на одномерном ареале ($x \in [0, 1]$). В расчетах использовалась следующее распределение ресурса:

$$p(x) = \exp \left[\frac{1}{2} \cos \left(\frac{3\pi x}{a} \right) \right]. \quad (1.12)$$

Приведенные на рис. 1 кривые демонстрируют варианты стратегии для хищника $v(x)$: от осторожной ($v(x)$ обратно пропорционально $u(x)$) и безразличной к распределению жертвы ($v(x) = const$), до агрессивной ($v(x)$ пропорционально квадрату плотности $u(x)$). Жертва не достигает своего максимума ввиду присутствия хищника, но остается пропорциональной ресурсу, что соответствует концепции ИСР, а распределение хищника можно трактовать как ИСР-подобное [4].

На рис. 2 приведена динамика плотностей жертвы $u(x, t)$ и хищника $v(x, t)$ при нарушении условия (1.11) для случаев $\nu = 0$ и $\nu = 1$, соответствующих 3-й и 5-й строкам таб. 1.

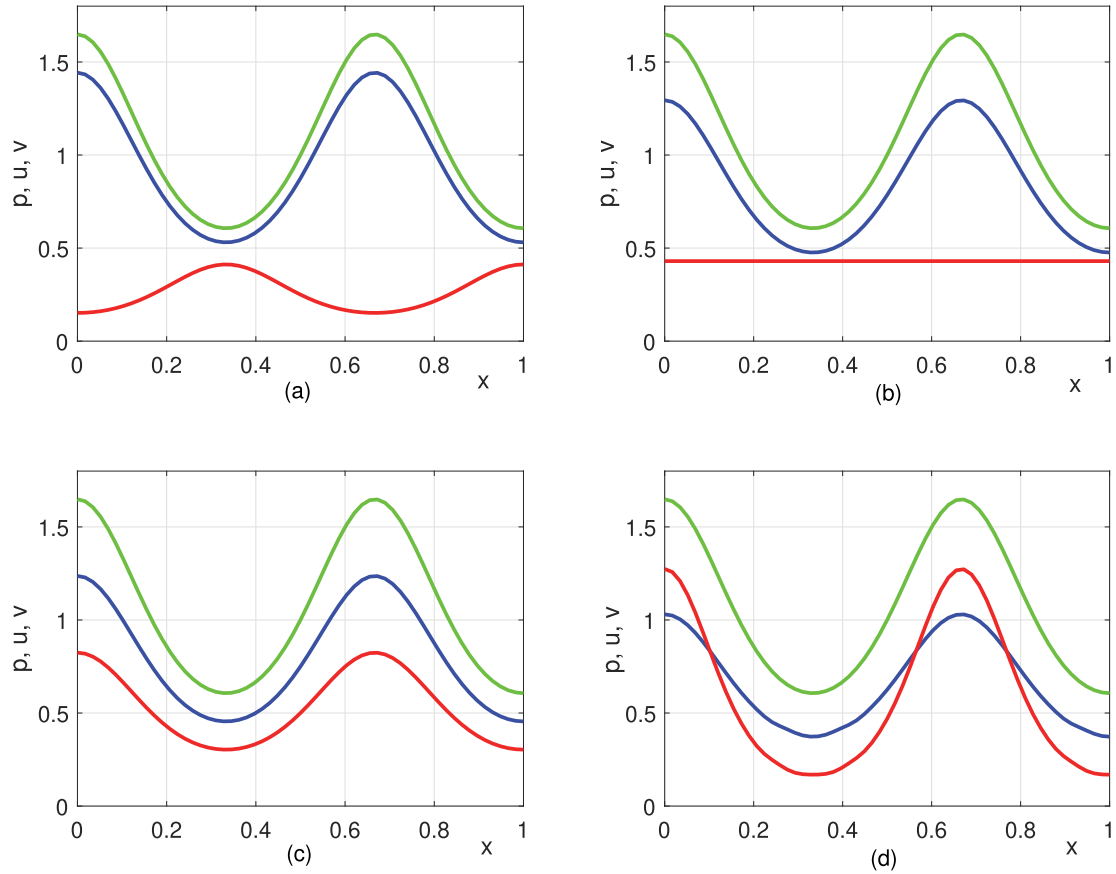


Рис. 1. Стационарные распределения жертвы $u(x)$ (синяя кривая) и хищника $v(x)$ (красная), ресурс $p(x)$ (зеленая): (a) $n = 0, m = 2, \lambda_2 = 1.75$, (b) $n = 0, m = 1, \lambda_2 = 1.57$, (c) $n = 0, m = 0, \lambda_2 = 1.5$, (d) $n = 1, m = 0, \lambda_2 = 1.25$; $\mu_1 = \mu_2 = 2, C = 0, \lambda_1 = 1$.

FIG. 1. Stationary distributions of prey $u(x)$ (blue curve) and predator $v(x)$ (red), resource $p(x)$ (green): (a) $n = 0, m = 2, \lambda_2 = 1.75$, (b) $n = 0, m = 1, \lambda_2 = 1.57$, (c) $n = 0, m = 0, \lambda_2 = 1.5$, (d) $n = 1, m = 0, \lambda_2 = 1.25$; $\mu_1 = \mu_2 = 2, C = 0, \lambda_1 = 1$.

2. СИСТЕМА С МУЛЬТИФАКТОРНЫМ ТАКСИСОМ

Для моделирования пространственно-временных взаимодействий хищника и жертвы применяется система уравнений диффузии—адвекции—реакции. В [1] было показано, что для получения ИСР-подобных решений помимо направленного движения жертвы на ресурс (таксис) необходимо учитывать таксис хищника (миграция в направлении жертвы). Учет многофакторного таксиса для взаимодействующих популяций на неоднородном ареале D позволяет сформулировать математическую модель в виде системы уравнений для плотностей видов $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\nabla q_1 + F_1, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\nabla q_2 + F_2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

их потоков q_i

$$\begin{aligned} q_1 &= -k_1 \nabla u + \alpha_1 u \nabla Q_1, \\ q_2 &= -k_2 \nabla v + \alpha_2 v \nabla Q_2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

и функций таксиса Q_i

$$Q_1 = \ln [p(x, y) + \beta_{11}u + \beta_{12}v],$$

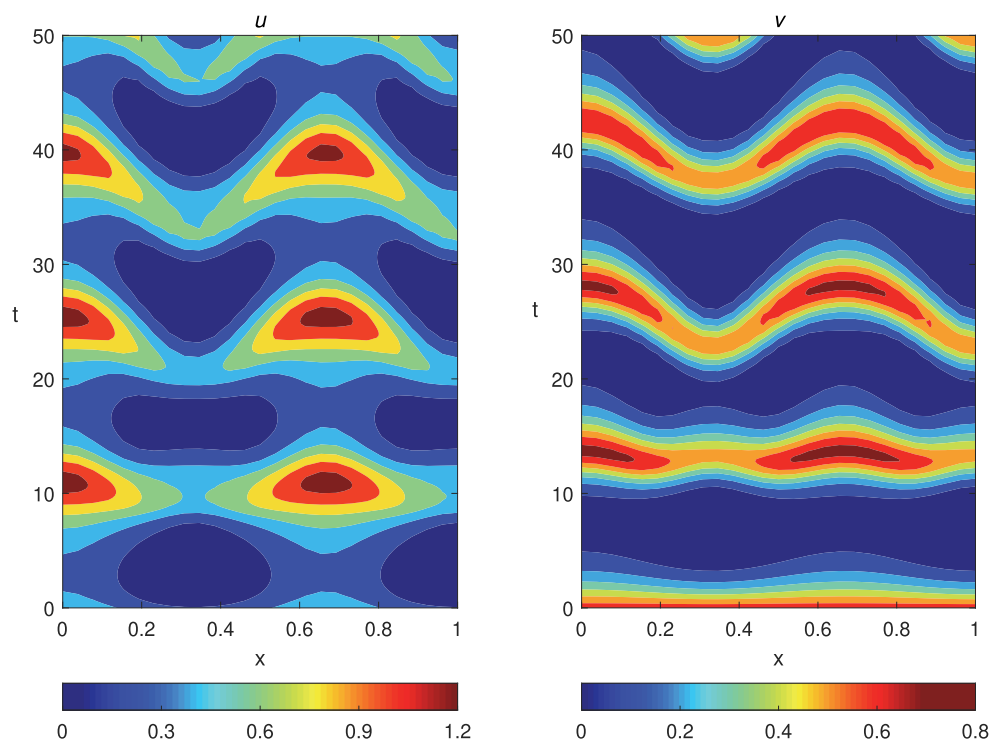


РИС. 2. Динамика жертвы $u(x, t)$ (слева) и хищника $v(x, t)$ (справа) при нарушении условия (1.11); $n = 1$, $m = 2$, $\lambda_1 = 1.5$, $\lambda_2 = 0.87$, $\mu_1 = \mu_2 = 2$, $C = 0$.

FIG. 2. Dynamics of prey $u(x, t)$ (left) and predator $v(x, t)$ (right) when condition (1.11) is violated; $n = 1$, $m = 2$, $\lambda_1 = 1.5$, $\lambda_2 = 0.87$, $\mu_1 = \mu_2 = 2$, $C = 0$.

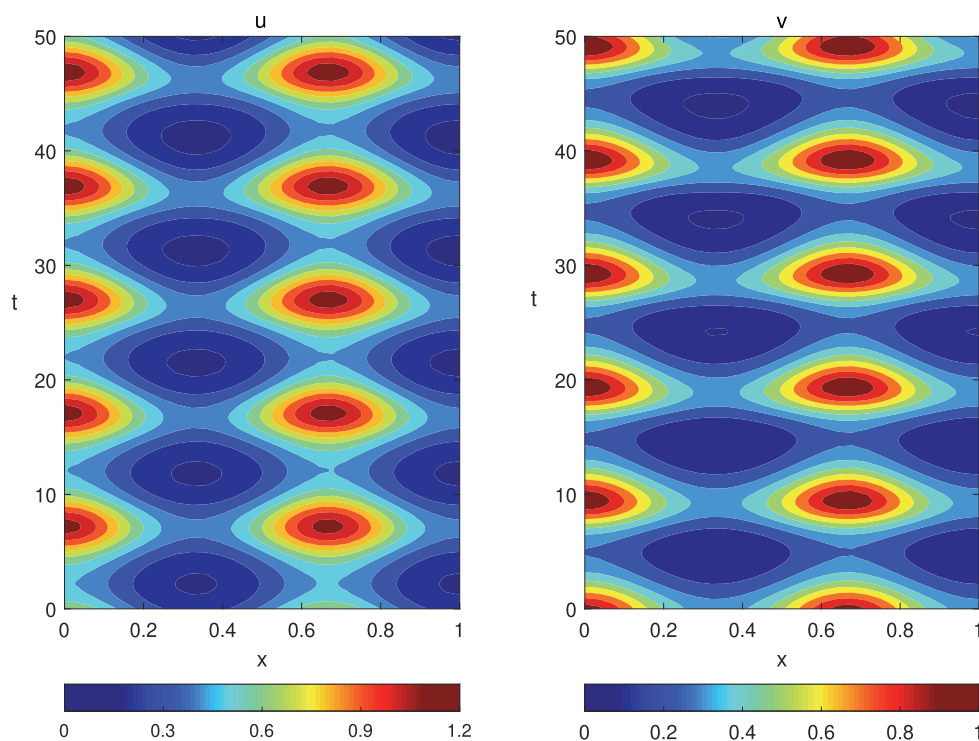


РИС. 3. Динамика жертвы $u(x, t)$ (слева) и хищника $v(x, t)$ (справа) при нарушении условия (1.11): $n = 1$, $m = 1$, $\lambda_1 = 1.3$, $\lambda_2 = 0.95$, $\mu_1 = \mu_2 = 2$.

FIG. 3. Dynamics of prey $u(x, t)$ (left) and predator $v(x, t)$ (right) when condition (1.11) is violated: $n = 1$, $m = 1$, $\lambda_1 = 1.3$, $\lambda_2 = 0.95$, $\mu_1 = \mu_2 = 2$.

$$Q_2 = \ln [p(x, y) + \beta_{21}u + \beta_{22}v]. \quad (2.3)$$

Здесь k_i — коэффициенты диффузии, направленная миграция Q_i включает в себя движение видов на ресурс, таксис хищника и жертвы друг на друга и на особей своего вида. Очевидно, что жертва будет избегать хищника ($\beta_{12} < 0$), а хищник, наоборот, преследовать жертву ($\beta_{21} > 0$). Вместе с тем, по отношению к своей популяции, возможны разные стратегии. Если коэффициенты β_{11}, β_{22} положительны, то будет иметь место образование стай, в противном случае — стремление избежать скопления особей своего вида. Направленное движение хищника на ресурс жертвы — достаточно типичная ситуация, многие хищники избирают тактику засад в местах, наиболее привлекательных с точки зрения кормовой базы жертвы [17].

Система (2.1) дополняется краевыми условиями отсутствия потоков ($\vec{n}$ — нормаль)

$$q_j \cdot \vec{n} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (x, y) \in \partial D, \quad (2.4)$$

и начальными распределениями плотностей популяций

$$u(x, y, 0) = u^0(x, y), \quad v(x, y, 0) = v^0(x, y). \quad (2.5)$$

Полученные для модели локального взаимодействия распределения (1.8) могут быть решениями системы (2.1) при дополнительных условиях на параметры диффузии и таксиса.

Утверждение 2.1. Система (2.1) будет иметь ИСР-подобные решения (1.8), если на границе ареала

$$\nabla p \cdot \vec{n} = 0, \quad (x, y) \in \partial D, \quad (2.6)$$

и выполнены условия

$$\begin{aligned} k_1 &= \left(\frac{1 + A\beta_{11} + \nu B_n p^{\nu-1} \beta_{12}}{1 + A\beta_{11} + B_n p^{\nu-1} \beta_{12}} \right) \alpha_1, \\ \nu k_2 &= \left(\frac{1 + A\beta_{21} + \nu B_n p^{\nu-1} \beta_{22}}{1 + A\beta_{21} + B_n p^{\nu-1} \beta_{22}} \right) \alpha_2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Доказательство. Так как решение (1.8) не зависит от времени и обнуляет функции локального взаимодействия (1.1), то

$$\nabla \cdot q_i = 0, \quad (x, y) \in D. \quad (2.8)$$

Подставляя (1.8) в (2.2), (2.3) и дифференцируя, получим

$$\begin{aligned} q_1 &= A \nabla p \left[-k_1 + \alpha_1 \left(\frac{1 + A\beta_{11} + \nu B_n p^{\nu-1} \beta_{12}}{1 + A\beta_{11} + B_n p^{\nu-1} \beta_{12}} \right) \right], \\ q_2 &= B_n p^{\nu-1} \nabla p \left[-\nu k_2 + \alpha_2 \left(\frac{1 + A\beta_{21} + \nu B_n p^{\nu-1} \beta_{22}}{1 + A\beta_{21} + B_n p^{\nu-1} \beta_{22}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Поскольку q_i пропорциональны ∇p и выполнено (2.6), то потоки равны нулю во всей области D :

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad (2.10)$$

и для решения (1.8) с положительными A, B_n и C должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} -k_1 + \alpha_1 \left(\frac{1 + A\beta_{11} + \nu B_n p^{\nu-1} \beta_{12}}{1 + A\beta_{11} + B_n p^{\nu-1} \beta_{12}} \right) &= 0, \\ -\nu k_2 + \alpha_2 \left(\frac{1 + A\beta_{21} + \nu B_n p^{\nu-1} \beta_{22}}{1 + A\beta_{21} + B_n p^{\nu-1} \beta_{22}} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Эти равенства тождественно удовлетворяются в силу (2.7). $\square$

Из условий (2.7) следует, что соотношения между коэффициентами k_i и α_i зависят от параметра ν , см. таб. 2, в которой представлены четыре основных случая, отвечающих таб. 1. Если параметры k_i и α_i не зависят от координат, то ИСР возможно только в случае $\nu = 1$ (третья строка таб. 2). При $\nu \neq 1$ для сохранения решений (1.8) требуется, чтобы диффузионные параметры k_i (или миграционные α_i) являлись функциями от ресурса $p(x, y)$ и коэффициентов локального взаимодействия μ_i и λ_i , входящих в A и B_n .

ТАБ. 2. Условия (2.7) для ИСР при различных значениях параметра ν .ТАБ. 2. Conditions (2.7) for IFD for different values of the parameter ν .

ν	Условия / Conditions	
-1	$k_1 = \left[1 - \frac{2B_n\beta_{12}}{p^2 + A\beta_{11}p^2 + B_n\beta_{12}} \right] \alpha_1$	$-k_2 = \left[1 - \frac{2B_n\beta_{22}}{p^2 + A\beta_{21}p^2 + B_n\beta_{22}} \right] \alpha_2$
0	$k_1 = \left[1 - \frac{B_n\beta_{12}}{p + A\beta_{11}p + B_n\beta_{12}} \right] \alpha_1$	$0 = \left[1 - \frac{B_n\beta_{22}}{p + A\beta_{21}p + B_n\beta_{22}} \right] \alpha_2$
1	$k_1 = \alpha_1$	$k_2 = \alpha_2$
2	$k_1 = \left[1 + \frac{B_n\beta_{12}p}{1 + A\beta_{11} + B_n\beta_{12}p} \right] \alpha_1$	$2k_2 = \left[1 + \frac{B_n\beta_{22}p}{1 + A\beta_{21} + B_n\beta_{22}p} \right] \alpha_2$

Условие $k_j = \alpha_j$ при $\nu = 1$ было получено в [23] для частного варианта функции таксиса. Примеры реализации решений для конкретной функции ресурса даны ниже.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для решения начально-краевой задачи (2.1)–(2.5) использовался метод прямых на основе компактной разностной схемы по пространственной координате и метода Рунге–Кутты четвертого порядка точности по времени [2, 3]. В качестве начальных распределений использовались выражения (1.8)–(1.9) для ряда значений n и m . Распределение ресурса на одномерном ареале задавалось функцией (1.12). Основная цель экспериментов состояла в вычислении стационарных распределений популяций в зависимости от выбранной стратегии, каждая из которых описывается определенным набором параметров локального взаимодействия и направленного движения особей. Поскольку ИСР является необходимым и достаточным условием для ЭСС [7], то в вычислительных экспериментах рассматривались в основном стратегии с ИСР, как представляющие интерес с биологической точки зрения.

На рис. 4 представлены финальные распределения жертвы (синие кривые) и хищника (красные), полученные для эволюционных стратегий при $\nu = -1$ и различных параметрах k_i , α_i , β_{ij} , $i, j = 1, 2$. В первой строке таб. 1 представлена стратегия в отсутствие потоков ($k_i = \alpha_i = 0$), для которой распределение жертвы пропорционально ресурсу, а хищника — обратно пропорционально (сплошные жирные кривые). Наличие диффузии и таксиса в общем случае приводит к отклонению от этой стратегии, за исключением случая, когда потоковые коэффициенты удовлетворяют условию (2.7).

Если, например, $k_1 = \alpha_1$ и $k_2 = -\alpha_2$, то в зависимости от величины коэффициентов β_{ij} получаем отклонения в распределениях популяций (тонкая сплошная и пунктирные кривые). Когда коэффициенты k_2 и α_2 одного знака, то распределение хищника кардинально меняется (звездочки на рис. 4), становясь ИСР-подобным, что свидетельствует о существенном изменении стратегии.

На рис. 5 представлены распределения для эволюционной стратегии при $\nu = 0$ (вторая и третья строки таб. 1). Начальные распределения ($k_i = \alpha_i = 0$) представлены сплошными жирными линиями, иллюстрирующими равномерное, не зависящее от координаты, распределение хищника и ИСР жертвы. Согласно (2.7), наличие потоков не вызовет изменения в распределении популяций, если $\alpha_2 = 0$ (вторая строка таб. 2). Если $\alpha_2 = 0$ и нарушено условие (2.7), то при $\beta_{12} > 0$ хищник избегает больших скоплений жертвы и меняется его распределение (сплошные тонкие линии). При изменении знака β_{12} распределение $v(x)$ меняет выпуклость (пунктирные линии), что свидетельствует о смене стратегии: хищник ориентируется на скопления жертвы. При $\alpha_2 \neq 0$ этот эффект лишь усиливается (звездочки на рис. 5), приводя к ИСР-подобным распределениям обоих видов.

Отметим, что в полной системе с потоками (2.1) при нарушении условия (1.11) возможны колебания. В качестве примера рассмотрим рис. 6, на котором изображен колебательный режим

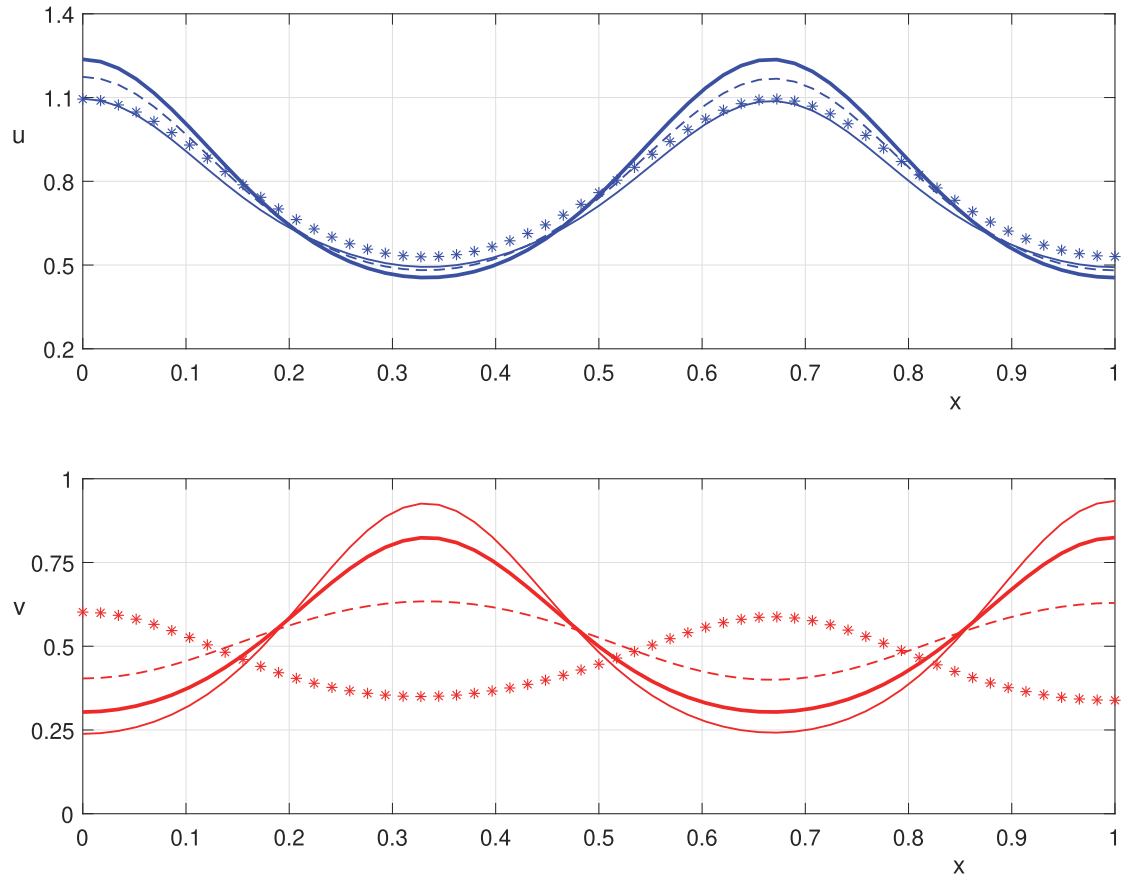


Рис. 4. Эволюционная стратегия при $\nu = -1$ (толстая кривая, $k_i = \alpha_i = 0$), жертва u (верх), хищник v (низ) на одномерном ареале, $n = 0$, $m = 2$. Финальные распределения при $\alpha_2 = -0.01$, $\beta_{12} = 1$, $\beta_{22} = 0$ (сплошная тонкая), $\alpha_2 = -0.01$, $\beta_{22} = 2$, $\beta_{12} = 0$ (пунктир), $\alpha_2 = 0.01$, $\beta_{22} = 2$, $\beta_{12} = 0$ (звездочки); $\mu_1 = \mu_2 = 2$, $C = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1.5$, $k_i = 0.01$, $\alpha_1 = 0.01$, $\beta_{11} = \beta_{21} = 0$.

FIG. 4. Evolution strategy for $\nu = -1$ (thick curve, $k_i = \alpha_i = 0$), prey u (top), predator v (bottom) on a one-dimensional habitat, $n = 0$, $m = 2$. Final distributions for $\alpha_2 = -0.01$, $\beta_{12} = 1$, $\beta_{22} = 0$ (thin solid), $\alpha_2 = -0.01$, $\beta_{22} = 2$, $\beta_{12} = 0$ (dashed), $\alpha_2 = 0.01$, $\beta_{22} = 2$, $\beta_{12} = 0$ (asterisks); $\mu_1 = \mu_2 = 2$, $C = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1.5$, $k_i = 0.01$, $\alpha_1 = 0.01$, $\beta_{11} = \beta_{21} = 0$.

для стратегии $\nu = 1$ с нарушением условий (1.11) и (2.7): $\lambda_2 = 0.95 < 2 = \mu_2$, $k_1 \neq \alpha_1$ (третья строка таб. 2). Видно, что даже при наличии колебаний распределение популяций $u(x, t)$ и $v(x, t)$ сохраняют подобие ИСР, с той лишь разницей, что жертва (рис. 6, график слева) сильнее ориентируется на ресурс, а популяция хищника более размазана по ареалу (рис. 6 график справа).

На рис. 7 приведены результаты исследования полной системы (2.1) в зависимости от параметра C функции трофического взаимодействия. В качестве основной взята стратегия $\nu = -1$ (сплошные жирные кривые, $C = 0$), а параметр C принимал значения $C = 0.45$ (пунктирная кривая) и $C = 0.6$ (звездочки на рис. 7). Слева изображено стационарное распределение жертвы (синий цвет), а справа — стационарное распределение хищника (красный). Видно, что увеличение параметра C принципиально не изменяет стратегии, а приводит лишь к убыли популяции хищника и росту популяции жертвы. Дальнейшее увеличение C вызывает нарушение условия устойчивости (1.11) для двух видов и приводит к решению без хищника.

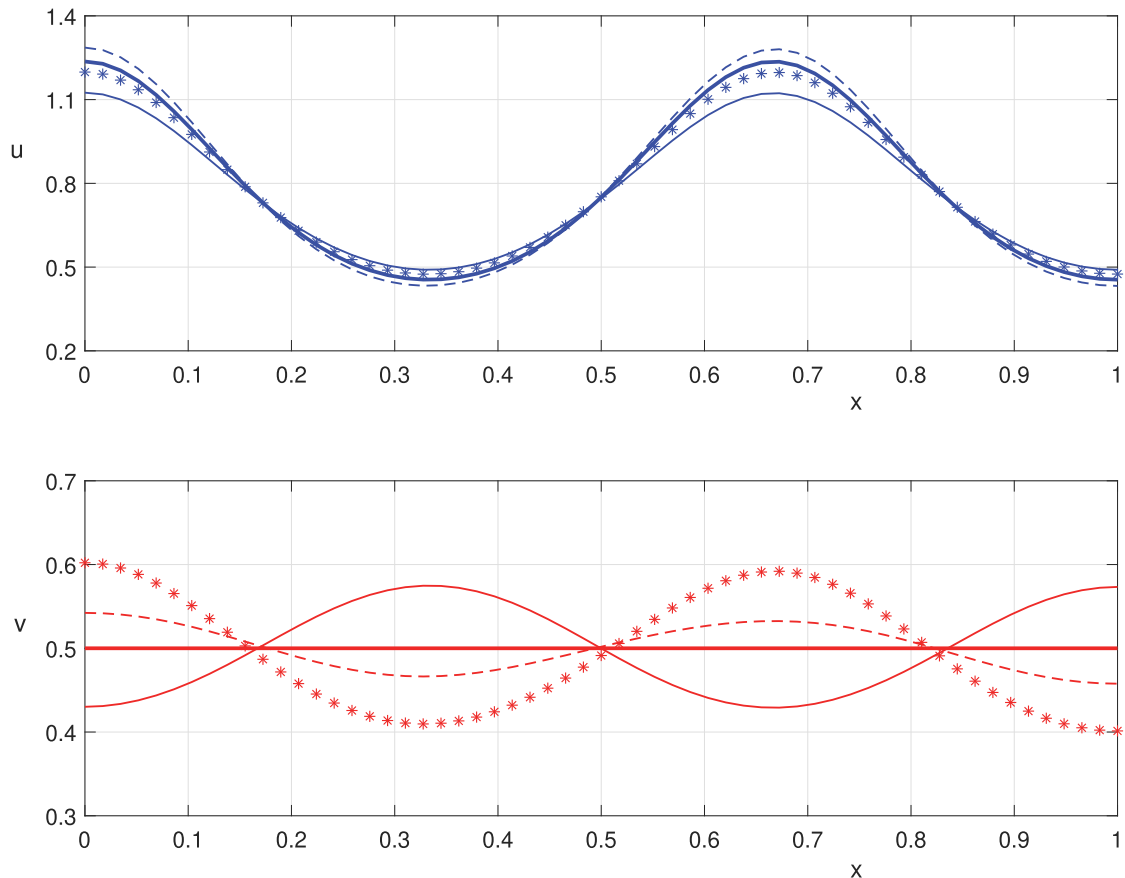


Рис. 5. Эволюционная стратегия при $\nu = 0$ (толстая кривая, $k_i = \alpha_i = 0$), жертва u (верх), хищник v (низ), $n = 0$, $m = 1$. Финальные распределения при $\alpha_2 = 0$, $\beta_{12} = 1$ (сплошная тонкая), $\alpha_2 = 0$, $\beta_{12} = -0.5$ (пунктир), $\alpha_2 = 0.005$, $\beta_{12} = 0$ (звездочки); $\mu_1 = \mu_2 = 2$, $C = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1.5$, $k_i = 0.01$, $\alpha_1 = 0.01$, $\beta_{11} = \beta_{21} = 0 = \beta_{22} = 0$.

FIG. 5. Evolutionary strategy for $\nu = 0$ (thick curve, $k_i = \alpha_i = 0$), prey u (top), predator v (bottom), $n = 0$, $m = 1$. Final distributions for $\alpha_2 = 0$, $\beta_{12} = 1$ (thin solid), $\alpha_2 = 0$, $\beta_{12} = -0.5$ (dashed line), $\alpha_2 = 0.005$, $\beta_{12} = 0$ (asterisks); $\mu_1 = \mu_2 = 2$, $C = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1.5$, $k_i = 0.01$, $\alpha_1 = 0.01$, $\beta_{11} = \beta_{21} = 0 = \beta_{22} = 0$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе построена математическая модель взаимодействующих популяций хищника и жертвы, позволяющая описать разнообразные эволюционные стратегии в рамках одной математической модели на основе уравнений диффузии—адвекции—реакции. Большое число параметров системы (2.1)–(2.5) приводит к многообразию эволюционных стратегий, каждая из которых задает правила поведения видов в процессе взаимодействия с окружающей средой (ресурс $p(x)$) и друг с другом. Математически, одна стратегия отличается от другой значениями параметров системы уравнений, что позволяет описать основные биологические процессы: рост жертвы (1.2), хищничество (1.5), локальное взаимодействие (1.1) и направленное движение (2.3), вызванное различными раздражителями (стимулами).

Среди большого многообразия стратегий практическую значимость представляют ЭСС, придерживаясь которых, виды могут стабильно существовать на неоднородном ареале, не боясь вытеснения или полного исчезновения. Безусловно, построение ЭСС на основе модели (2.1) требует знания о реальных значениях всех входящих в нее коэффициентах и функциональных зависимостях. Так, для описания локальной динамики системы «хищник—жертва» (реакция) требуются коэффициенты роста и убыли видов. Чтобы учесть пространственные эффекты, необходимы

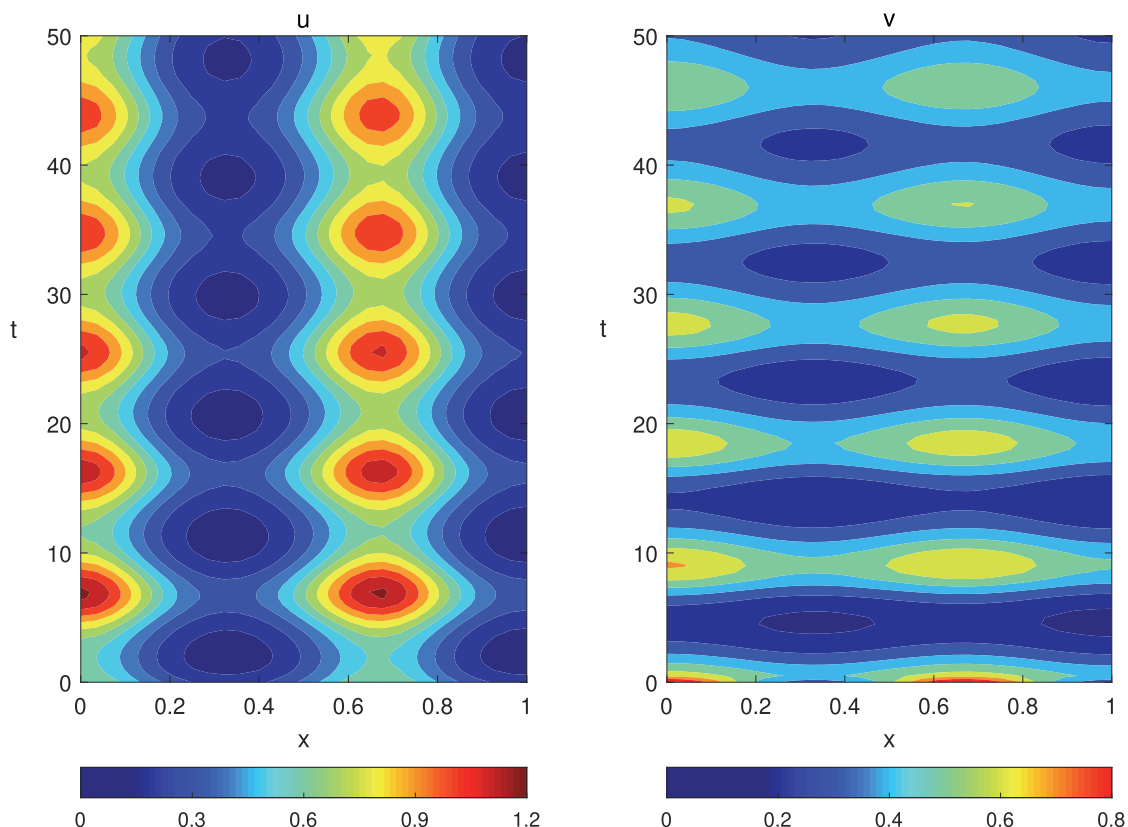


РИС. 6. Динамика жертвы $u(x, t)$ (слева) и хищника $v(x, t)$ (справа); $n = 1$, $m = 1$. $\mu_i = 2$, $\lambda_1 = 1.3$, $\lambda_2 = 0.95$, $C = 0$, $k_1 = 0.01$, $k_2 = 0.05$, $\alpha_i = 0.01$, $\beta_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2$.

FIG. 6. Dynamics of prey $u(x, t)$ (left) and predator $v(x, t)$ (right); $n = 1$, $m = 1$. $\mu_i = 2$, $\lambda_1 = 1.3$, $\lambda_2 = 0.95$, $C = 0$, $k_1 = 0.01$, $k_2 = 0.05$, $\alpha_i = 0.01$, $\beta_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2$.

функция ресурса, коэффициенты диффузии и таксиса (направленной миграции). В силу неоднородности ареала и сезонности возникает проблема описания соответствующих параметрических зависимостей.

Задача определения коэффициентов и функций, отвечающих конкретным условиям сосуществования видов, является сложной, и для ее решения часть параметров находится из имеющихся простых наблюдений, а для подбора остальных проводится вычислительный эксперимент со значениями из некоторых диапазонов. При этом наблюдаемые в природе распределения наводят на мысль о возможной связи параметров локального взаимодействия и пространственного распределения (коэффициентов диффузии и таксиса). Так, математический анализ задачи об инвазии хищника на неоднородный по ресурсу, занятый другим видом ареал показал, что для корректного описания динамики нужно модифицировать функциональный отклик, введя зависимость от неравномерно распределенного ресурса [4, 12]. Другим примером являются соотношения, связывающие параметры диффузии и направленной миграции, обеспечивающие реализацию идеального свободного распределения [22, 23].

В данной работе предпринята попытка построения популяционной модели, описывающей локальные и пространственные взаимодействия хищника и жертвы на неоднородном ареале, с такими зависимостями между параметрами, которые приводят к нескольким эволюционным ИСР-стратегиям. Используя гипотезу о распределении жертвы пропорционально плотности ресурса, предложены новые функциональные зависимости роста жертвы и трофического взаимодействия, обеспечивающие различные сценарии поведения хищника. Представлены явные формулы, позволяющие рассчитывать стационарные распределения сосуществующих видов и анализировать колебательные процессы.

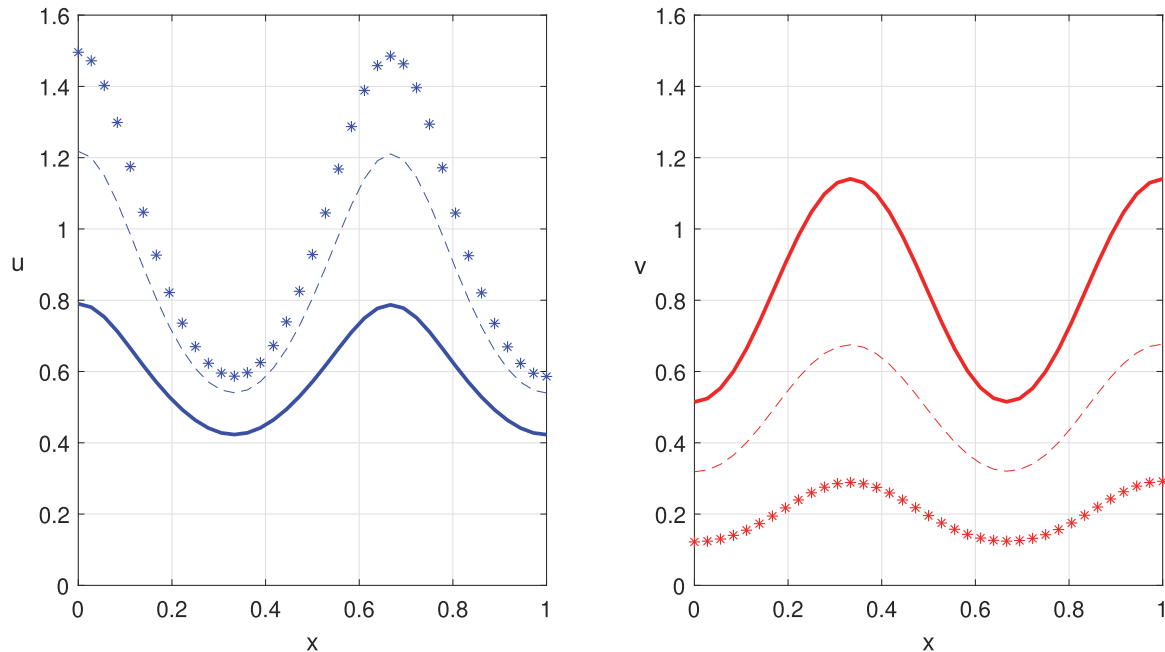


РИС. 7. Зависимость от параметра C финальных распределений жертвы $u(x, t)$ (слева) и хищника $v(x, t)$ (справа): $C = 0$ (сплошная), $C = 0.45$ (пунктир), $C = 0.6$ (звездочки); $n = 0$, $m = 2$, $\mu_i = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1.2$, $k_i = 0.01$, $\alpha_1 = 0.01$, $\alpha_2 = -0.01$, $\beta_{ij} = 1$, $i, j = 1, 2$.

FIG. 7. Final distributions of prey $u(x, t)$ (left) and predator $v(x, t)$ (right) as functions of parameter C : $C = 0$ (solid), $C = 0.45$ (dashed), $C = 0.6$ (asterisks); $n = 0$, $m = 2$, $\mu_i = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1.2$, $k_i = 0.01$, $\alpha_1 = 0.01$, $\alpha_2 = -0.01$, $\beta_{ij} = 1$, $i, j = 1, 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зеленчук П. А., Цибулин В. Г. Идеальное свободное распределение в модели «хищник—жертва» при многофакторном таксисе// Биофизика. — 2021. — 66, № 3. — С. 546–554.
2. Зеленчук П. А., Цибулин В. Г. Математическая модель идеального свободного распределения в системе хищник—жертва// Современ. мат. Фундам. направл. — 2023. — 69, № 2. — С. 237–249.
3. Нгуен Б. Х., Цибулин В. Г. Схема повышенного порядка точности для моделирования динамики хищника и жертвы на неоднородном ареале// Изв. ВУЗов. Прикл. нелин. динам. — 2023. — 32, № 3. — С. 294–304.
4. Цибулин В. Г., Ха Т. Д., Зеленчук П. А. Нелинейная динамика системы хищник—жертва на неоднородном ареале и сценарии локального взаимодействия видов// Изв. ВУЗов. Прикл. нелин. динам. — 2021. — 29, № 5. — С. 751–764.
5. Beyer H. G., Schwefel H. P. Evolution strategies — A comprehensive introduction// Nat. Comput. — 2002. — 1. — С. 3–52.
6. Cantrell R. S., Cosner C. Evolutionary stability of ideal free dispersal under spatial heterogeneity and time periodicity// Math. Biosci. — 2018. — 305. — С. 71–76.
7. Cantrell R. S., Cosner C., DeAngelis D. L., Padron V. The ideal free distribution as an evolutionarily stable strategy// J. Biol. Dyn. — 2007. — 1, № 3. — С. 249–271.
8. Chesson P. General theory of competitive coexistence in spatially-varying environments// Theor. Popul. Biol. — 2000. — 58, № 3. — С. 211–237.
9. Cosner C. Reaction-diffusion-advection models for the effects and evolution of dispersal// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2014. — 34, № 5. — С. 1701–745.
10. Courchamp F., Berec L., Gascoigne J. C. Allee effects in ecology and conservation. — New York: Oxford Univ. Press, 2008.
11. Fretwell S. D., Lucas H. L. On territorial behavior and other factors influencing habitat distribution in birds// Acta Biotheor. — 1970. — 19. — С. 16–36.
12. Ha T. D., Tsybulin V. G., Zelenchuk P. A. How to model the local interaction in the predator–prey system at slow diffusion in a heterogeneous environment?// Ecol. Complexity. — 2022. — 52. — 101026.

13. *Kacelnik A., Krebs J. R., Bernstein C.* The ideal free distribution and predator-prey populations// Trends Ecol. Evol. — 1992. — 7. — С. 50–55.
14. *Leimar O., McNamara J. M.* Game theory in biology: 50 years and onwards// Philos. Trans. R. Soc. B. Biol. Sci. — 2023. — 378. — 20210509.
15. *Lessells C. M.* Putting resource dynamics into continuous free distribution models// Animal Behav. — 1995. — 49, № 2. — С. 487–494.
16. *Metz J. A. J., Nisbet R. M., Geritz S. A.* How should we define «fitness» for general ecological scenarios?// Trends Ecol. Evol. — 1992. — 7, № 6. — С. 198–202.
17. *Murray J. D.* Mathematical biology. — New York: Springer, 2003.
18. *Schwinning S., Rosenzweig M. L.* Periodic oscillations in an ideal-free predator-prey distribution// OIKOS. — 1990. — 59. — С. 85–91.
19. *Smith M. J., Price G. R.* The logic of animal conflict// Nature. — 1973. — 246. — С. 15–18.
20. *Tyutyunov Yu., Titova L.* From Lotka–Volterra to Arditi–Ginzburg: 90 years of Evolving Trophic Functions// Biol. Bull. Rev. — 2020. — 10, № 3. — С. 167–185.
21. *Van Cleve J.* Evolutionarily stable strategy analysis and its links to demography and genetics through invasion fitness// Philos. Trans. R. Soc. B. Biol. Sci. — 2023. — 378. — 20210496.
22. *Zelenchuk P. A., Tsybulin V. G.* Mathematical model of ideal free distribution in the predator–prey system// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2024. — 285. — С. 328–338.
23. *Zelenchuk P. A., Tsybulin V. G.* Predator–prey dynamics and ideal free distribution in a heterogeneous environment// Mathematics. — 2024. — 12, № 2. — 275.

П. А. Зеленчук

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: zelenchuk@sfedu.ru

В. Г. Цибулин

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: vgcibulin@sfedu.ru

UDC 519.63

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-370-384

EDN: FCHSSL

Modeling of evolutionary strategies of interacting populations in a heterogeneous habitat

P. A. Zelenchuk and V. G. Tsybulin

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

Abstract. Using a predator–prey model in a heterogeneous environment, we have created a mathematical model that describes the interaction between populations with different evolutionary strategies. The model is based on partial differential equations and allows for the consideration of multifactor taxis. We propose modified functions of local predator–prey interactions, which provide a variety of evolutionary strategies for the system. Key parameters responsible for the formation of ideal free distribution strategies have been investigated, and conditions for the parameters of diffusion and migration have been given under which ideal free distribution-like strategies can be implemented. Results from computational experiments demonstrating stationary and oscillating modes have been presented.

Keywords: evolutionary strategy, ideal free distribution, reaction–diffusion–advection equations, predator–prey system.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors express their gratitude to all participants of the N. D. Kopachevskii Crimean Autumn Mathematical School-Symposium (KROMSH-2024) for their interest in this work and helpful discussions. This work was carried out at Southern Federal University and supported by the Russian Science Foundation (RSF), grant No. 25-21-00419.

For citation: P. A. Zelenchuk, V. G. Tsybulin, “Modeling of evolutionary strategies of interacting populations in a heterogeneous habitat,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 3, 370–384. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-370-384>

REFERENCES

1. P. A. Zelenchuk and V. G. Tsybulin, “Ideal’noe svobodnoe raspredelenie v modeli «khishchnik—zhertva» pri mnogofaktornom taksise” [Ideal free distribution in the predator–prey model with multivariate taxis], *Biofizika* [Biophysics], 2021, **66**, No. 3, 546–554 (in Russian).
2. P. A. Zelenchuk and V. G. Tsybulin, “Matematicheskaya model’ ideal’nogo svobodnogo raspredeleniya v sisteme khishchnik—zhertva” [Mathematical model of ideal free distribution in a predator–prey system], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 2, 237–249 (in Russian).
3. B. Kh. Nguen and V. G. Tsybulin, “Skhema povyshennogo poryadka tochnosti dlya modelirovaniya dinamiki khishchnika i zhertvy na neodnorodnom areale” [A scheme of high order of accuracy for modeling predator–prey dynamics in a heterogeneous habitat], *Izv. VUZov. Prikl. neline. dinam.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Appl. Nonlinear Dyn.], 2023, **32**, No. 3, 294–304 (in Russian).
4. V. G. Tsybulin, T. D. Ha, and P. A. Zelenchuk, “Nelineynaya dinamika sistemy khishchnik—zhertva na neodnorodnom areale i stsenarii lokal’nogo vzaimodeystviya vidov” [Nonlinear dynamics of the predator–prey system in a heterogeneous habitat and scenarios of local interactions of species], *Izv. VUZov. Prikl. neline. dinam.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Appl. Nonlinear Dyn.], 2021, **29**, No. 5, 751–764 (in Russian).



5. H. G. Beyer and H. P. Schwefel, “Evolution strategies — A comprehensive introduction,” *Nat. Comput.*, 2002, **1**, 3–52.
6. R. S. Cantrell and C. Cosner, “Evolutionary stability of ideal free dispersal under spatial heterogeneity and time periodicity,” *Math. Biosci.*, 2018, **305**, 71–76.
7. R. S. Cantrell, C. Cosner, D. L. DeAngelis, and V. Padron, “The ideal free distribution as an evolutionarily stable strategy,” *J. Biol. Dyn.*, 2007, **1**, No. 3, 249–271.
8. P. Chesson, “General theory of competitive coexistence in spatially-varying environments,” *Theor. Popul. Biol.*, 2000, **58**, No. 3, 211–237.
9. C. Cosner, “Reaction-diffusion-advection models for the effects and evolution of dispersal,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2014, **34**, No. 5, 1701–745.
10. F. Courchamp, L. Berec, and J. C. Gascoigne, *Allee effects in ecology and conservation*, Oxford Univ. Press, New York, 2008.
11. S. D. Fretwell and H. L. Lucas, “On territorial behavior and other factors influencing habitat distribution in birds,” *Acta Biotheor.*, 1970, **19**, 16–36.
12. T. D. Ha, V. G. Tsybulin, and P. A. Zelenchuk, “How to model the local interaction in the predator–prey system at slow diffusion in a heterogeneous environment?,” *Ecol. Complexity*, 2022, **52**, 101026.
13. A. Kacelnik, J. R. Krebs, and C. Bernstein, “The ideal free distribution and predator-prey populations,” *Trends Ecol. Evol.*, 1992, **7**, 50–55.
14. O. Leimar and J. M. McNamara, “Game theory in biology: 50 years and onwards,” *Philos. Trans. R. Soc. B. Biol. Sci.*, 2023, **378**, 20210509.
15. C. M. Lessells, “Putting resource dynamics into continuous free distribution models,” *Animal Behav.*, 1995, **49**, No. 2, 487–494.
16. J. A. J. Metz, R. M. Nisbet, and S. A. Geritz, “How should we define «fitness» for general ecological scenarios?,” *Trends Ecol. Evol.*, 1992, **7**, No. 6, 198–202.
17. J. D. Murray, *Mathematical biology*, Springer, New York, 2003.
18. S. Schwinning and M. L. Rosenzweig, “Periodic oscillations in an ideal-free predator-prey distribution,” *OIKOS*, 1990, **59**, 85–91.
19. M. J. Smith and G. R. Price, “The logic of animal conflict,” *Nature*, 1973, **246**, 15–18.
20. Yu. Tyutyunov and L. Titova, “From Lotka–Volterra to Arditi–Ginzburg: 90 years of Evolving Trophic Functions,” *Biol. Bull. Rev.*, 2020, **10**, No. 3, 167–185.
21. J. Van Cleve, “Evolutionarily stable strategy analysis and its links to demography and genetics through invasion fitness,” *Philos. Trans. R. Soc. B. Biol. Sci.*, 2023, **378**, 20210496.
22. P. A. Zelenchuk and V. G. Tsybulin, “Mathematical model of ideal free distribution in the predator–prey system,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2024, **285**, 328–338.
23. P. A. Zelenchuk and V. G. Tsybulin, “Predator–prey dynamics and ideal free distribution in a heterogeneous environment,” *Mathematics*, 2024, **12**, No. 2, 275.

P. A. Zelenchuk

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

E-mail: zelenchuk@sfedu.ru

V. G. Tsybulin

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

E-mail: vgcibulin@sfedu.ru

УДК 539.376

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-385-394

EDN: FCHSZQ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ

Р. Н. НЕСКОРОДЕВ, А. В. ЗЫЗА

Донецкий государственный университет, Донецк, Россия

Аннотация. В статье предложена численно-аналитическая методика решения задач линейной вязкоупругости анизотропного тела, не требующая явного построения аналитического представления ядер ползучести и релаксации. Приближенное решение интегральных уравнений базируется на непосредственном использовании экспериментальных данных, предварительно сглаженных и заполненных более густой сеткой. Таким образом, решение граничных задач вязкоупругости сводится к решению задач теории упругости в произвольный момент времени.

Ключевые слова: вязкоупругая деформация, анизотропная среда, численно-аналитическое решение.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДОНГУ» при финансовой поддержке Азово-Черноморского математического центра (соглашение от 29.02.2024 № 075-02-2024-1446).

Для цитирования: Р. Н. Нескороев, А. В. Зыза. Моделирование исследования вязкоупругого деформирования упругих тел // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 3. С. 385–394. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-385-394>

1. ВВЕДЕНИЕ

Механические свойства наследственно-упругих материалов, к которым можно отнести многие горные породы, пластмассы, металлы и сплавы, а также полимерные и композитные материалы на полимерной основе, при длительном нагружении в значительной степени зависят от времени. В условиях эксплуатации элементы конструкций из таких материалов подвергаются постоянным или меняющимся во времени режимам нагружения, в результате действия которых происходит перераспределение напряжений и деформаций, заметно изменяющее картину распределения напряжений и деформаций по сравнению с упругим случаем. Уточнение перераспределения напряжений и деформаций может быть полезным при оценке долговечности и несущей способности элементов конструкций.

Одним из наиболее используемых при решении задач линейной теории вязкоупругости является метод, основанный на принципе В. Вольтерра, идея которого заключается в следующем: для решения задач вязкоупругости необходимо построить решение задачи линейной теории упругости и в окончательном результате заменить упругие постоянные операторами, расшифровав полученные комбинации операторов или функции от операторов.

Непосредственное применение принципа Вольтерра к анализу напряженно деформированного состояния анизотропных сред является весьма затруднительным. Это связано с тем, что существует лишь незначительное число задач теории упругости, для которых известна явная зависимость от упругих постоянных, если использовать упругое решение в обычной форме.

В случае, когда упругие решения содержат дробно-рациональные функции от упругих постоянных, решение задач вязкоупругости может быть легко получено при помощи алгебры резольвентных операторов Вольтерра, которая обладает следующими свойствами [1]:

Свойство 1 (теорема умножения). Для любых регулярных точек x и y имеет место равенство

$$P^*(x)P^*(y) = [P^*(x) - P^*(y)] / (x - y), \quad x \neq y.$$

Свойство 2. Для любого резольвентного оператора $P^*(\beta)$ имеет место формула обращения

$$[1 - \lambda P^*(\beta)]^{-1} = 1 + \lambda R^*(\beta + \lambda).$$

Оператор $\bar{R}_\lambda = 1 + \lambda R^*(\beta + \lambda)$ называется *обратным* для оператора $\bar{P}_\lambda = 1 - \lambda P^*(\beta)$, а оператор $R^*(\beta + \lambda)$ — *резольвентным* для $P^*(\beta)$. Резольвентный оператор образован из функций того же класса, что и $P^*(\beta)$, сдвигом по параметру λ .

В общем случае (например, для анизотропных сред) это решение может содержать иррациональные или трансцендентные функции от упругих постоянных. Это делает невозможным непосредственное использование алгебры резольвентных операторов к решению таких задач. Поэтому для решения упругих задач применяются приближенные методы, идея которых состоит в поиске решения, когда его зависимость от упругих постоянных устанавливается в явном виде. Степенные ряды, в которые раскладываются иррациональные и трансцендентные функции, как правило, сходятся медленно. Поэтому для получения достаточно точного решения нужно сохранять большое число членов ряда. Это приводит к громоздким вычислениям и потере точности.

В задачах вязкоупругости для анизотропного тела, в отличие от задач теории упругости, вместо уравнений закона Гука используются уравнения состояния в одной из следующих форм:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{P}(0)\mathbf{s}(t) + \int_0^t \frac{d\mathbf{P}(t-\tau)}{d(t-\tau)} \mathbf{s}(\tau) d\tau, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{R}(0)\mathbf{e}(t) + \int_0^t \frac{d\mathbf{R}(t-\tau)}{d(t-\tau)} \mathbf{e}(\tau) d\tau. \quad (1.2)$$

Здесь приняты обозначения $\mathbf{e}(t) = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6]^T$, $\mathbf{s}(t) = [s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6]^T$ — векторы деформаций и напряжений в произвольный момент времени t ; $\mathbf{P}(t) = P_{ij}(t)$, $\mathbf{R}(t) = R_{ij}(t)$ ($i, j = \overline{1, 6}$) — матрицы функций ползучести и релаксации. В представлениях (1.1) и (1.2) учтены начальные условия. В начальный момент времени при $t = 0$ уравнения (1.1) и (1.2) переходят в уравнения закона Гука.

Элементы матриц функций ползучести $\mathbf{P}$ или релаксации $\mathbf{R}$ определяются из эксперимента. Если представить их в виде произведений $\mathbf{P}(t) = \{P_{ij}(t)\} = \{a_{ij}p_{ij}(t)\}$, $\mathbf{R}(t) = \{R_{ij}(t)\} = \{A_{ij}r_{ij}(t)\}$, то уравнения (1.1), (1.2) можно записать в виде

$$e_i = \bar{a}_{ij} s_j, \quad s_j = \bar{A}_{ij} e_i \quad (i, j = \overline{1, 6}) \quad (1.3)$$

где

$$\bar{a}_{ij} = a_{ij} (1 + p_{ij}^*), \quad \bar{A}_{ij} = A_{ij} (1 - r_{ij}^*). \quad (1.4)$$

Каждый из временных операторов (1.4) состоит из двух элементов: матриц упругих постоянных a_{ij} или A_{ij} , а также интегральных операторов $a_{ij}p_{ij}^*$ или $A_{ij}r_{ij}^*$ с ядрами наследственности $\frac{dp_{ij}(t-\tau)}{d(t-\tau)}$ или $\frac{dr_{ij}(t-\tau)}{d(t-\tau)}$, где

$$p_{ij}^* s_j(t) = \int_0^t \frac{dp_{ij}(t-\tau)}{d(t-\tau)} s_j(\tau) d\tau, \quad r_{ij}^* e_j(t) = - \int_0^t \frac{dr_{ij}(t-\tau)}{d(t-\tau)} e_j(\tau) d\tau.$$

Обращение систем (1.1), (1.2) или (1.3) представляет собой трудноразрешимую в аналитическом плане задачу. Экспериментально найденные значения ядер $\mathbf{P}$ или $\mathbf{R}$ задаются дискретным набором величин, соответствующим некоторым фиксированным значениям времени. По этим экспериментальным значениям различными методами строят аналитические аппроксимации ядер в специальной форме. Одной из таких форм является класс дробно-рациональных функций, построенных Ю. Н. Работновым [8]

$$\mathfrak{D}(-\beta; t - \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta^n (t - \tau)^{\alpha+n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]}. \quad (1.5)$$

Операторы с ядрами вида (1.5) обладают алгеброй операторов Вольтерра, и их резольвенты образованы из функций того же класса. Если принять $\frac{dp_{ij}(t-\tau)}{d(t-\tau)} = \lambda_{ij}^p \mathfrak{D}_{\alpha_{ij}^p}(-\beta_{ij}^p; t - \tau)$, то интегральный оператор $\bar{a}_{ij}$ представлений (1.4) примет вид

$$\bar{a}_{ij} = a_{ij} \left[1 + \lambda_{ij}^p \mathfrak{D}_{\alpha_{ij}^p}^*(-\beta_{ij}^p) \right].$$

Необходимо отметить, что аппроксимация экспериментально найденной кривой ползучести является источником дополнительных погрешностей. Так, ядро вида $\lambda \mathfrak{D}_{\alpha}(-\beta; t - \tau)$ имеет произвол, содержащий всего три константы λ , α и β . Это обстоятельство не всегда позволяет построить функцию, хорошо описывающую экспериментально найденные величины на достаточно большом временном интервале. Результаты аппроксимации, приведенные в работах исследователей в этом направлении, показали, что погрешность в отдельных случаях достигала тридцати процентов. Поэтому точное описание вязкоупругих свойств реальных тел должно приводить к операторам с ядром более сложной формы. Для таких операторов построение резольвенты в аналитической форме наталкивается на непреодолимые трудности. В работах [1, 6] показано, что построение алгебры операторов Вольтерра не связано с каким-либо их специальным видом и может быть осуществлено для любых резольвентных операторов. Это обстоятельство делает возможным проводить алгебраическими методами реализацию решений граничных задач теории вязкоупругости во времени. Решение может быть осуществлено с использованием произвольных исходных операторов и выражено через значения воздействия на единицу этих операторов, заданных непосредственно таблицей экспериментальных данных.

В данной работе предложен новый подход к решению таких задач. Предлагаемый подход не требует построения аналитического представления ядер ползучести и релаксации в специальной форме. Метод основан на численном определении резольвент интегральных уравнений состояния среды.

2. ОБРАЩЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

В опыте на ползучесть мгновенно прикладываются и поддерживаются постоянными напряжения $\mathbf{s}(t) = \sigma$. Интегрирование уравнения (1.1) в этом случае дает

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{P}(t) \sigma, \quad (2.1)$$

где $\sigma = s_k(t=0) = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6]^T$ — вектор-столбец напряжений констант.

По формуле (2.1) определяются значения функции ползучести $\mathbf{P}(t)$ по величине измеренной деформации во времени. После интегрирования уравнения (1.2) по частям и подстановки в него выражения (2.1) можно найти соотношение, связывающее между собой функции ползучести $\mathbf{P}(t)$ и релаксации $\mathbf{R}(t)$

$$\mathbf{I} = \int_0^t \mathbf{R}(t - \tau) \frac{d\mathbf{P}(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

Из уравнения (2.2) находится функция релаксации $\mathbf{R}(t)$, соответствующая функции $\mathbf{P}(t)$, найденной из эксперимента на ползучесть.

В опытах на релаксацию мгновенно прикладываются и поддерживаются постоянными деформации. После интегрирования уравнения (1.2) получается

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{R}(t) \varepsilon, \quad (2.3)$$

где $\varepsilon = e_k(t=0) = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6]^T$ — вектор-столбец деформаций констант.

По формуле (2.3) определяются значения функции $\mathbf{R}(t)$ по величине измеренных напряжений во времени. После интегрирования уравнения (1.1) по частям и подстановки в него выражения (2.3) можно найти еще одно соотношение, связывающее между собой функции релаксации $\mathbf{R}(t)$ и ползучести $\mathbf{P}(t)$:

$$\mathbf{I} = \int_0^t \mathbf{P}(t-\tau) \frac{d\mathbf{R}(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (2.4)$$

Из уравнения (2.4) находится функция ползучести $\mathbf{P}(t)$, соответствующая функции $\mathbf{R}(t)$, найденной из эксперимента на ползучесть.

Решение уравнения (2.2) можно получить численным методом. В этом случае нет надобности использования аналитической аппроксимации экспериментальных значений функции $\mathbf{P}(t)$. Пусть временной отрезок $[0, t]$ разбит на N равных интервалов длиной h точками, соответствующими временам $t_0 = 0, t_1 = h, \dots, t_i = ih, \dots, t_N = t$, и пусть $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N$ — экспериментально найденные значения функции ползучести $\mathbf{P}(t)$ в этих точках. Тогда соотношение (2.2) в точках сетки можно приближенно записать в виде

$$\mathbf{I} = \sum_{i=0}^n \mathbf{R}_{n-i} (\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}) \quad (n = 0, 1, \dots, N), \quad (2.5)$$

где $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}(t_i)$, $\mathbf{R}_{n-i} = \mathbf{R}(t_n - t_i)$ — значения функций в точке $\tau = t_i$.

При этом значение $\mathbf{P}_{i-1} = \mathbf{P}(t_{i-1})$ при отрицательном значении индекса равно нулю. Из (2.5), с учетом изложенного, получается

$$\mathbf{R}_n = \left(\mathbf{I} - \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_{n-i} (\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}) \right) \mathbf{A} \quad (n = 0, 1, \dots, N). \quad (2.6)$$

С помощью представлений (2.6) по экспериментально полученным значениям функции ползучести в точках сетки находятся функции релаксации. Решение уравнения (2.4) осуществляется аналогичным образом. В результате получается

$$\mathbf{P}_n = \left(\mathbf{I} - \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_{n-i} (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i-1}) \right) \mathbf{a} \quad (n = 0, 1, \dots, N). \quad (2.7)$$

Из полученного соотношения по заданным функциям релаксации в точках сетки находятся функции ползучести.

Таким образом, соотношения (2.6) и (2.7) полностью решают задачу обращения уравнений (1.1) или (1.2).

Функции ползучести $\mathbf{P}(t)$ или релаксации $\mathbf{R}(t)$ строятся на основании табличных данных, которые определяются при проведении эксперимента. Таблица экспериментальных данных может содержать погрешности измерений, которые обусловлены различными причинами, в том числе связанными с длительностью интервалов замеров изменения деформаций или напряжений. Поэтому данные таблицы должны подлежать определенной математической обработке. Эта задача тесно связана с задачей сглаживания и восполнения, когда по заданным точкам измерения (t_k, ε_k) необходимо провести гладкую кривую $w(t)$ при минимальной погрешности. При этом в качестве функции $w(t)$ выбирают выражение, которое соответствует ожидаемому поведению рассматриваемого физического процесса. Установлено, что функции ползучести $\varepsilon_k = \mathbf{P}(t_k)$ должны быть монотонно возрастающими, а функции релаксации $\sigma_k = \mathbf{R}(t_k)$ — монотонно убывающими функциями времени. Если уровень нагрузок меньше предела прочности материала, то развитие деформаций практически полностью прекращается при достижении определенного

времени. В этом случае имеет место затухающий процесс, а представление для функции $w(t)$ можно выбирать в виде ряда, содержащего затухающую экспоненциальную функцию

$$w(t) = \left(1 + \sum_{k=1}^m a_k t^{\alpha k}\right) e^{-\beta t^{\alpha}}. \quad (2.8)$$

В представлении (2.8) подлежат определению величины α , β и a_k , а процесс аппроксимации носит название *нелинейное приближение*.

Пусть на отрезке $[0, t]$ задана дискретная сетка значений временной переменной t : $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$. В узлах сетки даны экспериментально полученные значения функции $\varepsilon[t]$: $\varepsilon(t_0) = \varepsilon_0$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \varepsilon(t)$. Необходимо осуществить вычисление величин α , β и a_k так, чтобы функция (2.8) сглаживала кривую, заданную таблицей, и, используя эту функцию, провести восполнение таблицы.

Алгоритм сглаживания таблицы исходных экспериментальных данных основан на использовании дискретного метода наименьших квадратов. Для этого требуется, чтобы искомая сглаживающая функция минимизировала функционал

$$\Phi(a_1, a_2, \dots, a_m, \alpha, \beta) = \sum_{p=0}^n [w(t_p) - \varepsilon_p]^2. \quad (2.9)$$

Приравнявая производные по коэффициентам a_k нулю, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно этих коэффициентов. Эта система решается при варьировании величин α и β для достижения выполнения условия (2.9). После нахождения постоянных α , β и a_k определена функция, позволяющая осуществить гладкое восполнение сеточных значений в любой точке отрезка $[0, t]$.

Матричные уравнения (2.1) и (2.3) можно записать в форме

$$e_i = P_{ij}(t) s_j \quad \text{или} \quad s_i = R_{ij}(t) e_j \quad (i, j = \overline{1, 6}), \quad (2.10)$$

где $P_{ij} = a_{ij} p_{ij}(t)$, $R_{ij} = A_{ij} r_{ij}(t)$.

Для случая, когда из эксперимента на ползучесть определена матрица функций ползучести $P_{ij}(t)$, необходимо взять представление $e_i = \bar{a}_{ij} s_j = a_{ij} (1 + p_{ij}^*) s_j$ из (1.3) и сравнить его с соответствующим соотношением представления (2.10).

Используя предлагаемую методику, получаем соотношение

$$p_{ij}^* \cdot 1 = p_{ij} - 1.$$

Таким образом, из экспериментальных данных для кривых ползучести, с учетом их восполнения, получены значения результатов воздействия на единицу интегральных операторов для записи уравнений состояния. Временная матрица в этом случае имеет вид

$$\mathbf{P}_n = \bar{a}_{ij} \cdot 1 = a_{ij} [1 + p_{ij}^* \cdot 1].$$

Матрица $\bar{A}_{ij} \cdot 1 = \mathbf{P}_n$ находится по формуле (2.6).

Для случая, когда из эксперимента на релаксацию определены элементы матрицы функций релаксации $R_{ij}(t)$, необходимо взять представление $s_i = \bar{A}_{ij} e_j = A_{ij} (1 - r_{ij}^*) e_j$ из (1.3) и сравнить его с соответствующим соотношением представления (2.10). В результате получается

$$r_{ij}^* \cdot 1 = r_{ij} - 1.$$

Временная матрица уравнений закона Гука в момент времени $t = t_n$ определяются соотношениями

$$\mathbf{R}_n = \bar{A}_{ij} \cdot 1 = A_{ij} [1 - r_{ij}^* \cdot 1].$$

Матрица $\bar{a}_{ij} \cdot 1 = \mathbf{P}_n$ находится по формуле (2.7).

Дальнейшее решение задач теории вязкоупругости в любой момент времени ничем не отличается от решения задач теории упругости.

Возможности расшифровки произвольных операторов рассмотрены на примере для изотропного случая. Пусть из эксперимента получены опытные данные об изменениях коэффициента

Пуассона во времени. Если не вводить функции Работнова, то кривые ползучести можно записать в виде

$$\bar{\nu} = \nu (1 + p_{\nu}^* \cdot 1) = \nu p_{\nu}(t), \quad (2.11)$$

где $p_{\nu}(t)$ — функция ползучести, найденная в результате эксперимента.

Отсюда находятся значения действия оператора p_{ν}^* на единицу:

$$p_{\nu}^* \cdot 1 = p_{\nu}(t) - 1. \quad (2.12)$$

Используя предположение о постоянстве оператора объемного сжатия, согласно которому $(1 - 2\bar{\nu})/\bar{E} = (1 - 2\nu)/E$, находим

$$\bar{E} \cdot 1 = E (1 - \lambda_E p_{\nu}^* \cdot 1) = E r_E(t), \quad \lambda_E = 2\nu / (1 - 2\nu). \quad (2.13)$$

Здесь функция релаксации $r_E(t)$ для модуля Юнга определилась через функцию ползучести $p_{\nu}(t)$ для коэффициента Пуассона посредством формулы (2.12).

При помощи свойства для резольвентных операторов $[1 - \lambda P^*(\beta)]^{-1} = 1 + \lambda R^*(\beta + \lambda)$ определяется оператор, обратный оператору (2.13):

$$\frac{1}{\bar{E}} \cdot 1 = \frac{1}{E} [1 + \lambda_E p_{\nu}^*(\lambda_E) \cdot 1] = \frac{1}{E} p_E(t). \quad (2.14)$$

Результат воздействия оператора $p_{\nu}^*(\lambda_E)$ на единицу представляет собой функцию ползучести $p_E(t)$, значения которой выражаются через значения соответствующей функции релаксации $r_E(t)$ из соотношения (2.7):

$$p_E(t_n) = 1 - \sum_{k=1}^n p_E(t_{n-k}) [r_E(t_k) - r_E(t_{k-1})] \quad (0, 1, \dots, N).$$

Значения $p_{\nu}^*(\lambda_E) \cdot 1$ находится из соотношения (2.14):

$$p_{\nu}^*(\lambda_E) \cdot 1 = [p_E(t) - 1] / \lambda_E. \quad (2.15)$$

Учитывая свойство $1/\bar{G} = 2(1 + \bar{\nu})/\bar{E}$, можно найти

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{G}} \cdot 1 &= \frac{1}{G} [1 + \lambda_G p_{\nu}^*(\lambda_E) \cdot 1] = \frac{1}{G} p_G(t), \quad \lambda_G = \lambda_E + \nu / (1 + \nu), \\ \bar{G} \cdot 1 &= G [1 - \lambda_G p_{\nu}^*(\beta_G) \cdot 1] = G r_G(t), \quad \beta_G = \lambda_E - \lambda_G, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где

$$\begin{aligned} r_G(t_n) &= 1 - \sum_{k=1}^n r_G(t_{n-k}) [p_G(t_k) - p_G(t_{k-1})], \quad (0, 1, \dots, N), \\ p_{\nu}^*(\beta_G) \cdot 1 &= [1 - r_G(t)] / \lambda_G. \end{aligned}$$

Соотношения (2.11)–(2.16) связывают значения воздействия интегральных операторов $p_{\nu}^*(\dots)$ и $r_{\nu}^*(\dots)$ на единицу с функциями ползучести $p_{\dots}(t)$ и релаксации $r_{\dots}(t)$, заданными таблично.

Таким образом, решение граничных задач вязкоупругости сводится к решению задач теории упругости в произвольный момент времени. При этом уравнения закона Гука заменяются уравнениями состояния (1.1), (1.2), которые в результате интегрирования принимают вид (2.2) и (2.4), соответственно.

3. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Проверка предложенного метода на достоверность осуществлялась исследованием напряженно-деформированного состояния пластины в условиях обобщенного плоского напряженного состояния. Решение упругой задачи для изотропной пластины, ослабленной круговым отверстием радиуса R , когда на бесконечности заданы усилия $\sigma_1^0 = p$, $\sigma_2^0 = q$, $\sigma_6^0 = 0$, имеет вид [5]

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2\alpha + \frac{b_1}{r^2} - \left(\beta + \frac{4a_1}{r^2} - \frac{3b_3}{r^4} \right) \cos(2\theta), \\ \sigma_{\theta} &= 2\alpha - \frac{b_1}{r^2} + \left(\beta - \frac{3b_3}{r^4} \right) \cos(2\theta), \quad \tau_{r\theta} = \left(\beta + \frac{3b_3}{r^4} - \frac{2a_1}{r^2} \right) \sin(2\theta), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$u_r = \frac{r}{2G} [\alpha (\kappa - 1) - \beta \cos (2\theta)] + \frac{1}{2\bar{G}} \left[-\frac{b_1}{r} + \left(\frac{a_1 (\bar{\kappa} + 1)}{r} - \frac{b_3}{r^3} \right) \cos (2\theta) \right],$$

$$u_\theta = \frac{r}{2G} \beta \sin (2\theta) - \frac{1}{2\bar{G}} \left(\frac{a_1 (\bar{\kappa} - 1)}{r} + \frac{b_3}{r^3} \right) \sin (2\theta).$$

В представлениях (3.1) введены обозначения: $\alpha = (p + q) / 4$, $\beta = (q - p) / 2$, $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$, a_1, b_1, b_3 — неизвестные постоянные; черточками сверху обозначены величины $\bar{G}$ и $\bar{\kappa}$, которые при решении вязкоупругой задачи будут меняться во времени.

В формулах (3.1) видна явная зависимость перемещений и напряжений от постоянных ν и G . Это обстоятельство позволяет построить точное решение вязкоупругой задачи методом Вольтерра и провести численные исследования. Рассмотрим два вида граничных условий.

1) *Контур отверстия не подкреплён.* Из граничных условий $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$, когда $r = R$, коэффициенты функций (3.1) будут такими:

$$a_1 = -\beta R^2, \quad b_1 = -2\alpha R^2, \quad b_3 = -\beta R^4. \quad (3.2)$$

Из соотношений (3.1) и (3.2) видно, что в рассматриваемой задаче напряжения от времени не зависят, а изменяются только перемещения.

2) *Контур отверстия жёстко подкреплён.* Коэффициенты функций (3.1) находятся из граничных условий $u_r = u_\theta = 0$, когда $r = R$:

$$a_1 = \frac{\bar{G}}{G\bar{\kappa}} \beta R^2, \quad b_1 = \frac{\bar{G}}{G} \alpha R^2 (\kappa - 1), \quad b_3 = \frac{\bar{G}}{G\bar{\kappa}} \beta R^4. \quad (3.3)$$

Из соотношений (3.1) и (3.3) видно, что в рассматриваемой задаче от времени зависят и перемещения, и напряжения.

В формулы для напряжений и перемещений (3.1) входят временные операторы. В первом случае это $1/\bar{G}$ и $\bar{\kappa}/\bar{G}$, а во втором, с учетом значений коэффициентов (3.3), это операторы $\bar{G}$, $\bar{G}/\bar{\kappa}$ и $1/\bar{\kappa}$. При расшифровке их учитывалось, что соотношения между упругими операторами такие же, как и соотношения между упругими постоянными, а также считалось, что объемная деформация материала пластинки является упругой [8, 9]. Это позволяет воспользоваться равенствами

$$\frac{1 - 2\nu}{E} = \frac{1 - 2\bar{\nu}}{\bar{E}}, \quad \bar{G} = \frac{\bar{E}}{2(1 + \bar{\nu})}, \quad \bar{\kappa} = \frac{3 - \bar{\nu}}{1 + \bar{\nu}}. \quad (3.4)$$

В работе [9] коэффициент ν предложено заменить временным оператором

$$\bar{\nu} = \nu [1 + \delta \mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta, t)], \quad (3.5)$$

где α , β и δ — реологические характеристики материала, а интегральный оператор $\mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta, t)$ выражается через функцию Миттаг-Леффлера $E_{1+\alpha}(-\eta)$ (см. [9])

$$\mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta, t) = [1 - E_{1+\alpha}(-\eta)] / \beta, \quad \eta = \beta t^{1+\alpha}. \quad (3.6)$$

Из равенств (3.4) с учетом (3.5) и свойств операторов $\mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta, t)$ находятся указанные выше временные операторы.

Исследования проводились для алюминиевой изотропной пластины со следующими упругими и реологическими параметрами [2]: $E = 7.1 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0.25$, $\alpha = -0.5$, $\delta = 0.00615 c^{-0.5}$ и $\beta = 0.00665 c^{-0.5}$; а также для ортотропной пластины, изготовленной из композитного материала на основе эпоксидного связующего [7]: $E_{11}^0 = 23.0 \cdot 10^3$ МПа, $\lambda_1 = 0.0323 c^{-(1+\alpha)}$, $\beta_1 = 0.157 c^{-(1+\alpha)}$, $E_{22}^0 = 16.0 \cdot 10^3$ МПа, $\lambda_2 = 0.1295 c^{-(1+\alpha)}$, $\beta_2 = 0.2745 c^{-(1+\alpha)}$, $G_{12}^0 = 3.08 \cdot 10^3$ МПа, $\lambda_g = 0.0717 c^{-(1+\alpha)}$, $\beta_g = 0.0276 c^{-(1+\alpha)}$, $\nu_{12} = 0.11$, $\nu_{21} = 0.0765$, $\alpha = -0.846$. Некоторые результаты для одного свободного или жёстко подкреплённого отверстия в случае, когда пластинка растягивается на бесконечности усилиями интенсивности p вдоль оси Ox_1 , представлены ниже.

Такие же результаты получились при решении этой задачи методом, изложенным в данной статье. При этом уравнения закона Гука следует выбирать в форме (2.1) для случая, когда контур

ТАБ. 1

Перемещения / Movements	t , час / t , hours				
	0	100	500	1000	5000
$u_r \cdot G/(pR)(\theta = 0)$	1.2	3.8115	5.7501	6.6905	8.6486
$u_r \cdot G/(pR)(\theta = \pi/2)$	-0.4	-1.0529	-1.5375	-1.7726	-2.2622
$u_\theta \cdot G/(pR)(\theta = \pi/4)$	0.8	2.4322	3.6438	4.2316	5.4554

не подкреплён, и в форме (2.3) для подкреплённого контура. Матрицы $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}(t_n)$ и $\mathbf{R}_n = \mathbf{R}(t_n)$ в случае, когда материал является изотропным, имеют вид

$$\mathbf{P}_n = \begin{pmatrix} 1/\bar{E} & -\bar{\nu}/\bar{E} & 0 \\ -\bar{\nu}/\bar{E} & 1/\bar{E} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\bar{G} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_n = \begin{pmatrix} \bar{E}/(1-\bar{\nu}^2) & \bar{\nu}\bar{E}/(1-\bar{\nu}^2) & 0 \\ \bar{\nu}\bar{E}/(1-\bar{\nu}^2) & \bar{E}/(1-\bar{\nu}^2) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{G} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Элементы матрицы $\mathbf{R}_n$ в случае, когда материал изотропный, имеют достаточно простой вид. С целью тестирования элементы матрицы $\mathbf{R}_n$ вычислялись путем расшифровки и использования соотношений (2.6). Результаты вычислений сближаются, если шаг h сетки уменьшается. В случае, когда материал анизотропен, матрицу $\mathbf{R}_n$ следует вычислять, используя соотношения (2.6). При этом следует учитывать, что $\mathbf{P}_0 = \mathbf{a}$, $\mathbf{R}_0 = \mathbf{A}$. Исследование напряженно-деформированного состояния в любой момент времени ведется путем использования функций обобщенных комплексных переменных [4]. При проведении исследований для изотропных сред были использованы алгоритмы, разработанные для анизотропных материалов с учетом методики, предложенной в работе [3].

В таб. 1 приведены значения перемещений u_r и u_θ в характерных точках кругового отверстия изотропной пластинки в различные моменты времени. Как видно, стабилизация изменения перемещений происходит через достаточно большой промежуток времени. Напряжения в этом случае, как было указано ранее, от времени не зависят.

Проведенные исследования для ортотропной пластинки показали, что напряжения, возникающие на контуре свободного отверстия, зависят от времени, а полученные численные результаты хорошо согласуются с данными, приведенными в работе [7].

Исследования напряженного состояния ортотропной пластинки с жестким круговым включением показали, что напряжения, возникающие на контуре спая, со временем уменьшаются за исключением небольшой зоны, находящейся вблизи возникновения максимальных напряжений σ_θ , где напряжения увеличиваются с течением времени.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты представленной работы заключаются в следующем:

1. С применением аппарата алгебры резольвентных операторов и матричной алгебры разработан новый численно-аналитический метод обращения операторов определяющих уравнений деформирования анизотропных вязкоупругих сред без использования аналитических представлений ядер ползучести и релаксации, позволяющий распространить область возможного применения численно-аналитических подходов на новые классы моделей деформирования вязкоупругих тел и элементов конструкций.
2. Разработана численно-аналитическая методика исследования задач линейной вязкоупругости анизотропных сред, которая для произвольных моментов времени сводится к применению алгоритмов, подобных используемым при решении задач теории упругости анизотропного деформируемого тела без учета реологических эффектов, и позволяет изучить наследственные деформационные процессы в случаях конструкций, изготовленных из анизотропных материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Громов В. Г. Алгебра операторов Вольтерра и ее применение в задачах вязкоупругости // Докл. АН СССР. — 1968. — 182, № 1. — С. 56–59.
2. Каминский А. А., Гаврилов Д. А. Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами. — Киев: Наук. думка, 1992.
3. Космодамианский А. С., Нескородев Н. М. Связь уравнений плоской теории упругости для анизотропного и изотропного тел // Прикл. мат. и мех. — 1998. — 62, № 2. — С. 344–346.
4. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. — М.: Гостехиздат, 1957.
5. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966.
6. Победра Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981.
7. Подильчук И. Ю. Исследование концентрации напряжений в вязкоупругой ортотропной пластине с эллиптическим отверстием // Прикл. мех. — 1997. — 33, № 9. — С. 64–73.
8. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 1966.
9. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. — Киев: Наук. думка, 1968.

Р. Н. Нескородев

Донецкий государственный университет, Донецк, Россия

E-mail: nromn72@mail.ru

А. В. Зыза

Донецкий государственный университет, Донецк, Россия

E-mail: z9125494@mail.ru

UDC 539.376

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-385-394

EDN: FCHSZQ

Modeling of the study of viscoelastic deformation of elastic bodies

R. N. Neskorohev and A. V. Zyza

Donetsk State University, Donetsk, Russia

Abstract. This article proposes a numerical-analytical method for solving linear viscoelasticity problems of an anisotropic solid without the need for explicit analytical representations of creep and relaxation kernels. The approximate solution of integral equations is based on the direct use of experimental data, previously smoothed and filled with a finer mesh. Thus, solving boundary-value problems of viscoelasticity is reduced to solving elasticity problems at an arbitrary point in time.

Keywords: viscoelastic deformation, anisotropic medium, numerical-analytical solution.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The research was conducted at the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education “Donetsk State University” with the financial support of the Azov-Black Sea Mathematical Center (agreement № 075-02-2024-1446 dated 02/29/2024).

For citation: R. N. Neskorohev, A. V. Zyza, “Modeling of the study of viscoelastic deformation of elastic bodies,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. 71, No. 3, 385–394. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-385-394>



REFERENCES

1. V. G. Gromov, “Algebra operatorov Vol'terra i ee primeneniye v zadachakh vyazkouprugosti” [Volterra operator algebra and its application to viscoelasticity problems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1968, **182**, No. 1, 56–59 (in Russian).
2. A. A. Kaminskii and D. A. Gavrilov, *Dlitel'noe razrusheniye polimernykh i kompozitnykh materialov s treshchinami* [Long-Term Destruction of Polymer and Composite Materials with Cracks], Nauk. Dumka, Kiev, 1992 (in Russian).
3. A. S. Kosmodamianskii and N. M. Nesorodev, “Svyaz' uravneniy ploskoy teorii uprugosti dlya anizotropnogo i izotropnogo tel” [The relationship between the equations of plane elasticity theory for anisotropic and isotropic bodies], *Prikl. mat. i mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1998, **62**, No. 2, 344–346 (in Russian).
4. S. G. Lekhnitskii, *Anizotropnye plastinki* [Anisotropic Plates], Gostekhizdat, Moscow, 1957 (in Russian).
5. N. I. Muskhelishvili, *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
6. B. E. Pobedrya, *Chislennyye metody v teorii uprugosti i plastichnosti* [Numerical Methods in the Theory of Elasticity and Plasticity], Moscow Univ., Moscow, 1981 (in Russian).
7. I. Yu. Podil'chuk, “Issledovanie kontsentratsii napryazheniy v vyazkouprugoy ortotropnoy plastine s ellipticheskimi otverstiyami” [Study of stress concentration in a viscoelastic orthotropic plate with an elliptical hole], *Prikl. mekh.* [Appl. Mech.], 1997, **33**, No. 9, 64–73 (in Russian).
8. Yu. N. Rabotnov, *Polzuchest' elementov konstruktsiy* [Creep of STRUCTURAL ELEMENTS], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
9. G. N. Savin, *Raspredeleniye napryazheniy okolo otverstiy* [Stress Distribution around Holes], Nauk. Dumka, Kiev, 1968 (in Russian).

R. N. Nesorodev
 Donetsk State University, Donetsk, Russia
 E-mail: nromn72@mail.ru

A. V. Zyza
 Donetsk State University, Donetsk, Russia
 E-mail: z9125494@mail.ru

УДК 517.95

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-395-416

EDN: FFCPII

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ СМЕСИ

В. Ю. Ноговищева¹, Д. А. Прокудин²

¹Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

²Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

³Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия

Аннотация. В статье изучается начально-краевая задача для одномерных уравнений динамики сжимаемой вязкой смеси. Доказывается теорема существования и единственности решения начально-краевой задачи без каких-либо ограничений на структуру матрицы вязкостей, кроме стандартных физических требований симметричности и положительной определенности.

Ключевые слова: динамика сжимаемой вязкой смеси, одномерная начально-краевая задача, недиагональная матрица вязкостей, существование и единственность решения.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке проекта «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (2024–26) (гос. задание FZMW-2024-0003).

Для цитирования: В. Ю. Ноговищева, Д. А. Прокудин. Существование и единственность решения начально-краевой задачи для одномерных уравнений динамики сжимаемой вязкой смеси // Современ. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 3. С. 395–416. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-395-416>

1. ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена проблеме разрешимости одномерных уравнений для модели, описывающей движение сжимаемой вязкой смеси. По поводу происхождения этой модели можно обратиться к монографиям [8, 20], а также за уточнениями для подмодели, рассматриваемой в данной работе, — к статье [16]. Несмотря на имеющиеся результаты о разрешимости для одномерных уравнений динамики сжимаемых вязких смесей, такие как [1, 3–6, 9–13, 15, 17, 18], остается неизученным вариант нестационарных одномерных движений с учетом взаимодействия компонент смеси между собой как на уровне обмена импульсом, так и через взаимное вязкое трение в случае, если матрица вязкостей является недиагональной и нетреугольной. Именно этот случай будет рассматриваться в данной работе.

Структура статьи следующая. Раздел 2 содержит постановку задачи и формулировку основного результата — теоремы 2.1 о существовании и единственности решения. В разделе 3 проводится исследование разрешимости приближенной задачи, полученной из исходной задачи применением

метода Галеркина. В разделе 4 выводятся равномерные по параметру приближения оценки решений приближенной задачи, на основе которых совершается предельный переход и обосновывается существование решения исходной задачи в малом по времени. Для продолжения локального решения в разделе 5 выводятся априорные оценки, постоянные в которых не зависят от промежутка существования локального решения. В разделе 6 доказывается единственность решения исследуемой задачи и завершается доказательство теоремы 2.1. В заключительном разделе 7 приведены основные результаты работы.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим начально-краевую задачу для одномерных изотермических уравнений динамики сжимаемой вязкой смеси. В замыкании $\overline{Q_T}$ области $Q_T = (0, T) \times (0, 1)$, $T = \text{const} > 0$ требуется найти плотности $\rho_i(t, x) > 0$ и скорости $u_i(t, x)$ для каждой компоненты с номером $i = 1, \dots, N$, $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, удовлетворяющие следующей системе уравнений, начальных и краевых условий:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i v)}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.1)$$

$$\rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + v \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + \alpha_i K \frac{\partial \rho}{\partial x} = \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^N a_{ij} (u_j - u_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

$$\rho_i|_{t=0} = \rho_{0i}(x), \quad u_i|_{t=0} = u_{0i}(x), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.3)$$

$$u_i|_{x=0} = u_i|_{x=1} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.4)$$

Здесь $v = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j$ — средневзвешенная скорость, $\alpha_j = \text{const} \in (0, 1)$, $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$, $\rho = \sum_{j=1}^N \rho_j$ — суммарная плотность, ν_{ij} — постоянные коэффициенты вязкостей, образующие симметричную матрицу $\mathbf{N} > 0$, $K = \text{const} > 0$, $a_{ij} = a_{ji} = \text{const} > 0$, $\rho_{0i}(x)$, $u_{0i}(x)$ — известные функции начальных данных.

Определение 2.1. *Сильным решением задачи (2.1)–(2.4) называется совокупность $2N$ функций $(\rho_1, \dots, \rho_N, u_1, \dots, u_N)$ таких, что для всех $i = 1, \dots, N$*

$$\begin{aligned} \rho_i > 0, \quad \rho_i \in L_\infty(0, T; W_2^1(0, 1)), \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} \in L_\infty(0, T; L_2(0, 1)), \\ u_i \in L_\infty(0, T; W_2^1(0, 1)) \cap L_2(0, T; W_2^2(0, 1)), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} \in L_2(Q_T), \end{aligned} \quad (2.5)$$

уравнения (2.1), (2.2) выполнены почти всюду в Q_T , начальные условия (2.3) — для почти всех $x \in (0, 1)$, а краевые условия (2.4) — для почти всех $t \in (0, T)$.

Сформулируем теорему об однозначной разрешимости задачи (2.1)–(2.4), которая является основным результатом этой работы.

Теорема 2.1. *Пусть начальные данные в (2.3) удовлетворяют условиям*

$$\rho_{0i} > 0, \quad \rho_{0i} \in W_2^1(0, 1), \quad u_{0i} \in \dot{W}_2^1(0, 1), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.6)$$

Тогда существует единственное сильное решение задачи (2.1)–(2.4) в смысле определения 2.1.

Доказательство теоремы 2.1 будет проведено в разделах 3–6 настоящей работы.

3. ПОСТРОЕНИЕ ГАЛЕРКИНСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Докажем сначала разрешимость приближенной начально-краевой задачи, полученной из задачи (2.1)–(2.4) применением метода Галеркина ($i = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, m$):

$$\frac{\partial \rho_i^m}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i^m v^m)}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

$$\int_0^1 \left(\rho_i^m \frac{\partial u_i^m}{\partial t} + \rho_i^m v^m \frac{\partial u_i^m}{\partial x} + \alpha_i K \frac{\partial \rho^m}{\partial x} - \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j^m}{\partial x^2} - \sum_{j=1}^N a_{ij} (u_j^m - u_i^m) \right) \sin(\pi k x) dx = 0, \quad (3.2)$$

$$\rho_i^m|_{t=0} = \rho_{0i}(x), \quad (3.3)$$

$$u_i^m = \sum_{s=1}^m \xi_{is}^m(t) \sin(\pi s x), \quad u_i^m|_{t=0} = \sum_{s=1}^m \xi_{0is} \sin(\pi s x), \quad (3.4)$$

где $m \in \mathbb{N}$, $v^m = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j^m$, $\rho^m = \sum_{j=1}^N \rho_j^m$, $\xi_{0ik} = \xi_{ik}^m(0) = 2 \int_0^1 u_{0i}(x) \sin(\pi k x) dx$, при этом

$$\rho_i^m > 0, \quad \rho_i^m \in L_\infty(0, t^m; W_2^1(0, 1)) \cap W_\infty^1(0, t^m; L_2(0, 1)), \quad \xi_{ik}^m \in C^1[0, t^m], \quad t^m \in (0, T). \quad (3.5)$$

Условимся пока опускать индекс m вверх в обозначении решений. Рассмотрим множество

$$V = \left\{ \xi \in (C[0, t^m])^{mN} \mid \xi(0) = \xi_0, \quad \|\xi\|_{(C[0, t^m])^{mN}} \leq c \right\}, \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} \xi &= (\xi_1, \dots, \xi_N), \quad \xi_i = (\xi_{i1}, \dots, \xi_{im}), \quad i = 1, \dots, N, \\ \xi_0 &= (\xi_{01}, \dots, \xi_{0N}), \quad \xi_{0i} = (\xi_{0i1}, \dots, \xi_{0im}), \quad i = 1, \dots, N, \\ c^2 &= e^{\frac{\max_{1 \leq i \leq N} \sup_{[0,1]} \rho_{0i}}{\min_{1 \leq i \leq N} \inf_{[0,1]} \rho_{0i}}} \|\xi_0\|_{\mathbb{R}^{mN}}^2 + 1, \end{aligned}$$

и построим оператор $A : V \rightarrow (C[0, t^m])^{mN}$, $\text{Im } A \subset (C^1[0, t^m])^{mN}$, $A(\xi) = \psi$, где $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$, $\psi_i = (\psi_{i1}, \dots, \psi_{im})$, $i = 1, \dots, N$ следующим образом. Сначала найдем функции

$$\rho_i > 0, \quad \rho_i \in L_\infty(0, t^m; W_2^1(0, 1)) \cap W_\infty^1(0, t^m; L_2(0, 1)), \quad i = 1, \dots, N$$

как решения задач Коши (3.1), (3.3), где $v = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j$, а u_j задаются по формулам (3.4) (см. [14]).

При этом справедливы неравенства ($i = 1, \dots, N$)

$$\left(\inf_{[0,1]} \rho_{0i} \right) e^{-\sum_{j=1}^N \int_0^t \sup_{[0,1]} \left| \frac{\partial u_j}{\partial x} \right| d\tau} \leq \rho_i(t, x) \leq \left(\sup_{[0,1]} \rho_{0i} \right) e^{\sum_{j=1}^N \int_0^t \sup_{[0,1]} \left| \frac{\partial u_j}{\partial x} \right| d\tau}, \quad (3.7)$$

которые, в силу включения $\xi \in V$, дают оценки

$$\left(\inf_{[0,1]} \rho_{0i} \right) e^{-\pi m^2 c N t} \leq \rho_i(t, x) \leq \left(\sup_{[0,1]} \rho_{0i} \right) e^{\pi m^2 c N t}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.8)$$

Затем найдем функцию ψ как решение следующей задачи Коши для системы mN линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка ($i = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, m$):

$$\int_0^1 \left(\rho_i \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho_i v \frac{\partial U_i}{\partial x} + \alpha_i K \frac{\partial \rho}{\partial x} - \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} - \sum_{j=1}^N a_{ij} (U_j - U_i) \right) \sin(\pi k x) dx = 0, \quad (3.9)$$

$$\psi(0) = \xi_0, \quad (3.10)$$

где $U_i = \sum_{s=1}^m \psi_{is}(t) \sin(\pi s x)$.

Неравенство

$$\det M(t) \neq 0,$$

где

$$M(t) = \begin{pmatrix} M_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_N(t) \end{pmatrix},$$

$$M_i(t) = \left\{ \int_0^1 \rho_i(t, x) \sin(\pi kx) \sin(\pi sx) dx \right\}_{k,s=1}^m, \quad i = 1, \dots, N,$$

выполненное в силу положительности ρ_i , $i = 1, \dots, N$, позволяет разрешить систему (3.9) относительно производных, что обосновывает существование функции $\psi \in (C^1[0, t^m])^{mN}$.

Таким образом, для произвольного $t^m \in (0, T)$ определен оператор $A : V \rightarrow (C^1[0, t^m])^{mN} \subset (C[0, t^m])^{mN}$, $A(\xi) = \psi$, неподвижная точка которого, если она существует, вместе с соответствующими функциями ρ_i , u_i , $i = 1, \dots, N$, дает решение задачи (3.1)–(3.4).

Покажем, что при достаточно малом t^m оператор A удовлетворяет условиям теоремы Шаудера о неподвижной точке (см. [2, с. 39]), а именно:

- 1) V — выпуклое замкнутое ограниченное множество (в нашем случае это очевидно);
- 2) $A : V \rightarrow V$;
- 3) A — вполне непрерывный оператор.

Установим сначала, что $A(V) \subset V$. Условимся через $C_i(\cdot)$, $i \in \mathbb{N}$, обозначать величины, принимающие конечные положительные значения и зависящие от объектов, указанных в скобках или перечисленных в комментариях. Умножим уравнения (3.9) на $\psi_{ik}(t)$, а затем просуммируем по i, k и проинтегрируем по x ; получим с учетом (3.1), что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i U_i^2 dx + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial U_j}{\partial x} \right) dx + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^1 (U_i - U_j)^2 dx = K \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right) dx, \end{aligned} \quad (3.11)$$

откуда, в силу неравенств (при получении которых мы используем (3.8) и тот факт, что $N > 0$)

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial U_j}{\partial x} \right) dx \geq C_1(N) \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 dx, \\ & K \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right) dx \leq \frac{C_1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 dx + C_2, \end{aligned}$$

где $C_2 = \frac{K^2 N^3}{2C_1} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \sup_{[0,1]} \rho_{0i} \right)^2 e^{2\pi m^2 c N t^m}$, получаем оценку

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i U_i^2 dx + C_1 \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 dx \leq 2C_2,$$

из которой, в свою очередь, следует, что

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i U_i^2 dx \leq \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_{0i} U_{0i}^2 dx + 2C_2 t^m, \quad (3.12)$$

где $U_{0i} = \sum_{s=1}^m \psi_{is}(0) \sin(\pi sx) = \sum_{s=1}^m \xi_{0is} \sin(\pi sx)$, $i = 1, \dots, N$. Еще раз привлекая (3.8), получаем из (3.12) неравенство

$$\|\psi\|_{(C[0,t^m])^{mN}}^2 \leq e^{\pi m^2 c N t^m} \frac{\max_{1 \leq i \leq N} \sup_{[0,1]} \rho_{0i}}{\min_{1 \leq i \leq N} \inf_{[0,1]} \rho_{0i}} \|\xi_0\|_{\mathbb{R}^{mN}}^2 + \frac{4C_2 e^{\pi m^2 c N t^m}}{\min_{1 \leq i \leq N} \inf_{[0,1]} \rho_{0i}} t^m.$$

Выберем

$$t^m < \min \left(T, \frac{1}{\pi m^2 c N}, \frac{\min_{1 \leq i \leq N} \inf_{[0,1]} \rho_{0i}}{4eC_3} \right), \quad (3.13)$$

где $C_3 = \frac{K^2 N^3 e^2}{2C_1} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \sup_{[0,1]} \rho_{0i} \right)^2$. Тогда получим, что $C_2 \leq C_3$ и придем к нужной оценке

$$\|\psi\|_{(C[0,t^m])^{mN}} \leq c.$$

Таким образом, при выполнении (3.13) оператор A отображает множество V в себя.

Докажем теперь компактность оператора A . Умножая (3.9) на $\frac{d\psi_{ik}(t)}{dt}$, суммируя по i, k и интегрируя по x , выводим соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx &= \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(-\rho_i v \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right) + \alpha_i K \rho \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x} \right) \left(\frac{\partial U_j}{\partial x} \right) + \sum_{j=1}^N a_{ij} (U_j - U_i) \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right) \right) dx. \end{aligned} \quad (3.14)$$

С помощью (3.8), неравенства Коши и неравенств $\|\xi\|_{(C[0,t^m])^{mN}} \leq c$, $\|\psi\|_{(C[0,t^m])^{mN}} \leq c$, $\left\| \frac{\partial U_i}{\partial x} \right\|_{L_2(0,1)} \leq C_4(m) \|U_i\|_{L_2(0,1)}$, $\left\| \frac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x} \right\|_{L_2(0,1)} \leq C_4 \left\| \frac{\partial U_i}{\partial t} \right\|_{L_2(0,1)}$, $i = 1, \dots, N$, произведем оценки слагаемых в правой части (3.14):

$$-\sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i v \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right) dx \leq \frac{1}{8} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx + C_5 \left(C_4, \left\{ \sup_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, N, c, m, t^m \right), \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} K \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x} \right) dx &\leq \frac{1}{8} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx + \\ &+ C_6 \left(C_4, \left\{ \inf_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, \left\{ \sup_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, K, N, c, m, t^m \right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$-\sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x} \right) \left(\frac{\partial U_j}{\partial x} \right) dx \leq \frac{1}{8} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx + C_7 \left(C_4, \left\{ \inf_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, N, N, c, m, t^m \right), \quad (3.17)$$

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^1 (U_j - U_i) \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right) dx \leq \frac{1}{8} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx + C_8 \left(\left\{ \inf_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N, N, c, m, t^m \right). \quad (3.18)$$

Таким образом, из (3.14) получаем неравенство

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx \leq C_5 + C_6 + C_7 + C_8,$$

интегрируя которое по времени и применяя (3.8), выводим оценку

$$\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial U_i}{\partial t} \right\|_{L_2(Q_{t^m})} \leq C_9 \left(C_5, C_6, C_7, C_8 \left\{ \inf_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, N, c, m, t^m \right), \quad (3.19)$$

где $Q_{t^m} = (0, t^m) \times (0, 1)$. Поскольку получена оценка ψ в $(W_2^1(0, t^m))^{mN}$, то A является компактным оператором.

Установим далее непрерывность оператора A из V в $(C[0, t^m])^{mN}$. Пусть $\xi^{(1,2)} \in V$, $\psi^{(1,2)} = A(\xi^{(1,2)})$, $u_i^{(1,2)} = \sum_{s=1}^m \xi_{is}^{(1,2)} \sin(\pi s x)$, $U_i^{(1,2)} = \sum_{s=1}^m \psi_{is}^{(1,2)} \sin(\pi s x)$, $i = 1, \dots, N$. Пусть $\rho_i^{(1,2)}$, $i = 1, \dots, N$ — решения задач Коши (3.1), (3.3), где вместо v стоят $v^{(1,2)} = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j^{(1,2)}$ соответственно. Обозначим $\rho_i = \rho_i^{(1)} - \rho_i^{(2)}$, $u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$, $U_i = U_i^{(1)} - U_i^{(2)}$, $i = 1, \dots, N$, $v = v^{(1)} - v^{(2)}$, $\rho = \rho^{(1)} - \rho^{(2)}$, где $\rho^{(1,2)} = \sum_{j=1}^N \rho_j^{(1,2)}$. Дифференцируя по переменной x уравнения

$$\frac{\partial \rho_i^{(1,2)}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_i^{(1,2)} v^{(1,2)})}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.20)$$

(см. замечание 4.1 далее), затем умножая на $\frac{\partial \rho_i^{(1,2)}}{\partial x}$, интегрируя по x, t , используя начальные условия

$$\rho_i^{(1,2)}|_{t=0} = \rho_{0i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.21)$$

неравенства (см. (3.8))

$$\left(\inf_{[0,1]} \rho_{0i} \right) e^{-\pi m^2 c N t} \leq \rho_i^{(1,2)}(t, x) \leq \left(\sup_{[0,1]} \rho_{0i} \right) e^{\pi m^2 c N t}, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.22)$$

и неравенство Гронуолла, получаем оценки

$$\left\| \frac{\partial \rho_i^{(1,2)}}{\partial x} \right\|_{L_2(0,1)} \leq C_{10} \left(\left\{ \|\rho_{0i}\|_{W_2^1(0,1)} \right\}_{i=1}^N, N, c, m, t^m \right), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.23)$$

Заметим теперь, что из (3.20), (3.21) следуют равенства

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_i v^{(1)})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_i^{(2)} v)}{\partial x} = 0, \quad \rho_i|_{t=0} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.24)$$

Умножая (3.24) на ρ_i , интегрируя по x , приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \rho_i^2 dx &= - \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \rho_i^2 \left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} \right) + \rho_i^{(2)} \rho_i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \rho_i^{(2)}}{\partial x} \right) \rho_i v \right) dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\sup_{[0,1]} \left| \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} \right| \int_0^1 \rho_i^2 dx + \sup_{[0,1]} \rho_i^{(2)} \int_0^1 \left(\rho_i^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) dx + \sup_{[0,1]} v^2 \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho_i^{(2)}}{\partial x} \right)^2 dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \rho_i^2 dx \right) \leq C_{11} \left(C_{10}, \left\{ \sup_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, N, c, m, t^m \right) \left(\int_0^1 \rho_i^2 dx + \sum_{j=1}^N \int_0^1 u_j^2 dx \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Здесь использовались очевидные соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \int_0^1 u_j^2 dx &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^m \xi_{js}^2(t), \quad \sup_{[0,1]} v^2 \leq \sum_{i,j=1}^N \sum_{s,l=1}^m |\xi_{il}(t) \xi_{js}(t)|, \\ \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx &= \frac{\pi^2}{2} \sum_{i,j=1}^N \alpha_i \alpha_j \sum_{s=1}^m s^2 \xi_{js}(t) \xi_{is}(t). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Из (3.25), применяя неравенство Гронуолла и учитывая начальные условия в (3.24), для всех $t \in (0, t_m]$ выводим неравенства

$$\int_0^1 \rho_i^2 dx \leq C_{12}(C_{11}, t^m) \sum_{j=1}^N \int_0^t \int_0^1 u_j^2 dx d\tau, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.27)$$

Далее, из уравнений для $U_i^{(1,2)}$, $i = 1, \dots, N$ (см. (3.9)) ввиду (3.20) следует соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^{(1)} U_i^2 dx + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial U_j}{\partial x} \right) dx d\tau + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^t \int_0^1 (U_i - U_j)^2 dx d\tau = \\ & = K \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^t \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right) dx d\tau - \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \rho_i U_i \left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial \tau} \right) dx d\tau - \\ & - \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \rho_i^{(1)} v U_i \left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx d\tau - \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \rho_i v^{(2)} U_i \left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx d\tau. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Первое слагаемое в левой части (3.28) допускает оценку

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^{(1)} U_i^2 dx \geq \frac{e^{-\pi m^2 c N t^m} \min_{1 \leq i \leq N} \inf_{[0,1]} \rho_{0i}}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 U_i^2 dx. \quad (3.29)$$

Для второго слагаемого в левой части (3.28) имеем неравенство

$$\sum_{i,j=1}^N \int_0^t \int_0^1 \nu_{ij} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial U_j}{\partial x} \right) dx d\tau \geq C_1 \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 dx d\tau. \quad (3.30)$$

Для первого слагаемого в правой части (3.28) получаем соотношение

$$K \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^t \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right) dx d\tau \leq \frac{C_1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 dx d\tau C_{13}(C_1, C_{12}, K, N, t^m) \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 u_i^2 dx d\tau. \quad (3.31)$$

Для второго слагаемого в правой части (3.28) следует неравенство

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \rho_i U_i \left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial \tau} \right) dx d\tau \leq \frac{C_{12} N t^m}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 u_i^2 dx d\tau + \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^N \sup_{[0,t] \times [0,1]} U_i^2 \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial \tau} \right)^2 dx d\tau \leq \varepsilon m C_9^2 \sum_{i=1}^N \sup_{[0,t]} \int_0^1 U_i^2 dx + \\ & + \frac{C_{12} N t^m}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 u_i^2 dx d\tau, \end{aligned} \quad (3.32)$$

взяв в котором

$$\varepsilon m C_9^2 = \frac{e^{-\pi m^2 c N t^m} \min_{1 \leq i \leq N} \inf_{[0,1]} \rho_{0i}}{4N},$$

получим, что

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \rho_i U_i \left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial \tau} \right) dx d\tau &\leq \frac{e^{-\pi m^2 c N t^m} \min_{1 \leq i \leq N} \inf_{[0,1]} \rho_{0i}}{4N} \sum_{i=1}^N \sup_{[0,t]} \int_0^1 U_i^2 dx + \\ &+ C_{14} \left(C_9, C_{12}, \left\{ \inf_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, N, c, m, t^m \right) \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 u_i^2 dx d\tau. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Третье слагаемое в правой части (3.28) оценим следующим образом:

$$- \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \rho_i^{(1)} v U_i \left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx d\tau \leq C_{15} \left(\sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 u_i^2 dx d\tau + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 U_i^2 dx d\tau \right), \quad (3.34)$$

где $C_{15} = C_{15} \left(\left\{ \sup_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, N, c, m, t^m \right)$. Наконец, для последнего слагаемого в правой части (3.28) получаем соотношение

$$- \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \rho_i v^{(2)} U_i \left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx d\tau \leq C_{16} \left(\sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 u_i^2 dx d\tau + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 U_i^2 dx d\tau \right), \quad (3.35)$$

где $C_{16} = C_{16}(C_{12}, N, c, m, t^m)$. Таким образом, из (3.28), с учетом (3.29)–(3.35), следует неравенство

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 U_i^2 dx \leq C_{17} \left(\sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 u_i^2 dx d\tau + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 U_i^2 dx d\tau \right),$$

где $C_{17} = C_{17} \left(C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}, \left\{ \inf_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, N, c, m, t^m \right)$, из которого, пользуясь неравенством Гронуолла, получаем оценку

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 U_i^2 dx \leq C_{18}(C_{17}, t^m) \sum_{i=1}^N \int_0^{t^m} \int_0^1 u_i^2 dx dt,$$

а отсюда — неравенство

$$\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|_{(C[0,t^m])^{mN}} \leq C_{19}(C_{18}, t^m) \|\xi^{(1)} - \xi^{(2)}\|_{(C[0,t^m])^{mN}},$$

обосновывающее непрерывность оператора A на V .

Поскольку оператор A удовлетворяет перечисленным выше условиям теоремы Шаудера, то в V существует неподвижная точка ξ оператора A , определяющая, вместе с соответствующими функциями ρ_i , u_i , $i = 1, \dots, N$, решение задачи (3.1)–(3.4).

4. РАВНОМЕРНЫЕ ОЦЕНКИ И СХОДИМОСТЬ ГАЛЕРКИНСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Получим далее равномерные по параметру m оценки решений приближенной начально-краевой задачи (3.1)–(3.4), которые позволят совершить предельный переход при $m \rightarrow \infty$. Введем следующее обозначение:

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx d\tau, \quad \alpha'(t) \geq 0. \quad (4.1)$$

Поскольку уравнения (3.1) влекут выполнение неравенств (3.7), то из этих неравенств следуют оценки

$$C_{20}^{-1} e^{-C_{20}\alpha(t)} \leq \rho_i(t, x) \leq C_{20} e^{C_{20}\alpha(t)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.2)$$

где $C_{20} = C_{20} \left(\left\{ \sup_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, \left\{ \inf_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, N, T \right)$. Далее заметим, что из (3.1) вытекают равенства

$$\rho_i \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(\frac{1}{\rho_i} \right) + \rho_i v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\rho_i} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.3)$$

из которых получаем

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_i} \right) \right)^2 dx = 2 \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_i} \right) \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.4)$$

Из (4.4) следуют соотношения

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_i} \right) \right)^2 dx \leq \int_0^1 \rho_{0i} \left(\left(\frac{1}{\rho_{0i}} \right)' \right)^2 dx + \\ & + \int_0^t \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_i} \right) \right)^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx d\tau, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Замечание 4.1. При выводе (4.5) нам потребовалась (в (4.3), (4.4)) дополнительная гладкость ρ_i , $i = 1, \dots, N$ по сравнению с (3.5), хотя сами соотношения (4.5) никаких дополнительных требований не предусматривают. Это означает, что (4.5) могут быть получены путем регуляризации ρ_{0i} , $i = 1, \dots, N$, вывода (4.5) для решений получившихся задач, а затем предельного перехода по параметру регуляризации. Аналогичным образом следует понимать вывод соотношений (3.23).

Из (4.5), пользуясь (4.1), (4.2) и неравенством Гронуолла, получаем оценки

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_i} \right) \right)^2 dx + \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x} \right)^2 dx \leq C_{21} e^{C_{21} \alpha(t)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.6)$$

где $C_{21} = C_{21} \left(C_{20}, \left\{ \|\rho_{0i}\|_{W_2^1(0,1)} \right\}_{i=1}^N, \left\{ \inf_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, N, T \right)$. Далее, умножая (3.2) на $\xi'_{ik} + \pi^2 k^2 \xi_{ik}$, суммируя по i, k и учитывая (3.1), (3.4), приходим к соотношению (здесь используется симметричность матрицы $\mathbf{N}$)

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dx + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right) dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx + \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dx = - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i v \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) dx - \\ & - K \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) dx + K \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) dx + \\ & + 2 \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) dx + \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^1 (u_j - u_i) \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dx - \\ & - \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^1 (u_j - u_i) \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) dx. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Левая часть (4.7) допускает оценку (т. к. $\mathbf{N} > 0$)

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dx + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right) dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx + \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dx \geq C_{22}(C_1) \alpha'(t) + \beta'(t), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где

$$\beta(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dx.$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое в правой части (4.7). Для первого слагаемого в правой части (4.7) имеем

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i v \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) dx & \leq \sum_{i=1}^N \sup_{[0,1]} |v| \left(\int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \frac{C_{22}}{14} \alpha'(t) + C_{23}(C_{20}, C_{22}, N) \beta^2(t) e^{C_{23} \alpha(t)}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $C_{23} = C_{23}(C_{20}, C_{22}, N)$. Для второго и третьего слагаемых в правой части (4.7) получаем соответственно

$$-K \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) dx \leq \frac{C_{22}}{14} \alpha'(t) + C_{24} e^{C_{24} \alpha(t)}, \quad (4.10)$$

$$K \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx \leq \frac{C_{22}}{14} \alpha'(t) + C_{25} e^{C_{25} \alpha(t)}, \quad (4.11)$$

где $C_{24} = C_{24}(C_{20}, C_{21}, C_{22}, K, N)$, $C_{25} = C_{25}(C_{21}, C_{22}, K, N)$. Для четвертого слагаемого в правой части (4.7) с помощью интерполяционной оценки

$$\sup_{[0,1]} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x} \right| \leq \sqrt{2} \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{4}}$$

ВЫВОДИМ

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) dx \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^N \sup_{[0,1]} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x} \right| \left(\int_0^1 \frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \frac{C_{22}}{14} \alpha'(t) + C_{26} \beta(t) e^{C_{26} \alpha(t)}, \quad C_{26} = C_{26}(C_{20}, C_{21}, C_{22}, N). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Для пятого слагаемого в правой части (4.7) получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) dx \leq \\ & \leq 2 \sum_{i=1}^N \sup_{[0,1]} |v| \sup_{[0,1]} \sqrt{\rho_i} \left(\int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \frac{C_{22}}{14} \alpha'(t) + C_{27} \beta^2(t) e^{C_{27} \alpha(t)}, \quad C_{27} = C_{27}(C_{20}, C_{22}, N). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Наконец, для последних двух слагаемых в правой части (4.7) выводим соответственно соотношения

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^1 (u_j - u_i) \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dx \leq \frac{C_{22}}{14} \alpha'(t) + C_{28} \beta(t) e^{C_{28} \alpha(t)}, \quad (4.14)$$

$$- \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^1 (u_j - u_i) \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) dx \leq \frac{C_{22}}{14} \alpha'(t) + C_{29} \beta(t) e^{C_{29} \alpha(t)}, \quad (4.15)$$

где $C_{28} = C_{28}(C_{20}, C_{22}, \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N, N)$, $C_{29} = C_{29}(C_{20}, C_{22}, \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N, N)$. Таким образом, из (4.9)–(4.15) следует, что правая часть (4.7)

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i v \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) dx - K \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) dx + K \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx - \\ & - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) dx + 2 \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) dx + \\ & + \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^1 (u_j - u_i) \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dx - \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^1 (u_j - u_i) \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) dx \leq \\ & \leq \frac{C_{22}}{2} \alpha'(t) + C_{30} (1 + \beta^2(t)) e^{C_{30} \alpha(t)}, \quad C_{30} = C_{30}(C_{23}, C_{24}, C_{25}, C_{26}, C_{27}, C_{28}, C_{29}). \end{aligned} \quad (4.16)$$

В итоге, объединяя соотношения (4.8) и (4.16), получаем из (4.7) неравенство

$$\left(\frac{C_{22}}{2} \alpha(t) + \beta(t) \right)' \leq C_{31} e^{C_{31} \left(\frac{C_{22}}{2} \alpha(t) + \beta(t) \right)}, \quad C_{31} = C_{31}(C_{22}, C_{30}). \quad (4.17)$$

Зададим любое $C_{32} > \beta(0)$, например, $C_{32} = 2\beta(0)$. Тогда при

$$t_0 = \min \left(T, \frac{e^{-C_{31} \beta(0)} - e^{-C_{31} C_{32}}}{C_{31}^2} \right) \quad (4.18)$$

из (4.17) получаем оценку

$$\sup_{0 \leq t \leq t_0} (\alpha + \beta) \leq \left(1 + \frac{2}{C_{22}} \right) C_{33}, \quad C_{33} = \frac{1}{C_{31}} \ln \left(\frac{1}{e^{-C_{31} \beta(0)} - C_{31}^2 t_0} \right),$$

из которой и (3.1), (4.2), (4.6) следует, что

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left(\|\rho_i\|_{L_\infty(0, t_0; W_2^1(0,1))} + \|u_i\|_{L_\infty(0, t_0; W_2^1(0,1))} + \|u_i\|_{L_2(0, t_0; W_2^2(0,1))} + \right. \\ & \left. + \left\| \frac{\partial \rho_i}{\partial t} \right\|_{L_\infty(0, t_0; L_2(0,1))} + \left\| \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\|_{L_2(Q_{t_0})} + \left\| \frac{1}{\rho_i} \right\|_{L_\infty(Q_{t_0})} \right) \leq C_{34}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

где $Q_{t_0} = (0, t_0) \times (0, 1)$, $C_{34} = C_{34}(C_{20}, C_{21}, C_{22}, C_{33}, N)$.

Таким образом, построив решения $(\rho_1^m, \dots, \rho_N^m, u_1^m, \dots, u_N^m)$ задач (3.1)–(3.4) при всех $m \in \mathbb{N}$, а затем при необходимости продолжив их на интервал $(0, t_0)$, мы можем использовать для них оценку (4.19). На основании этой оценки может быть выделена подпоследовательность (которую мы обозначим так же, далее эта процедура также будет подразумеваться при необходимости), для которой при $m \rightarrow \infty$ для всех $i = 1, \dots, N$ имеют место сходимости

$$\rho_i^m \rightarrow \rho_i \text{ *-слабо в } L_\infty(0, t_0; W_2^1(0, 1)),$$

$$u_i^m \rightarrow u_i \text{ *-слабо в } L_\infty(0, t_0; W_2^1(0, 1)) \text{ и слабо в } L_2(0, t_0; W_2^2(0, 1)).$$

Кроме того, оставшиеся свойства, перечисленные в (2.5), выполнены для нашей подпоследовательности в Q_{t_0} равномерно по m , а значит, предельные функции попадают в соответствующие

классы. Покажем, что совокупность функций $(\rho_1, \dots, \rho_N, u_1, \dots, u_N)$ является сильным решением задачи (2.1)–(2.4) на $(0, t_0)$.

Из равномерных оценок ρ_i^m, u_i^m в $L_\infty(0, t_0; W_2^1(0, 1))$ и $\frac{\partial \rho_i^m}{\partial t}, \frac{\partial u_i^m}{\partial t}$ в $L_2(Q_{t_0})$ (см. (4.19)) получаем по теореме Арцела–Асколи [19, теорема 1.70, с. 58] сходимости

$$\rho_i^m \rightarrow \rho_i \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ сильно в } C([0, t_0]; L_2(0, 1)), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.20)$$

$$u_i^m \rightarrow u_i \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ сильно в } C([0, t_0]; L_2(0, 1)), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.21)$$

Из ограниченности $\frac{\partial u_i^m}{\partial t}$ в $L_2(Q_{t_0})$ следует равномерная оценка $\frac{\partial^2 u_i^m}{\partial t \partial x}$ в $L_2(0, t_0; W_2^{-1}(0, 1))$, что вместе с оценкой $\frac{\partial u_i^m}{\partial x}$ в $L_2(0, t_0; W_2^1(0, 1))$ приводит, по теореме Обена–Лионса [19, теорема 1.71, с. 59], к сходимостям

$$\frac{\partial u_i^m}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x} \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ сильно в } L_2(Q_{t_0}), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.22)$$

Отсюда и из (4.21) следуют соотношения

$$u_i^m \rightarrow u_i \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ сильно в } L_2(0, t_0; C[0, 1]), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.23)$$

Таким образом, предельные функции $\rho_i, u_i, i = 1, \dots, N$, удовлетворяют уравнениям неразрывности (2.1) почти всюду в Q_{t_0} , в которых $v = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j$, начальным условиям (2.3) для почти всех $x \in (0, 1)$ и граничным условиям (2.4) для почти всех $t \in (0, t_0)$.

Из ограниченности $\frac{\partial u_i^m}{\partial t}$ в $L_2(Q_{t_0})$ следует слабая сходимость $\frac{\partial u_i^m}{\partial t}$ к $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ в $L_2(Q_{t_0})$, что вместе с (4.20) и ограниченностью $\rho_i^m \frac{\partial u_i^m}{\partial t}$ в $L_2(Q_{t_0})$ влечет

$$\rho_i^m \frac{\partial u_i^m}{\partial t} \rightarrow \rho_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ слабо в } L_2(Q_{t_0}), \quad i = 1, \dots, N.$$

Далее, из (4.20) и (4.22) следует, что

$$\rho_i^m \frac{\partial u_i^m}{\partial x} \rightarrow \rho_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ сильно в } L_2(0, t_0; L_1(0, 1)), \quad i = 1, \dots, N,$$

откуда и из (4.23) получаем для всех $i, j = 1, \dots, N$ сходимости

$$\left(\rho_i^m \frac{\partial u_i^m}{\partial x} \right) u_j^m \rightarrow \left(\rho_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) u_j \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ сильно в } L_1(Q_{t_0}). \quad (4.24)$$

Из (3.2) следует, что для любых функций вида $(i = 1, \dots, N)$

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^M \eta_{ik}(t) \sin(\pi k x), \quad \eta_{ik} \in C[0, t_0], \quad k = 1, \dots, M, \quad M \leq m, \quad (4.25)$$

выполнены равенства $(i = 1, \dots, N)$

$$\int_0^{t_0} \int_0^1 \left(\rho_i^m \frac{\partial u_i^m}{\partial t} + \rho_i^m v^m \frac{\partial u_i^m}{\partial x} + \alpha_i K \frac{\partial \rho^m}{\partial x} - \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j^m}{\partial x^2} - \sum_{j=1}^N a_{ij} (u_j^m - u_i^m) \right) \varphi_i dx dt = 0, \quad (4.26)$$

переходя в которых, благодаря полученным выше сходимостям, к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем, поскольку множество функций $\varphi_i, i = 1, \dots, N$ вида (4.25) всюду плотно в $L_2(Q_{t_0})$, справедливость уравнений баланса импульсов (2.2) для предельных функций $\rho_i, u_i, i = 1, \dots, N$ п. в. в Q_{t_0} ,

в которых $\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i$.

Таким образом, доказано существование решения начально-краевой задачи (2.1)–(2.4) в малом по времени. Чтобы продолжить решение с интервала $(0, t_0)$ на весь рассматриваемый интервал $(0, T)$, необходимо для локального решения получить априорные оценки, константы в которых

зависят лишь от данных задачи и от величины T , но не от малого параметра t_0 (см., например, [2, с. 46]).

5. ГЛОБАЛЬНЫЕ АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

При дальнейшем исследовании однозначной разрешимости задачи (2.1)–(2.4) иногда будет удобнее пользоваться массовыми лагранжевыми координатами. Возьмем за новые независимые переменные t и $y(t, x) = \int_0^x \rho(t, s) ds$. Тогда уравнения (2.1), (2.2) примут вид

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_i}{\partial t} + \tilde{\rho}_i \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.1)$$

$$\frac{\tilde{\rho}_i}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \alpha_i K \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} = \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y} \right) + \frac{1}{\tilde{\rho}} \sum_{j=1}^N a_{ij} (\tilde{u}_j - \tilde{u}_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.2)$$

где $\tilde{v} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \tilde{u}_j$, $\tilde{\rho} = \sum_{j=1}^N \tilde{\rho}_j$. Область Q_T при таком переходе отображается в прямоугольник

$\Pi_T = (0, d) \times (0, T)$, где $d = \int_0^1 \rho_0 dx > 0$, $\rho_0 = \sum_{j=1}^N \rho_{0j}$, начальные и граничные условия преобразуются к виду

$$\tilde{\rho}_i|_{t=0} = \tilde{\rho}_{0i}, \quad \tilde{u}_i|_{t=0} = \tilde{u}_{0i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.3)$$

$$\tilde{u}_i|_{y=0} = \tilde{u}_i|_{y=d} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.4)$$

Приступим к выводу априорных оценок. Отметим сначала, что суммируя (5.1) по i , получаем

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \tilde{\rho}^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0, \quad (5.5)$$

поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\tilde{\rho}_i}{\tilde{\rho}} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Отсюда и из (5.3) тогда следует, что для всех $i = 1, \dots, N$

$$\frac{\tilde{\rho}_i(t, y)}{\tilde{\rho}(t, y)} = \frac{\tilde{\rho}_{0i}(y)}{\tilde{\rho}_0(y)}, \quad (5.6)$$

где $\tilde{\rho}_0 = \sum_{j=1}^N \tilde{\rho}_{0j}$. В эйлеровых переменных отношения $\frac{\rho_i}{\rho}$ удовлетворяют уравнениям переноса и в этом случае мы имеем только неравенства

$$0 < \min_{1 \leq i \leq N} \inf_{[0,1]} \frac{\rho_{0i}}{\rho_0} \leq \frac{\rho_i(t, x)}{\rho(t, x)} \leq \max_{1 \leq i \leq N} \sup_{[0,1]} \frac{\rho_{0i}}{\rho_0} \leq 1 \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.7)$$

Умножим далее уравнения (2.2) на u_i , проинтегрируем по x и просуммируем по i . Учитывая, что в силу (2.1), (2.4) и условия $\mathbf{N} > 0$, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\rho_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho_i v \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) u_i dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i u_i^2 dx, \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i K \int_0^1 u_i \frac{\partial \rho}{\partial x} dx &= -K \int_0^1 \rho \frac{\partial v}{\partial x} dx = K \frac{d}{dt} \int_0^1 (\rho \ln \rho - (\ln d + 1) \rho + d) dx, \\ \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right) u_i dx &= - \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dx \leq -C_1 \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx, \end{aligned} \quad (5.8)$$

получим неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \rho_i u_i^2 + K (\rho \ln \rho - (\ln d + 1) \rho + d) \right) dx + \\ & + C_1 \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^1 (u_i - u_j)^2 dx \leq 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Неравенство (5.9) проинтегрируем по t , используя (2.3), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \rho_i u_i^2 + K (\rho \ln \rho - (\ln d + 1) \rho + d) \right) dx + C_1 \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx d\tau + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^t \int_0^1 (u_i - u_j)^2 dx d\tau \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \rho_{0i} u_{0i}^2 + K (\rho_0 \ln \rho_0 - (\ln d + 1) \rho_0 + d) \right) dx, \end{aligned} \quad (5.10)$$

откуда и из (5.7) следует оценка

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho u_i^2 dx + \int_0^1 (\rho \ln \rho - (\ln d + 1) \rho + d) dx + \\ & + \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx dt + \sum_{i,j=1}^N \int_0^T \int_0^1 (u_i - u_j)^2 dx dt \leq C_{35}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где $C_{35} = C_{35} \left(C_1, \left\{ \inf_{[0,1]} \frac{\rho_{0i}}{\rho_0} \right\}_{i=1}^N, \left\{ \sup_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^N, \{ \|u_{0i}\|_{L_2(0,1)} \}_{i=1}^N, K, \{ a_{ij} \}_{i,j=1}^N, N, d \right)$. Перепишем (5.11), используя массовые лагранжевы координаты, в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_0^d \tilde{u}_i^2 dy + \int_0^d \frac{\tilde{\rho} \ln \tilde{\rho} - (\ln d + 1) \tilde{\rho} + d}{\tilde{\rho}} dy + \\ & + \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_0^d \tilde{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y} \right)^2 dy dt + \sum_{i,j=1}^N \int_0^T \int_0^d \frac{(\tilde{u}_i - \tilde{u}_j)^2}{\tilde{\rho}} dy dt \leq C_{35}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Заметим, что из оценки (5.11), ввиду (2.4), очевидно вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^N \int_0^T \left(\sup_{[0,1]} |u_i| \right)^2 dt \leq C_{35}. \quad (5.13)$$

Воспользуемся теперь записью уравнений (2.1), (2.2) в форме (5.1), (5.2). Перепишем уравнения (5.2) в виде

$$\sum_{j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \frac{\tilde{\rho}_j}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} + K \left(\sum_{j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_j \right) \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y} \right) + \frac{1}{\tilde{\rho}} \sum_{j,k=1}^N \tilde{\nu}_{ij} a_{jk} (\tilde{u}_k - \tilde{u}_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.14)$$

где $\tilde{\nu}_{ij}$ — элементы симметричной матрицы $\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N}^{-1} > 0$. Затем умножим (5.14) на α_i и просуммируем по i , получим, с учетом (5.6), что

$$\sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \frac{\tilde{\rho}_j}{\tilde{\rho}_0} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} + \tilde{K} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) + \frac{1}{\tilde{\rho}} \sum_{i,j,k=1}^N \alpha_i \tilde{\nu}_{ij} a_{jk} (\tilde{u}_k - \tilde{u}_j), \quad (5.15)$$

где $\tilde{K} = K \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \alpha_j = \text{const} > 0$. Выражая из уравнения (5.5)

$$\tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = - \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial t} \quad (5.16)$$

и подставляя в (5.15), приходим к равенству

$$\frac{\partial^2 \ln \tilde{\rho}}{\partial t \partial y} + \tilde{K} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} = - \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \frac{\tilde{\rho}_{0j}}{\tilde{\rho}_0} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \sum_{i,j,k=1}^N \alpha_i \tilde{\nu}_{ij} a_{jk} (\tilde{u}_k - \tilde{u}_j).$$

Умножим это равенство на $\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y}$ и проинтегрируем по y , получим соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^d \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy + \tilde{K} \int_0^d \tilde{\rho} \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy = & - \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \left(\frac{\tilde{\rho}_{0j}}{\tilde{\rho}_0} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right) dy + \\ & + \sum_{i,j,k=1}^N \alpha_i \tilde{\nu}_{ij} a_{jk} \int_0^d \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_j}{\tilde{\rho}} \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right) dy. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Правую часть (5.17) преобразуем, интегрируя по частям и используя (5.16):

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \left(\frac{\tilde{\rho}_{0j}}{\tilde{\rho}_0} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right) dy = & - \frac{d}{dt} \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \left(\frac{\tilde{\rho}_{0j}}{\tilde{\rho}_0} \tilde{u}_j \right) \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right) dy + \\ & + \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \left(\frac{\tilde{\rho}_{0j}}{\tilde{\rho}_0} \right)' \tilde{\rho} \tilde{u}_j \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) dy + \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \frac{\tilde{\rho}_{0j} \tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_0} \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) dy. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Таким образом, после интегрирования (5.17) по t , учитывая (5.18), находим

$$\begin{aligned} \int_0^d \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy + 2\tilde{K} \int_0^t \int_0^d \tilde{\rho} \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy d\tau \leq & \int_0^d ((\ln \tilde{\rho}_0)')^2 dy - \\ & - 2 \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \left(\frac{\tilde{\rho}_{0j}}{\tilde{\rho}_0} u_j \right) \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right) dy + 2 \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \left(\frac{\tilde{\rho}_{0j}}{\tilde{\rho}_0} \tilde{u}_{0j} \right) (\ln \tilde{\rho}_0)' dy + \\ & + 2 \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \left(\frac{\tilde{\rho}_{0j}}{\tilde{\rho}_0} \right)' \tilde{\rho} \tilde{u}_j \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) dy + 2 \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \frac{\tilde{\rho}_{0j} \tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_0} \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) dy + \\ & + 2 \sum_{i,j,k=1}^N \alpha_i \tilde{\nu}_{ij} a_{jk} \int_0^t \int_0^d \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_j}{\tilde{\rho}} \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right) dy d\tau. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Используя полученные выше оценки, отсюда выводим неравенство

$$\int_0^d \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy + \int_0^T \int_0^d \tilde{\rho} \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy dt \leq C_{36}, \quad (5.20)$$

где $C_{36} = C_{36} \left(C_{35}, \left\{ \left\| \frac{\tilde{\rho}_{0i}}{\tilde{\rho}_0} \right\|_{W_2^1(0,d)} \right\}_{i=1}^N, \|(\ln \tilde{\rho}_0)'\|_{L_2(0,d)}, \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N, \{\|\tilde{u}_{0i}\|_{L_2(0,d)}\}_{i=1}^N, \tilde{K}, \tilde{N}, N, T, d \right)$.

Далее, из (5.3)–(5.5) очевидно следует, что при каждом $t \in [0, T]$ хотя бы в одной точке $\delta(t) \in [0, d]$

$$\tilde{\rho}(t, \delta(t)) = d. \quad (5.21)$$

Следовательно, можно воспользоваться представлением

$$\ln \tilde{\rho}(t, y) = \ln \tilde{\rho}(t, \delta(t)) + \int_{\delta(t)}^y \frac{\partial \ln \tilde{\rho}(t, s)}{\partial s} ds,$$

из которого по неравенству Гельдера, с учетом (5.20) и (5.21), имеем

$$|\ln \tilde{\rho}(t, y)| \leq |\ln d| + \sqrt{d} \left\| \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right\|_{L_2(0, d)} \leq C_{37}(C_{36}, d).$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\frac{1}{C_{38}(C_{37})} \leq \tilde{\rho}(t, y) \leq C_{38}(C_{37}) \Rightarrow \frac{1}{C_{38}} \leq \rho(t, x) \leq C_{38}. \quad (5.22)$$

Из (5.6) и (5.22) получаем, что для всех $i = 1, \dots, N$

$$C_{39} \leq \tilde{\rho}_i(t, y) \leq C_{38}, \quad (5.23)$$

где $C_{39} = C_{39} \left(C_{38}, \left\{ \inf_{[0, d]} \frac{\tilde{\rho}_{0i}}{\tilde{\rho}_0} \right\}_{i=1}^N \right)$. Значит, для всех $i = 1, \dots, N$

$$C_{39} \leq \rho_i(t, x) \leq C_{38}. \quad (5.24)$$

Из (5.6) и (5.20) тогда следует, что

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x} \right)^2 dx \leq C_{40}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.25)$$

где $C_{40} = C_{40} \left(C_{36}, C_{38}, \left\{ \inf_{[0, d]} \frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_{0i}} \right\}_{i=1}^N, \left\{ \left\| \left(\frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_{0i}} \right)' \right\|_{L_2(0, d)} \right\}_{i=1}^N \right)$, а поэтому

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 dx \leq C_{41}(C_{40}, N). \quad (5.26)$$

Возведем теперь в квадрат уравнения (2.2), поделим на ρ_i и просуммируем по i , получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\rho_i} \left(\sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left(\sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right) = \\ = \sum_{i=1}^N \rho_i \left(v \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\alpha_i K}{\rho_i} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^N a_{ij} (u_j - u_i) \right)^2. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Введем следующее обозначение:

$$\theta(t) = \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dx + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{\rho_i} \left(\sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx d\tau. \quad (5.28)$$

Тогда из (5.27) и неравенств (5.8), (5.24) и (5.26) следует, что (здесь используется симметричность матрицы $\mathbf{N}$)

$$\theta'(t) \leq C_{42} + C_{43} \left(\sum_{j=1}^N \|u_j\|_{L_\infty(0,1)}^2 \right) \theta(t), \quad (5.29)$$

где $C_{42} = C_{42}(C_{35}, C_{39}, C_{41}, \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N, K, N)$, $C_{43} = C_{43}(C_1, C_{38}, N)$, откуда и из неравенства Гро-нуолла (см. также (5.13)) получаем, что

$$\theta(t) \leq C_{44} (C_{35}, C_{42}, C_{43}, \{\|u'_{0i}\|_{L_2(0,1)}\}_{i=1}^N, \mathbf{N}, N, T). \quad (5.30)$$

Из (5.30) непосредственно следует оценка

$$\sum_{i=1}^N \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dx dt + \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2 dx dt \right) \leq C_{45}, \quad (5.31)$$

где $C_{45} = C_{45}(C_1, C_{38}, C_{39}, C_{44}, N)$.

Наконец, из уравнений неразрывности (2.1) и оценок (5.24), (5.25) и (5.31) получаем, что

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial t} \right)^2 dx \leq C_{46}(C_{38}, C_{41}, C_{45}, N), \quad i = 1, \dots, N.$$

Тем самым получены все оценки, необходимые для продолжения решения начально-краевой задачи (2.1)–(2.4) с интервала $(0, t_0)$ на интервал $(0, T)$. Для завершения доказательства теоремы 2.1 осталось обосновать единственность решения начально-краевой задачи (2.1)–(2.4).

6. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

Пусть $(\rho_1^{(1)}, \dots, \rho_N^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_N^{(1)})$ и $(\rho_1^{(2)}, \dots, \rho_N^{(2)}, u_1^{(2)}, \dots, u_N^{(2)})$ — два решения задачи начально-краевой задачи (2.1)–(2.4), $v^{(1,2)} = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j^{(1,2)}$, $\rho^{(1,2)} = \sum_{j=1}^N \rho_j^{(1,2)}$. Положим $\rho_i = \rho_i^{(1)} - \rho_i^{(2)}$, $u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$, $i = 1, \dots, N$, $v = v^{(1)} - v^{(2)}$, $\rho = \rho^{(1)} - \rho^{(2)}$.

Из (2.1), (2.3) следуют равенства (см. (3.24))

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_i v^{(1)})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_i^{(2)} v)}{\partial x} = 0, \quad \rho_i|_{t=0} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.1)$$

Умножая (6.1) на $2\rho_i$ и интегрируя по x , получаем

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \rho_i^2 dx = - \int_0^1 \left(\rho_i^2 \left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} \right) + 2\rho_i^{(2)} \rho_i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2\rho_i v \left(\frac{\partial \rho_i^{(2)}}{\partial x} \right) \right) dx, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.2)$$

Слагаемые в правой части (6.2) можно оценить следующим образом:

$$- \int_0^1 \rho_i^2 \left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} \right) dx \leq \left(\sum_{j=1}^N \left\| \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x} \right\|_{L_\infty(0,1)} \right) \left(\int_0^1 \rho_i^2 dx \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad (6.3)$$

$$-2 \int_0^1 \rho_i^{(2)} \rho_i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \leq \left\| \rho_i^{(2)} \right\|_{L_\infty(Q_T)}^2 \left(\int_0^1 \rho_i^2 dx \right) + N \sum_{j=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right)^2 dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} -2 \int_0^1 \rho_i v \left(\frac{\partial \rho_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx &\leq \int_0^1 \rho_i^2 dx + \left\| \frac{\partial \rho_i^{(2)}}{\partial x} \right\|_{L_\infty(0,T;L_2(0,1))}^2 \|v\|_{L_\infty(0,1)}^2 \leq \int_0^1 \rho_i^2 dx + \\ &+ N \left\| \frac{\partial \rho_i^{(2)}}{\partial x} \right\|_{L_\infty(0,T;L_2(0,1))}^2 \left(\sum_{j=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right)^2 dx \right), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (6.5)$$

В силу включений

$$\begin{aligned} \rho_i^{(2)} &\in L_\infty(Q_T), \quad \frac{\partial \rho_i^{(2)}}{\partial x} \in L_\infty(0, T; L_2(0, 1)), \quad i = 1, \dots, N, \\ \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x} &\in L_2(0, T; L_\infty(0, 1)), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

ВЫВОДИМ ОЦЕНКИ

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \rho_i^2 dx \leq C_{47}(t) \int_0^1 \rho_i^2 dx + C_{48} \sum_{j=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right)^2 dx, \quad i = 1, \dots, N,$$

где

$$C_{47} = C_{47} \left(\left\{ \left\| \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x} \right\|_{L_\infty(0,1)} \right\}_{i=1}^N, \left\{ \|\rho_i^{(2)}\|_{L_\infty(Q_T)} \right\}_{i=1}^N \right), \quad C_{47} \in L_2(0, T),$$

$$C_{48} = C_{48} \left(\left\{ \left\| \frac{\partial \rho_i^{(2)}}{\partial x} \right\|_{L_\infty(0,T;L_2(0,1))} \right\}_{i=1}^N, N \right).$$

Поэтому, применяя неравенство Гронуолла, приходим к неравенствам

$$\int_0^1 \rho_i^2 dx \leq C_{49} (\|C_{47}\|_{L_1(0,T)}, C_{48}) \sum_{j=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right)^2 dx d\tau, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.6)$$

Далее, из уравнений (2.2) и краевых условий (2.4) следует равенство (см. (3.28))

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^{(1)} u_i^2 dx + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dx + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_0^1 (u_i - u_j)^2 dx = K \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t} \right) dx - \\ & - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^{(1)} v u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i v^{(2)} u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx, \end{aligned} \quad (6.7)$$

из которого вытекает соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^{(1)} u_i^2 dx + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dx d\tau \right) \leq K \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx - \\ & - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t} \right) dx - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^{(1)} v u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i v^{(2)} u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Оценим слагаемые в правой части соотношения (6.8) следующим образом:

$$K \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \leq \frac{C_1}{4} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx + C_{50} (C_1, K, N) \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^2 dx, \quad (6.9)$$

$$- \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t} \right) dx \leq \frac{C_1}{4} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx + C_{51} \left(C_1, \left\{ \left\| \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t} \right\|_{L_2(0,1)} \right\}_{i=1}^N \right) \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^2 dx, \quad (6.10)$$

$$- \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^{(1)} v u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx \leq C_{52} \left(\left\{ \left\| \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right\|_{L_\infty(0,1)} \right\}_{i=1}^N, N \right) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^{(1)} u_i^2 dx, \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i v^{(2)} u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx \leq C_{53} \left(\left\{ \|u_i^{(2)}\|_{L_\infty(Q_T)} \right\}_{i=1}^N, N \right) \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^2 dx + \\
& + C_{54} \left(\left\{ \left\| \frac{1}{\rho_i^{(1)}} \right\|_{L_\infty(Q_T)} \right\}_{i=1}^N, \left\{ \left\| \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right\|_{L_\infty(0,1)} \right\}_{i=1}^N \right) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^{(1)} u_i^2 dx,
\end{aligned} \tag{6.12}$$

где $C_{51}, C_{54} \in L_1(0, T)$, $C_{52} \in L_2(0, T)$. Таким образом, из (6.8), с учетом уже доказанного соотношения (см. (6.6))

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^2 dx \leq C_{55}(C_1, C_{49}, N) \frac{C_1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx d\tau,$$

следует неравенство

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^{(1)} u_i^2 dx + \frac{C_1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx d\tau \right) \leq C_{56} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^{(1)} u_i^2 dx + \right. \\
& \left. + \frac{C_1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx d\tau \right),
\end{aligned} \tag{6.13}$$

где $C_{56} = C_{56}(C_{50}, C_{51}, C_{52}, C_{53}, C_{54}, C_{55})$, $C_{56} \in L_1(0, T)$, из которого получаем тождества $\rho_i \equiv 0$, $u_i \equiv 0$, $i = 1, \dots, N$, завершающие доказательство теоремы 2.1.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для начально-краевой задачи о движениях сжимаемой вязкой смеси проведено исследование однозначной разрешимости. В исследуемых уравнениях, являющихся некоторыми обобщениями известной системы уравнений Навье—Стокса, присутствуют старшие производные (производные второго порядка) от полей скоростей всех компонент, поскольку, в отличие от уравнений Навье—Стокса, в которых коэффициент вязкости является скаляром, в случае смеси, ввиду составной структуры тензоров вязких напряжений, коэффициенты вязкостей образуют матрицу вязкостей, элементы которой отвечают за вязкое трение. За вязкое трение внутри каждой компоненты отвечают диагональные элементы, а за трение между компонентами — недиагональные. Это не позволяет автоматически распространить известные результаты для уравнений Навье—Стокса на случай смеси. В случае диагональной матрицы вязкостей уравнения будут связаны только через младшие члены. В работе рассматривается более сложный случай недиагональной матрицы вязкостей. Доказывается существование и единственность сильного решения начально-краевой задачи без каких-либо упрощающих предположений о структуре матрицы вязкостей, кроме стандартных физических требований симметричности и положительной определенности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амосов А. А., Злотник А. А. Разрешимость «в целом» системы уравнений одномерного движения неоднородного вязкого теплопроводного газа // Мат. заметки. — 1992. — 52, № 2. — С. 3–16.
2. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. — М.: Наука, 1983.
3. Злотник А. А. Равномерные оценки и стабилизация решений системы уравнений одномерного движения многокомпонентной баротропной смеси // Мат. заметки. — 1995. — 58, № 2. — С. 307–312.
4. Злотник А. А. Слабые решения уравнений движения вязкой сжимаемой реагирующей бинарной смеси: единственность и непрерывная по Липшицу зависимость от данных // Мат. заметки. — 2004. — 75, № 2. — С. 307–310.
5. Злотник А. А., Амосов А. А. Обобщенные решения «в целом» уравнений одномерного движения вязкого баротропного газа // Докл. АН СССР. — 1988. — 299, № 6. — С. 1303–1307.
6. Кажихов А. В., Петров А. Н. Корректность начально-краевой задачи для модельной системы уравнений многокомпонентной смеси // Динам. сплош. среды. — 1978. — 35. — С. 61–73.

7. Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А. Глобальная однозначная разрешимость начально-краевой задачи для одномерных баротропных уравнений динамики бинарных смесей вязких сжимаемых жидкостей// Сиб. ж. индустр. мат. — 2021. — 24, № 1. — С. 32–47.
8. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред, ч. 1. — М.: Наука, 1987.
9. Папин А. А. Об единственности решений начально-краевой задачи для системы теплопроводной двухфазной смеси// Мат. заметки. — 2010. — 87, № 4. — С. 636–640.
10. Папин А. А., Ахмерова И. Г. Разрешимость системы уравнений одномерного движения теплопроводной двухфазной смеси// Мат. заметки. — 2010. — 87, № 2. — С. 246–261.
11. Петров А. Н. Корректность начально-краевых задач для одномерных уравнений взаимопроникающего движения совершенных газов// Динам. сплош. среды. — 1982. — 56. — С. 105–121.
12. Прокудин Д. А. Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для модельной системы уравнений политропного движения смеси вязких сжимаемых жидкостей// Сиб. электрон. мат. изв. — 2017. — 14. — С. 568–585.
13. Bresch D., Huang X., Li J. Global weak solutions to one-dimensional non-conservative viscous compressible two-phase system// Commun. Math. Phys. — 2012. — 309. — С. 737–755.
14. DiPerna R. J., Lions P. L. Ordinary differential aligns, transport theory and Sobolev spaces// Invent. Math. — 1989. — 98. — С. 511–547.
15. Li S. On one-dimensional compressible Navier–Stokes aligns for a reacting mixture in unbounded domains// Z. Angew. Math. Phys. — 2017. — 68. — 106.
16. Mamontov A. E., Prokudin D. A. Viscous compressible homogeneous multi-fluids with multiple velocities: barotropic existence theory// Сиб. электрон. мат. изв. — 2017. — 14. — С. 388–397.
17. Mamontov A. E., Prokudin D. A. Unique solvability of initial-boundary value problem for one-dimensional aligns of polytropic flows of multicomponent viscous compressible fluids// Сиб. электрон. мат. изв. — 2018. — 15. — С. 631–649.
18. Mamontov A. E., Prokudin D. A. Global unique solvability of the initial-boundary value problem for the aligns of one-dimensional polytropic flows of viscous compressible multfluids// J. Math. Fluid Mech. — 2019. — 21. — 9.
19. Novotny A., Straskraba I. Introduction to the mathematical theory of compressible flow. — Oxford: Oxford University Press, 2004.
20. Rajagopal K. R., Tao L. Mechanics of mixtures. — Singapore: World Scientific, 1995.

В. Ю. Ноговищева

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

E-mail: v.nogovishcheva@ng.su.ru

Д. А. Прокудин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия

E-mail: prokudin@hydro.nsc.ru

UDC 517.95

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-395-416

EDN: FFCPIL

Existence and uniqueness of the solution of the initial-boundary value problem for one-dimensional equations of the dynamics of a compressible viscous mixture

V. Yu. Nogovishcheva¹ and D. A. Prokudin²

¹*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*

²*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences*

³*Altai State University, Barnaul, Russia*

Abstract. In this paper, an initial-boundary value problem is studied for one-dimensional equations of the dynamics of a compressible viscous mixture. A theorem is proved for the existence and uniqueness of a solution to the initial-boundary value problem without any restrictions on the structure of the viscosity matrix other than the standard physical requirements of symmetry and positive definiteness.

Keywords: dynamics of a compressible viscous mixture, one-dimensional initial-boundary value problem, off-diagonal viscosity matrix, existence and uniqueness of a solution.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was carried out with the financial support of the project “Modern models of hydrodynamics for problems of nature management, industrial systems and polar mechanics” (2024–26) (State assignment FZMW-2024-0003).

For citation: V. Yu. Nogovishcheva, D. A. Prokudin, “Existence and uniqueness of the solution of the initial-boundary value problem for one-dimensional equations of the dynamics of a compressible viscous mixture,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. 71, No. 3, 395–416. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-395-416>

REFERENCES

1. A. A. Amosov and A. A. Zlotnik, “Razreshimost’ «v tselom» sistemy uravneniy odnomernogo dvizheniya neodnorodnogo vyazkogo teploprovodnogo gaza” [Solvability «in the large» of the system of equations of one-dimensional motion of a nonuniform viscous heat-conducting gas], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1992, **52**, No. 2, 3–16 (in Russian).
2. S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, and V. N. Monakhov, *Kraevye zadachi mekhaniki neodnorodnykh zhidkostey* [Boundary-Value Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Fluids], Nauka, Moscow, 1983 (in Russian).
3. A. A. Zlotnik, “Ravnomernye otsenki i stabilizatsiya resheniy sistemy uravneniy odnomernogo dvizheniya mnogokomponentnoy barotropnoy smesi” [Uniform estimates and stabilization of solutions of a system of equations of one-dimensional motion of a multicomponent barotropic mixture], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1995, **58**, No. 2, 307–312 (in Russian).
4. A. A. Zlotnik, “Slabye resheniya uravneniy dvizheniya vyazkoy szhimaemoy reagiruyushchey binarnoy smesi: edinstvennost’ i nepreryvnaya po Lipshitsu zavisimost’ ot dannykh” [Weak solutions of the equations of motion of a viscous compressible reacting binary mixture: uniqueness and Lipschitz-continuous data dependence], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2004, **75**, No. 2, 307–310 (in Russian).
5. A. A. Zlotnik and A. A. Amosov, “Obobshchennye resheniya «v tselom» uravneniy odnomernogo dvizheniya vyazkogo barotropnogo gaza” [Generalized solutions «in general» of the equations of one-dimensional



- motion of a viscous barotropic gas], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1988, **299**, No. 6, 1303–1307 (in Russian).
6. A. V. Kazhikhov and A. N. Petrov, “Korrektnost’ nachal’no-kraevoy zadachi dlya model’noy sistemy uravneniy mnogokomponentnoy smesi” [Well-posedness of the initial-boundary value problem for a model system of equations of a multicomponent mixture], *Dinam. splosh. sredy* [Dym. Contin. Medium], 1978, **35**, 61–73 (in Russian).
 7. A. E. Mamontov and D. A. Prokudin, “Global’naya odnoznachnaya razreshimost’ nachal’no-kraevoy zadachi dlya odnomernykh barotropnykh uravneniy dinamiki binarnykh smesey vyazkikh szhimaemykh zhidkostey” [Global unique solvability of the initial-boundary value problem for one-dimensional barotropic equations of the dynamics of binary mixtures of viscous compressible fluids], *Sib. zh. industr. mat.* [Sib. J. Industr. Math.], 2021, **24**, No. 1, 32–47 (in Russian).
 8. R. I. Nigmatulin, *Dinamika mnogofaznykh sred, ch. 1* [Dynamics of Multiphase Media, Pt. 1], Nauka, Moscow, 1987 (in Russian).
 9. A. A. Papin, “Ob edinstvennosti resheniy nachal’no-kraevoy zadachi dlya sistemy teploprovodnoy dvukhfaznoy smesi” [On the uniqueness of solutions of the initial-boundary value problem for a system of heat-conducting two-phase mixtures], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2010, **87**, No. 4, 636–640 (in Russian).
 10. A. A. Papin and I. G. Akhmerova, “Razreshimost’ sistemy uravneniy odnomernogo dvizheniya teploprovodnoy dvukhfaznoy smesi” [Solvability of the system of equations of one-dimensional motion of a heat-conducting two-phase mixture], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2010, **87**, No. 2, 246–261 (in Russian).
 11. A. N. Petrov, “Korrektnost’ nachal’no-kraevykh zadach dlya odnomernykh uravneniy vzaimopronikayushchego dvizheniya sovershennykh gazov” [Correctness of initial-boundary value problems for one-dimensional equations of interpenetrating motion of perfect gases], *Dinam. splosh. sredy* [Dym. Contin. Medium], 1982, **56**, 105–121 (in Russian).
 12. D. A. Prokudin, “Ob odnoznachnoy razreshimosti nachal’no-kraevoy zadachi dlya model’noy sistemy uravneniy politropnogo dvizheniya smesi vyazkikh szhimaemykh zhidkostey” [On the unique solvability of the initial-boundary value problem for a model system of equations of polytropic motion of a mixture of viscous compressible fluids], *Sib. elektron. mat. izv.* [Sib. Electron. Math. Bull.], 2017, **14**, 568–585 (in Russian).
 13. D. Bresch, X. Huang, and J. Li, “Global weak solutions to one-dimensional non-conservative viscous compressible two-phase system,” *Commun. Math. Phys.*, 2012, **309**, 737–755.
 14. R. J. DiPerna and P. L. Lions, “Ordinary differential aligns, transport theory and Sobolev spaces,” *Invent. Math.*, 1989, **98**, 511–547.
 15. S. Li, “On one-dimensional compressible Navier–Stokes aligns for a reacting mixture in unbounded domains,” *Z. Angew. Math. Phys.*, 2017, **68**, 106.
 16. A. E. Mamontov and D. A. Prokudin, “Viscous compressible homogeneous multi-fluids with multiple velocities: barotropic existence theory,” *Сиб. электрон. мат. изв.*, 2017, **14**, 388–397.
 17. A. E. Mamontov and D. A. Prokudin, “Unique solvability of initial-boundary value problem for one-dimensional aligns of polytropic flows of multicomponent viscous compressible fluids,” *Сиб. электрон. мат. изв.*, 2018, **15**, 631–649.
 18. A. E. Mamontov and D. A. Prokudin, “Global unique solvability of the initial-boundary value problem for the aligns of one-dimensional polytropic flows of viscous compressible multifluids,” *J. Math. Fluid Mech.*, 2019, **21**, 9.
 19. A. Novotny and I. Straskraba, *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*, Oxford University Press, Oxford, 2004.
 20. K. R. Rajagopal and L. Tao, *Mechanics of mixtures*, World Scientific, Singapore, 1995.

V. Yu. Nogovishcheva

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

E-mail: v.nogovishcheva@ng.su.ru

D. A. Prokudin

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

Altai State University, Barnaul, Russia

E-mail: prokudin@hydro.nsc.ru

УДК 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-417-442

EDN: FLFXBT

ФОРМУЛА ЛЕФШЕЦА ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ, АССОЦИИРОВАННЫХ С РАССЛОЕНИЕМ

Н. Р. Орлова

Москва, Россия

Аннотация. Рассматриваются эллиптические комплексы операторов, ассоциированные с расслоением. Дается формула Атьи—Ботта—Лефшеца для эндоморфизмов таких комплексов. Доказательство основано на методе стационарной фазы. Для оценки остаточного члена используются волновые фронты распределений.

Ключевые слова: эллиптические комплексы, нелокальные задачи, числа Лефшеца, волновой фронт, метод стационарной фазы.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор благодарен В. Е. Назайкинскому за объяснение его подхода к доказательству формулы Лефшеца и А. Ю. Савину за внимание к данной работе и полезные замечания в процессе её написания. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Н. Р. Орлова. Формула Лефшеца для нелокальных эллиптических задач, ассоциированных с расслоением // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 3. С. 417–442. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-417-442>

ВВЕДЕНИЕ

Для диффеоморфизма $g : M \rightarrow M$ многообразия M число Лефшеца определяется как альтернированная сумма

$$L(g) = \sum_{j=0}^{\dim M} (-1)^j \operatorname{tr} g^*|_{H^j(M)}$$

следов индуцированного отображения g^* на группах когомологий $H^j(M)$. Классическая формула Лефшеца [21] выражает число Лефшеца диффеоморфизма гладкого замкнутого многообразия в терминах вкладов его неподвижных точек.

Классическая формула Лефшеца может быть легко сформулирована в терминах комплекса де Рама. Пусть M — замкнутое многообразие размерности n , $\Omega^k(M)$ — пространство дифференциальных k -форм на M , а $d_k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ — оператор внешнего дифференцирования, для которого выполнено $d_{k+1}d_k = 0$. Комплекс де Рама

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(M) \longrightarrow 0$$

является эллиптическим, а его когомологии

$$\mathcal{H}_{dR}^k = \ker d_k / \operatorname{im} d_{k-1}$$

конечномерны. Рассматривается диффеоморфизм $g : M \rightarrow M$. Имеются индуцированные отображения $g_k^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$, для которых выполнено условие

$$d_k g_k^* = g_{k+1}^* d_k.$$

Эндоморфизм g^* индуцирует эндоморфизм когомологий де Рама $\mathcal{H}_{dR}^k$. Числом Лефшеца в этом случае называется альтернированная сумма

$$L_d(g) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \operatorname{tr} g^*|_{\mathcal{H}_{dR}^k}.$$

В частном случае, когда $g = \operatorname{Id}$ является тождественным отображением, число Лефшеца $L_d(\operatorname{Id})$ совпадает с эйлеровой характеристикой $\chi(M)$ многообразия M :

$$L_d(\operatorname{Id}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim \mathcal{H}_{dR}^k = \chi(M).$$

Предполагается, что все неподвижные точки диффеоморфизма g невырождены, т. е. для каждой неподвижной точки x выполнено условие $\det(1 - dg(x)) \neq 0$. Теорема Лефшеца утверждает, что число Лефшеца отображения g равно числу его неподвижных точек с соответствующими знаками:

$$L_d(g) = \sum_{g(x)=x} \operatorname{sign} \det(1 - dg(x)).$$

Атья и Ботт [8, 9] получили далеко идущее обобщение классической формулы Лефшеца на эндоморфизмы эллиптических комплексов псевдодифференциальных операторов. Напомним, что комплекс

$$0 \longrightarrow H^0 \xrightarrow{d_0} H^1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_m} H^m \longrightarrow 0, \quad d_j d_{j-1} = 0 \quad \text{для всех } j \quad (0.1)$$

ограниченных операторов d_j , действующих в гильбертовых пространствах H^j , фредгольмов, если его когомологии $\mathcal{H}^j(d) = \ker d_j / \operatorname{im} d_{j-1}$ являются конечномерными для всех j . Эндоморфизм $T = (T^j)$ комплекса (0.1) является набором таких ограниченных операторов $T^j : H^j \rightarrow H^j$, что $T^{j+1} d_j = d_j T^j$ для всех j . Число Лефшеца определяется как

$$L_d(g) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \operatorname{tr} T^j|_{\mathcal{H}^j(d)}.$$

Атья и Ботт рассматривали комплексы (0.1), где H^j — пространства Соболева, а d_j являются псевдодифференциальными операторами на гладком замкнутом многообразии. В этом случае фредгольмовость комплекса эквивалентна его эллиптичности (а именно, комплекс эллиптивен, если его символьный комплекс точен). Рассматривался геометрический эндоморфизм комплекса $T^j = \Phi^j \circ g^*$, который определяется диффеоморфизмом $g : M \rightarrow M$ рассматриваемого многообразия и семейством изоморфизмов $\Phi^j : g^* E_j \rightarrow E_j$ расслоений E_j над M .

Если все неподвижные точки диффеоморфизма g невырожденные, то число Лефшеца вычисляется в терминах вкладов неподвижных точек по формуле Атья и Ботта

$$L_d(g) = \sum_{g(x)=x} \frac{\sum_i (-1)^i \operatorname{tr} \Phi^i(x)}{|\det(1 - dg(x))|}. \quad (0.2)$$

Примечательно, что формула (0.2) показывает, что число Лефшеца не зависит от операторов в комплексе и определяется исключительно эндоморфизмом комплекса на множестве неподвижных точек. Этот результат в частном случае комплекса де Рама даёт классическую формулу Лефшеца. Поэтому в литературе формула, полученная Атьёй и Боттом, называется *формулой Атья—Ботта—Лефшеца*. Ещё одним частным случаем формулы (0.2) является формула Лефшеца для комплекса Дольбо (голоморфная формула Лефшеца).

В последующие годы различным способом доказательства теоремы Атья—Ботта—Лефшеца был посвящён ряд работ [11, 12, 16, 19, 20, 28, 32].

Теорема Атья—Ботта—Лефшеца обобщалась в различных направлениях. Например, рассматривались не только невырожденные неподвижные точки: в работе Толедо [30] был представлен

общий подход к исследованию изолированных неподвижных точек диффеоморфизма g в случае эллиптических комплексов. Голоморфный вариант формулы Атьи—Ботта—Лефшеца обобщался Патоди [26], Толедо и Тонгом [31], Иноуэ [17] и другими. В работе [5] были определены числа Лефшеца для операторов в W^* -модулях. Рассматривались более сложные операторы, например, в работах [22, 29] рассмотрены эндоморфизмы эллиптических комплексов, определённых квантованными каноническими преобразованиями. Также рассматривались более сложные многообразия. В работе [1] была дана формула Лефшеца для потоков на компактных многообразиях, сохраняющих слоение коразмерности один и имеющих неподвижные точки. В работе [13] рассмотрены эллиптические комплексы на многообразии с краем, состоящие из операторов Буте де Монвеля. Для этого случая был дан аналог формулы Атьи—Ботта—Лефшеца. Рассматривались также многообразия с коническими особенностями [10, 23–25]. В работе [18] был дан аналог формулы Атьи—Ботта—Лефшеца для комплексов в относительной эллиптической теории.

Целью данной работы является предъявление формулы Лефшеца для нелокальных задач, ассоциированных с расслоением, введённых в работе [4].

Рассматриваются гладкие замкнутые многообразия X и Y , локально тривиальное расслоение с проекцией $\pi : X \rightarrow Y$ и матричные операторы вида

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} : \begin{matrix} H(X) \\ \oplus \\ H(Y) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H(X) \\ \oplus \\ H(Y) \end{matrix}, \quad (0.3)$$

где

- $H(X)$, $H(Y)$ — пространства Соболева на X и на Y ;
- A и D — псевдодифференциальные операторы (ПДО) на X и на Y соответственно;
- B — граничный оператор, равный композиции ПДО на X и Y и оператора интегрирования по слою, а C является кограничным оператором, равным композиции ПДО на X и Y и оператора продолжения константой вдоль слоя [2].

В работе даётся условие эллиптичности комплексов операторов с дифференциалами вида (0.3), а также даются условия, при которых такие комплексы фредгольмовы. Затем даётся определение геометрического эндоморфизма, определённого послойным диффеоморфизмом. Основным результатом работы является теорема типа Атьи—Ботта—Лефшеца, которая выражает число Лефшеца в терминах невырожденных неподвижных точек соответствующих диффеоморфизмов. Для доказательства этой теоремы используется подход, предложенный в работе [6]. Следуя этому подходу, метод микролокального разбиения единицы на T^*X с параметром $h > 0$ применяется для локализации основного вклада в формулу Лефшеца, а метод стационарной фазы — для вычисления его асимптотики при $h \rightarrow 0$. Также в работе [6] показано, что оставшиеся члены в формулу Лефшеца вклад не вносят, однако подробного доказательства этого факта не приводится. В данной работе мы восполняем этот пробел.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $H_0, \dots, H_m$ — гильбертовы пространства. Рассмотрим комплекс

$$0 \longrightarrow H_0 \xrightarrow{a_0} H_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_{m-1}} H_m \longrightarrow 0, \quad (1.1)$$

где a_j — линейные ограниченные операторы, при этом $a_{j+1}a_j = 0$. Для комплекса (1.1) справедливо следующее утверждение [27].

Лемма 1.1. *Если комплекс (1.1) точен, то в качестве его параметрикса можно взять последовательность*

$$0 \longleftarrow H_0 \xleftarrow{r_0} H_1 \xleftarrow{r_1} \dots \xleftarrow{r_{m-1}} H_m \longleftarrow 0$$

операторов $r_j = l_j^{-1}a_j^* = a_j^*l_{j+1}^{-1}$, где

$$l_j = a_{j-1}a_{j-1}^* + a_j^*a_j : H_j \rightarrow H_j \quad (1.2)$$

— j -й лапласиан комплекса (1.1). Другими словами, выполнено равенство

$$a_{j-1}r_{j-1} + r_ja_j = 1 - k_j.$$

Здесь k_j — оператор конечного ранга.

Теперь предположим, что комплекс (1.1) является подкомплексом комплекса

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{L_0}^{H_0} \xrightarrow{\tilde{a}_0} \bigoplus_{L_1}^{H_1} \xrightarrow{\tilde{a}_1} \dots \xrightarrow{\tilde{a}_{m-1}} \bigoplus_{L_m}^{H_m} \longrightarrow 0, \quad (1.3)$$

где пространства L_j конечномерные, а

$$\tilde{a}_j = \begin{pmatrix} a_j & c_j \\ b_j & d_j \end{pmatrix} : \bigoplus_{L_j}^{H_j} \longrightarrow \bigoplus_{L_{j+1}}^{H_{j+1}}, \quad \tilde{a}_{j+1}\tilde{a}_j = 0.$$

Здесь b_j, c_j, d_j — операторы конечного ранга.

Лемма 1.2. Если комплексы (1.1) и (1.3) точны, то в качестве параметрикса комплекса (1.3)

$$0 \longleftarrow \bigoplus_{L_0}^{H_0} \xleftarrow{\tilde{r}_0} \bigoplus_{L_1}^{H_1} \xleftarrow{\tilde{r}_1} \dots \xleftarrow{\tilde{r}_{m-1}} \bigoplus_{L_{m-1}}^{H_m} \longleftarrow 0,$$

можно взять операторы $\tilde{r}_j = \tilde{l}_j^{-1}\tilde{a}_j^*$. При этом имеем

$$\tilde{l}_j^{-1} = \begin{pmatrix} l_j^{-1} + g_j' & c_j' \\ b_j' & d_j' \end{pmatrix},$$

где b_j', c_j', d_j', g_j' — операторы конечного ранга.

Доказательство. j -й лапласиан, ассоциированный с комплексом (1.3), равен

$$\tilde{l}_j = \tilde{a}_{j-1}\tilde{a}_{j-1}^* + \tilde{a}_j^*\tilde{a}_j : \bigoplus_{L_j}^{H_j} \longrightarrow \bigoplus_{L_j}^{H_j}.$$

Получим

$$\tilde{l}_j = \begin{pmatrix} a_{j-1}a_{j-1}^* + a_j^*a_j + b_j^*b_j + c_{j-1}c_{j-1}^* & a_{j-1}b_{j-1}^* + c_{j-1}d_{j-1}^* + a_j^*c_j + b_j^*d_j \\ b_{j-1}a_{j-1}^* + d_{j-1}c_{j-1}^* + c_j^*a_j + d_j^*b_j & c_j^*c_j + d_j^*d_j + b_{j-1}b_{j-1}^* + d_{j-1}d_{j-1}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_j & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + K_j, \quad (1.4)$$

где K_j — матричный оператор конечного ранга. Поскольку комплекс (1.1) точен, то его лапласианы (1.2) обратимы, т. е. существуют обратные операторы l_j^{-1} , и

$$\tilde{l}_j = \begin{pmatrix} l_j & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(1 + \begin{pmatrix} l_j^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_j \right).$$

Отсюда получаем, что оператор, обратный к лапласиану (1.4), равен

$$\tilde{l}_j^{-1} = \left(1 + \begin{pmatrix} l_j^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_j \right)^{-1} \begin{pmatrix} l_j^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1 + K_j') \begin{pmatrix} l_j^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_j^{-1} + g_j' & c_j' \\ b_j' & d_j' \end{pmatrix}.$$

Здесь K_j' — матричный оператор конечного ранга. □

2. КОМПЛЕКСЫ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Рассмотрим гладкие замкнутые многообразия X и Y и локально-тривиальное расслоение со слоем G и проекцией

$$\pi : X \longrightarrow Y.$$

Размерности многообразий обозначим через $n = \dim X$, $l = \dim Y$, $\nu = \dim X - \dim Y$. Выберем локальные координаты в окрестности произвольной точки на X и обозначим их через $(x', x'') \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^\nu$. Двойственные координаты в слоях кокасательного расслоения T^*X обозначим через (ξ', ξ'') .

Определим оператор поднятия

$$\pi^* : H^s(Y) \longrightarrow H^s(X), \quad (\pi^* f)(x', x'') = f(x'),$$

и соответствующий оператор опускания (интегрирования по слою)

$$\pi_* : H^s(X) \longrightarrow H^s(Y), \quad (\pi_* f)(x') = \int_{G_{x'}} f(x', x'') dx'',$$

где dx'' — гладкое семейство форм объёма на слоях $G_{x'}$. Операторы π^* и π_* непрерывно действуют в указанных пространствах Соболева при всех $s \in \mathbb{R}$. При этом будем предполагать, что выполнено условие

$$\pi_* 1 = 1, \quad (2.1)$$

т. е. объём каждого слоя равен единице.

Следуя [4], рассмотрим матричные операторы вида

$$d = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} : \begin{matrix} H^{s_k}(X) \\ \oplus \\ H^{s_k}(Y) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H^{s_l}(X) \\ \oplus \\ H^{s_l}(Y) \end{matrix}, \quad (2.2)$$

где A и D — ПДО порядка $\text{ord} A = \text{ord} D = s_k - s_l$ на X и Y соответственно. Операторы B и C равны

$$B = D_Y'' \pi_* D_X'', \quad C = D_X' \pi^* D_Y', \quad (2.3)$$

где D_X', D_X'' — ПДО на X , а D_Y', D_Y'' — ПДО на Y . Можно также рассматривать конечные суммы операторов вида (2.3).

Далее будем рассматривать последовательности операторов вида (2.2)

$$0 \rightarrow \begin{matrix} H^{s_0}(X, \pi^* E_0) \\ \oplus \\ H^{s_0}(Y, F_0) \end{matrix} \xrightarrow{d_0} \begin{matrix} H^{s_1}(X, \pi^* E_1) \\ \oplus \\ H^{s_1}(Y, F_1) \end{matrix} \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{m-1}} \begin{matrix} H^{s_m}(X, \pi^* E_m) \\ \oplus \\ H^{s_m}(Y, F_m) \end{matrix} \rightarrow 0, \quad (2.4)$$

где E_j и F_j — комплексные векторные расслоения на Y . Операторы в последовательности (2.4) являются ограниченными операторами в пространствах Соболева.

Предполагается, что последовательность (2.4) является комплексом, т. е. $d_{j+1}d_j = 0$, $\forall j$, $0 \leq j \leq m-2$.

3. УСЛОВИЕ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ И ТЕОРЕМА КОНЕЧНОСТИ

Фиксируем точку в кокасательном расслоении T^*Y с координатами (x', ξ') , $\xi' \neq 0$ и определим символьную последовательность комплекса (2.4)

$$0 \rightarrow \begin{matrix} L^2(G_{x'}, E_{0,x'}) \\ \oplus \\ F_{0,x'} \end{matrix} \xrightarrow{\sigma(d_0)(x', \xi')} \begin{matrix} L^2(G_{x'}, E_{1,x'}) \\ \oplus \\ F_{1,x'} \end{matrix} \xrightarrow{\sigma(d_1)(x', \xi')} \dots \xrightarrow{\sigma(d_{m-1})(x', \xi')} \begin{matrix} L^2(G_{x'}, E_{m,x'}) \\ \oplus \\ F_{m,x'} \end{matrix} \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

Здесь операторнозначные символы операторов d_j определяются формулами (см. [2])

$$\sigma(d_j)(x', \xi') = \begin{pmatrix} \sigma(A_j) & \sigma(C_j) \\ \sigma(B_j) & \sigma(D_j) \end{pmatrix} (x', \xi'),$$

где

$$\begin{aligned} (\sigma(A_j))u(x'') &= A_j(x', \xi', x'', 0)u(x''), \\ \sigma(B_j)u &= D_{Y,j}''(x', \xi') \int_{G_{x'}} D_{X,j}''(x', \xi', x'', 0)u(x'')dx'', \\ \sigma(C_j)w &= D_{X,j}'(x', \xi', x'', 0)D_{Y,j}'(x', \xi')w, \\ \sigma(D_j)w &= D_j(x', \xi')w, \end{aligned}$$

где $(u, w) \in L^2(G_{x'}, E_{j,x'}) \oplus F_{j,x'}$. Здесь через $A(x', \xi', x'', \xi'')$ обозначен главный символ ПДО $A\left(x', -i\frac{\partial}{\partial x'}, x'', -i\frac{\partial}{\partial x''}\right)$.

Определение 3.1. Комплекс (2.4) называется *эллиптическим*, если выполнены следующие условия:

1. $\forall(x, \xi) = (x', \xi', x'', \xi''), \xi \neq 0$ точен комплекс главных символов

$$0 \rightarrow E_{0,x'} \xrightarrow{\sigma(A_0)(x,\xi)} E_{1,x'} \xrightarrow{\sigma(A_1)(x,\xi)} \dots \xrightarrow{\sigma(A_{m-1})(x,\xi)} E_{m,x'} \rightarrow 0; \quad (3.2)$$

2. $\forall(x', \xi'), \xi' \neq 0$ точен комплекс (3.1).

Теорема 3.1. Если комплекс (2.4) эллиптичен, то для любого $N \in \mathbb{N}$ для него существует параметрикс

$$0 \leftarrow \begin{array}{c} H^{s_0}(X, \pi^* E_0) \\ \oplus \\ H^{s_0}(Y, F_0) \end{array} \xleftarrow{Q_0} \begin{array}{c} H^{s_1}(X, \pi^* E_1) \\ \oplus \\ H^{s_1}(Y, F_1) \end{array} \xleftarrow{Q_1} \dots \xleftarrow{Q_{m-1}} \begin{array}{c} H^{s_m}(X, \pi^* E_m) \\ \oplus \\ H^{s_m}(Y, F_m) \end{array} \leftarrow 0. \quad (3.3)$$

Более точно, для всех j выполнены равенства

$$d_{j-1}Q_{j-1} + Q_j d_j = 1 - K_{N,j}, \quad (3.4)$$

где $K_{N,j}$ — оператор порядка $\leq -N$ в шкале пространств Соболева. В частности, комплекс (2.4) фредгольмов.

Доказательство. 1. Из точности комплексов (3.1) и (3.2) по лемме 1.2 следует, что для этих комплексов можно построить параметрикс

$$0 \leftarrow E_{0,x'} \xleftarrow{q_{A,0}(x,\xi)} E_{1,x'} \xleftarrow{q_{A,1}(x,\xi)} \dots \xleftarrow{q_{A,m-1}(x,\xi)} E_{m,x'} \leftarrow 0$$

и

$$0 \leftarrow \begin{array}{c} L^2(G_{x'}, E_{0,x'}) \\ \oplus \\ F_{0,x'} \end{array} \xleftarrow{q_0(x',\xi')} \begin{array}{c} L^2(G_{x'}, E_{1,x'}) \\ \oplus \\ F_{1,x'} \end{array} \xleftarrow{q_1(x',\xi')} \dots \xleftarrow{q_{m-1}(x',\xi')} \begin{array}{c} L^2(G_{x'}, E_{m,x'}) \\ \oplus \\ F_{m,x'} \end{array} \leftarrow 0,$$

где

$$q_j(x', \xi') = \begin{pmatrix} q_{A,j}(x', \xi', 0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_j(x', \xi') & c'_j(x', \xi') \\ b'_j(x', \xi') & d'_j(x', \xi') \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

с операторами a'_j, b'_j, c'_j, d'_j конечного ранга.

2. Построим последовательность операторов

$$0 \leftarrow \begin{array}{c} H^{s_0}(X, \pi^* E_0) \\ \oplus \\ H^{s_0}(Y, F_0) \end{array} \xleftarrow{Q_0} \begin{array}{c} H^{s_1}(X, \pi^* E_1) \\ \oplus \\ H^{s_1}(Y, F_1) \end{array} \xleftarrow{Q_1} \dots \xleftarrow{Q_{m-1}} \begin{array}{c} H^{s_m}(X, \pi^* E_m) \\ \oplus \\ H^{s_m}(Y, F_m) \end{array} \leftarrow 0, \quad (3.6)$$

где

$$Q_j = \begin{pmatrix} Q_{A,j} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A'_j & C'_j \\ B'_j & D'_j \end{pmatrix}.$$

Здесь $Q_{A,j}$ — ПДО с символом $q_{A,j}(x, \xi)$, а второе слагаемое — матричный оператор, элементами которого являются операторы из работы [4], символы которых равны матрицам (см. (3.5))

$$\begin{pmatrix} a'_j(x', \xi') & c'_j(x', \xi') \\ b'_j(x', \xi') & d'_j(x', \xi') \end{pmatrix}.$$

По построению имеем соотношение

$$\sigma(d_{j-1})q_{j-1} + q_j\sigma(d_j) = 1,$$

из которого следует, что для соответствующих операторов выполнено равенство

$$d_{j-1}Q_{j-1} + Q_j d_j = 1 - K_{1,j}, \quad (3.7)$$

где $K_{1,j}$ — оператор порядка ≤ -1 . Таким образом, последовательность (3.6) является параметриksom комплекса (2.4).

Модифицируем параметрикс (3.6) так, чтобы остатки $K_{1,j}$ имели высокий отрицательный порядок в равенстве (3.7), пользуясь следующей леммой.

Лемма 3.1. Пусть для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполняется соотношение

$$d_{j-1}Q_{j-1} + Q_j d_j = 1 - K_{n,j}, \quad (3.8)$$

где $K_{n,j}$ — оператор порядка $\leq -n$. Тогда для оператора $Q'_j = Q_j(1 + K_{n,j+1})$ будет выполнено соотношение

$$d_{j-1}Q'_{j-1} + Q'_j d_j = 1 - K_{2n,j}, \quad (3.9)$$

где $K_{2n,j}$ — оператор порядка $\leq -2n$.

Доказательство. 1. Домножим левую и правую части равенства (3.8) на оператор $1 + K_{n,j}$. Получим

$$d_{j-1}Q_{j-1}(1 + K_{n,j}) + Q_j d_j(1 + K_{n,j}) = (1 - K_{n,j})(1 + K_{n,j}). \quad (3.10)$$

Преобразуем левую часть равенства (3.10):

$$\begin{aligned} d_{j-1}Q_{j-1}(1 + K_{n,j}) + Q_j d_j + Q_j d_j K_{n,j} &= \\ &= d_{j-1}Q_{j-1}(1 + K_{n,j}) + Q_j d_j + Q_j d_j(1 - d_{j-1}Q_{j-1} - Q_j d_j) = \\ &= d_{j-1}Q_{j-1}(1 + K_{n,j}) + 2Q_j d_j - Q_j d_j d_{j-1}Q_{j-1} - Q_j d_j Q_j d_j. \end{aligned}$$

Поскольку $d_j d_{j-1} = 0$, то далее получаем

$$\begin{aligned} &= d_{j-1}Q_{j-1}(1 + K_{n,j}) + Q_j(2 - d_j Q_j) d_j = \\ &= d_{j-1}Q_{j-1}(1 + K_{n,j}) + Q_j(2 - (1 - K_{n,j+1} - Q_{j+1} d_{j+1})) d_j = \\ &= d_{j-1}Q_{j-1}(1 + K_{n,j}) + Q_j(1 + K_{n,j+1}) d_j. \end{aligned}$$

Итак, мы показали, что левая часть равенства (3.9) равна левой части равенства (3.10), где $Q'_j = Q_j(1 + K_{n,j+1})$.

2. Правая часть соотношения (3.10) равна

$$(1 - K_{n,j})(1 + K_{n,j}) = 1 - K_{n,j}^2 = 1 - K_{2n,j},$$

где $K_{2n,j} = K_{n,j}^2$ — оператор порядка $\leq -2n$. Соотношение (3.9) доказано. $\square$

Таким образом, последовательно применяя лемму 3.1, можно построить такой параметрик (3.3) комплекса (2.4), для которого выполнено искомое соотношение (3.4). $\square$

4. ФОРМУЛА ЛЕФШЕЦА

Рассмотрим эллиптический комплекс (2.4). Пусть дан послойный диффеоморфизм $g : X \rightarrow X$, т. е. g переводит слой расслоения в слой. Это значит, что для двух точек $x_1, x_2 \in X$ выполнено соотношение

$$\pi(x_1) = \pi(x_2) \implies \pi(g(x_1)) = \pi(g(x_2)).$$

Диффеоморфизм g индуцирует диффеоморфизм базы Y , обозначаемый g_0 . Пусть также даны изоморфизмы векторных расслоений

$$\Phi_X^j : g^*(\pi^* E_j) \longrightarrow \pi^* E_j \text{ над } X, \quad \Phi_Y^j : g_0^* F_j \longrightarrow F_j \text{ над } Y.$$

Определим геометрический эндоморфизм

$$T^j = \begin{pmatrix} T_X^j & 0 \\ 0 & T_Y^j \end{pmatrix} : \begin{matrix} C^\infty(X, \pi^* E_j) \\ \oplus \\ C^\infty(Y, F_j) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(X, \pi^* E_j) \\ \oplus \\ C^\infty(Y, F_j) \end{matrix},$$

где

$$T_X^j = \Phi_X^j \circ g^*, \quad T_Y^j = \Phi_Y^j \circ g_0^*. \quad (4.1)$$

Композиции (4.1) задают действия:

$$(T_X^j u)(x) = \Phi_X^j(x) u(g(x)), \quad (T_Y^j u)(x') = \Phi_Y^j(x') u(g_0(x')).$$

Определение 4.1. Комплекс (2.4) называется g -инвариантным, если выполняется равенство $d_j T^j = T^{j+1} d_j$ для всех j .

Определение 4.2. Число Лефшеца эндоморфизма g комплекса (2.4) определяется как

$$L_d(g) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \operatorname{tr}(T^j|_{\mathcal{H}^j(d)}),$$

где $\operatorname{tr}(T^j|_{\mathcal{H}^j(d)})$ — след геометрического эндоморфизма T^j , действующего в когомологиях $\mathcal{H}^j(d)$ комплекса (2.4).

Определение 4.3. Неподвижная точка x диффеоморфизма g ($g(x) = x$) называется невырожденной, если единица не является собственным значением дифференциала $dg(x) : T_x X \rightarrow T_x X$.

Мы будем считать, что все неподвижные точки невырожденные и диффеоморфизм g имеет конечное число неподвижных точек.

Лемма 4.1. Если неподвижная точка $x \in X$ диффеоморфизма g невырождена, то неподвижная точка $y = \pi(x) \in Y$ диффеоморфизма $g_0 : Y \rightarrow Y$ также является невырожденной.

Доказательство. Возьмём точки $x_1 = (x'_1, x''_1)$, $x_2 = (x'_2, x''_2)$, $x_1, x_2 \in X$. Под действием диффеоморфизма g точки x_1 и x_2 переходят в точки $\{g'(x'_1, x''_1), g''(x'_1, x''_1)\}$ и $\{g'(x'_2, x''_2), g''(x'_2, x''_2)\}$ соответственно. Послойность действия диффеоморфизма g означает, что

$$\pi(x'_1, x''_1) = \pi(x'_2, x''_2) \implies \pi(g'(x'_1, x''_1), g''(x'_1, x''_1)) = \pi(g'(x'_2, x''_2), g''(x'_2, x''_2)).$$

Итак, это условие означает, что

$$x'_1 = x'_2 \implies g'(x'_1, x''_1) = g'(x'_2, x''_2).$$

Это значит, что функция g' не зависит от второй переменной. Тогда дифференциал диффеоморфизма g равен

$$dg(x', x'') = \begin{pmatrix} \frac{\partial g'(x')}{\partial x'} & 0 \\ \frac{\partial g''(x', x'')}{\partial x'} & \frac{\partial g''(x', x'')}{\partial x''} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\det(1 - dg(x)) = \det\left(1 - \frac{\partial g'(x')}{\partial x'}\right) \det\left(1 - \frac{\partial g''(x', x'')}{\partial x''}\right).$$

Из того, что $\det(1 - dg(x)) \neq 0$, следует, что

$$\det\left(1 - \frac{\partial g'(x')}{\partial x'}\right) = \det(1 - dg_0(x')) \neq 0.$$

□

Следующая теорема является основным результатом этой работы.

Теорема 4.1. Предположим, что все неподвижные точки диффеоморфизма g невырождены. Тогда справедлива следующая формула Лефшеца:

$$L_d(g) = \sum_{x \in \Omega_X} \frac{\sum_{k=0}^m (-1)^k \operatorname{tr} \Phi_X^k(x)}{|\det(1 - dg(x))|} + \sum_{x' \in \Omega_Y} \frac{\sum_{k=0}^m (-1)^k \operatorname{tr} \Phi_Y^k(x')}{|\det(1 - dg_0(x'))|}, \quad (4.2)$$

где $\Omega_X = \{x \in X \mid g(x) = x\}$, $\Omega_Y = \{x' \in Y \mid g_0(x') = x'\}$ — множества неподвижных точек на X и на Y соответственно.

Замечание 4.1. Формула типа (4.2) справедлива и для более общих комплексов, чем в формуле (2.4), в которых вместо расслоений $\pi^* E_j$, где E_j — векторные расслоения над базой Y , рассматриваются произвольные расслоения E_j над тотальным пространством X .

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ ЛЕФШЕЦА

Для доказательства формулы Лефшеца сначала воспользуемся методом, предложенным в работе [6]. Для краткости будем доказывать теорему 4.1 для комплекса, состоящего из одного оператора:

$$0 \rightarrow \begin{array}{c} C^\infty(X, \pi^* E_0) \\ \oplus \\ C^\infty(Y, F_0) \end{array} \xrightarrow{d} \begin{array}{c} C^\infty(X, \pi^* E_1) \\ \oplus \\ C^\infty(Y, F_1) \end{array} \rightarrow 0, \quad \text{где } d = d_0. \quad (5.1)$$

Число Лефшеца комплекса (5.1) равно [6]

$$L_d(g) = \text{tr}(T^0 - rT^1 d) - \text{tr}(T^1 - drT^1), \quad (5.2)$$

где через tr обозначен операторный след, а r — такой параметрикс оператора d , что у операторов $1 - dr$ и $1 - rd$ имеются следы.

Возьмём разбиение единицы $\sum_i \rho_i^X(x) = 1$ на X , обладающее следующими свойствами:

- если $x_0 \in \Omega_X \cap \text{supp} \rho_i^X$, то $\rho_i^X(x) \equiv 1$ в окрестности точки x_0 ;
- носитель каждой функции $\rho_i^X(x)$ лежит в координатной карте.

Определим теперь разбиение единицы на Y .

Лемма 5.1. *Функции $\rho_i^Y(x') := \pi_* (\rho_i^X(x)) = \int_{G_{x'}} \rho_i^X(x', x'') dx''$, где dx'' — форма объёма на слое $G_{x'}$, определяют разбиение единицы на Y . При этом носитель каждой функции $\rho_i^Y(x')$ лежит в координатной карте.*

Доказательство. Действительно, имеем

$$\sum_i \rho_i^Y(x') = \sum_i \pi_* (\rho_i^X(x)) = \pi_* 1 = 1. \quad (5.3)$$

Последнее равенство в (5.3) справедливо в силу (2.1). $\square$

Теперь пусть $\psi_0^X(\xi) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi_0^Y(\xi') \in C_c^\infty(\mathbb{R}^l)$ — такие функции с компактными носителями, что $\psi_0^X(\xi) \equiv 1$, если $|\xi| \leq 1$, и $\psi_0^Y(\xi') \equiv 1$, если $|\xi'| \leq 1$. Положим, $\psi_\infty^X(\xi) = 1 - \psi_0^X(\xi)$, $\psi_\infty^Y(\xi') = 1 - \psi_0^Y(\xi')$.

Для любого $h > 0$ определим h -псевдодифференциальные операторы

$$\psi^{ij} = \begin{pmatrix} \psi_X^{ij} & 0 \\ 0 & \psi_Y^{ij} \end{pmatrix} : \begin{array}{c} C^\infty(X) \\ \oplus \\ C^\infty(Y) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} C^\infty(X) \\ \oplus \\ C^\infty(Y) \end{array},$$

где

$$\psi_X^{ij} u(x) = \chi_i^X(x) \mathcal{F}^{-1} \psi_j^X(h\xi) \mathcal{F} \rho_i^X(x) u(x), \quad (5.4)$$

$$\psi_Y^{ij} u(x') = \chi_i^Y(x') \mathcal{F}^{-1} \psi_j^Y(h\xi') \mathcal{F} \rho_i^Y(x') u(x'). \quad (5.5)$$

Здесь $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье, $j = 0$ или ∞ , а функции $\chi_i^X \equiv 1$, $\chi_i^Y \equiv 1$ в окрестности носителей функций $\rho_i^X(x)$ и $\rho_i^Y(x')$ соответственно и имеют носители в той же карте, что и функции ρ_i^X, ρ_i^Y . Прямое вычисление даёт равенство

$$\sum_{ij} \psi^{ij} = 1. \quad (5.6)$$

Подставляя равенство (5.6) в (5.2), получим выражение

$$L_d(g) = \sum_i \{ \text{tr}(T^0 - rT^1 d) \psi^{i0} - \text{tr}(T^1 - drT^1) \psi^{i0} \} + \\ + \{ \text{tr}(T^0 - rT^1 d) \psi^{i\infty} - \text{tr}(T^1 - drT^1) \psi^{i\infty} \}. \quad (5.7)$$

Так как оператор ψ^{i0} обладает следом, то $\text{tr}(drT^1 \psi^{i0}) = \text{tr}(rT^1 \psi^{i0} d)$, и можно переписать выражение (5.7) в виде

$$L_d(g) = \sum_i \{ \text{tr} T^0 \psi^{i0} - \text{tr} T^1 \psi^{i0} \} +$$

$$+ \sum_i \{ \operatorname{tr}(T^0 - rT^1 d) \psi^{i0} - \operatorname{tr}(T^1 - drT^1) \psi^{i0} \} - \sum_i \operatorname{tr}(rT^1 [d, \psi^{i0}]), \quad (5.8)$$

где $[d, \psi^{i0}] = d\psi^{i0} - \psi^{i0}d$. Оценим каждый член в (5.8) при $h \rightarrow 0$.

5.1. Оценка первого слагаемого в (5.8). Утверждается, что первое слагаемое в (5.8) даёт сумму в правой части формулы Лефшеца (4.2) и $O(h)$. Действительно, разность следов в первом слагаемом в выражении (5.8) равна

$$\operatorname{tr} T^0 \psi^{i0} - \operatorname{tr} T^1 \psi^{i0} = \operatorname{tr} T_X^0 \psi_X^{i0} + \operatorname{tr} T_Y^0 \psi_Y^{i0} - \operatorname{tr} T_X^1 \psi_X^{i0} - \operatorname{tr} T_Y^1 \psi_Y^{i0}. \quad (5.9)$$

Применяя метод стационарной фазы так же, как в [6], получим

$$\operatorname{tr} T_X^0 \psi_X^{i0} - \operatorname{tr} T_X^1 \psi_X^{i0} = \begin{cases} \frac{\operatorname{tr} \Phi_X^0(x) - \operatorname{tr} \Phi_X^1(x)}{|\det(1 - dg(x))|} + O(h), & \text{если } \operatorname{supp} \rho_i^X \cap \Omega_X = \{x\}, \\ O(h^\infty), & \text{если } \operatorname{supp} \rho_i^X \cap \Omega_X = \emptyset, \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\operatorname{tr} T_Y^0 \psi_Y^{i0} - \operatorname{tr} T_Y^1 \psi_Y^{i0} = \begin{cases} \frac{\rho_i^Y(x')(\operatorname{tr} \Phi_Y^0(x') - \operatorname{tr} \Phi_Y^1(x'))}{|\det(1 - dg_0(x'))|} + O(h), & \text{если } \operatorname{supp} \rho_i^Y \cap \Omega_Y = \{x'\}, \\ O(h^\infty), & \text{если } \operatorname{supp} \rho_i^Y \cap \Omega_Y = \emptyset. \end{cases} \quad (5.11)$$

Теперь подставим (5.10) и (5.11) в (5.9) и получим

$$\begin{aligned} \sum_i \{ \operatorname{tr} T^0 \psi^{i0} - \operatorname{tr} T^1 \psi^{i0} \} &= \sum_i (\operatorname{tr} T_X^0 \psi_X^{i0} - \operatorname{tr} T_X^1 \psi_X^{i0}) + \sum_i (\operatorname{tr} T_Y^0 \psi_Y^{i0} - \operatorname{tr} T_Y^1 \psi_Y^{i0}) = \\ &= \sum_{x \in \Omega_X} \frac{\operatorname{tr} \Phi_X^0(x) - \operatorname{tr} \Phi_X^1(x)}{|\det(1 - dg(x))|} + \sum_i \sum_{x' \in \operatorname{supp} \rho_i^Y \cap \Omega_Y} \frac{\rho_i^Y(x')(\operatorname{tr} \Phi_Y^0(x') - \operatorname{tr} \Phi_Y^1(x'))}{|\det(1 - dg_0(x'))|} + O(h) = \\ &= \sum_{x \in \Omega_X} \frac{\operatorname{tr} \Phi_X^0(x) - \operatorname{tr} \Phi_X^1(x)}{|\det(1 - dg(x))|} + \sum_{x' \in \Omega_Y} \frac{\operatorname{tr} \Phi_Y^0(x') - \operatorname{tr} \Phi_Y^1(x')}{|\det(1 - dg_0(x'))|} + O(h). \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы используем соотношение $\sum_i \rho_i^Y(x') = 1$.

Итак, вклад первого члена в (5.8) равен правой части формулы (4.2) при $m = 1$.

5.2. Оценка второго слагаемого в (5.8). Второе слагаемое в (5.8) является величиной порядка $O(h^\infty)$. Доказательство такое же, как в работе [18].

5.3. Оценка третьего слагаемого в (5.8). Покажем, что третье слагаемое в (5.8) является величиной порядка $o(1)$. Доказательству этого утверждения посвящена оставшаяся часть этого пункта.

Утверждение 5.1. *Справедливо равенство $\sum_i \operatorname{tr}(rT^1[d, \psi^{i0}]) = o(1)$ при $h \rightarrow 0$.*

Доказательство. Дадим явное выражение для оператора $rT^1[d, \psi^{i0}]$. Обозначим

$$d = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$[d, \psi^{i0}] = \begin{pmatrix} [A, \psi_X^{i0}] & C\psi_Y^{i0} - \psi_X^{i0}C \\ B\psi_X^{i0} - \psi_Y^{i0}B & [D, \psi_Y^{i0}] \end{pmatrix}.$$

Параметрикс r для оператора d имеет вид [3]

$$r = \begin{pmatrix} A^{-1}(1 + C\Delta^{-1}BA^{-1}) & -A^{-1}C\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}BA^{-1} & \Delta^{-1} \end{pmatrix},$$

где $\Delta = D - BA^{-1}C$ — ПДО на Y . Обозначим

$$r' = (T^1)^{-1}rT^1 = \begin{pmatrix} (T_X^1)^{-1}A^{-1}(1 + C\Delta^{-1}BA^{-1})T_X^1 & -(T_X^1)^{-1}A^{-1}C\Delta^{-1}T_Y^1 \\ -(T_Y^1)^{-1}\Delta^{-1}BA^{-1}T_X^1 & (T_Y^1)^{-1}\Delta^{-1}T_Y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R'_{11} & R'_{12} \\ R'_{21} & R'_{22} \end{pmatrix}.$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(rT^1[d, \psi^{i0}]) &= \operatorname{tr}(T^1 r'[d, \psi^{i0}]) = \operatorname{tr}(T_X^1 R'_{11}[A, \psi_X^{i0}]) + \operatorname{tr}(T_X^1 R'_{12}(B\psi_X^{i0} - \psi_Y^{i0}B)) + \\ &+ \operatorname{tr}(T_Y^1 R'_{21}(C\psi_Y^{i0} - \psi_X^{i0}C)) + \operatorname{tr}(T_Y^1 R'_{22}[D, \psi_Y^{i0}]). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Оценим слагаемые в выражении (5.12).

Начнём с оценки первого слагаемого:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(T_X^1 R'_{11}[A, \psi_X^{i0}]) &= \operatorname{tr}(T_X^1 ((T_X^1)^{-1} A^{-1} (1 + C\Delta^{-1}BA^{-1})T_X^1)[A, \psi_X^{i0}]) = \\ &= \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}[A, \psi_X^{i0}]) + \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{\Phi}[A, \psi_X^{i0}]), \end{aligned} \quad (5.13)$$

где $\hat{A} = (T_X^1)^{-1} A^{-1} T_X^1$ — ПДО на X и $\hat{\Phi} = (T_X^1)^{-1} A^{-1} C\Delta^{-1}BA^{-1}T_X^1$. Итак, задача свелась к оцениванию следов $\operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}[A, \psi_X^{i0}])$ и $\operatorname{tr}(T_X^1 \hat{\Phi}[A, \psi_X^{i0}])$.

Начнём со следа $\operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}[A, \psi_X^{i0}])$ в (5.13).

Лемма 5.2. *Справедливо соотношение $\sum_i \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}[A, \psi_X^{i0}]) = o(1)$ при $h \rightarrow 0$.*

Доказательство. Рассмотрим разложения

$$A = \sum_j A_j + K_1, \quad \hat{A} = \sum_m \hat{A}_m + K_2,$$

где $A_j, \hat{A}_m$ — ПДО в координатах на X , а K_1, K_2 — операторы с гладкими ядрами. Тогда

$$\operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}[A, \psi_X^{i0}]) = \sum_m \left(\operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}_m[K_1, \psi_X^{i0}]) \right) + \operatorname{tr}(T_X^1 K_2[A, \psi_X^{i0}]) + \sum_{j,m} \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}_m[A_j, \psi_X^{i0}]). \quad (5.14)$$

1. Посмотрим подробнее на первое слагаемое в (5.14).

Лемма 5.3. *Пусть K — оператор с гладким ядром. Тогда $K\psi_X^{i0} \rightarrow K\rho_i^X$ при $h \rightarrow 0$. Здесь под сходимостью понимается сходимость ядер Шварца в пространстве $C^\infty(X \times X)$.*

Доказательство. Оператор ψ_X^{i0} был определён в (5.4) при $j = 0$. Тогда композиция $K\psi_X^{i0}$ имеет ядро

$$\begin{aligned} (K\psi_X^{i0})u(x) &= (2\pi)^{-n} \iiint K(x, z) \chi_i^X(z) e^{i(z-y)\xi} \psi_0^X(h\xi) \rho_i^X(y) u(y) dy d\xi dz = \int \mathbb{K}_h(x, y) u(y) dy, \\ \mathbb{K}_h(x, y) &= (2\pi)^{-n} \rho_i^X(y) h^{-n} \iint e^{\frac{i(z-y)\hat{\xi}}{h}} K(x, z) \chi_i^X(z) \psi_0^X(\hat{\xi}) dz d\hat{\xi}, \quad \hat{\xi} = h\xi. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Применим метод стационарной фазы к интегралу в (5.15). Стационарная точка фазовой функции $\Phi(z, \hat{\xi}) = (z - y)\hat{\xi}$ равна $(y, 0)$. Гессиан фазовой функции равен

$$\operatorname{Hess}(\Phi(z, \hat{\xi})) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как числа положительных и отрицательных собственных значений гессиана равны, то его сигнатура равна нулю.

Таким образом, интеграл (5.15) равен

$$\mathbb{K}_h(x, y) = K(x, y) \rho_i^X(y) + O(h).$$

Аналогично получаются соотношения

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \mathbb{K}_h(x, y) = \partial_x^\alpha \partial_y^\beta (K(x, y) \rho_i^X(y)) + O(h)$$

при всех α, β . Это вытекает из равенств

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \mathbb{K}_h(x, y) &= \sum_{|\beta_1|+|\beta_2|=|\beta|} \frac{\beta!}{\beta_1! \beta_2!} \partial_y^{\beta_1} \rho_i^X(y) h^{-n} \iint \left(-\frac{i\hat{\xi}}{h} \right)^{\beta_2} e^{\frac{i(z-y)\hat{\xi}}{h}} \partial_x^\alpha K(x, z) \chi(z) dz d\hat{\xi} = \\ &= \sum_{|\beta_1|+|\beta_2|=|\beta|} \frac{\beta!}{\beta_1! \beta_2!} \partial_y^{\beta_1} \rho_i^X(y) h^{-n} \iint e^{\frac{i(z-y)\hat{\xi}}{h}} \partial_z^{\beta_2} \left(\partial_x^\alpha (K(x, z) \chi(z)) \right) dz d\hat{\xi} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{|\beta_1|+|\beta_2|=|\beta|} \frac{\beta!}{\beta_1!\beta_2!} \partial_y^{\beta_1} \rho_i^X(y) \partial_y^{\beta_2} \left(\partial_x^\alpha K(x, y) + O(h) \right) = \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \left(K(x, y) \rho_i^X(y) \right) + O(h).$$

□

Применяя лемму 5.3 к первому слагаемому в (5.13), получим

$$\sum_m \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}_m [K_1, \psi_X^{i0}]) = \sum_m \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}_m [K_1, \rho_i^X]) + O(h). \quad (5.16)$$

2. Второе слагаемое в равенстве (5.14) также по лемме 5.3 имеет разложение

$$\operatorname{tr}(T_X^1 K_2 [A, \psi_X^{i0}]) = \operatorname{tr}(T_X^1 K_2 [A, \rho_i^X]) + O(h). \quad (5.17)$$

3. Перейдём теперь к третьему слагаемому в (5.14). Имеет место равенство

$$\operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}_m [A_j, \psi_X^{i0}]) = \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}_m A_j \psi_X^{i0}) - \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}_m \psi_X^{i0} A_j). \quad (5.18)$$

Через $\tilde{A} = \hat{A}_m A_j$ обозначим композицию ПДО $\hat{A}_m$ и A_j . Через τ обозначим регуляризованный след (см. приложение В).

Лемма 5.4. *Существует предел*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{tr}(T_X^1 \tilde{A} \psi_X^{i0}) = \tau(T_X^1 \tilde{A} \rho_i^X). \quad (5.19)$$

Доказательство. Поскольку ψ_X^{i0} — оператор с гладким ядром Шварца, то при всех $h > 0$ можем заменить след оператора $T_X^1 \tilde{A} \psi_X^{i0}$ на его регуляризованный след. Также далее будем работать с регуляризованным следом композиции $T_X^1 \tilde{A} \rho_i^X$. Отметим, что операторный след этой композиции, вообще говоря, не определён. Таким образом, доказательство соотношения (5.19) сводится к доказательству следующего предельного перехода:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(T_X^1 \tilde{A} \psi_X^{i0}) = \tau(T_X^1 \tilde{A} \rho_i^X).$$

С этой целью применим предложение В.2 (приложение В). Проверим, что условия предложения В.2 выполнены. Для этого нужно показать, что для волнового фронта оператора $T_X^1 \tilde{A}$ имеем

$$WF'(T_X^1 \tilde{A}) \cap N^* \Delta = \emptyset$$

(используемые обозначения определены в приложениях А, В).

Так как $\tilde{A}$ — ПДО, то выполнены соотношения

$$WF'(T_X^1 \tilde{A}) \subset WF'(T_X^1) = \left\{ \left(x, \xi, g(x), - \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^t \right)^{-1} \xi \right) \right\}.$$

Отсюда получаем, что

$$WF'(T_X^1 \tilde{A}) \cap N^* \Delta \subset \left\{ (x, \xi, x, -\xi) \mid x = g(x), \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^t \right)^{-1} \xi = \xi \right\} = \emptyset,$$

так как все неподвижные точки диффеоморфизма невырождены по условию. Выполнение условия $WF'(T_X^1 \tilde{A}) = \emptyset$ очевидно. Итак, условия предложения В.2 из приложения В выполнены, и мы получаем искомое равенство (5.19).

Лемма 5.4 доказана. □

Теперь, применяя к (5.18) лемму 5.4, получим

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}_m A_j \psi_X^{i0}) - \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}_m \psi_X^{i0} A_j) \right] = \\ = \tau(T_X^1 \hat{A}_m A_j \rho_i^X) - \tau(T_X^1 \hat{A}_m \rho_i^X A_j) = \tau(T_X^1 \hat{A}_m [A_j, \rho_i^X]). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Наконец, из (5.14), (5.16), (5.17) и (5.20) получаем

$$\sum_i \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A} [A, \psi_X^{i0}]) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_i \left[\sum_m \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}_m[K_1, \rho_i^X]) + \operatorname{tr}(T_X^1 K_2[A, \rho_i^X]) + \sum_{j,m} \tau(T_X^1 \hat{A}_m[A_j, \rho_i^X]) + O(h) + o(1) \right] = \\
 &= \sum_m \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}_m[K_1, \sum_i \rho_i^X]) + \operatorname{tr}(T_X^1 K_2[A, \sum_i \rho_i^X]) + \sum_{j,m} \tau(T_X^1 \hat{A}_m[A_j, \sum_i \rho_i^X]) + o(1) = \\
 &= \sum_m \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{A}_m[K_1, 1]) + \operatorname{tr}(T_X^1 K_2[A, 1]) + \sum_{j,m} \tau(T_X^1 \hat{A}_m[A_j, 1]) + o(1) = o(1),
 \end{aligned}$$

так как $\sum_i \rho_i^X = 1$.

Доказательство леммы 5.2 закончено. $\square$

Теперь вернёмся к равенству (5.13) и оценим второе слагаемое. Оператор $\hat{\Phi}$ можно представить в виде композиции

$$\hat{\Phi} = A_1 \pi^* A_2 \pi_* A_3, \quad (5.21)$$

где A_1, A_3 — ПДО на X , а A_2 — ПДО на Y . Операторы вида (5.21) ранее рассматривались в работе [4, с. 125, 128]. Для такого оператора справедлив следующий результат.

Лемма 5.5. *Справедливо равенство*

$$\sum_i \operatorname{tr}(T_X^1 \hat{\Phi}[A, \psi_X^{i0}]) = o(1) \text{ при } h \rightarrow 0. \quad (5.22)$$

Данная лемма доказывается аналогично лемме 5.2. Покажем только применимость предложения В.2 для операторов вида (5.21).

Рассмотрим подмногообразие $\Delta_1 \subset X \times X$, определяемое как

$$\Delta_1 = \{(x_1, x_2) \mid \pi(x_1) = \pi(x_2)\}.$$

На первом сомножителе произведения $X \times X$ выберем локальные координаты в окрестности произвольной точки и обозначим их через (x', x'') . Локальные координаты в окрестности произвольной точки второго сомножителя обозначим через (y', y'') . Через $(\xi', \xi'', \eta', \eta'')$ будем обозначать стандартные координаты в слоях расслоения $T^*(X \times X)$, индуцированные координатами (x', x'', y', y'') .

Определим конормальное расслоение над подмногообразием $N^* \Delta_1$ как

$$N^* \Delta_1 = \{(x', x'', x', y'', \xi', 0, \eta', 0) \in T^*(X \times X) \mid \xi' + \eta' = 0\}.$$

Для волнового фронта оператора (5.21) справедливо включение

$$WF'(\hat{\Phi}) \subset N^* \Delta_1.$$

Теперь для волнового фронта композиции вида $T_1^X \hat{\Phi}$ справедливо соотношение

$$WF'(T_X^1 \hat{\Phi}) \subset \left\{ (x', x'', g_0(x'), y'', \xi', 0, -\left(\left(\frac{\partial g_0}{\partial x'}\right)^t\right)^{-1} \xi', 0) \right\}.$$

Отсюда следует, что

$$N^* \Delta_1 \cap WF'(T_X^1 \hat{\Phi}) = \left\{ (x', x'', x', x'', \xi', 0, -\xi', 0) \mid x' = g_0(x'), \xi' = \left(\left(\frac{\partial g_0}{\partial x'}\right)^t\right)^{-1} \xi' \right\}.$$

Так как все неподвижные точки диффеоморфизма g_0 являются невырожденными, то последнее множество является пустым.

Таким образом, условие предложения В.2 выполнено, и справедливо равенство (5.22). Как следствие, сумма по i первого слагаемого в равенстве (5.12) является величиной порядка $o(1)$.

Посмотрим теперь на остальные слагаемые в равенстве (5.12). Сумма

$$\sum_i \operatorname{tr}(T_Y^1 R'_{22}[D, \psi_Y^{i0}])$$

аналогично лемме 5.2 является величиной порядка $o(1)$, так как D — ПДО на Y .

Далее оценим второе слагаемое в (5.12).

Лемма 5.6.

$$\sum_i \operatorname{tr}(T_X^1 R'_{12}(B\psi_X^{i0} - \psi_Y^{i0}B)) = o(1). \quad (5.23)$$

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 5.2, используем разложение

$$R'_{12} = \sum_j R_j + K_1, \quad B = \sum_m B_m + K_2,$$

где R_j, B_m — операторы в локальных картах на X и Y соответственно, а K_1, K_2 — операторы с гладкими ядрами.

Справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sum_i \operatorname{tr}(T_X^1 R'_{12}(B\psi_X^{i0} - \psi_Y^{i0}B)) &= \sum_i \operatorname{tr}(T_X^1 R'_{12}B\psi_X^{i0}) - \sum_i \operatorname{tr}(T_X^1 R'_{12}\psi_Y^{i0}B) = \\ &= \sum_i \left[\sum_{j,m} \operatorname{tr}(T_X^1 R_j B_m \psi_X^{i0}) + \sum_j \operatorname{tr}(T_X^1 R_j K_2 \psi_X^{i0}) + \operatorname{tr}(T_X^1 K_1 B \psi_X^{i0}) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j,m} \operatorname{tr}(T_X^1 R_j \psi_Y^{i0} B_m) - \sum_j \operatorname{tr}(T_X^1 R_j \psi_Y^{i0} K_2) - \operatorname{tr}(T_X^1 K_1 \psi_Y^{i0} B) \right]. \quad (5.24) \end{aligned}$$

Операторы R_j являются операторами вида $A_{1,j}\pi^*A_{2,j}$, действующими из Y в X , а B_m являются операторами вида $A_{3,m}\pi_*A_{4,m}$. Здесь $A_{1,j}, A_{4,m}$ — ПДО на X , а $A_{2,j}, A_{3,m}$ — ПДО на Y . Таким образом, композиция $R_j B_m$ является оператором вида $A_{1,j}\pi^*A_{2,j}A_{3,m}\pi_*A_{4,m}$. Вид композиции $R_j B_m$ соответствует виду оператора (5.21). Таким образом, для таких операторов применимо предложение В.2. Также аналогично лемме 5.3 можно показать, что для операторов K_1, K_2 при $h \rightarrow 0$ справедлива сходимость $K_1\psi_Y^{i0} \rightarrow \rho_i^Y$, $K_2\psi_Y^{i0} \rightarrow \rho_i^Y$.

Таким образом, из (5.24) получаем

$$\begin{aligned} \sum_i \operatorname{tr}(T_X^1 R'_{12}(B\psi_X^{i0} - \psi_Y^{i0}B)) &= \sum_{j,m} \left(\tau(T_X^1 R_j B_m \sum_i \rho_i^X) - \tau(T_X^1 R_j \sum_i \rho_i^Y B_m) \right) + \\ &+ \sum_j \left(\operatorname{tr}(T_X^1 R_j K_2 \sum_i \rho_i^X) - \operatorname{tr}(T_X^1 R_j \sum_i \rho_i^Y K_2) \right) + \left(\operatorname{tr}(T_X^1 K_1 B \sum_i \rho_i^X) - \operatorname{tr}(T_X^1 K_1 \sum_i \rho_i^Y B) \right) + o(1) = \\ &= \sum_{j,m} \left(\tau(T_X^1 R_j B_m) - \tau(T_X^1 R_j B_m) \right) + \sum_j \left(\operatorname{tr}(T_X^1 R_j K_2) - \operatorname{tr}(T_X^1 R_j K_2) \right) + \\ &\quad + \left(\operatorname{tr}(T_X^1 K_1 B) - \operatorname{tr}(T_X^1 K_1 B) \right) + o(1) = o(1). \quad (5.25) \end{aligned}$$

Второе равенство в выражении (5.25) следует из соотношения (5.3).

Доказательство леммы 5.6 завершено. $\square$

Наконец, перейдём к третьему слагаемому в равенстве (5.12). Композиция $R'_{21}C$ имеет вид $A_1\pi_*A_2A_3\pi^*A_4$ с ПДО A_1, A_4 на Y и ПДО A_2, A_3 на X . Композиция $R'_{21}C$ является ПДО на Y (см. [4]). Аналогично доказательству формулы (5.23), получаем

$$\sum_i \operatorname{tr}(T_Y^1 R'_{21}(C\psi_Y^{i0} - \psi_X^{i0}C)) = o(1).$$

Таким образом, суммы по i всех слагаемых равенства (5.12) являются величинами порядка $o(1)$.

Доказательство утверждения 5.1 завершено. $\square$

Таким образом, второе и третье слагаемое в равенстве (5.8) не дают вклада в формулу Лефшеца (4.2). Теорема 4.1 доказана.

6. ПРИМЕР

Рассмотрим расслоение $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 = Y$ (проекция на первый множитель) и комплекс

$$0 \longrightarrow \Omega^0(X) \xrightarrow{d} \Omega^1(X) \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} d \\ \pi_* \end{smallmatrix} \right)} \begin{smallmatrix} \Omega^2(X) \\ \oplus \\ \Omega^0(Y) \end{smallmatrix} \xrightarrow{(\pi_* d)} \Omega^1(Y) \longrightarrow 0, \quad (6.1)$$

где

$$\pi_* : \Omega^j(X) \rightarrow \Omega^{j-1}(Y), \quad (\pi_* f)(x') = \int_{\mathbb{S}^1} f(x', x'') dx''$$

— отображение интегрирования по слою проекции π .

Рассмотрим диффеоморфизм

$$g(x', x'') = (g_0(x'), x'' + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0,$$

где диффеоморфизм

$$g_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$$

определяется как монотонно возрастающая функция с двумя неподвижными точками $x' = 0$ и $x' = \frac{1}{2}$, причём $g'_0(0) < 1$, $g'_0\left(\frac{1}{2}\right) > 1$. Индуцированное отображение g^* на дифференциальных формах определяет эндоморфизм комплекса (6.1).

Очевидно, что диффеоморфизм g не имеет неподвижных точек, а диффеоморфизм g_0 имеет две невырожденные неподвижные точки $x' = 0$ и $x' = \frac{1}{2}$.

Лемма 6.1.

1. Размерности когомологий комплекса (6.1) равны

$$\dim \mathcal{H}^k = \begin{cases} 1, & k = 0, 1; \\ 0, & k = 2, 3. \end{cases}$$

Базисами в $\mathcal{H}^0$ и $\mathcal{H}^1$ являются формы 1 и dx' соответственно.

2. Отображение g^* действует в когомологиях как тождественное отображение.

Доказательство. Первое утверждение несложно доказать, раскладывая формы в ряды Фурье по переменным x', x'' .

Докажем второе утверждение. Индуцированное отображение g^* действует в пространстве $\mathcal{H}^0$ как тождественное отображение. Покажем теперь, что оно действует как тождественное отображение и в пространстве когомологий $\mathcal{H}^1$ с базисом dx' :

$$g^*(dx') = \frac{\partial g_0}{\partial x'} dx'.$$

Разложим форму $\frac{\partial g_0}{\partial x'} dx'$ в сумму точной формы и формы с постоянным коэффициентом:

$$\frac{\partial g_0}{\partial x'} dx' = df + c dx', \quad f \in C^\infty(\mathbb{S}^1), \quad c \in \mathbb{C}. \quad (6.2)$$

Проинтегрируем обе части равенства (6.2). Получим

$$\int_{\mathbb{S}^1} \frac{\partial g_0}{\partial x'} dx' = \int_{\mathbb{S}^1} df + \int_{\mathbb{S}^1} c dx'. \quad (6.3)$$

Первое слагаемое в правой части в (6.3) равно нулю. Отсюда

$$c = \int_{\mathbb{S}^1} \frac{\partial g_0}{\partial x'} dx' = g_0(1) - g_0(0) = 1. \quad (6.4)$$

Последнее равенство в (6.4) справедливо, так как из построения следует, что $g_0(0) = 0$, $g_0(1) = 1$. $\square$

Теперь получаем

$$\begin{aligned} L_d(g) &= \sum_{x' \in \Omega_Y} \frac{\operatorname{tr} \Phi^0(x') - \operatorname{tr} \Phi^1(x')}{|\det(1 - dg_0(x'))|} = \\ &= \frac{\operatorname{tr} \Phi^0(0) - \operatorname{tr} \Phi^1(0)}{|\det(1 - dg_0(0))|} + \frac{\operatorname{tr} \Phi^0(1/2) - \operatorname{tr} \Phi^1(1/2)}{|\det(1 - dg_0(1/2))|} = \frac{1 - g'_0(0)}{1 - g'_0(0)} + \frac{1 - g'_0(1/2)}{g'_0(1/2) - 1} = 0, \end{aligned}$$

т. е. для рассматриваемого эндоморфизма левая и правая части формулы Атьи—Ботта—Лефшеца (4.2) равны нулю.

А. ПРИЛОЖЕНИЕ. ВОЛНОВЫЕ ФРОНТЫ

Через $\mathcal{D}'(X)$ обозначим пространство распределений на гладком замкнутом многообразии X . Напомним сведения о волновых фронтах распределений из $\mathcal{D}'(X)$, см. [7, 14, 15].

Определение А.1. Волновым фронтом $WF(u)$ распределения $u \in \mathcal{D}'(X)$ называется дополнение в $T^*X \setminus 0$ набора всех таких $(x_0, \xi_0) \in T^*X \setminus 0$, что для некоторой окрестности U точки x_0 и окрестности V точки ξ_0 , для каждой функции $\varphi \in C_c^\infty(U)$ и каждого N :

$$\mathcal{F}(\varphi u)(\tau \xi) = O(\tau^{-N}) \text{ при } \tau \rightarrow \infty$$

равномерно по $\xi \in V$. Здесь $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье.

Волновой фронт является замкнутым конусом в $T^*X \setminus 0$.

Пусть Γ — замкнутый конус в $T^*X \setminus 0$. Определим линейное подпространство

$$\mathcal{D}'_\Gamma(X) = \{u \in \mathcal{D}'(X) \mid WF(u) \subset \Gamma\}.$$

На подпространстве $\mathcal{D}'_\Gamma(X) \subset \mathcal{D}'(X)$ рассматриваются полунормы на $\mathcal{D}'(X)$ и дополнительные полунормы, отвечающие конусу Γ . Для определения этих полунорм зафиксируем точку (x_0, ξ_0) и выберем окрестность U точки x_0 и окрестность V точки ξ_0 , как в определении А.1. Тогда для каждой $\varphi \in C_c^\infty(U)$ и каждого N полунорма определяется как

$$\|u\|_{\varphi, V, U} = \sup_{x_0, \xi_0} \sup_{\tau \geq 1, \xi \in V} \tau^N |\mathcal{F}(\varphi u)(\tau \xi)|, \quad u \in \mathcal{D}'_\Gamma(X). \quad (\text{А.1})$$

Следующие ниже результаты являются уточнениями теорем о преобразовании волновых фронтов распределений при отображениях многообразий из цитированных выше работ. Уточнение состоит в указании конусов, в которых содержатся волновые фронты.

Пусть X, Y — гладкие замкнутые многообразия. Для гладкого отображения $\Phi : X \rightarrow Y$ рассмотрим множество кономалей (это множество является замкнутым конусом):

$$N = \left\{ (y, \eta) \in T^*Y \setminus 0 \mid \exists x \in X, y = \Phi(x), \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^t \eta = 0 \right\}. \quad (\text{А.2})$$

Предложение А.1. Пусть Γ — такой замкнутый конус в $T^*Y \setminus 0$, что $\Gamma \cap N = \emptyset$. Тогда определён замкнутый конус

$$\tilde{\Gamma} = \Phi^*(\Gamma) = \left\{ (x, \xi) \in T^*X \setminus 0 \mid \exists \eta : \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^t \eta = \xi, (\Phi(x), \eta) \in \Gamma \right\}, \quad (\text{А.3})$$

а отображение обратного образа

$$\Phi^* : C^\infty(Y) \longrightarrow C^\infty(X) \quad (\text{А.4})$$

имеет непрерывное продолжение на пространства распределений

$$\Phi^* : \mathcal{D}'_\Gamma(Y) \longrightarrow \mathcal{D}'_{\tilde{\Gamma}}(X). \quad (\text{А.5})$$

При этом $\operatorname{supp}(\Phi^*v) \subset \Phi^{-1}(\operatorname{supp} v)$ для каждого $v \in \mathcal{D}'_\Gamma(Y)$. Непрерывность отображения (А.5) здесь и ниже понимается в следующем смысле: если $v_j \rightarrow v$ для $v_j, v \in \mathcal{D}'_\Gamma(Y)$ по полунормам в $\mathcal{D}'_\Gamma(Y)$, то $\Phi^*v_j \rightarrow \Phi^*v$ по полунормам в $\mathcal{D}'_{\tilde{\Gamma}}(X)$.

Предложение А.2. Рассмотрим отображение, двойственное к отображению (А.4):

$$\Phi_* = (\Phi^*)^t : \mathcal{D}'(X) \longrightarrow \mathcal{D}'(Y).$$

Пусть $\tilde{\Gamma}$ — замкнутый конус в $T^*X \setminus 0$. Тогда имеется непрерывное отображение подпространств

$$\Phi_* : \mathcal{D}'_{\tilde{\Gamma}}(X) \longrightarrow \mathcal{D}'_{\Gamma}(Y),$$

где замкнутый конус $\Gamma \subset T^*Y \setminus 0$ определяется формулой

$$\Gamma = \Phi_*(\tilde{\Gamma}) = \left\{ (y, \eta) \in T^*Y \setminus 0 \mid \exists x \in X, y = \Phi(x), \left(x, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^t \eta \right) \in \tilde{\Gamma} \right\}. \quad (\text{A.6})$$

Предложение А.3. Пусть Γ_1 — замкнутый конус в $T^*X \setminus 0$, Γ_2 — замкнутый конус в $T^*Y \setminus 0$. Тогда определено непрерывное отображение

$$\mathcal{D}'_{\Gamma_1}(X) \times \mathcal{D}'_{\Gamma_2}(Y) \longrightarrow \mathcal{D}'_{\Gamma_3}(X \times Y), \quad (u, v) \mapsto u \otimes v.$$

Здесь рассматривается замкнутый конус $\Gamma_3 \subset T^*(X \times Y) \setminus 0$:

$$\Gamma_3 = (\Gamma_1 \times \Gamma_2) \cup (\Gamma_1 \times 0_Y) \cup (0_X \times \Gamma_2),$$

где 0_X и 0_Y рассматриваются как нулевые сечения в T^*X и в T^*Y соответственно.

Рассмотрим непрерывный оператор

$$D : C^\infty(Y) \longrightarrow \mathcal{D}'(X).$$

Его ядро Шварца обозначим через $K_D \in \mathcal{D}'(X \times Y)$.

Определение А.2. Пусть $\Gamma_1 \subset T^*(X \times Y) \setminus 0$, $\Gamma_2 \subset T^*(Y \times Z) \setminus 0$ — замкнутые конусы, которые удовлетворяют условию

$$\{(y, \eta) \in (T^*Y) \setminus 0 \mid \exists x \in X, z \in Z : (x, 0, y, \eta) \in \Gamma_1, (y, \eta, z, 0) \in \Gamma_2\} = \emptyset. \quad (\text{A.7})$$

Композиция $\Gamma_1 \circ \Gamma_2 \subset T^*(X \times Z) \setminus 0$ определяется как конус

$$\Gamma_1 \circ \Gamma_2 = \{(a, c) \in T^*(X \times Z) \setminus 0 \mid \exists b : (a, b) \in \Gamma_1, (b, c) \in \Gamma_2\}. \quad (\text{A.8})$$

Для конуса $\Gamma \subset T^*(X \times Z) \setminus 0$ введём обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma_X &= \{(x, \xi) \in T^*X \setminus 0 \mid \exists z \in Z : (x, \xi, z, 0) \in \Gamma\}, \\ \Gamma_Z &= \{(z, \zeta) \in (T^*Z) \setminus 0 \mid \exists x \in X : (x, 0, z, \zeta) \in \Gamma\}, \\ \Gamma' &= \{(x, \xi, z, \zeta) \in T^*(X \times Z) \setminus 0 \mid (x, \xi, y, -\zeta) \in \Gamma\}. \end{aligned}$$

Конус (А.8), вообще говоря, не является замкнутым. Нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма А.1. Для замыкания $\overline{\Gamma_1 \circ \Gamma_2} \subset T^*(X \times Z) \setminus 0$ выполнено соотношение

$$\overline{\Gamma_1 \circ \Gamma_2} \subset (\Gamma_1 \circ \Gamma_2) \cup (\Gamma_{1_X} \times 0_Z) \cup (0_X \times \Gamma_{2_Z}).$$

Теорема А.1. Пусть X, Y, Z — гладкие многообразия, и $\Gamma_1 \subset T^*(X \times Y) \setminus 0$, $\Gamma_2 \subset T^*(Y \times Z) \setminus 0$ — такие замкнутые конусы, что для конусов Γ'_1 и Γ_2 выполнено условие (А.7).

Пусть имеются линейные непрерывные отображения

$$D_1 : C^\infty(Y) \rightarrow \mathcal{D}'(X), \quad D_2 : C^\infty(Z) \rightarrow \mathcal{D}'(Y)$$

с ядрами Шварца

$$K_{D_1} \in \mathcal{D}'_{\Gamma_1}(X \times Y), \quad K_{D_2} \in \mathcal{D}'_{\Gamma_2}(Y \times Z).$$

Тогда определена композиция операторов

$$D_1 \circ D_2 : C^\infty(Z) \longrightarrow \mathcal{D}'(X),$$

а композиция соответствующих ядер Шварца даёт линейное непрерывное отображение

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_{\Gamma_1}(X \times Y) \times \mathcal{D}'_{\Gamma_2}(Y \times Z) &\longrightarrow \mathcal{D}'_{\Gamma_3}(X \times Z), \\ (K_{D_1}, K_{D_2}) &\longmapsto K_{D_1 \circ D_2}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

где замкнутый конус Γ_3 равен

$$\Gamma_3 = (\Gamma'_1 \circ \Gamma_2) \cup (\Gamma_{1_X} \times 0_Z) \cup (0_X \times \Gamma_{2_Z}).$$

Доказательство. При выполнении условия (A.7) конус Γ_3 является замкнутым в $T^*(X \times Z) \setminus 0$ по лемме A.1.

Определим отображения

$$\Delta : X \times Y \times Z \longrightarrow X \times Y \times Y \times Z, \quad \Delta(x, y, z) = (x, y, y, z);$$

$$\pi : X \times Y \times Z \longrightarrow X \times Z, \quad \pi(x, y, z) = (x, z).$$

Тогда справедлива формула [14, 15]

$$K_{D_1 \circ D_2} = \pi_* \Delta^*(K_{D_1} \otimes K_{D_2}). \quad (\text{A.10})$$

Приведём подробные вычисления волнового фронта композиции (A.10). Для волнового фронта тензорного произведения $K_{D_1} \otimes K_{D_2}$ в силу предложения A.3 справедливо вложение

$$WF(K_{D_1} \otimes K_{D_2}) \subset \Gamma_1 \times \Gamma_2 \cup (\Gamma_1 \times 0_{Y \times Z}) \cup (0_{X \times Y} \times \Gamma_2). \quad (\text{A.11})$$

Определим конормальное расслоение диагонали $N^*\Delta$. Обозначим координаты на $X \times Y \times Y \times Z$ через (x, y_1, y_2, z) . Тогда

$$N^*\Delta = \left\{ (x, 0, y_1, \eta_1, y_2, \eta_2, z, 0) \in T^*(X \times Y \times Y \times Z) \setminus 0 \mid \eta_1 + \eta_2 = 0, y_1 = y_2 \right\}.$$

Легко видеть, что расслоение $N^*\Delta$ совпадает с множеством нормалей (A.2) для отображения Δ .

Лемма A.2. *Справедливо соотношение*

$$WF(K_{D_1} \otimes K_{D_2}) \cap N^*\Delta = \emptyset. \quad (\text{A.12})$$

Доказательство. Из (A.11) следует, что

$$WF(K_{D_1} \otimes K_{D_2}) \cap N^*\Delta \subset \left(\Gamma_1 \times \Gamma_2 \cup (\Gamma_1 \times 0_{Y \times Z}) \cup (0_{X \times Y} \times \Gamma_2) \right) \cap N^*\Delta. \quad (\text{A.13})$$

Пересечение

$$\begin{aligned} (\Gamma_1 \times \Gamma_2) \cap N^*\Delta = \left\{ (x, 0, y_1, \eta_1, y_1, -\eta_1, z, 0) \in T^*(X \times Y \times Y \times Z) \setminus 0 \mid \right. \\ \left. (x, 0, y_1, \eta_1) \in \Gamma_1, (y_1, -\eta_1, z, 0) \in \Gamma_2, \eta_1 \neq 0 \right\} \end{aligned}$$

является пустым множеством в силу условия (A.7).

Пересечение множеств

$$(\Gamma_1 \times 0_{Y \times Z}) \cap N^*\Delta = \left\{ (x, 0, y_1, 0, y_1, 0, z, 0) \in T^*(X \times Y \times Y \times Z) \mid (x, 0, y_1, 0) \in \Gamma_1 \right\}$$

является пустым, так как $\Gamma_1 \in T^*(X \times Y) \setminus 0$. Аналогично

$$(0_{X \times Y} \times \Gamma_2) \cap N^*\Delta = \left\{ (x, 0, y_1, 0, y_1, 0, z, 0) \in T^*(X \times Y \times Y \times Z) \mid (y_1, 0, z, 0) \in \Gamma_2 \right\}$$

— пустое множество в силу того, что $\Gamma_2 \in T^*(Y \times Z) \setminus 0$.

Таким образом, правая часть соотношения (A.13) является пустым множеством. Доказательство леммы завершено. $\square$

В силу леммы A.2 и предложения A.1 распределение $\Delta^*(K_{D_1} \otimes K_{D_2})$ корректно определено. Перейдём теперь к вычислению его волнового фронта.

Определение A.3. Пусть $\Gamma_1 \subset T^*(X \times Y) \setminus 0, \Gamma_2 \subset T^*(Y \times Z) \setminus 0$ — замкнутые конусы. Сумма $\Gamma_1 + \Gamma_2 \subset T^*(X \times Y \times Z) \setminus 0$ определяется как

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \left\{ (x, \xi, y, \eta_1 + \eta_2, z, \zeta) \in T^*(X \times Y \times Z) \setminus 0 \mid (x, \xi, y, \eta_1) \in \Gamma_1, (y, \eta_2, z, \zeta) \in \Gamma_2 \right\}.$$

Лемма A.3. *Для волнового фронта распределения $\Delta^*(K_{D_1} \otimes K_{D_2})$ имеем*

$$WF(\Delta^*(K_{D_1} \otimes K_{D_2})) \subset (\Gamma_1 + \Gamma_2) \cup (\Gamma_1 \times 0_Z) \cup (0_X \times \Gamma_2).$$

Доказательство. По предложению A.1 для волнового фронта распределения $\Delta^*(K_{D_1} \otimes K_{D_2})$ справедливо соотношение

$$WF(\Delta^*(K_{D_1} \otimes K_{D_2})) \subset \tilde{\Gamma} = \Delta^*\left((\Gamma_1 \times \Gamma_2) \cup (\Gamma_1 \times 0_{Y \times Z}) \cup (0_{X \times Y} \times \Gamma_2)\right). \quad (\text{A.14})$$

Опишем множество в правой части соотношения (A.14). Так как

$$\Delta : (x, y, z) \rightarrow (x, y, y, z),$$

то, воспользовавшись формулой (A.3) из предложения A.1 для произвольного конуса $\Gamma \subset T^*(X \times Y \times Z) \setminus 0$, получим, что

$$\begin{aligned} \Delta^*\Gamma = \left\{ (x, \xi, y, \eta, z, \zeta) \in T^*(X \times Y \times Z) \setminus 0 \mid \right. \\ \left. \exists (\xi', \eta'_1, \eta'_2, \zeta') : \xi' = \xi, \zeta' = \zeta, \eta'_1 + \eta'_2 = \eta, (x, \xi', y, \eta'_1, y, \eta'_2, z, \zeta') \in \Gamma \right\}. \end{aligned}$$

Применим эту формулу к конусу $\Gamma = (\Gamma_1 \times \Gamma_2) \cup (\Gamma_1 \times 0_{Y \times Z}) \cup (0_{X \times Y} \times \Gamma_2)$, который состоит из точек вида $(x, \xi, y_1, \eta_1, y_2, \eta_2, z, \zeta)$. Получим

$$\begin{aligned} \Delta^*(\Gamma_1 \times \Gamma_2) = \left\{ (x, \xi, y, \eta_1 + \eta_2, z, \zeta) \in T^*(X \times Y \times Z) \setminus 0 \mid (x, \xi, y, \eta_1) \in \Gamma_1, (y, \eta_2, z, \zeta) \in \Gamma_2 \right\} = \\ = \Gamma_1 + \Gamma_2. \end{aligned}$$

Конус $\Gamma_1 \times 0_{Y \times Z}$ состоит из точек вида $(x, \xi, y_1, \eta_1, y_2, 0, z, 0)$. Тогда

$$\Delta^*(\Gamma_1 \times 0_{Y \times Z}) = \left\{ (x, \xi, y, \eta_1, z, 0) \in T^*(X \times Y \times Z) \setminus 0 \mid (x, \xi, y, \eta_1) \in \Gamma_1 \right\} = \Gamma_1 \times 0_Z.$$

Наконец, конус $0_{X \times Y} \times \Gamma_2$ состоит из точек вида $(x, 0, y_1, 0, y_2, \eta_2, z, \zeta)$. Тогда

$$\Delta^*(0_{X \times Y} \times \Gamma_2) = \left\{ (x, 0, y, \eta_2, z, \zeta) \in T^*(X \times Y \times Z) \setminus 0 \mid (y, \eta_2, z, \zeta) \in \Gamma_2 \right\} = 0_X \times \Gamma_2.$$

Таким образом, получаем, что

$$\tilde{\Gamma} = (\Gamma_1 + \Gamma_2) \cup (\Gamma_1 \times 0_Z) \cup (0_X \times \Gamma_2),$$

и конус $\tilde{\Gamma}$ замкнут в $T^*(X \times Y \times Z) \setminus 0$ в силу предложения A.1.

Лемма доказана. $\square$

Теперь рассмотрим распределение $\pi_*(\Delta^*(K_{D_1} \otimes K_{D_2}))$.

Лемма A.4. Для волнового фронта распределения $\pi_*(\Delta^*(K_{D_1} \otimes K_{D_2}))$ имеем

$$WF(\pi_*(\Delta^*(K_{D_1} \otimes K_{D_2}))) \subset \Gamma_3.$$

Доказательство. По предложению A.2 получаем, что

$$WF(\pi_*(\Delta^*(K_{D_1} \otimes K_{D_2}))) \subset \Gamma = \pi_*\left((\Gamma_1 + \Gamma_2) \cup (\Gamma_1 \times 0_Z) \cup (0_X \times \Gamma_2)\right). \quad (\text{A.15})$$

Здесь конус $\pi_*(\tilde{\Gamma})$ для конуса $\tilde{\Gamma} \subset T^*(X \times Y \times Z) \setminus 0$ в силу (A.6) определяется как

$$\pi_*(\tilde{\Gamma}) = \left\{ (x, \xi, z, \zeta) \in T^*(X \times Z) \setminus 0 \mid \exists y \in Y : (x, \xi, y, 0, z, \zeta) \in \tilde{\Gamma} \right\}. \quad (\text{A.16})$$

Вычислим явно это множество:

$$\pi_*(\Gamma_1 + \Gamma_2) = \left\{ (x, \xi, z, \zeta) \in T^*(X \times Z) \setminus 0 \mid \exists (y, \eta_1) : (x, \xi, y, -\eta_1) \in \Gamma_1, (y, \eta_1, z, \zeta) \in \Gamma_2 \right\} = \Gamma'_1 \circ \Gamma_2,$$

$$\pi_*(\Gamma_1 \times 0_Z) = \left\{ (x, \xi, z, 0) \in T^*(X \times Z) \setminus 0 \mid (x, \xi, y, 0) \in \Gamma_1 \right\} = \Gamma_{1X} \times 0_Z,$$

$$\pi_*(0_X \times \Gamma_2) = \left\{ (x, 0, z, \zeta) \in T^*(X \times Z) \setminus 0 \mid (y, 0, z, \zeta) \in \Gamma_2 \right\} = 0_X \times \Gamma_{2Z}.$$

Таким образом, из последних трёх соотношений получаем искомое равенство

$$\Gamma = (\Gamma'_1 \circ \Gamma_2) \cup \Gamma_{1X} \times 0_Z \cup 0_X \times \Gamma_{2Z} = \Gamma_3.$$

Лемма доказана. $\square$

Вернёмся к доказательству теоремы. В силу леммы А.4 получаем

$$WF(K_{D_1} \circ K_{D_2}) = WF(\pi_*(\Delta^*(K_{D_1} \otimes K_{D_2}))) \subset \Gamma_3.$$

Так как все операции в правой части формулы (А.10) являются непрерывными, отображение (А.9) непрерывно. Теорема А.1 доказана. $\square$

В. ПРИЛОЖЕНИЕ. РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ СЛЕД

В.1. Одно семейство псевдодифференциальных операторов. Рассмотрим семейство псевдодифференциальных операторов с параметром $h > 0$

$$\begin{aligned} \psi^0(h) : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n), \\ (\psi^0(h)u)(x) &= (2\pi)^{-n} \chi(x) \int e^{i(x-y)\xi} \psi_0(h\xi) \rho(y) u(y) dy d\xi, \end{aligned} \quad (\text{В.1})$$

которое определяется следующими вспомогательными функциями:

- $\rho(x), \chi(x), \psi_0(\xi) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$;
- $\chi(x) \equiv 1$ в окрестности носителя функции $\rho(x)$;
- $\psi_0(\xi) \equiv 1$, если $|\xi| \leq 1$.

Ядро Шварца оператора (В.1) имеет компактный носитель, является бесконечно гладким и равно

$$K_{\psi^0(h)}(x, y) = (2\pi)^{-n} \chi(x) \int e^{i(x-y)\xi} \psi_0(h\xi) \rho(y) d\xi. \quad (\text{В.2})$$

Оператор умножения на функцию $\rho(x)$

$$\rho : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad u(x) \mapsto \rho(x)u(x)$$

имеет ядро Шварца

$$K_\rho(x, y) = \delta(x - y) \rho(x). \quad (\text{В.3})$$

Для ядер Шварца (В.2) и (В.3) справедлив следующий результат.

Предложение В.1. При $h \rightarrow 0$ имеет место сходимость ядер Шварца

$$K_{\psi^0(h)} \longrightarrow K_\rho$$

по полунормам в пространстве $\mathcal{D}'_{N^*\Delta}(X \times X)$, где $N^*\Delta \subset T^*(X \times X)$ — кономальное расслоение диагонали $\Delta \subset X \times X$.

Доказательство. 1. Сначала докажем сходимость в $\mathcal{D}'(X \times X)$. Для этого покажем, что для любой пробной функции $\varphi \in C^\infty(X \times X)$ существует предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} K_{\psi^0(h)}(\varphi) = K_\rho(\varphi). \quad (\text{В.4})$$

В самом деле, правая часть уравнения (В.4) равна (мы использовали (В.3) и равенство $\chi\rho = \rho$)

$$K_\rho(\varphi) = \int \varphi(x, x) \rho(x) dx. \quad (\text{В.5})$$

Запишем теперь величину в левой части в (В.4) в виде интеграла

$$K_{\psi^0(h)}(\varphi) = (2\pi)^{-n} \iiint e^{i(x-y)\xi} \varphi(x, y) \chi(x) \rho(y) \psi_0(h\xi) dy d\xi dx. \quad (\text{В.6})$$

Сделаем замену $\xi' = h\xi$ в (В.6). Получим

$$K_{\psi^0(h)}(\varphi) = (2\pi h)^{-n} \int \chi(x) \left[\iint e^{i\frac{(x-y)\xi'}{h}} \varphi(x, y) \rho(y) \psi_0(\xi') dy d\xi' \right] dx. \quad (\text{В.7})$$

Применим метод стационарной фазы к внутреннему интегралу в формуле (В.7). В стационарной точке $m_0 = (x, 0)$ гессиан фазовой функции $f(y, \xi') = (x - y)\xi'$ равен

$$\text{Hess} f(m_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда интеграл (B.7) имеет разложение

$$K_{\psi^0(h)}(\varphi) = \int \varphi(x, x) \chi(x) \rho(x) \psi_0(0) dx + O(h) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (\text{B.8})$$

Поскольку $\chi\rho = \rho$ по условию и $\psi_0(0) = 1$, то из выражений (B.5) и (B.8) получаем искомую сходимость в $\mathcal{D}'(X \times X)$:

$$K_{\psi^0(h)}(\varphi) - K_\rho(\varphi) = O(h).$$

2. Теперь докажем сходимость $K_{\psi^0(h)}$ к K_ρ в $\mathcal{D}'_{N^* \Delta}(X \times X)$. Выберем малые окрестности $U_1, U_2 \subset X$ и срезающую функцию $\varphi(x, y) = \varphi_1(x) \varphi_2(y) \in C_c^\infty(U_1 \times U_2)$.

Для доказательства сходимости $K_{\psi^0(h)}$ к K_ρ в $\mathcal{D}'_{N^* \Delta}(X \times X)$ необходимо оценить разность

$$\mathcal{F}(\varphi K_{\psi^0(h)})(t\xi', t\eta') - \mathcal{F}(\varphi K_\rho)(t\xi', t\eta') \quad (\text{B.9})$$

при малых h равномерно при всех

$$t \geq 1, \quad |\xi'|^2 + |\eta'|^2 = 1, \quad |\xi' + \eta'| \geq \varepsilon. \quad (\text{B.10})$$

Для разности (B.9) получаем равенства

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}(\varphi K_{\psi^0(h)})(t\xi', t\eta') - \mathcal{F}(\varphi K_\rho)(t\xi', t\eta') = \\ &= \iint e^{-it(x\xi' + y\eta')} \left[\int e^{i\xi(x-y)} \psi_0(h\xi) \varphi_1(x) \chi(x) \varphi_2(y) \rho(y) d\xi \right] dx dy - \\ & \quad - \iint e^{-it(x\xi' + y\eta')} \left[\varphi_1(x) \chi(x) \varphi_2(y) \delta(x-y) \rho(y) \right] dx dy = \\ &= \int \psi_0(h\xi) \left[\int e^{ix(\xi - t\xi')} \varphi_1(x) \chi(x) dx \int e^{iy(-\xi - t\eta')} \varphi_2(y) \rho(y) dy \right] d\xi - \\ & \quad - \int e^{-itx(\xi' + \eta')} \varphi_1(x) \chi(x) \varphi_2(x) \rho(x) dx = \\ &= \int \psi_0(h\xi) \mathcal{F}(\varphi_1 \chi)(t\xi' - \xi) \mathcal{F}(\varphi_2 \rho)(t\eta' + \xi) d\xi - \int \mathcal{F}(\varphi_1 \chi)(t\xi' - \xi) \mathcal{F}(\varphi_2 \rho)(t\eta' + \xi) d\xi = \\ &= \int (\psi_0(h\xi) - 1) \mathcal{F}(\varphi_1 \chi)(t\xi' - \xi) \mathcal{F}(\varphi_2 \rho)(t\eta' + \xi) d\xi. \quad (\text{B.11}) \end{aligned}$$

Оценим последнее выражение в (B.11) в области (B.10). Поскольку $\psi_0(h\xi) \equiv 1$ при $|h\xi| \leq 1$ и в силу того, что функции $\varphi_1, \varphi_2, \chi$ — гладкие с компактным носителем, получаем из (B.11) оценку

$$|\mathcal{F}(\varphi K_{\psi^0(h)})(t\xi', t\eta') - \mathcal{F}(\varphi K_\rho)(t\xi', t\eta')| \leq C_N \int_{|\xi| > \frac{1}{h}} \left[(1 + |\xi - t\xi'|)(1 + |\xi + t\eta'|) \right]^{-N} d\xi \quad (\text{B.12})$$

для любых N .

Лемма B.1. Для $\varepsilon > 0$ в области (B.10) справедливы неравенства

$$(1 + |\xi - t\xi'|)(1 + |\xi + t\eta'|) \geq \varepsilon |\xi|, \quad (\text{B.13})$$

$$(1 + |\xi - t\xi'|)(1 + |\xi + t\eta'|) \geq 1 + t\varepsilon. \quad (\text{B.14})$$

Доказательство. 1. Неравенство (B.14) следует из неравенства треугольника и неравенств (B.10):

$$(1 + |\xi - t\xi'|)(1 + |\xi + t\eta'|) = 1 + |\xi - t\xi'| + |\xi + t\eta'| + |\xi - t\xi'| |\xi + t\eta'| \geq 1 + |t\xi' + t\eta'| \geq 1 + t\varepsilon.$$

2. Получим теперь неравенство (B.13):

$$\begin{aligned} (1 + |\xi - t\xi'|)^2 (1 + |\xi + t\eta'|)^2 & \geq (1 + |\xi - t\xi'|^2)(1 + |\xi + t\eta'|^2) \geq \\ & \geq 1 + |\xi - t\xi'|^2 + |\xi + t\eta'|^2 = 1 + 2|\xi|^2 + t^2 - 2t(\xi, \xi' - \eta') \geq \\ & \geq 1 + 2|\xi|^2 - |(\xi, \xi' - \eta')|^2 \geq 1 + 2|\xi|^2 - |\xi' - \eta'|^2 |\xi|^2 = 1 + |\xi|^2 (2 - |\xi' - \eta'|^2) = \\ & = 1 + |\xi|^2 |\xi' + \eta'|^2 \geq 1 + \varepsilon^2 |\xi|^2 > \varepsilon^2 |\xi|^2. \end{aligned}$$

Лемма B.1 доказана. $\square$

Вернёмся к оценке величины (В.12). Пусть $N = N_1 + N_2$. Тогда по лемме В.1 получим

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| > \frac{1}{h}} \left[(1 + |\xi - t\xi'|)(1 + |\xi + t\eta'|) \right]^{-N} d\xi &= \\ &= \int_{|\xi| > \frac{1}{h}} \left[(1 + |\xi - t\xi'|)(1 + |\xi + t\eta'|) \right]^{-N_1} \left[(1 + |\xi - t\xi'|)(1 + |\xi + t\eta'|) \right]^{-N_2} d\xi \leq \\ &\leq (1 + t\varepsilon)^{-N_1} \int_{|\xi| > \frac{1}{h}} C|\xi|^{-N_2} d\xi = C_1(1 + t\varepsilon)^{-N_1} h^{N_2-n}. \end{aligned} \quad (\text{В.15})$$

Здесь в последнем интеграле в соотношении (В.15) мы сделали замену $\tau = h\xi$ (интеграл сходится при $N_2 > n$).

Итак, из выражений (В.12) и (В.15) получаем оценку

$$\mathcal{F}(\varphi K_{\psi^0(h)})(t\xi', t\eta') - \mathcal{F}(\varphi K_\rho)(t\xi', t\eta') = O(t^{-N_1} h^{N_2-n})$$

в области (В.10) для любого $\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что значения полунорм (А.1) от разности $K_{\psi^0(h)} - K_\rho$ являются величинами порядка $O(h^{N_2-n})$. Теперь, выбирая $N_2 = n + 1$, получаем, что эти значения стремятся к нулю. $\square$

В.2. Регуляризованный след. На гладком замкнутом многообразии X рассмотрим непрерывный оператор

$$A : C^\infty(X) \longrightarrow \mathcal{D}'(X) \quad (\text{В.16})$$

с ядром Шварца $K_A \in \mathcal{D}'(X \times X)$.

Через $\Delta \subset X \times X$ обозначим диагональ $\Delta = \{(x, x) | x \in X\}$. Конормальное расслоение диагонали равно

$$N^*\Delta = \{(x, \xi, x, \eta) \in T^*(X \times X) \mid \xi + \eta = 0\}.$$

Вложение $i : \Delta \hookrightarrow X \times X$ индуцирует оператор сужения на диагональ

$$i^* : C^\infty(X \times X) \longrightarrow C^\infty(\Delta), \quad i^* : u(x, y) \mapsto u(x, x).$$

Применяя предложение А.1 из дополнения А к отображению i , получаем следствие.

Следствие В.1. Если выполнено условие

$$WF(K_A) \cap N^*\Delta = \emptyset, \quad (\text{В.17})$$

то определено сужение ядра Шварца на диагональ $i^*K_A \in \mathcal{D}'(\Delta)$.

Определение В.1. Регуляризованным следом оператора A , удовлетворяющего условиям (В.17), называется число

$$\tau(A) = (i^*K_A)(1).$$

Замечание В.1. Если оператор A имеет непрерывное ядро Шварца K_A , то регуляризованный след совпадает с операторным следом.

Предложение В.2. Если для оператора A из (В.16) выполнено соотношение (В.17) и выполнено условие

$$WF'_X(A) = \emptyset,$$

то существует предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(A\psi^0(h)) = \tau(A\rho), \quad (\text{В.18})$$

где оператор $\psi^0(h)$ и функция ρ были определены в предыдущем разделе.

Доказательство. Через $K_{A\psi^0(h)}$ обозначим ядро Шварца оператора $A\psi^0(h)$. Из определения регуляризованного следа видно, что для доказательства существования предела (В.18) достаточно доказать следующее:

1. ядро Шварца $K_{A\psi^0(h)}$ сходится к ядру Шварца $K_{A\rho}$ при $h \rightarrow 0$ в пространстве $\mathcal{D}'_{N^*\Delta}(X \times X)$;

2. сужение ядра $K_{A\psi^0(h)}$ на диагональ сходится к ядру Шварца $K_{A\rho}$ при $h \rightarrow 0$ в пространстве $\mathcal{D}'(\Delta)$;
3. спаривание с единицей даёт непрерывную функцию от h в точке $h = 0$.

Докажем эти три свойства.

Сначала покажем, что ядро Шварца $K_{A\psi^0(h)}$ непрерывно зависит от h по полунормам (А.1) при $h = 0$. Предложение В.1 даёт, что ядро Шварца $K_{\psi^0(h)}$ при $h \rightarrow 0$ сходится к K_ρ в пространстве $\mathcal{D}'_{N^*\Delta}(X \times X)$. Далее, так как $WF'_X(A) = \emptyset$, $WF'_X(\psi^0(h)) = \emptyset$ и $WF'_X(\rho) = \emptyset$, то по теореме А.1 получим искомую сходимость

$$K_{A\psi^0(h)} \rightarrow K_{A\rho} \text{ в } \mathcal{D}'_{N^*\Delta}(X \times X) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Далее заметим, что сужение ядра Шварца $K_{A\psi^0(h)}$ на диагональ $\Delta \subset X \times X$ непрерывно при $h \rightarrow 0$ в силу предложения А.1. Условие предложения А.1 выполнено, поскольку выполнено соотношение (В.17).

Наконец, операция спаривания с единицей является непрерывной в силу определения сходимости в пространстве $\mathcal{D}'(\Delta)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кордюков Ю. А., Павленко В. А. О формулах Лефшеца для потоков на многообразиях со слоением // Уфимск. мат. ж. — 2015. — 7, №2. — С. 73–108.
2. Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Индекс нелокальных задач, ассоциированных с расслоением // Дифф. уравн. — 2014. — 50, № 8. — С. 1117–1127.
3. Стернин Б. Ю. Относительная эллиптическая теория и проблема С.Л. Соболева // Докл. АН СССР. — 1976. — 230, № 2. — С. 287–290.
4. Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е. Распирение алгебры псевдодифференциальных операторов и некоторые нелокальные эллиптические задачи // Мат. сб. — 1994. — 185, № 3. — С. 117–159.
5. Троицкий Е. В., Франк М. Числа Лефшеца и геометрия операторов в W^* -модулях // Функци. анализ и его прил. — 1996. — 30, № 4. — С. 45–57.
6. Федосов Б. В. Теоремы об индексе // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направл. — 1991. — 65. — С. 165–268.
7. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1: Теория распределений и анализ Фурье. — М.: Мир, 1986.
8. Atiyah M. F., Bott R. A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I // Ann. Math. — 1967. — 86, № 3. — С. 374–407.
9. Atiyah M. F., Bott R. A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. II. Applications // Ann. Math. — 1968. — 88, № 3. — С. 451–491.
10. Bei F. The L^2 -Atiyah–Bott–Lefschetz theorem on manifolds with conical singularities: a heat kernel approach // Ann. Global Anal. Geom. — 2013. — 44, №4. — С. 565–605.
11. Bismut M. The Atiyah–Singer theorems: a probabilistic approach. Part II: The Lefschetz fixed point formulas // J. Funct. Anal. — 1984. — 57, № 3. — С. 329–348.
12. Bismut M. The infinitesimal Lefschetz formulas: A heat equation proof // J. Funct. Anal. — 1985. — 62. — С. 437–457.
13. Brenner A. V., Shubin M. A. The Atiyah–Bott–Lefschetz formula for elliptic complexes on a manifold with boundary // J. Math. Sci. (N. Y.). — 1993. — 64, № 4. — С. 1069–1111.
14. Duistermaat J. J. Fourier integral operators. — Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 1996.
15. Gabor A. Remarks on the wave front of a distribution // Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — 170. — С. 239–244.
16. Gilkey P. B. Lefschetz fixed point formulas and the heat equations // Commun. Pure Appl. Math. — 1984. — 48, № 3. — С. 477–528.
17. Inoue H. A proof of the holomorphic Lefschetz formula for higher dimensional fixed point sets by the heat equation method // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. — 1982. — 29, № 2. — С. 267–285.
18. Izvarina N. R., Savin A. Yu. An Atiyah–Bott–Lefschetz theorem for relative elliptic complexes // Lobachevskii J. Math. — 2022. — 43, № 10. — С. 2675–2684.
19. Kotake T. The fixed point theorem of Atiyah–Bott via parabolic operator // Commun. Pure Appl. Math. — 1969. — 22, № 6. — С. 789–806.
20. Lafferty J., Yu Y., Zhang W. A direct geometric proof of the Lefschetz fixed point formulas // Trans. Am. Math. Soc. — 1992. — 329, № 2. — С. 571–583.

21. *Lefschetz M.* Intersections and transformations of complexes and manifolds// Trans. Am. Math. Soc. — 1926. — 28. — С. 1–49.
22. *Nazaikinskii V. E.* Semiclassical Lefschetz formulas on smooth and singular manifolds// Russ. J. Math. Phys. — 1999. — 6. — С. 202–213.
23. *Nazaikinskii V., Savin A., Schulze B.-W., Sternin B.* Elliptic theory on singular manifolds. — Boca Raton: CRC-Press, 2005.
24. *Nazaikinskii V. E., Schulze B.-W., Sternin B. Yu., Shatalov V. E.* The Atiyah–Bott–Lefschetz theorem for manifold with conical singularities// Ann. Global Anal. Geom. — 1999. — 17. — С. 409–439.
25. *Nazaikinskii V., Sternin B.* Lefschetz theory on manifolds with singularities// В сб.: « C^* -algebras and elliptic theory. Trends Math». — Basel: Birkhäuser, 2006. — С. 157–186.
26. *Patodi V.* Holomorphic Lefschetz fixed point formula// Bull. Amer. Math. Soc. — 1973. — 79. — С. 825–828.
27. *Rempel S., Schulze B.-W.* Index theory of elliptic boundary problems. — Berlin: Akademie-Verlag, 1982.
28. *Seeley R.* A proof of the Atiyah–Bott–Lefschetz fixed point formula// Ann. Acad. Brasil Cienn. — 1969. — 41, № 4. — С. 493–501.
29. *Sternin B. Yu., Shatalov V. E.* Lefschetz fixed point theorem for quantized symplectic transformations// Funct. Anal. Appl. — 1998. — 32. — С. 247–257.
30. *Toledo D.* On the Atiyah–Bott formula for isolated fixed points// J. Differ. Geom. — 1973. — 8. — С. 401–436.
31. *Toledo D., Tong Y. L.* Duality and intersection theory in complex manifolds. II: The holomorphic Lefschetz formula// Ann. Math. — 1975. — 108. — С. 519–538.
32. *Wintgen P.* On the fixed point formula of Atiyah and Bott// Colloq. Math. (PRL). — 1982. — 47, № 2. — С. 295–301.

Н. П. Орлова
Москва, Россия
E-mail: izvarinanat@gmail.com

UDC 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-417-442

EDN: FLFXBT

Lefschetz formula for nonlocal elliptic problems associated with fibration

N. R. Orlova

Moscow, Russia

Abstract. Elliptic operator complexes associated with fibration are considered. The Atiyah–Bott–Lefschetz formula for endomorphisms of such complexes is given. The proof is based on the stationary phase method. Wavefronts of distributions are used to estimate the remainder term.

Keywords: elliptic complexes, nonlocal problems, Lefschetz numbers, wave front, stationary phase method.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author is grateful to V. E. Nazaikinskii for explaining his approach to proving the Lefschetz formula and to A. Yu. Savin for his attention to this work and useful comments during the writing process. The author declares no financial support.

For citation: N. R. Orlova, “Lefschetz formula for nonlocal elliptic problems associated with fibration,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 3, 417–442. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-417-442>

REFERENCES

1. Yu. A. Kordyukov and V. A. Pavlenko, “O formulakh Lefshetsa dlya potokov na mnogoobraziiakh so sloeniem” [On Lefschetz formulas for flows on foliated manifolds], *Ufmsk. mat. zh.* [Ufa Math. J.], 2015, **7**, No. 2, 73–108 (in Russian).
2. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, “Indeks nelokal’nykh zadach, assotsirovannykh s rassloeniem” [Index of nonlocal problems associated with fibration], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2014, **50**, No. 8, 1117–1127 (in Russian).
3. B. Yu. Sternin, “Otnositel’naya ellipticheskaya teoriya i problema S. L. Soboleva” [Relative elliptic theory and S. L. Sobolev’s problem], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1976, **230**, No. 2, 287–290 (in Russian).
4. B. Yu. Sternin and V. E. Shatalov, “Rasshirenie algebrы psevdodifferentsial’nykh operatorov i nekotorye nelokal’nye ellipticheskie zadachi” [Extension of the algebra of pseudodifferential operators and some nonlocal elliptic problems], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1994, **185**, No. 3, 117–159 (in Russian).
5. E. V. Troitskiy and M. Frank, “Chisla Lefshetsa i geometriya operatorov v W^* -modulyakh” [Lefschetz numbers and geometry of operators in W^* -modules], *Funkts. analiz i ego pril.* [Funct. Anal. Appl.], 1996, **30**, No. 4, 45–57 (in Russian).
6. B. V. Fedosov, “Teoremy ob indekse” [Index theorems], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. probl. mat. Fundam. napravl.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math. Fundam. Napravl.], 1991, **65**, 165–268 (in Russian).
7. L. Hörmander, *Analiz lineynykh differentsial’nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 1: Teoriya raspredeleniy i analiz Fur’e* [The Analysis of Linear Partial Differential Operators I. Distribution Theory and Fourier Analysis], Mir, Moscow, 1986 (Russian translation).
8. M. F. Atiyah and R. Bott, “A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I,” *Ann. Math.*, 1967, **86**, No. 3, 374–407.
9. M. F. Atiyah and R. Bott, “A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. II. Applications,” *Ann. Math.*, 1968, **88**, No. 3, 451–491.
10. F. Bei, “The L^2 -Atiyah–Bott–Lefschetz theorem on manifolds with conical singularities: a heat kernel approach,” *Ann. Global Anal. Geom.*, 2013, **44**, No. 4, 565–605.
11. M. Bismut, “The Atiyah–Singer theorems: a probabilistic approach. Part II: The Lefschetz fixed point formulas,” *J. Funct. Anal.*, 1984, **57**, No. 3, 329–348.
12. M. Bismut, “The infinitesimal Lefschetz formulas: A heat equation proof,” *J. Funct. Anal.*, 1985, **62**, 437–457.
13. A. V. Brenner and M. A. Shubin, “The Atiyah–Bott–Lefschetz formula for elliptic complexes on a manifold with boundary,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 1993, **64**, No. 4, 1069–1111.
14. J. J. Duistermaat, *Fourier integral operators*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 1996.
15. A. Gabor, “Remarks on the wave front of a distribution,” *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1972, **170**, 239–244.
16. P. B. Gilkey, “Lefschetz fixed point formulas and the heat equations,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1984, **48**, No. 3, 477–528.
17. H. Inoue, “A proof of the holomorphic Lefschetz formula for higher dimensional fixed point sets by the heat equation method,” *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 1982, **29**, No. 2, 267–285.
18. N. R. Izvarina and A. Yu. Savin, “An Atiyah–Bott–Lefschetz theorem for relative elliptic complexes,” *Lobachevskii J. Math.*, 2022, **43**, No. 10, 2675–2684.
19. T. Kotake, “The fixed point theorem of Atiyah–Bott via parabolic operator,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1969, **22**, No. 6, 789–806.
20. J. Lafferty, Y. Yu, and W. Zhang, “A direct geometric proof of the Lefschetz fixed point formulas,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1992, **329**, No. 2, 571–583.
21. M. Lefschetz, “Intersections and transformations of complexes and manifolds,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1926, **28**, 1–49.
22. V. E. Nazaikinskii, “Semiclassical Lefschetz formulas on smooth and singular manifolds,” *Russ. J. Math. Phys.*, 1999, **6**, 202–213.
23. V. Nazaikinskii, A. Savin, B.-W. Schulze, and B. Sternin, *Elliptic theory on singular manifolds*, CRC-Press, Boca Raton, 2005.
24. V. E. Nazaikinskii, B.-W. Schulze, B. Yu. Sternin, and V. E. Shatalov, “The Atiyah–Bott–Lefschetz theorem for manifold with conical singularities,” *Ann. Global Anal. Geom.*, 1999, **17**, 409–439.

25. V. Nazaikinskii and B. Sternin, “Lefschetz theory on manifolds with singularities,” In: *C*-algebras and elliptic theory. Trends Math*, Birkhäuser, Basel, 2006, pp. 157–186.
26. V. Patodi, “Holomorphic Lefschetz fixed point formula,” *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1973, **79**, 825–828.
27. S. Rempel and B.-W. Schulze, *Index theory of elliptic boundary problems*, Akademie-Verlag, Berlin, 1982.
28. R. Seeley, “A proof of the Atiyah–Bott–Lefschetz fixed point formula,” *Ann. Acad. Brasil Cienn.*, 1969, **41**, No. 4, 493–501.
29. B. Yu. Sternin and V. E. Shatalov, “Lefschetz fixed point theorem for quantized symplectic transformations,” *Funct. Anal. Appl.*, 1998, **32**, 247–257.
30. D. Toledo, “On the Atiyah–Bott formula for isolated fixed points,” *J. Differ. Geom.*, 1973, **8**, 401–436.
31. D. Toledo and Y. L. Tong, “Duality and intersection theory in complex manifolds. II: The holomorphic Lefschetz formula,” *Ann. Math.*, 1975, **108**, 519–538.
32. P. Wintgen, “On the fixed point formula of Atiyah and Bott,” *Colloq. Math. (PRL)*, 1982, **47**, No. 2, 295–301.

N. R. Orlova
Moscow, Russia
E-mail: izvarinanat@gmail.com

УДК 519.711

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-443-451

EDN: FMBVJU

НЕПРЕРЫВНАЯ ПОПУЛЯЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ПОКОЛЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА

А. Ю. ПЕРЕВАРЮХА

Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. Традиционно непрерывные модели математической биологии направлены на динамику взаимодействующих популяций как стационарных гомогенных общностей. Состояние популяций в уравнениях регулируется общими для всех особей $\forall t, N(t)$ факторами эффективности воспроизводства, гибели, ограничения жизненного пространства или лимитом ресурсов. Существуют много видов с непрерывающейся последовательностью поколений, сменяющих друг друга в разных сезонных условиях. Число годовых поколений — важная характеристика экологии вида при захвате нового ареала. Длина жизненного цикла и показатель репродуктивной активности r у смежных поколений насекомых в ареале различны из-за необходимости зимовки. Колебания этих величин влияют на стремительные всплески численности. Показано, что применение дискретных моделей $x_{n+1} = \psi(x_n; r)\varphi(x_{n-i}) - \Xi$ оказывается нереалистично по фундаментальным причинам. Появление циклов $p \neq 2^i$ в порядке теоремы Шарковского избыточно для анализа популяций и прогноза массовых размножений насекомых. В статье предложен метод организации моделей сопряженного развития череды поколений в системе разрывных дифференциальных уравнений как последовательности краевых задач. Модель событийно переопределяется для получения решения на отрезках времени, соответствующих условиям сезона. Модель с учетом конкуренции и запаздывающей регуляции актуальна для анализа череды пиков активности вредителей, для которых характерны отдельные чрезвычайно многочисленными поколения.

Ключевые слова: популяционное моделирование, непрерывная модель, моделирование поколений, популяционный цикл, динамика выживаемости, разрывные дифференциальные уравнения.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: А. Ю. Переварюха. Непрерывная популяционная модель поколений с разрывными характеристиками жизненного цикла // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 3. С. 443–451. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-443-451>

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблематика статьи связана с развитием методологии моделирования специфических сложных ситуаций при трансформации развития популяционных процессов. Фундаментальные проблемы математической биологии возникают при формализации непрерывных процессов в биофизической среде, имеющих выраженные аспекты трансформаций. Во многих случаях представление популяции как некоторой бесконечно делимой общности с мгновенными параметрами рождаемости и смертности («мальтузианский» параметр $r = \text{const}$) слишком абстрактно. Многие популяции (рыб и насекомых) представлены только одним поколением, и у разных поколений оказываются разные характеристики. Актуальность темы определена инвазионными процессами и

частыми всплесками численности опасных вселенцев в форме нескольких (обычно не более трех) исключительно многочисленных поколений вредителей, превышающих балансовую K -емкость экосистемы. В ситуации активных всплесков одно поколение вне рамок контроля начинает разрушать свою среду, что регулярно происходит с обычно редкой и мелкой бабочкой *Choristoneura fumiferana*, уничтожающей массивы хвойных лесов США и Канады. Популяция чрезмерно агрессивного вселенца может полностью исчезнуть из ареала, что ранее не рассматривали в моделях биофизики.

Цель работы — предложить метод формализации взаимодействия сменяющихся поколений «короткоцикловых» популяций, которые из-за особенностей ареала развиваются при разных условиях. Соответственно, характеристики жизненного цикла, длительности стадий онтогенеза и факторы регуляции размножения и выживания у соседствующих в хронологии поколений должны меняться импульсно. Для генерирующих сезонные поколения видов говорят об их *вольтинности* (би-, три- или поливольтинные). Вольтинность на разных границах ареала вида часто отличается из-за климата. Одно из поколений должно пережить зимовку, что разрывает популяционный процесс. Меняются не только значения параметров, что требует от модели аспекта событийности. В статье обсудим метод формирования уравнений для описания убыли численности на интервалах времени, где параметры дифференциальных уравнений с запаздыванием и регулирующие функции в правой части событийно меняются при переходе к расчету новой генерации. Популяция рассматривается как общность, но с меняющимися характеристиками воспроизводства.

2. БИОФИЗИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМАТИКА ТЕОРЕМЫ ШАРКОВСКОГО

Проблема методов моделирования для применения в биофизике обусловлена тем, что решения должны укладываться в рамки реальности. Классический пример выводов на грани разумного — уравнение для гиперболического роста населения «Doomsday equation»

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N^2(t)}{C}$$

с точкой $N(t_D) \rightarrow \infty$. Время удвоения численности человечества не может сокращаться

$$\lim_{t \rightarrow t_D} |t_{k1} - t_{k2}| = 0$$

хотя бы из-за ненулевого срока беременности, но идея назначенной в 1960 г. авторами [6] на 13 ноября 2026 г. Doomsday-катастрофы неоднократно обсуждалась.

Важный методологический вопрос, оправдано ли для описания череды поколений переходить к дискретной динамике? Поведение дискретных моделей становится сложным по фундаментальным математическим причинам, не связанным с проблемами биофизики. Варианты фазовых портретов итерационных моделей разнообразны. Для функциональных итераций установлены свойства нелинейности поведения «цикл $\leftrightarrow$ хаос», которые универсальны и относятся к целым классам отображений. Проблема в том, что если один из режимов поведения итераций получает трактовку, то с ним ассоциирован ряд избыточных. В результате свойства моделей популяционных процессов при сущностном рассмотрении оказываются противоречивыми. Решения и выводы при сопоставлении с реальностью выходят за рамки применимости. Усложнение модели может [11] упростить ее поведение.

Описание поколений в итерациях с возмущением Ξ_n :

$$x_{n+1} = \psi(x_n) - \Xi_n$$

выглядит нагляднее, что определило многие теоретические работы. Особенно активно развивались для оптимизации промысла модели [7] из нелинейной функции связи существующего запаса взрослых с нормой вылова q и производимого запасом пополнения, например,

$$x_{n+1} = ax_n \exp(-bx_n),$$

$a > 1$, $0 < b < 1$ если глобальная точка $x^* = \psi(x^*)$, $1 < a < \hat{a}$, $\forall x_0 > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n(x_0) = x^*$ теряет устойчивость при $a = e^2 + \epsilon$, $|\psi'(x^*)| > 1$.

Именно в уже известных популяционных моделях была обнаружена цикличность и теоретически исследована хаотизация траектории, известная как сценарий каскада бифуркаций удвоения периода $p = 2^i$, $i \rightarrow \infty$, $a = a_\infty < \infty$ с универсальными константами Фейгенбаума [5].

В параметрических диапазонах $a > a_\infty$ наблюдаются переходы «хаос $\rightarrow$ цикл», образующих бесконечное число «окон периодичности» в силу свойства существования n пар точек пересечения (помимо x^*) с прямой $\psi(x) = x$ у любой n раз вычисленной унимодальной $\psi^n(\dots\psi(x)\dots)$.

Хаотизация вследствие возникшего замкнутого множества, не содержащего никаких внутренних и изолированных точек, образованного из-за несчетного числа неустойчивых точек всех 2^i -циклов и всех их прообразов: $\mathcal{F} = \bigcup_j^{2^n} \psi^{-n}(x_j^*)$, — это сугубо математическое явление, ведь популяция является конечным множеством.

Для прогнозов эксплуатации популяций требуется *усложнить* модель — получить у $\psi(x)$ две стационарные точки $0 < x_1^* < x_{\max} < x_2^*$ и ненулевую горизонтальную асимптоту, сделав поведение $\psi^n(x_0)$ менее разнообразным, а значит, нехаотическим. Целесообразно нарушить данные в работе [14] рамки условий сценария $p = 2^i$, $i \rightarrow \infty$ с $\exists x$, $0 < x < x_{\max} : \mathcal{H}_{\psi(x)} > 0$, избегая так для унимодальных итераций с $f'(x) \neq 0$, $x \neq x_{\max}$ основного критерия неограниченности каскада удвоений — отрицательности шварцмана:

$$\mathcal{H}_\psi = \frac{\psi'''(x)}{\psi'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)} \right)^2 < 0.$$

Для популяционных циклов $x_i^* < x_{i+1}^*$ у видов с кратким онтогенезом характерен максимум при завершении периода, но циклы после бифуркаций удвоения не могут обладать нужным расположением точек $x_1^* < x_{i+1}^* < x_p^*$, $\sum_{i=1}^{p-1} x_i^* < x_p^*$. По обходу точек различают возникшие при разных значениях a циклы $p = 4 \times 2$ и $p = 2^4$. Согласно теореме Шарковского [12] в этой модели возможно получение циклов периодов $p \neq 2^i$, но в малых параметрических диапазонах из $a \in [1, \infty]$ и множестве $\mathfrak{A} = \bigcup_{p=3}^{\infty} \{\mathcal{A}_p\}$ периодических окон при $\mathcal{A}_p = [a_p, a_{p*}] \rightarrow 0$, $p = 3 \dots \rightarrow \infty$. Ширина параметрического окна $[a_p, a_{p*}] \rightarrow \max$ при $p = 3$.

Порядком чисел Шарковского указано сосуществование периодов циклов, и нечетные периоды следуют после всех четных [8]. Порядок Шарковского заканчивается на цикле $p = 3$, значит, уже существуют циклические траектории всех периодов (но неустойчивые). Популяции с циклом из трех поколений известны, см. [2]. Согласно расширенным результатам о потере устойчивости возникающих циклов в работе Ли и Йорка «Period Three Implies Chaos» [9] популяция с нечетным циклом не будет существовать стабильно (рядом всегда хаос), хотя число поколений $p \neq 2^i$ до пика активности встречается часто у мелких млекопитающих.

Включение запаздывания

$$x_{n+1} = \psi(x_n)\varphi(x_{n-i})$$

или

$$x_{n+1} = ax_n \exp \left(- \sum_{i=0}^m b_i x_{n-i} \right) - qx_n$$

нарушает важный критерий теоремы Сингера о единственности ω -предельного множества траектории унимодальной $\psi^n(x_0)$, но появление альтернативных притягивающих циклов дает тонкий динамический эффект. Представление цикличности для динамики экосистем необходимо модифицировать, можно включить запаздывание или алгоритмы перенастройки параметров.

3. ПРИМЕНИМОСТЬ СВОЙСТВ ЦИКЛОВ В МОДЕЛЯХ ПОПУЛЯЦИЙ С $N(t-h)$

Флуктуации численности у изолированных популяций возникали даже в постоянных условиях лабораторий в опытах с моллюсками и насекомыми из-за конкуренции поколений за ресурсы [13]. Сложные колебательные и апериодические режимы возможно получить в одновидовых непрерывных моделях с включением нелинейной запаздывающей регуляции

$$\frac{dN}{dt} = rF(N(t-\tau)) - \mathfrak{F}(N(t-h), N(t)).$$

Логистическое уравнение

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

с монотонным приближением к порогу ниши $\forall t, r, N(0) < K : N(t) \leq K, \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$ не актуально для обобщения модели для сценариев всплесков и инвазий, например,

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{\theta N^2}{E^2 + N^2}.$$

Для нерегулярных колебаний лабораторных насекомых при сосуществовании имаго и личинок предложено уравнение [4] со сосредоточенным запаздыванием h и с постоянной смертностью q :

$$\frac{dN}{dt} = rN(t-h) \exp(-bN(t-h)) - N(t)q, \quad r, b, q, \tau > 0. \quad (3.1)$$

Установлено [1], что в решении уравнения (3.1) с ростом rh появляется цикл релаксационной формы, и при увеличении значений — аperiодическая динамика большой амплитуды.

Подобные (3.1) уравнения сохраняют важный недостаток для популяционных прогнозов:

$$\exists \hat{t}, \quad \lim_{t \rightarrow \hat{t}} \min N_*(rh > B, t) = 0 + \epsilon,$$

так как если минимумы цикла $N_*(rh)$ стремятся к нулю, то длительный режим флуктуаций численности нереалистичен. При небольших rh в (3.1) можно получить временное перенасыщение со стабилизацией роста: $\exists t, r, h \forall N(0) : N(t, rh) > K : \lim_{t \rightarrow \infty} N(rh, t) = K$. Величина экологической ниши K не тождественна действующему уровню насыщения лабораторных условий K .

Для ситуации появления адаптивного воздействия у атакуемой вселенной среды предложим модификацию модели (3.1) с $-F(N(t-h))$ и с действующим на биотическую среду порогом A :

$$\frac{dN}{dt} = rN(t-h) \exp(-bN(t-h)) - \frac{\theta N^2(t-h)}{(A - N(t-h))^2}. \quad (3.2)$$

Предложенная модификация (3.2) описывает актуальную для инвазий ситуацию — однократного прохождения состояния малой околороговой численности и экологический эффект «бутылочного горлышка». Это явление связано со стремительно адаптивно возникшим ростом активного биотического противодействия, что можно использовать для выработки мер подавления опасных видов. Форма нелинейности в разных экологических ситуациях должна быть разная.

Для задач анализа инвазий логичнее подбирать соответствующие ситуации функции $\mathfrak{F}(N - l(h))$, чем менять и дополнять параметры модели. Свойства реальных всплесков трудно описать даже моделями с $F(N(t-h_1), \dots, (N(t-l(h_j))))$, необходимо включать переопределяемые структуры.

4. НЕПРЕРЫВНАЯ СОБЫТИЙНАЯ МОДЕЛЬ БИВОЛЬТИННОЙ ПОПУЛЯЦИИ

Предложим подход построения непрерывной вычислительной модели переходных популяционных режимов с событийными трансформациями функций нелинейной регуляции, а не только параметров в правых частях уравнений с $N(t-h)$.

Для прогноза активности насекомых в бореальных лесах альтернативный итерационный метод — формализация скорости убыли поколения от $t = 0$ на стадиях до полового созревания. Из-за долгой зимы длительность онтогенеза поколений различна (обозначим как τ или $\mathcal{T}$) в зависимости от сезона, и более того, бывает не постоянной между сезонами, так как зависит от погоды, и потому для сравнения сценариев длительность послужит управляющим параметром.

Событийные модели выделяют из пространства состояний предикативно по истинности набора условий точки трансформаций. Точки разрыва в расчетах правых частей легче задать алгоритмом с внешними воздействиями, но мы предлагаем рассчитывать моменты перехода из других связанных уравнений. Метод моделирования позволит разделить момент размножения и дальнейшую убыль полученного поколения $N_n(t_n = 0)$, которая замедляется к моменту размножения и появления другого сезонного поколения $N_{n+1}(t_{n+1} = 0)$. Меняя в сценарных экспериментах

величины τ или $\mathcal{T}$, можно оценить влияние продолжительности зимовки находящихся в спячке особей зимнего поколения из-за погодных условий на частоту появления генераций высокого уровня выживаемости и необычных всплесков численности летнего поколения.

Если у насекомых с полным циклом превращений поколения не перекрываются и имеют различные условия развития, то у них проявляются иные механизмы, контролирующие формирование итогового половозрелого поколения. Самки сезонных поколений часто обладают разной плодовитостью и миграционной активностью. Яйца или куколки поколения находятся в долгом анабиозе до весны либо развиваются в весенних условиях. Учтем, что интервал времени между появлением половозрелых генераций может не быть постоянным. Учет численности опасных насекомых проводят по вредящей стадии, обычно гусениц старших возрастов. Статистикой фиксируется состояние поколения $N(\mathfrak{T})$ в некоторый момент $\mathfrak{T}$ незавершенного цикла развития. Во время запуска всплесков численности вредителей состояние популяции оценивается мониторингом по размерам пораженных площадей леса. Метод расчетов сопряженных краевых задач на последовательности интервалов времени — естественное описание для анализа развития насекомых, которые отличаются выраженной стадийностью развития.

4.1. Базовая модель динамики сопряженных поколений. Получить зависимость эффективности размножения можно, рассчитав убыль численности поколения $N(0)$ до его размножения на интервале времени, раздельно учтя факторы смертности в модели динамики плавной убыли:

$$\frac{dN}{dt} = -(\alpha N(0) + \beta)N(t), \quad t \in [0, \tau], \quad (4.1)$$

где α — компенсирующий избыток яиц параметр убыли, β — коэффициент независимой от плотности смертности. Для весеннего поколения сильнее зависимость его убыли от начальной численности $N(0) = \lambda N(\mathcal{T})$ из-за действия негативных факторов активности естественных врагов. На развивающееся весной поколение оказывает давление массовые осы-паразиты, избирательно атакующие ранние стадии развития. Действие паразитов становится эффективным при высокой плотности жертв, что характерно для планового выпуска паразитической осы *Stethantix oaxacana*. Можно было бы подавить выпусками выращенных ос всех вредных для культурных растений чешуекрылых, но самих ос атакуют веерокрылые паразиты *Xenos vesparum*. Интегрирование (4.1) даст унимодальную функцию:

$$\int_{N(0)}^{N(t)} \frac{dN}{-(\alpha N(0) + \beta)N(t)} = \int_0^t dt, \ln \frac{N(0)}{N(t)} = t(\alpha N(0) + \beta), N(t) = \frac{N(0)}{\exp(t(\alpha N(0) + \beta))}.$$

$N(0)$ рассчитаем из плодовитости, а время определено длиной стадий. Важно, что непрерывную модель (4.1) легче целенаправленно модифицировать и избегать ее избыточного поведения.

Учтем, что на выживаемость личинок насекомых влияет скорость развития из-за необходимости своевременного перехода на их следующую стадию онтогенеза:

$$\frac{dN}{dt} = -(\alpha \mathfrak{F}[w(t)]N(0) + \beta)N(t), \quad t \in [0, \tau]. \quad (4.2)$$

Скорость роста $w(t) = l(N^{-k}(t))$, $k \notin \mathbb{Z}$ отражается на выживаемости поколения в благоприятных условиях и при меньшей продолжительности онтогенеза. Связь темпов роста личинок $\mathfrak{F}[w(t)]$ будет разной для поколений, потому выберем две формализации $\mathfrak{F}$.

Способность к избеганию атак доминирующего паразита сопровождается достижением стадии развития, переменами физиологии и поведения. Метаморфозы могут происходить только после накопления достаточного роста $w(t_s)$. Средняя обеспеченность кормом группы особей, в свою очередь, зависит от $N(t)$ и часто от предшествующего $N(t - \mathfrak{h})$, что определяет динамику темпов роста особей поколения. Обоснован метод взаимосвязанного описания скорости убыли поколения в зависимости от темпов роста. Для скорости роста $w(t)$ многих видов на периоде жизни после личинки известно балансовое уравнение активности анаболизма ζ и катаболизма σ :

$$\frac{dw}{dt} = \zeta \sqrt[3]{w(t)^2} - \sigma w(t), \quad w(0) = w_0$$

Уравнение хорошо описывает рост ряда животных на асимптотике приближения к $w \rightarrow W_\infty$, но исключая период раннего онтогенеза для видов со стадиями жизни и метаморфозами. Для рыб или насекомых данное уравнение необходимо модифицировать. Достаточно сильно действует влияние скученности особей, и первые стадии развития проходят при эндогенном питании. При увеличении плотности возникает асимметричное распределение размерной структуры популяции, остаются либо очень крупные, либо слишком мелкие особи [15], что влияет на размножение.

4.2. Моделирование динамики первой генерации. Для разрывной структуры необходимо описание изменения поколений от момента его генерации до его репродуктивной активности (у насекомых отряда *Lepidoptera* однократная). Опишем динамику убыли численности поколения на интервале $t \in [0, \tau]$ объединенными в систему уравнениями с учетом оптимального роста $\hat{w}$:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = - \left(\alpha \sqrt{\frac{\hat{w}}{w(t)}} N(0) + \beta \right) N(t), \\ \frac{dw}{dt} = \zeta \frac{w(t)^{2/3}}{\sqrt{N(t)}} - \sigma w(t). \end{cases} \quad (4.3)$$

В сегменте модели (4.3) включение запаздывания из-за истощения пищевых ресурсов не актуально, так как темп пополнения ресурсов питания в этой фазе обычно компенсирует активное потребление [3]. В начале расчетов из-за включения $N(0)$ убыль в (4.3) очень стремительна.

4.3. Моделирование развития второго сезонного поколения. Синхронизированная с первичной численностью атака паразитов — короткое сезонное явление. Опишем выживаемость второго поколения $t \in [0, T]$ системой уравнений, связанной по начальным условиям с (4.3) и оптимальным значением размерного развития $\tilde{w}$ для зимующего поколения:

$$\begin{cases} \frac{dN_2}{dt} = - \left(\alpha \sqrt{(\tilde{w} - w(t))^2} N(t) + \beta \right) N(t - \mathfrak{h}), \\ \frac{dw}{dt} = \frac{Q}{\sqrt[3]{N^2 + \zeta}}. \end{cases} \quad (4.4)$$

В сегменте (4.4) $w(t)$ отражает уровень размерного развития поколения, влияющий на увеличение пищевых потребностей и действующий негативно при возможном истощении пищевых ресурсов; Q — параметр, учитывающий ограниченность количества доступных ресурсов; ζ — параметр, учитывающий ограничение темпов развития, не зависящее от численности, и отражающий уровень конкуренции за ресурсы; α — аналогично коэффициент смертности от скученности, но при $N(t)$; β — коэффициент независимой смертности, учтем небольшое запаздывание $\mathfrak{h}$.

Начальные условия:

$$N(0) = \lambda N(\tau), \quad w(0) = w_0,$$

где λ — средняя плодовитость особей. Вспышку в форме краткого пика активности в предложенной модели запускает повышенная выживаемость зимующего поколения при сокращении времени зимовки при сниженном конкурентном факторе для весеннего поколения при его высокой плодовитости, но истощение ресурсов прошлой генерацией снижает возможности массового размножения. Плодовитость — орудие эволюционной борьбы, но, как любое орудие, может обратиться и против его обладателя, разрушив ресурсы среды.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье разработан метод построения специфической модели популяционного цикла воспроизводства на основе сопряженных по начальным условиям систем дифференциальных уравнений для поколений. Формализованные темпы убыли численности взаимосвязаны с размерным развитием на неравных интервалах онтогенеза у смежных поколений. Сопрягая в вычислительной среде решения на последовательных кадрах гибридного времени $\mathbb{T} = [0, \tau]_i \cup [0, T]_i$, можно описывать нерегулярную смену сезонов с высокой и низкой численностью вредителя. При сложности вычислений метод более естественно следует экологии [10], чем итерации $x_{n+1} = \psi x_n$ с циклами $p = 2^i$ и хаотизацией. Модель (4.3) $\leftrightarrow$ (4.4) формализует различия плотностной и паразитической регуляции при смене сезонов в зависимости либо от текущей $N^2(t)$, либо исходного обилия $N(0)$

для летней генерации. Раздельно описав действие плотностной регуляции во взаимосвязи с темпами развития, мы получили модель динамики выживаемости слабо конкурирующих поколений с различными условиями метаморфозов стадий и продолжительностью онтогенеза. Предложенный метод актуален для моделирования динамики и оценки эффективности искусственного воспроизводства лососевых рыб с независимо сосуществующими четными и нечетными генерациями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abbas S., Niezabitowski M., Grace S.* Global existence and stability of Nicholson blowflies model with harvesting and random effect// *Nonlinear Dyn.* — 2021. — 103. — С. 2109–2123.
2. *Andreassen H.* Population cycles and outbreaks of small rodents: ten essential questions we still need to solve// *Oecologia* — 2021. — 195. — С. 601–622.
3. *Borisova T. Yu.* On the physicochemical method of analysis of the formation of secondary immunodeficiency as a bioindicator of the state of ecosystems using the example of seabed biota of the Caspian Sea// *Techn. Phys. Lett.* — 2022. — 48. — С. 251–257.
4. *Brillinger D.* The Nicholson blowfly experiments// *J. Time Ser. Anal.* — 2012. — 33. — С. 718–723.
5. *Feigenbaum M.* Universal behavior in nonlinear systems// *Los Alamos Sci.* — 1980. — 1. — С. 4–27.
6. *Foerster H., Mora P. M., Amiot L.* Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026// *Science.* — 1960. — 132, № 3436. — С. 1291–1295.
7. *Hoang M.* A generalized model for the population dynamics of a two stage species with recruitment and capture using a nonstandard finite difference scheme// *Comp. Appl. Math.* — 2024. — 43. — С. 47–57.
8. *Kloeden P.* On Sharkovsky's cycle coexistence ordering// *Bulle. Austral. Math. Soc.* — 1979. — 20. — С. 171–178.
9. *Lee H., York J.* Period three implies chaos// *Am. Math. Monthly.* — 1975. — 82. — С. 985–992.
10. *Mikhailov V. V.* Computational modeling of the nonlinear metabolism rate as a trigger mechanism of extreme dynamics of invasion processes// *Techn. Phys. Lett.* — 2022. — 48. — С. 301–304.
11. *Perevaryukha A. Y.* Modeling of a crisis in the biophysical process by the method of predicative hybrid structures// *Techn. Phys.* — 2022. — 67, № 6. — С. 523–532.
12. *Sharkovski A. N.* Co-existence of cycles of a continuous map of the line into itself// *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* — 1995. — 5. — С. 1263–1273.
13. *Shorrocks B.* Population fluctuations in the fruit fly (*drosophila melanogaster*) maintained in the laboratory// *J. Animal Ecol.* — 1970. — 39. — С. 229–253.
14. *Singer D.* Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval// *SIAM J. Appl. Math.* — 1978. — 35. — С. 260–268.
15. *Trofimova I. V.* Adequacy of interpretation of monitoring data on biophysical processes in terms of the theory of bifurcations and chaotic dynamics// *Techn. Phys. Lett.* — 2022. — 48. — С. 305–310.

А. Ю. Переварюха

Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: madelf@rambler.ru

UDC 519.711

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-443-451

EDN: FMBVJU

Continuous generation population model with discontinuous life cycle characteristics

A. Yu. Perevaryukha

Saint Petersburg Institute for Informatics and Automation of the RAS, Saint Petersburg, Russia

Abstract. Traditionally, continuous models of mathematical biology are focused on the dynamics of interacting populations as stationary homogeneous entities. The state of the populations in the equations is governed by factors common to all individuals $\forall t, N(t)$: reproductive efficiency, mortality, living space limitations, or resource limitations. Many species exist with nonoverlapping generation sequences, replacing each other under different seasonal conditions. The number of annual generations is an important characteristic of the ecology of a species when occupying a new range. The length of the life cycle and the index of reproductive activity r in adjacent generations of insects in a range vary due to the need for wintering. Fluctuations in these values affect rapid population outbreaks. It is shown that the use of discrete models $x_{n+1} = \psi(x_n; r)\varphi(x_{n-i}) - \Xi$ is unrealistic for fundamental reasons. The appearance of cycles $p \neq 2^i$ in the order of Sharkovsky's theorem is excessive for the analysis of populations and the forecast of mass reproductions of insects. The article proposes a method for organizing models of the conjugate development of a succession of generations in a system of discontinuous differential equations as a sequence of boundary-value problems. The model is event-based redefined to obtain a solution on time intervals corresponding to the conditions of the season. The model taking into account competition and delayed regulation is relevant for the analysis of a sequence of peaks in pest activity, which are characterized by individual extremely numerous generations.

Keywords: population modeling, continuous model, generational modeling, population cycle, survival dynamics, discontinuous differential equations.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: A. Yu. Perevaryukha, "Continuous generation population model with discontinuous life cycle characteristics," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 3, 443–451. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-443-451>

REFERENCES

1. S. Abbas, M. Niezabitowski, and S. Grace, "Global existence and stability of Nicholson blowflies model with harvesting and random effect," *Nonlinear Dyn.*, 2021, **103**, 2109–2123.
2. H. Andreassen, "Population cycles and outbreaks of small rodents: ten essential questions we still need to solve," *Oecologia*, 2021, **195**, 601–622.
3. T. Yu. Borisova, "On the physicochemical method of analysis of the formation of secondary immunodeficiency as a bioindicator of the state of ecosystems using the example of seabed biota of the Caspian Sea," *Techn. Phys. Lett.*, 2022, **48**, 251–257.
4. D. Brillinger, "The Nicholson blowfly experiments," *J. Time Ser. Anal.*, 2012, **33**, 718–723.
5. M. Feigenbaum, "Universal behavior in nonlinear systems," *Los Alamos Sci.*, 1980, **1**, 4–27.
6. H. Foerster, P. M. Mora, and L. Amiot, "Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026," *Science*, 1960, **132**, No. 3436, 1291–1295.



7. M. Hoang, “A generalized model for the population dynamics of a two stage species with recruitment and capture using a nonstandard finite difference scheme,” *Comp. Appl. Math.*, 2024, **43**, 47–57.
8. P. Kloeden, “On Sharkovsky’s cycle coexistence ordering,” *Bulle. Austral. Math. Soc.*, 1979, **20**, 171–178.
9. H. Lee and J. York, “Period three implies chaos,” *Am. Math. Monthly*, 1975, **82**, 985–992.
10. V. V. Mikhailov, “Computational modeling of the nonlinear metabolism rate as a trigger mechanism of extreme dynamics of invasion processes,” *Techn. Phys. Lett.*, 2022, **48**, 301–304.
11. A. Y. Perevaryukha, “Modeling of a crisis in the biophysical process by the method of predicative hybrid structures,” *Techn. Phys.*, 2022, **67**, No. 6, 523–532.
12. A. N. Sharkovski, “Co-existence of cycles of a continuous map of the line into itself,” *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 1995, **5**, 1263–1273.
13. B. Shorrocks, “Population fluctuations in the fruit fly (*drosophila melanogaster*) maintained in the laboratory,” *J. Animal Ecol.*, 1970, **39**, 229–253.
14. D. Singer, “Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval,” *SIAM J. Appl. Math.*, 1978, **35**, 260–268.
15. I. V. Trofimova, “Adequacy of interpretation of monitoring data on biophysical processes in terms of the theory of bifurcations and chaotic dynamics,” *Techn. Phys. Lett.*, 2022, **48**, 305–310.

A. Yu. Perevaryukha

Saint Petersburg Institute for Informatics and Automation of the RAS, Saint Petersburg, Russia

E-mail: madelf@rambler.ru

УДК 517.984

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-452-477

EDN: FMENVB

РАВНОСХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО КОРНЕВЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА И В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ

В. С. Рыхлов

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

Аннотация. Рассматривается несамосопряженный обыкновенный дифференциальный оператор, определяемый на конечном отрезке линейным дифференциальным выражением n -го порядка с ненулевым коэффициентом при $(n-1)$ -й производной и двухточечными регулярными по Биркгофу краевыми условиями. Исследуется вопрос о равномерной равносходимости разложений заданной функции в биортогональный ряд по собственным и присоединенным или, кратко, корневым функциям этого оператора и в обычный тригонометрический ряд Фурье, а также об оценке разности соответствующих частичных сумм (или, коротко, о скорости равносходимости) при самых общих условиях на разлагаемую функцию и коэффициент при $(n-1)$ -й производной. Получены оценки разности разложений в терминах общих (интегральных) модулей непрерывности разлагаемой функции и коэффициента при $(n-1)$ -й производной, равномерные внутри основного интервала. Из этих оценок выводятся соответствующие оценки в случае, когда модули непрерывности оцениваются сверху медленно меняющимися функциями и, в частности, логарифмическими функциями. На основе этого сформулированы достаточные условия равносходимости в указанных случаях. Эти результаты получаются с использованием полученной ранее автором оценки разности частичных сумм разложений заданной функции в биортогональный ряд по собственным и присоединенным функциям рассматриваемого дифференциального оператора и в модифицированный тригонометрический ряд Фурье, а также аналогов теоремы Штейнгауза. Модификация тригонометрического ряда Фурье заключается в применении к обычному тригонометрическому ряду Фурье вполне конкретного ограниченного оператора, выражающегося через коэффициент при $(n-1)$ -й производной, а к разлагаемой функции — обратного к нему оператора.

Ключевые слова: несамосопряженный обыкновенный дифференциальный оператор, разложение по корневым функциям, ряд Фурье, равносходимость разложения, скорость равносходимости.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: В. С. Рыхлов. Равносходимость разложений по корневым функциям дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 3. С. 452–477. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-452-477>

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И КРАТКАЯ ИСТОРИЯ ВОПРОСА

Рассматривается несамосопряженный обыкновенный дифференциальный оператор L , определяемый на отрезке $[0, 1]$ дифференциальным выражением (д.в.)

$$\ell(y) := y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y, \quad (1.1)$$

где $p_j(x) \in L_1[0, 1]$, $j = \overline{1, n}$, с ненулевым коэффициентом при $(n - 1)$ -й производной, и линейно независимыми краевыми условиями

$$\sum_{j=0}^{n-1} (a_{kj}y^{(j)}(0) + b_{kj}y^{(j)}(1)) = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (1.2)$$

Пусть выполняется основное предположение: краевые условия (1.2) регулярны по Биркгофу (определения общепринятых понятий, встречающихся в настоящей статье, можно найти, например, в книге [41]).

Исследуется вопрос о равномерной равносходимости разложений заданной функции в ряд по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) или, кратко, корневым функциям оператора L и в обычный тригонометрический ряд Фурье, а также об оценке разности соответствующих частичных сумм (или, коротко, о скорости равносходимости) при самых общих условиях на разлагаемую функцию и коэффициент $p_1(x)$ при $(n - 1)$ -й производной.

Задача о разложении заданной функции в ряд по с.п.ф. оператора L является одной из основных задач, возникающих при рассмотрении таких операторов. Наиболее полно эта задача решается в случае, когда удастся доказать равносходимость (в том или ином смысле) разложений заданной функции в ряды по с.п.ф. оператора L и по тригонометрической системе, так как тригонометрическая система достаточно хорошо изучена.

Исследование равносходимости спектральных разложений представляет собой активно развивающееся направление, начало которого было положено в работах В. А. Стеклова [56, 57], Э. У. Хобсона [70], А. Хаара [68, 69] для случая дифференциального оператора Штурма—Лиувилля и Я. Д. Тамаркина [58, 82, 83], М. Стоуна [81] для дифференциального оператора произвольного порядка с произвольными двухточечными краевыми условиями, удовлетворяющими условию регулярности Биркгофа [41, с. 66–67].

Новый импульс этому направлению придал В. А. Ильин [6–9], разработавший метод получения теорем равносходимости, в котором дифференциальный оператор не привязывается к граничным условиям, а лишь используется дополнительная информация о поведении собственных значений (с.з.) и с.п.ф.

Первый наиболее общий результат о равносходимости для оператора L получил Я. Д. Тамаркин [82]. Он доказал, что при нулевом коэффициенте $p_1(x)$ (или достаточно гладком: $p_1(x) \in C^{n-1}[0, 1]$) и регулярных краевых условиях для всякой интегрируемой (по Риману) функции ряды Фурье по с.п.ф. оператора L и по тригонометрической системе равномерно равносходятся внутри $(0, 1)$. Похожий результат получил М. Н. Стоун [81].

Позднее Я. Д. Тамаркин [58, 83] доказал теорему равносходимости для более общих операторов, но опять-таки с условиями регулярности краевых условий и достаточной гладкости коэффициента при $(n - 1)$ -й производной или аналогичных ему коэффициентов.

Н. П. Купцов [15] доказал абстрактную теорему равносходимости разложений по с.п.ф. операторов A и $A + Q$, действующих в банаховом пространстве. Приложениями этой теоремы являются обычные теоремы равносходимости разложений по с.п.ф. оператора L и в обычный тригонометрический ряд Фурье, но опять же в случае регулярных краевых условий оператора L и нулевого коэффициента $p_1(x)$.

А. П. Хромов [60, 62] распространил теорему о равносходимости Тамаркина на интегральные операторы $(Af)(x) := \int_0^1 A(x, \xi)f(\xi) d\xi$ ($x \in [0, 1]$), ядра которых обобщают свойства функции Грина оператора L с регулярными краевыми условиями. А именно, А. П. Хромов рассмотрел случай, когда некоторые производные ядра интегрального оператора имеют разрыв первого рода на линии $\xi = x$. Такие операторы являются в определенном смысле каноническими в классе интегральных операторов, для разложений по с.п.ф. которых имеет место равносходимость с тригонометрическим рядом Фурье. В дальнейшем В. В. Корнев и А. П. Хромов [14], а также А. П. Хромов [63] распространили эти результаты на другие интегральные операторы. Аналог случая $p_1(x) \notin C^{n-1}[0, 1]$ при этом не рассматривался.

Обзор результатов по вопросам сходимости и, в частности, равносходимости биортогональных разложений функций для обыкновенных дифференциальных операторов приведен А. П. Хромовым в [61].

В основе всех этих результатов лежал метод контурного интеграла Пуанкаре—Коши или, по-другому, резольвентный метод, использующий интегральное представление Коши проекторов Рисса.

Другой подход к проблеме равносходимости, как было отмечено, предложил В. А. Ильин [6–9]. При получении своих результатов он существенно использовал формулу среднего значения, полученную первоначально Е. И. Моисеевым [39, 40] для случая гладких коэффициентов, и затем модифицированную И. С. Ломовым [29] для случая негладких коэффициентов. Эта формула является распространением формулы среднего значения для регулярного решения самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка, которая указана в книге Э. Ч. Титчмарша [59], на случай присоединенных функций и на случай уравнений более высокого порядка.

В. А. Ильин доказал равномерную равносходимость с тригонометрическим рядом разложений в биортогональный ряд по с.п.ф. произвольного несамосопряженного дифференциального оператора, порожденного выражением $\ell(y)$ и произвольными краевыми условиями, обеспечивающими определенное асимптотическое поведение с.з.

Доказанные В. А. Ильиным теоремы формулируются в терминах условий на коэффициенты $\ell(y)$ и функции биортогональной системы и охватывают ранее известные результаты, касающиеся равносходимости, в частности, случай регулярных краевых условий. Более того, эти теоремы впервые устанавливают локальный характер не только требований на разлагаемую функцию, но и требований на коэффициенты $\ell(y)$ и функции биортогональной системы.

Дальнейшее продвижение в вопросе о равносходимости было сделано А. М. Минкиным [37, 38]. Некоторые доказанные им теоремы по формулировке родственны ряду утверждений В. А. Ильина [6–9], но доказательства другие. В обзорной статье [73] А. М. Минкина дан развернутый анализ результатов по равносходимости спектральных разложений.

Все приведенные выше результаты относились к операторам L с достаточно гладким коэффициентом $p_1(x)$, а также к обобщениям именно таких операторов. Вопрос о влиянии свойств этого коэффициента на равносходимость был исследован автором [44, 46, 76]. Было установлено, что существует тесная связь между множеством тех функций $f(x)$, для разложений которых по с.п.ф. оператора L имеет место равносходимость с тригонометрическим рядом Фурье, и свойствами коэффициента $p_1(x)$. По сути, в этих работах была дана оценка разности частичных сумм разложений в ряд по с.п.ф. оператора L и в обычный тригонометрический ряд Фурье (или, кратко, скорости равносходимости).

Отметим, что вопрос об оценке разности частичных сумм разложений по с.п.ф., отвечающих двум произвольным неотрицательным самосопряженным расширениям оператора Штурма—Лиувилля, впервые был рассмотрен В. А. Ильиным и И. Йо [12, 13].

Аналогичные вопросы для оператора Штурма—Лиувилля исследовались Ш. А. Алимовым и И. Йо [66], а также Н. Лажетичем [20, 21]. Для оператора Шредингера вопросы, связанные с оценкой скорости равносходимости спектральных разложений, были рассмотрены Е. И. Никольской в статье [42].

В. Е. Волков и И. Йо [4] перенесли результат [12, 13] на случай несамосопряженного оператора Шредингера с комплекснозначным потенциалом из класса L^2_{loc} и получили точную по порядку оценку разности частичных сумм спектральных разложений. Позднее В. А. Ильин [10, 11] и Е. И. Никольская [42] перенесли результат [12, 13] на случай произвольного суммируемого потенциала, скалярного или матричного.

Во всех случаях были получены оценки скорости равномерной равносходимости на любом компакте $K \subset G$, где G есть основной интервал. Такие же локальные оценки, но в интегральной метрике, получены В. М. Курбановым [17] для широкого класса обыкновенных дифференциальных операторов. Отметим также другие статьи [16, 18, 19, 72] В. М. Курбанова в этом направлении. В частности, в статье [18] им была исследована зависимость скорости равносходимости от модуля непрерывности главных коэффициентов д.в.

Системы функций, по которым ведется разложение, могут удовлетворять разным краевым условиям, поэтому равномерной равносходимости соответствующих рядов на всем отрезке G в общем случае не может быть. Некоторые практические задачи, тем не менее, требуют оценку скорости равносходимости разложений или оценку порядка приближения функций спектральными разложениями именно на всем G , причем оценку достаточно установить в интегральной метрике. Используя подход В. А. Ильина, оценки скорости равносходимости соответствующих разложений на всем интервале G в интегральной метрике L_p получил И. С. Ломов [23].

В дальнейшем И. С. Ломов перенес эти результаты на несамосопряженный оператор Шредингера [24, 25] и затем на оператор Штурма—Лиувилля с негладким коэффициентом $p_1(x)$ при первой производной в дифференциальной операции [26–28]. Для произвольного оператора четного порядка результат был получен И. С. Ломовым [30, 31, 33] и И. С. Ломовым совместно с С. В. Афонинным [1] — для операторов нечетного порядка.

И. С. Ломов в [34] также установил оценку зависимости скорости локальной равносходимости разложений от расстояния внутреннего компакта до границы интервала G и совместно с А. С. Марковым [36] перенес эти результаты на системы дифференциальных уравнений.

Детальный обзор этих и аналогичных результатов по оценке разности частичных сумм можно найти в работах И. С. Ломова [32, 35].

Интересные результаты по оценке скорости равносходимости получили Г. В. Радзиевский и А. М. Гомилко [5], а также Г. В. Радзиевский [43, 75]. Они подробно исследовали равносходимость и получили оценки разности частичных сумм разложений по с.п.ф. регулярных краевых задач для функционально-дифференциальных и дифференциальных операторов в метрике $L_p[0, 1]$, где $1 < p < \infty$. Результат сформулирован в терминах подходящих модулей непрерывности.

Отдельно от перечисленных результатов стоят результаты о равносходимости для операторов Штурма—Лиувилля с потенциалами-распределениями.

Операторы Штурма—Лиувилля с потенциалами-распределениями начали изучаться в начале 2000-х годов. Такого типа операторы были введены А. М. Савчуком и А. А. Шкаликовым [49] и активно исследовались разными математиками.

По-видимому, первой работой, в которой изучались вопросы равносходимости для таких операторов, стала статья В. А. Винокурова и В. А. Садовниченко [3], в которой была доказана равномерная на всем отрезке $[0, \pi]$ равносходимость в случае, когда $f(x) \in L_1[0, \pi]$, $q(x) = u'(x)$, где функция $u(x)$ из пространства $BV[0, \pi]$, т. е. функция ограниченной вариации. При этом рассматривались краевые условия Дирихле.

П. Джаков и Б. С. Митягин [67] установили равномерную равносходимость для такого вида операторов Штурма—Лиувилля с произвольными регулярными краевыми условиями. При этом разлагаемая функция $f(x)$ выбиралась квадратично суммируемой с дополнительным условием на ее коэффициенты Фурье, а именно: суммируемость в квадрате с логарифмическим весом.

И. В. Садовнича в серии работ [50–54, 79] получила ряд интересных результатов о равносходимости и оценке скорости равносходимости для оператора Штурма—Лиувилля с потенциалом-распределением и операторов Дирака. В частности, для оператора Штурма—Лиувилля с краевыми условиями Дирихле и с потенциалом $q(x) = u'(x)$, где $u(x) \in L_2[0, \pi]$, была доказана равносходимость по норме пространства $L_\nu[0, \pi]$, $\nu \in [2, \infty)$, в случае, когда разлагаемая функция $f(x) \in L_\mu[0, \pi]$, $\mu \in [1, 2]$, где $1/\mu - 1/\nu \leq 1/2$ (в частности, для $\mu = 2$, $\nu = \infty$). Для оператора Штурма—Лиувилля с краевыми условиями Дирихле и с потенциалом $q(x) = u'(x)$, где $u(x) \in W_2^\theta[0, \pi]$, $0 < \theta < 1/2$ ($W_2^\theta[0, \pi]$ есть шкала соболевских пространств с нецелым индексом гладкости $\theta \in [0, 1]$), получена оценка скорости равносходимости по норме пространства $L_\infty[0, \pi]$ для случая, когда разлагаемая функция $f(x) \in L_2[0, \pi]$.

Следует отметить также результаты В. А. Юрко [65] по равносходимости спектральных разложений в случае дифференциальных уравнений с неинтегрируемыми коэффициентами.

Таким образом, вопросы равносходимости в том или ином виде спектральных разложений и задача оценки разности частичных сумм в различных метриках и для различных классов дифференциальных операторов являются актуальными направлениями исследований.

Автору статьи удалось продвинуться в данном направлении, а именно, в [46, 47, 76, 77] была дана оценка разности частичных сумм разложений по с.п.ф. оператора L и в тригонометрический

ряд Фурье в терминах логарифмических модулей непрерывности коэффициента $p_1(x)$ и разлагаемой функции $f(x)$. В статье [78] результаты [46, 47, 76, 77] были обобщены и оценка разности частичных сумм была получена в терминах общих модулей непрерывности. В частности, в случае, когда модули непрерывности оцениваются сверху медленно меняющимися функциями. При этом важную роль в доказательстве играет доказанный автором аналог теоремы Штейнгауза [48].

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ФОРМУЛИРОВКА ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Далее будут использоваться следующие модули непрерывности:

$$\omega(f, \delta)_p = \sup_{0 < h \leq \delta} \left(\int_0^{1-h} |f(t+h) - f(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad \text{в случае } 1 \leq p < \infty, \quad (2.1)$$

$$\omega(f, \delta)_\infty = \sup_{0 < h \leq \delta} \sup_{t \in [0, 1-h]} |f(t+h) - f(t)|.$$

Далее под $L_\infty[0, 1]$ удобно понимать пространство $C[0, 1]$.

Введем следующие пространства функций при $\alpha > 0$ и $1 \leq r \leq \infty$:

$$H_r^\alpha[0, 1] = \left\{ f \in L_r[0, 1] : \omega(f, \delta)_r = O\left(\ln^{-\alpha} \frac{1}{\delta}\right), \delta \rightarrow +0 \right\}.$$

Считаем, что $H_r^0[0, 1] = L_r[0, 1]$.

Наряду с оператором L вида (1.1)-(1.2) потребуется линейный дифференциальный оператор L_0 , порожденный простейшим д.в. и периодическими краевыми условиями

$$\ell_0(y) := y^{(n)}, \quad y^{(k-1)}(0) - y^{(k-1)}(1) = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.2)$$

Числа $\lambda_{0\nu} := (2\nu\pi i)^n$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, суть с.з. оператора L_0 , а функции $e_\nu(x) := \exp(2\nu\pi i x)$ — соответствующие собственные функции (с.ф.), т. е. система с.ф. есть обычная тригонометрическая система в экспоненциальной форме.

Пусть λ_ν , $\nu = 0, 1, 2, \dots$, суть с.з. оператора L . Асимптотика с.з. оператора L может быть получена аналогично тому, как это сделано, например, в [41, с. 74-75], но с использованием асимптотических формул для решений дифференциального уравнения $\ell(y) - \lambda y = 0$, даваемых теоремой из статьи автора [45], вместо асимптотических формул [41, с. 58-59].

Обозначим через D_δ область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, получающуюся из $\mathbb{C}$ в результате удаления множеств $\bigcup_{\nu=0}^{\infty} K_\delta(\lambda_\nu)$ и $\bigcup_{\nu=-\infty}^{\infty} K_\delta(\lambda_{0\nu})$, где обозначено $K_\delta(c) = \{\lambda : |\lambda - c| < \delta\}$, $\delta > 0$ и достаточно мало.

Из асимптотики с.з. оператора L следует, что существует последовательность $\{r_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ такая, что $(2\pi m)^n < r_m < (2\pi(m+1))^n$, и контуры $\Gamma_m := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_m\}$, начиная с некоторого достаточно большого m , лежат в области D_δ . Между соседними контурами находятся не более двух с.з. λ_ν , начиная с некоторого m . Рассмотрение таких контуров обусловлено структурой обычного тригонометрического ряда Фурье в экспоненциальной форме, который на самом деле является рядом со скобками.

Обозначим через R_λ и $R_{0\lambda}$ резольвенты операторов L и L_0 , соответственно, а через $G(x, \xi, \lambda)$ и $G_0(x, \xi, \lambda)$ — соответствующие функции Грина. Пусть

$$S_m(f, x) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} R_\lambda f d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) d\xi d\lambda,$$

$$\sigma_m(f, x) \equiv S_{0m}(f, x) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} R_{0\lambda} f d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \int_0^1 G_0(x, \xi, \lambda) d\xi d\lambda.$$

Известно [41, с. 92], что $S_m(f, x)$ есть частичная сумма биортогонального ряда Фурье функции $f(x)$ по с.п.ф. оператора L , содержащая слагаемые, соответствующие с.з. λ_ν , для которых выполняется неравенство $|\lambda_\nu| < r_m$, а $\sigma_m(f)$ есть частичная сумма ортогонального ряда Фурье функции $f(x)$ по с.ф. оператора L_0 , содержащая слагаемые, соответствующие с.з. $\lambda_{0\nu} = (2\nu\pi i)^n$,

для которых $|\nu| \leq m$, т. е. частичная сумма порядка m обычного тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$

$$\sigma_m(f, x) := \sum_{k=-m}^m (f, e_k) e_k(x), \quad \text{где} \quad (f, e_k) := \int_0^1 f(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi.$$

Для $f(x)$ из $L_1[0, 1]$ обозначим

$$\Phi_m(x) = S_m(f, x) - V\sigma_m(V^{-1}f, x), \quad \Psi_m(x) = S_m(f, x) - \sigma_m(f, x), \quad (2.3)$$

где

$$V(x) = \exp \left(-\frac{1}{n} \int_0^x p_1(\tau) d\tau \right). \quad (2.4)$$

Введем условие

$$f(x) \in L_r[0, 1], \quad p_1(x) \in L_q[0, 1], \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1, \quad 1 \leq q \leq \infty. \quad (2.5)$$

Справедлива следующая теорема об оценке разности частичных сумм $\Phi_m(x)$ в терминах общих модулей непрерывности разлагаемой функций $f(x)$ и коэффициента $p_1(x)$.

Теорема 2.1. При условии (2.5) для любого компакта $K \subset (0, 1)$ и натурального $m \gg 1$

$$\|\Phi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, L, K) A_m, \quad (2.6)$$

где

$$A_m = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \left(\ln m \omega \left(p_1, \frac{1}{k} \right)_q + 1 + \frac{k^{2/q}}{m^{1/q}} + \frac{k^2 \ln m}{m} \right) \omega \left(f, \frac{1}{k} \right)_r + \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{k^2 \ln m}{m} \right) \omega \left(p_1, \frac{1}{k} \right)_q + \frac{k^{2+2/q}}{m^{1+1/q}} + \frac{k^4 \ln m}{m^2} \right\}.$$

Для формулировки теоремы об оценке разности частичных сумм $\Psi_m(x)$ введем следующие обозначения:

- для функции $h(x) \in C[0, 1]$ положим

$$H_q(h, m) := \left(\int_{1/m}^1 \frac{1}{\xi} h^q(\xi) d\xi \right)^{1/q} \quad \text{при} \quad 1 \leq q < \infty, \quad H_\infty(h, m) := 1; \quad (2.7)$$

- для функции $g(x) \in L_q[0, 1]$ положим

$$\theta_q(g, \delta) := \sup_{\tau \in [0, \delta]} \theta_{1q}(g, \tau) \quad \text{при} \quad 1 \leq q < \infty \quad \text{и} \quad \theta_\infty(g, \delta) \equiv 1, \quad (2.8)$$

где

$$\theta_{1q}(g, \tau) := \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \omega \left(g, \frac{1}{k} \right)_q + (k^2 \tau)^{\frac{1}{q}} \right\} \quad \text{при} \quad 1 \leq q < \infty, \quad (2.9)$$

$$\hat{\theta}_q(g, \delta) = \sup_{\tau \in [0, \delta]} \hat{\theta}_{1q}(g, \tau) \quad \text{при} \quad 1 \leq q < \infty \quad \text{и} \quad \hat{\theta}_\infty(g, \delta) \equiv 1, \quad (2.10)$$

где

$$\hat{\theta}_{1q}(g, \tau) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \omega \left(g, \frac{1}{k} \right)_q + \frac{1}{k^{1/r}} \theta_q \left(g, \frac{1}{k} \right) + (k^2 \tau)^{\frac{1}{q}} \right\} \quad \text{при} \quad 1 \leq q < \infty. \quad (2.11)$$

Теорема 2.2. При условии (2.5) для любого компакта $K \subset (0, 1)$ и натурального $m \gg 1$

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, L, K) B_m, \quad (2.12)$$

где

$$B_m = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \left(\ln m \omega \left(p_1, \frac{1}{k} \right)_q + 1 + H_q(\hat{\theta}_q(p_1, \cdot), m) + \frac{k^{2/q}}{m^{1/q}} + \frac{k^2 \ln m}{m} \right) \omega \left(f, \frac{1}{k} \right)_r + \right.$$

$$+ \left(1 + \frac{k^2 \ln m}{m}\right) \omega\left(p_1, \frac{1}{k}\right)_q + \frac{1}{k^{1/r}} \theta_q\left(p_1, \frac{1}{k}\right) + \frac{k^{2+2/q}}{m^{1+1/q}} + \frac{k^4 \ln m}{m} \Big\}. \quad (2.13)$$

Если на $\omega(f, \delta)_r$ и $\omega(p_1, \delta)_q$ наложить такие условия, при которых $A_m \rightarrow 0$ или $B_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, можно получить различные достаточные условия равносходимости соответствующих разложений с оценками разности частичных сумм.

Интересные результаты получаются в случае, когда функции $\omega(f, \delta)_r$ и $\omega(p_1, \delta)_q$ по переменной δ являются медленно меняющимися функциями.

Понятие медленно меняющейся функции тесно связано с понятием правильно меняющейся функции. Это понятие было введено И. Караматой [71] в 1930 г. (при этом рассматривались непрерывные функции).

Правильно меняющиеся функции примыкают к степенным, хорошо изучены и имеют многочисленные приложения, в основном благодаря их особой роли в теоремах тауберова типа. Теорию таких функций можно найти в книге [55].

Определение 2.1. Положительная непрерывная в проколотовой окрестности нуля функция $\Omega(\delta)$, для которой выполнено условие

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Omega(\gamma\delta)}{\Omega(\delta)} = \gamma^\rho \quad \text{для любого } \gamma > 0, \quad (2.14)$$

называется *правильно меняющейся в нуле функцией порядка* $\rho \in \mathbb{R}$. Правильно меняющаяся в нуле функция порядка $\rho = 0$ называется *медленно меняющейся функцией* (м.м.ф.) в нуле. Функция $\Omega(\delta)$ называется *правильно меняющейся функцией в бесконечности порядка* $\rho \in \mathbb{R}$, если функция $\Omega\left(\frac{1}{\delta}\right)$ есть правильно меняющаяся функция в нуле того же порядка.

Замечание 2.1. На самом деле в общем определении правильно меняющейся функции (а значит, и м.м.ф.) фигурируют измеримые функции, но мы ограничимся только непрерывными правильно меняющимися функциями (а значит, и непрерывными м.м.ф.).

Приведем наиболее известный (эталонный) пример [55, с. 48–50] м.м.ф. в нуле, которая наиболее часто используется.

Пример 2.1 (медленно меняющаяся функция в 0). Пусть заданы k вещественных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Положим

$$\Omega(\delta) = \left(\ln \frac{1}{\delta}\right)^{\alpha_1} \left(\ln \ln \frac{1}{\delta}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\ln \ln \dots \ln \frac{1}{\delta}\right)^{\alpha_k},$$

где $\ln b$ есть логарифм по какому-то основанию $c > 0$, $c \neq 1$. Тогда $\Omega(\delta)$ есть м.м.ф. в 0.

Функции, рассмотренные в этом примере, образуют так называемую логарифмическую мультишкалу, имеющую ряд приложений в теории функциональных пространств.

Введем условие

$$\omega(f, \delta)_r = O(\Omega_1(\delta)), \quad \omega(p_1, \delta)_q = O(\Omega_2(\delta)), \quad \delta \rightarrow +0, \quad (2.15)$$

и пусть функции $\Omega_1(\delta)$ и $\Omega_2(\delta)$ удовлетворяют следующему условию:

Условие 2.1 (медленное изменение (МИ)). Существует интервал $(0, \varepsilon_0)$, на котором

- (а) $\Omega(\delta)$ есть м.м.ф. в точке 0;
- (б) $\Omega(\delta)$ является монотонно неубывающей функцией, для которой $\Omega(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$;
- (в) для любого $\gamma > 0$ справедливо $\Omega(\delta^\gamma) \sim \Omega(\delta)$ при $\delta \rightarrow +0$, т. е. существуют константы $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что

$$C_1 \Omega(\delta) \leq \Omega(\delta^\gamma) \leq C_2 \Omega(\delta).$$

Замечание 2.2. Предположение (б) вполне естественно, так как модуль непрерывности обладает этим свойством.

Замечание 2.3. Произвольная м.м.ф., вообще говоря, не обладает свойством (в). Однако наиболее часто используемые на практике м.м.ф. обладают этим свойством. В частности, такая м.м.ф., как в примере 2.1.

Справедливы следующие теоремы равносходимости.

Теорема 2.3. Если выполняются условия (2.5), (2.15), функции $\Omega_1(\delta)$, $\Omega_2(\delta)$ удовлетворяют условию МИ и таковы, что

$$\ln m \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \quad (2.16)$$

то для любого компакта $K \subset (0, 1)$ имеет место равносходимость

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Phi_m(x)\|_{C(K)} = 0$$

и справедливы следующие оценки при $m \gg 1$:

$$\|\Phi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, p_1, K) \left(\ln m \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) + \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) + \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) \right). \quad (2.17)$$

Теорема 2.4. Пусть выполняются условия (2.5), (2.15), а функции $\Omega_1(\delta)$ и $\Omega_2(\delta)$ удовлетворяют условию МИ. Если, к тому же, выполняются еще и условия (2.16) и

$$\Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) H_q(\Omega_2, m) \rightarrow \infty \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \quad (2.18)$$

то для любого компакта $K \subset (0, 1)$ имеет место равносходимость

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Psi_m(x)\|_{C(K)} = 0$$

и справедлива следующая оценка при $m \gg 1$:

$$\begin{aligned} \|\Psi_m(x)\|_{C(K)} &\leq \\ &\leq C(f, p_1, K) \left(\ln m \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) + \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) H_q(\Omega_2, m) + \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) + \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Введем условие

$$\omega(f, \delta)_r = O\left(\frac{1}{\ln^\alpha 1/\delta}\right), \quad \omega(p_1, \delta)_q = O\left(\frac{1}{\ln^\beta 1/\delta}\right), \quad \delta \rightarrow +0, \quad (2.20)$$

т. е. $f(x) \in H_r^\alpha[0, 1]$ и $p_1(x) \in H_q^\beta[0, 1]$.

Следствиями теорем 2.3 и 2.4 являются следующие теоремы, которые были получены автором ранее в [46, 47, 76, 77].

Теорема 2.5. Если выполняются условия (2.5), (2.20) и $\alpha + \beta > 1$, то для любого компакта $K \subset (0, 1)$ имеет место равносходимость

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Phi_m(x)\|_{C(K)} = 0$$

и справедлива следующая оценка при $m \gg 1$:

$$\|\Phi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, p_1, K) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^\alpha m} + \frac{1}{\ln^\beta m} \right). \quad (2.21)$$

Теорема 2.6. Если выполняются условия (2.5), (2.20) и $\alpha + \beta > 1$, то для любого компакта $K \subset (0, 1)$ имеет место равносходимость

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Psi_m(x)\|_{C(K)} = 0$$

и справедливы следующие оценки при $m \gg 1$:

- в случае $\beta q = 1$ и $1 \leq q < \infty$

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, p_1, K) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{(\ln \ln m)^{1/q}}{\ln^\alpha m} + \frac{1}{\ln^\beta m} \right), \quad (2.22)$$

- в остальных случаях ($\beta q \neq 1$ и $1 \leq q < \infty$ или $q = \infty$)

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, p_1, K) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^\alpha m} + \frac{1}{\ln^\beta m} \right). \quad (2.23)$$

Замечание 2.4. В работе автора [44] рассмотрен простейший линейный дифференциальный оператор вида

$$y'' + p_1(x)y', \quad y(0) = y(1) = 0, \quad (2.24)$$

в котором проявляются все трудности общего случая, а именно, такое же влияние свойств коэффициента $p_1(x)$ и разлагаемой функции $f(x)$ на оценку разности частичных сумм разложений, как и в общем случае. Было показано, что сформулированные выше теоремы точны в следующем смысле:

- 1) если $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} > 1$, $q > 1$, $r > 1$, $r_1 > r$, $q_1 > q$, но по-прежнему $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{q_1} > 1$, то существуют функции $f(x) \in L_r[0, 1]$ и $p_1(x) \in L_q[0, 1]$, положительная константа $C(q_1, r_1)$ и возрастающая подпоследовательность $\{m_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\left| \Psi_{m_k} \left(\frac{1}{2} \right) \right| \geq C(q_1, r_1) m_k^{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{q_1} - 1} \rightarrow +\infty;$$

- 2) если $r = \infty$, $q = 1$ или $r = 1$, $q = \infty$, $\alpha + \beta < 1$, $\alpha_1 > \alpha$, $\beta_1 > \beta$, но по-прежнему $\alpha_1 + \beta_1 < 1$, то существуют функции $f(x) \in H_r^\alpha[0, 1]$, $p_1(x) \in H_q^\beta[0, 1]$, положительная константа $C(\alpha_1, \beta_1)$ и некоторая возрастающая подпоследовательность $\{m_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\left| \Psi_{m_k} \left(\frac{1}{2} \right) \right| \geq C(\alpha_1, \beta_1) \frac{\ln m_k}{\ln^{\alpha_1 + \beta_1} m_k} \rightarrow +\infty.$$

Полные доказательства теорем 2.1 и 2.3 приведены в статье [78] автора. Теоремы 2.2 и 2.4 также были сформулированы в [78], но подробные доказательства не были приведены. Отмечалось только, что их доказательство следует из теорем 2.1 и 2.3 с использованием соответствующих аналогов теоремы Штейнгауза.

Цель настоящей статьи — восполнить этот пробел и дать полные доказательства теорем 2.2 и 2.4, а заодно другим способом доказать теорему 2.6.

Для удобства в следующем разделе сформулируем саму теорему Штейнгауза и необходимые аналоги теоремы Штейнгауза, приведенные в работах автора [44, 46, 48, 76]. Подробную историю вопроса можно найти в [48].

3. АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ ШТЕЙНГАУЗА

В 1913 г. Г. Штейнгауз [80] доказал следующую теорему (формулировка дается по книге [2, с. 111]).

Теорема 3.1 (Г. Штейнгауз). *Если $f(x) \in L_1[0, 1]$, $\mathcal{W}(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1 на $[0, 1]$ и обе функции периодичны, то*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|\mathcal{W}(x)\sigma_m(f, x) - \sigma_m(\mathcal{W}f, x)\|_{C[0, 1]} = 0. \quad (3.1)$$

Равносходимость вида (3.1), но в метрике пространства $C(K)$ для любого компакта $K \subset (0, 1)$ была установлена автором [44] при других условиях на функции $f(x)$ и $\mathcal{W}(x)$.

Чтобы сформулировать этот результат, будем использовать для функции $\mathcal{W}(x)$ представление

$$\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}_0 + \int_0^x g(t) dt, \quad (3.2)$$

где $\mathcal{W}_0$ есть произвольная константа, и обозначение

$$\Theta_m(x) := \mathcal{W}(x)\sigma_m(f, x) - \sigma_m(\mathcal{W}f, x). \quad (3.3)$$

Функцию $\Theta_m(x)$ будем называть кратко *разностью частичных тригонометрических сумм*.

В [44] доказан следующий аналог теоремы Штейнгауза.

Теорема 3.2. *Пусть функция $\mathcal{W}(x)$ имеет вид (3.2), тогда для любого компакта $K \subset (0, 1)$*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Theta_m(x)\|_{C(K)} = 0, \quad (3.4)$$

если выполняется хотя бы одно из условий

- 1) $f \in L_1[0, 1]$, $g \in L_\infty[0, 1]$;
- 2) $f \in L_r[0, 1]$, $g \in L_q[0, 1]$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} < 1$;
- 3) $f \in H_\infty^\alpha[0, 1]$, $g \in H_1^\beta[0, 1]$, $\alpha + \beta > 1$.

Если неравенства в условиях 2)-3) заменить на противоположные ($<$ на $>$, $>$ на $<$), то утверждение (3.4) станет, вообще говоря, неверным.

Естественно возник вопрос об оценке стремления к нулю в (3.4) в зависимости от свойств функций $f(x)$ и $g(x)$. Ответ был дан автором в статьях [46, 48, 76].

В [46, 76] была дана оценка разности частичных тригонометрических сумм в случае, когда модули непрерывности функций $f(x)$ и $g(x)$ оцениваются сверху логарифмическими функциями.

Для формулировки теоремы потребуются следующие условия:

$$f(x) \in L_r[0, 1], \quad g(x) \in L_q[0, 1], \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1, \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad (3.5)$$

$$\omega(f, \delta)_r = O\left(\frac{1}{\ln^\alpha 1/\delta}\right), \quad \omega(g, \delta)_q = O\left(\frac{1}{\ln^\beta 1/\delta}\right) \text{ при } \delta \rightarrow +0, \quad \alpha, \beta > 0. \quad (3.6)$$

Теорема 3.3. Пусть функция $\mathcal{W}(x)$ имеет вид (3.2) и выполняются предположения (3.5) и (3.6). Тогда для любого компакта $K \subset (0, 1)$ имеет место равносходимость

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Theta_m(x)\|_{C(K)} = 0 : \quad (3.7)$$

- 1) в случае $1 \leq q < \infty$ при условии $\alpha + \beta > \frac{1}{q}$, при этом, если $\beta q \neq 1$, то

$$\|\Theta_m(x)\|_{C(K)} = O\left(\frac{\ln^{\frac{1}{q}} m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^\alpha m} + \frac{1}{\ln^\beta m}\right), \quad (3.8)$$

а если $\beta q = 1$, то

$$\|\Theta_m(x)\|_{C(K)} = O\left(\frac{(\ln \ln m)^{\frac{1}{q}}}{\ln^\alpha m} + \frac{1}{\ln^\beta m}\right); \quad (3.9)$$

- 2) в случае $q = \infty$ при любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, при этом

$$\|\Theta_m(x)\|_{C(K)} = O\left(\frac{1}{\ln^\alpha m} + \frac{1}{\ln^\beta m}\right).$$

Впоследствии в статье автора [48] была доказана теорема об оценке разности частичных тригонометрических сумм в терминах общих модулей непрерывности функций $f(x)$ и $g(x)$, а также аналог теоремы Штейнгауза в случае, когда модули непрерывности оцениваются сверху м.м.ф. Сформулируем также и эти теоремы.

Теорема 3.4. Пусть функция $\mathcal{W}(x)$ имеет вид (3.2), а функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию (3.5). Тогда для любого компакта $K \subset (0, 1)$ и любого натурального $m \gg 1$ имеет место оценка

$$\|\Theta_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, g, K) Q_m, \quad (3.10)$$

где

$$Q_m = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \omega\left(f, \frac{1}{k}\right)_r H_q(\theta_q(g, \cdot), m) + \omega\left(g, \frac{1}{k}\right)_q + \frac{k^4 \ln m}{m} \right\}. \quad (3.11)$$

Если на $\omega(f, \delta)_r$ и $\omega(g, \delta)_q$ наложить такие условия, при которых $Q_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, можно получить различные достаточные условия равносходимости вида (3.4).

В частности, результат, даваемый теоремой 3.3, следует из теоремы 3.4 в случае выполнения условий (3.5) и (3.6) при дополнительных условиях на параметры α и β .

Интересные результаты получаются в случае, когда функции $\omega(f, \delta)_r$ и $\omega(g, \delta)_q$ оцениваются сверху медленно меняющимися функциями.

Пусть по-прежнему выполняется условие (3.5) и, кроме того, имеют место оценки

$$\omega(f, \delta)_r = O(v(\delta)), \quad \omega(g, \delta)_q = O(w(\delta)), \quad \delta \rightarrow +0, \quad (3.12)$$

где $v(\delta)$ и $w(\delta)$ удовлетворяют условию 2.1 МИ.

Справедлива следующая теорема, которая доказана в [48].

Теорема 3.5. Пусть функция $\mathcal{W}(x)$ имеет вид (3.2), выполняются условия (3.5) и (3.12). Тогда, если

$$v\left(\frac{1}{m}\right)H_q(w, m) \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \quad (3.13)$$

то для любого компакта $K \subset (0, 1)$ имеет место равносходимость

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Theta_m(x)\|_{C(K)} = 0. \quad (3.14)$$

При этом справедлива следующая оценка при $m \gg 1$:

$$\|\Theta_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, g, K) \left(v\left(\frac{1}{m}\right)H_q(w, m) + w\left(\frac{1}{m}\right) \right). \quad (3.15)$$

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Далее потребуются некоторые результаты из [22]. Сформулируем эти результаты в виде леммы.

Лемма 4.1 (см. [22]). Пусть $Q_m(x)$ есть произвольный алгебраический многочлен степени m ; p и q — такие вещественные числа, что $1 \leq p < q \leq \infty$; s есть натуральное число. Тогда существует константа $C(p, q)$, зависящая только от p и q , и константа $C(s)$, зависящая только от s , такие, что

$$(a) \quad \|Q_m(x)\|_q \leq C(p, q)m^{2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|Q_m(x)\|_p; \quad (4.1)$$

$$(б) \quad \|Q_m^{(s)}(x)\|_p \leq C(s)m^{2s}\|Q_m(x)\|_p. \quad (4.2)$$

Обозначим через $\mathbb{P}_k$ множество алгебраических многочленов степени не выше k . Далее, наилучшее приближение функции $f(x)$ в метрике пространства $L_p[0, 1]$ алгебраическими многочленами степени не выше k будем обозначать $E_k(f)_p$, а многочлен наилучшего приближения — $F_k(x)$ (если не оговорено противное), т. е.

$$E_k(f)_p = \|f(x) - F_k(x)\|_p = \min_{f_k(x) \in \mathbb{P}_k} \|f(x) - f_k(x)\|_p.$$

Ясно, что для многочлена $F_k(x)$ наилучшего приближения функции $f(x)$ в метрике пространства $L_p[0, 1]$ выполняется неравенство

$$\|F_k(x)\|_r \leq C(f), \quad (4.3)$$

где $C(f)$ — некоторая константа. Здесь, для краткости, используется обозначение $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p[0,1]}$.

Далее также потребуется результат, который доказан в [64] (аналог классической теоремы Джексона). Сформулируем его также в виде леммы.

Лемма 4.2 (см. [64]). Если $f(x) \in L_p[0, 1]$ ($1 \leq p \leq \infty$), то

$$E_k(f)_p \leq \omega\left(f, \frac{1}{k}\right)_p. \quad (4.4)$$

Далее в доказательстве будет использоваться следующая лемма.

Лемма 4.3. Если $g(x) \in L_q[0, 1]$, где $1 \leq q \leq \infty$, то справедлива оценка

$$\int_a^b |g(\tau)| d\tau \leq C(g)\delta^{\frac{1}{r}}\theta_q(g, \delta), \quad \delta := b - a, \quad (4.5)$$

где $0 \leq a < b \leq 1$, а функция $\theta_q(g, \delta)$ определяется формулами (2.8)-(2.9). При этом функция $\theta_q(g, \delta)$ в случае $1 \leq q < \infty$ монотонно стремится к нулю при $\delta \rightarrow +0$.

Доказательство. Так как по неравенству треугольника

$$\int_a^b |g(\tau)| d\tau \leq \int_a^b |g(\tau) - G_k(\tau)| d\tau + \int_a^b |G_k(\tau)| d\tau,$$

то, применяя к правой части неравенство Гельдера и неравенства (4.4), (4.1) и (4.3), получим для любого $k \in \mathbb{N}$ и $1 \leq q < \infty$

$$\begin{aligned} \int_a^b |g(\tau)| d\tau &= \int_a^b |g(\tau) - G_k(\tau) + G_k(\tau)| d\tau \leq \left(\int_a^b 1^r d\tau \right)^{1/r} \|g(\tau) - G_k(\tau)\|_q + \|G_k(\tau)\|_\infty \delta \leq \\ &\leq \delta^{\frac{1}{r}} \left(E_k(g)_q + C(g)(k^2\delta)^{\frac{1}{q}} \right) \leq C(g)\delta^{\frac{1}{r}} \left(\omega\left(g, \frac{1}{k}\right)_q + (k^2\delta)^{\frac{1}{q}} \right). \end{aligned}$$

Так как $k \in \mathbb{N}$ является произвольным, то отсюда будем иметь

$$\begin{aligned} \int_a^b |g(\tau)| d\tau &\leq C(g)\delta^{\frac{1}{r}} \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \omega\left(g, \frac{1}{k}\right)_q + (k^2\delta)^{\frac{1}{q}} \right\} = \\ &= C(g)\delta^{\frac{1}{r}} \theta_{1q}(g, \delta) \leq C(g)\delta^{\frac{1}{r}} \sup_{\tau \in [0, \delta]} \theta_{1q}(g, \tau) = C(g)\delta^{\frac{1}{r}} \theta_q(g, \delta), \end{aligned}$$

где функция $\theta_q(g, \delta)$ определяется формулой (2.8).

Таким образом, оценка (4.5) в случае $1 \leq q < \infty$ доказана. Совершенно ясно, что в случае $q = \infty$ оценка (4.5) также справедлива, если считать $\theta_\infty(g, \delta) \equiv 1$.

Для завершения доказательства установим следующую лемму.

Лемма 4.4. *Функция $\theta_q(g, \delta)$ в случае $1 \leq q < \infty$ является неубывающей при $\delta \in (0, 1]$ и $\theta_q(g, \delta) \rightarrow 0$, когда $\delta \rightarrow +0$.*

Доказательство. То, что функция $\theta_q(g, \delta)$ является неубывающей при $\delta \in (0, 1]$, следует из ее определения. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ таким образом, что

$$\omega\left(g, \frac{1}{k_\varepsilon}\right)_q < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.6)$$

Пусть $0 < \tau_\varepsilon < 1$ есть такое число, что

$$(k_\varepsilon^2 \tau_\varepsilon)^{1/q} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.7)$$

Из (4.6)-(4.7) получим, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \tau_\varepsilon \in (0, 1) \forall \tau \in [0, \tau_\varepsilon]$

$$\theta_{1q}(g, \tau) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \omega\left(g, \frac{1}{k}\right)_q + (k^2\tau)^{\frac{1}{q}} \right\} \leq \omega\left(g, \frac{1}{k_\varepsilon}\right)_q + (k_\varepsilon^2\tau)^{\frac{1}{q}} \leq \omega\left(g, \frac{1}{k_\varepsilon}\right)_q + (k_\varepsilon^2\tau_\varepsilon)^{\frac{1}{q}} < \varepsilon.$$

Следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \exists \tau_\varepsilon \in (0, 1) \forall \delta \in [0, \tau_\varepsilon]$

$$\theta_q(g, \delta) \leq \theta_q(g, \tau_\varepsilon) = \sup_{\tau \in [0, \tau_\varepsilon]} \theta_{1q}(g, \tau) < \varepsilon.$$

А это означает, что $\theta_q(g, \delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$. Тем самым, лемма 4.4 доказана. $\square$

Следовательно, и лемма 4.3 полностью доказана. $\square$

Далее будут использоваться некоторые свойства м.м.ф. из [55, с. 24-25], которые, для удобства, сформулируем в виде следующих лемм.

Лемма 4.5. *Пусть $L(x)$ есть произвольная м.м.ф. в нуле (бесконечности). Тогда*

(а) *для любого $\gamma > 0$ при $x \rightarrow 0$ (∞)*

$$x^\gamma L(x) \rightarrow 0 \text{ } (0), \quad x^{-\gamma} L(x) \rightarrow \infty \text{ } (0),$$

(б) *для любого $\kappa \in (-\infty, \infty)$ функция $L^\kappa(x)$ является медленно меняющейся в нуле (бесконечности).*

Лемма 4.6. Если функции $L_1(x)$, $L_2(x)$ суть м.м.ф. в нуле (бесконечности), то функции $L_1(x) + L_2(x)$ и $L_1(x)L_2(x)$ также суть м.м.ф. в нуле (бесконечности).

Предположим $g(x) \in L_q[0, 1]$ и $\omega(g, \delta)_q = O(w(\delta))$ при $\delta \rightarrow +0$, где функция $w(\delta)$ удовлетворяет условию 2.1 МИ.

Справедливы следующие две леммы.

Лемма 4.7. Если $1 \leq q < \infty$, то при всех достаточно малых $\xi > 0$ справедлива оценка

$$\theta_q(g, \xi) = O(w(\xi)). \quad (4.8)$$

Доказательство. В рассматриваемом случае имеем

$$\theta_{1q}(g, \tau) \leq C \inf_{k \in \mathbb{N}} \left(w\left(\frac{1}{k}\right) + (k^2 \tau)^{\frac{1}{q}} \right), \quad (4.9)$$

где $\tau > 0$ и достаточно мало.

Положим справа в (4.9)

$$k = \left[\tau^{-\frac{3}{8}} \right], \quad (4.10)$$

где $[x]$ обозначает целую часть числа $x \in \mathbb{R}$.

Справедливы неравенства

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\left[\tau^{-\frac{3}{8}} \right]} \leq \frac{1}{\tau^{-\frac{3}{8}} - 1} = \frac{1}{\tau^{-\frac{1}{4}}(\tau^{-\frac{1}{8}} - \tau^{\frac{1}{4}})} < \frac{\tau^{\frac{1}{4}}}{2 - 1} = \tau^{\frac{1}{4}}, \quad (4.11)$$

при $\tau < 2^{-8}$ с учетом того, что $\tau \leq 1$.

Отсюда, а также из (4.9) и (4.10), ввиду монотонного неубывания функции $w(\delta)$ получим при достаточно малых $\tau > 0$

$$\begin{aligned} \theta_{1q}(g, \tau) &\leq C \left(w\left(\frac{1}{\left[\tau^{-\frac{3}{8}} \right]}\right) + \left(\left[\tau^{-\frac{3}{8}} \right]^2 \tau \right)^{\frac{1}{q}} \right) \leq \\ &\leq C \left(w\left(\tau^{\frac{1}{4}}\right) + \tau^{\frac{1}{4q}} \right) \leq C \left(w(\tau) + \tau^{\frac{1}{4q}} \right) \leq Cw(\tau), \end{aligned} \quad (4.12)$$

причем в предпоследнем неравенстве мы воспользовались тем, что функция $w(\delta)$ удовлетворяет свойству (в) в условии 2.1 МИ, а в последнем неравенстве — леммой 4.5. Используя монотонность функции $w(\delta)$, из оценки (4.12) найдем

$$\theta_q(g, \xi) = \sup_{\tau \in [0, \xi]} \theta_{1q}(g, \tau) \leq C \sup_{\tau \in [0, \xi]} w(\tau) \leq Cw(\xi),$$

где $\xi > 0$ и достаточно мало.

Тем самым лемма 4.7 доказана. $\square$

Лемма 4.8. Если $1 \leq q < +\infty$, то справедлива оценка

$$H_q(\theta_q(g, \cdot), m) = O(H_q(w, m)) \quad \text{при } m \rightarrow \infty \quad (4.13)$$

и функция $H_q(w, m)$ есть м.м.ф. в бесконечности как функция от m .

Доказательство. С учетом предыдущей леммы

$$H_q^q(\theta_q(g, \cdot), m) = \int_{1/m}^1 \frac{1}{\xi} \theta_q^q(g, \xi) d\xi = O \left(\int_{1/m}^1 \frac{1}{\xi} w^q(\xi) d\xi \right) = O(H_q^q(w, m)), \quad (4.14)$$

т. е. оценка (4.13) установлена.

Преобразуем интеграл, фигурирующий в соотношении (4.14), делая замену переменной интегрирования $\xi = \frac{1}{x}$. Будем иметь

$$H_q^q(w, m) = \int_{1/m}^1 \frac{1}{\xi} w^q(\xi) d\xi = \int_1^m \frac{1}{x} w^q\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_1^m \frac{1}{x} \tilde{w}\left(\frac{1}{x}\right) dx, \quad (4.15)$$

где обозначено $\tilde{w}(\xi) = w^q(\xi)$.

Так как функция $w(\xi)$ есть м.м.ф. в нуле, то на основании свойства (б) леммы 4.5 получим, что и $\tilde{w}(\xi)$ есть м.м.ф. в нуле. А тогда по определению 2.1 функция $\tilde{w}\left(\frac{1}{x}\right)$ будет м.м.ф. в бесконечности.

Тогда заключительное утверждение доказываемой леммы 4.8 следует из результата, который установлен в [74] и приведен в качестве упражнения в [55, упр. 2.2, с. 82]. Сформулируем этот результат в виде леммы.

Лемма 4.9. *Если функция $L(x)$ есть м.м.ф. в бесконечности, то такова же и функция*

$$\int_A^x \frac{1}{t} L(t) dt,$$

где $A > 0$ есть константа.

На основании утверждения этой леммы $H_q^q(w, m)$ есть м.м.ф. в бесконечности как функция от m . Но тогда, используя свойство (б) леммы 4.5, получим, что и $H_q(w, m)$ есть м.м.ф. в бесконечности. Тем самым лемма 4.8 доказана. $\square$

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ОБ ОЦЕНКЕ РАЗНОСТИ ЧАСТИЧНЫХ СУММ И ТЕОРЕМ РАВНОСХОДИМОСТИ

Доказательство теоремы 2.2. Справедливость теоремы 2.2 в случае общих модулей непрерывности следует из теоремы 2.1 и теоремы 3.4 об оценке разности частичных тригонометрических сумм на основании соотношения

$$\begin{aligned} \Psi_m(x) &= S_m(f, x) - \sigma_m(f, x) = \\ &= S_m(f, x) - V(x)\sigma_m(f, x) + V(x)\left(\sigma_m(V^{-1}f, x) - V^{-1}(x)\sigma_m(f, x)\right) = \\ &= \Phi_m(x) + V(x)\left(\sigma_m(V^{-1}f, x) - V^{-1}(x)\sigma_m(f, x)\right) = \\ &= \Phi_m(x) - V(x)\left(\tilde{\mathcal{W}}(x)\sigma_m(f, x) - \sigma_m(\tilde{\mathcal{W}}f, x)\right) =: \Phi_m(x) - V(x)\tilde{\Theta}_m(x), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где используются обозначения (2.3), $V(x)$ определяется формулой (2.4), $\tilde{\mathcal{W}}(x) := V^{-1}(x)$ и функция $\tilde{\Theta}_m(x)$ есть аналог функции $\Theta_m(x)$, определенной формулой (3.3), в которой вместо функции $\mathcal{W}(x)$ стоит функция $\tilde{\mathcal{W}}(x)$.

Для функции $\tilde{\mathcal{W}}(x)$ справедлива формула

$$\tilde{\mathcal{W}}(x) = V^{-1}(x) = \exp\left(\frac{1}{n} \int_0^x p_1(\tau) d\tau\right) = 1 + \int_0^x \tilde{g}(t) dt, \quad (5.2)$$

где

$$\tilde{g}(t) := \frac{1}{n} p_1(t) V^{-1}(t). \quad (5.3)$$

Ясно, что если $p_1(t) \in L_q[0, 1]$, то и $\tilde{g}(t) \in L_q[0, 1]$, и наоборот. Следовательно, функция $\tilde{\mathcal{W}}(x) \equiv V^{-1}(x)$ есть аналог функции $\mathcal{W}(x)$ в теореме 3.4 для случая общих модулей непрерывности, и для нее вместо формулы (3.2) справедлива формула (5.2), в которой $\tilde{g}(t) \in L_q[0, 1]$. Тогда на основании теоремы 3.4 получим оценку

$$\|\tilde{\Theta}_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, \tilde{g}, K) \tilde{Q}_m, \quad (5.4)$$

где

$$\tilde{Q}_m = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \omega\left(f, \frac{1}{k}\right)_r H_q(\theta_q(\tilde{g}, \cdot), m) + \omega\left(\tilde{g}, \frac{1}{k}\right)_q + \frac{k^4 \ln m}{m} \right\}; \quad (5.5)$$

$$H_q(\theta_q(\tilde{g}, \cdot), m) = \left(\int_{1/m}^1 \frac{1}{\xi} \theta_q^q(\tilde{g}, \xi) d\xi \right)^{1/q} \quad (1 \leq q < \infty), \quad H_\infty(\theta_\infty(\tilde{g}, \cdot), m) = 1; \quad (5.6)$$

$$\theta_q(\tilde{g}, \xi) = \sup_{\tau \in [0, \xi]} \theta_{1q}(\tilde{g}, \tau) \quad \text{при } 1 \leq q < \infty \quad \text{и} \quad \theta_\infty(\tilde{g}, \xi) = 1, \quad (5.7)$$

$$\theta_{1q}(\tilde{g}, \tau) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \omega\left(\tilde{g}, \frac{1}{k}\right)_q + (k^2 \tau)^{\frac{1}{q}} \right\} \quad \text{при } 1 \leq q < \infty. \quad (5.8)$$

Оценим все объекты, содержащие функцию $\tilde{g}(x)$, через аналогичные объекты, содержащие только функцию $p_1(x)$. Если обозначить $v^* := \max_{t \in [0, 1]} |V^{-1}(t)|$, то на основании (5.3) получим

$$\begin{aligned} \omega(\tilde{g}, \delta)_q &= \frac{1}{n} \sup_{0 < h \leq \delta} \left(\int_0^{1-h} |p_1(t+h)V^{-1}(t+h) - p_1(t)V^{-1}(t)|^q dt \right)^{1/q} \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \left(\sup_{0 < h \leq \delta} \left(\int_0^{1-h} |p_1(t+h) - p_1(t)|^q |V^{-1}(t+h)|^q dt \right)^{1/q} + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{0 < h \leq \delta} \left(\int_0^{1-h} |p_1(t)|^q |V^{-1}(t+h) - V^{-1}(t)|^q dt \right)^{1/q} \right) \leq \\ &\leq \frac{v^*}{n} \omega(p_1, \delta)_q + \|p_1(x)\|_q \sup_{0 < h \leq \delta} \sup_{t \in [0, 1-h]} |V^{-1}(t+h) - V^{-1}(t)| = \\ &= \frac{v^*}{n} \omega(p_1, \delta)_q + \|p_1(x)\|_q \sup_{0 < h \leq \delta} \sup_{t \in [0, 1-h]} \left| \int_0^{1-h} \tilde{g}(\tau) d\tau \right|. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Так как по условию $p_1(x) \in L_q[0, 1]$, то из равенства (5.3) и леммы 4.3 следует

$$\int_t^{t+h} |\tilde{g}(\tau)| d\tau \leq \frac{v^*}{n} \int_t^{t+h} |p_1(\tau)| d\tau \leq C(p_1) h^{\frac{1}{r}} \theta_q(p_1, h), \quad (5.10)$$

где $\theta_q(p_1, h)$ определяется формулами (2.8)-(2.9).

Из (5.9)-(5.10) будем иметь

$$\omega(\tilde{g}, \delta)_q \leq C(p_1) \left(\omega(p_1, \delta)_q + \delta^{\frac{1}{r}} \theta_q(p_1, \delta) \right). \quad (5.11)$$

Учитывая эту оценку в (5.8), получим

$$\theta_{1q}(\tilde{g}, \tau) \leq C(p_1) \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \omega\left(p_1, \frac{1}{k}\right)_q + \frac{1}{k^{1/r}} \theta_q\left(p_1, \frac{1}{k}\right) + (k^2 \tau)^{\frac{1}{q}} \right\} = C(p_1) \hat{\theta}_{1q}(p_1, \tau), \quad (5.12)$$

где используется обозначение (2.11).

На основании этой оценки из (5.7) следует

$$\theta_q(\tilde{g}, \xi) \leq C(p_1) \sup_{\tau \in [0, \xi]} \hat{\theta}_{1q}(p_1, \tau) = C(p_1) \hat{\theta}_q(p_1, \xi), \quad (5.13)$$

где используется обозначение (2.10).

Наконец, из (5.6) и (5.13) получим

$$H_q(\theta_q(\tilde{g}, \cdot), m) \leq C(p_1) \left(\int_{1/m}^1 \frac{1}{\xi} \hat{\theta}_q^q(p_1, \xi) d\xi \right)^{1/q} = C(p_1) H_q(\hat{\theta}_q(p_1, \cdot), m). \quad (5.14)$$

Таким образом, из (5.4), (5.5), (5.11) и (5.14) следует

$$\tilde{Q}_m \leq C(f, p_1, K) \hat{Q}_m, \quad (5.15)$$

где

$$\hat{Q}_m = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ H_q(\hat{\theta}_q(p_1, \cdot), m) \omega\left(f, \frac{1}{k}\right)_r + \omega\left(p_1, \frac{1}{k}\right)_q + \frac{1}{k^{1/r}} \theta_q\left(p_1, \frac{1}{k}\right) + \frac{k^4 \ln m}{m} \right\}. \quad (5.16)$$

Следовательно, из соотношений (5.1), (5.4), (5.15), (5.16), а также из теоремы 2.1 получим утверждение доказываемой теоремы. Тем самым, теорема 2.2 полностью доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2.4. Предположим теперь, что выполняется условие (2.15), а функции $\Omega_1(\delta)$ и $\Omega_2(\delta)$ удовлетворяют условию 2.1 МИ. Учитывая условие (2.15) в теореме 2.2, получим

$$B_m \leq C(f, p_1) \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \left(\ln m \Omega_2\left(\frac{1}{k}\right) + 1 + H_q(\hat{\theta}_q(p_1, \cdot), m) + \frac{k^{2/q}}{m^{1/q}} + \frac{k^2 \ln m}{m} \right) \Omega_1\left(\frac{1}{k}\right) + \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{k^2 \ln m}{m} \right) \Omega_2\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k^{1/r}} \theta_q\left(p_1, \frac{1}{k}\right) + \frac{k^{2+2/q}}{m^{1+1/q}} + \frac{k^4 \ln m}{m} \right\}. \quad (5.17)$$

На основании леммы 4.7 и условия (2.15) при $1 \leq q < \infty$ справедлива оценка

$$\theta_q\left(p_1, \frac{1}{k}\right) = O\left(\Omega_2\left(\frac{1}{k}\right)\right). \quad (5.18)$$

Если же $q = \infty$, то

$$\theta_\infty\left(p_1, \frac{1}{k}\right) = 1 \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}. \quad (5.19)$$

На основании леммы 4.7 при $1 \leq q < \infty$ получается оценка

$$\hat{\theta}_q(p_1, \xi) = O(\Omega_2(\xi)).$$

С учетом этой оценки и леммы 4.8 в итоге будем иметь при $1 \leq q < +\infty$ оценку

$$H_q(\hat{\theta}_q(p_1, \cdot), m) = O(H_q(\Omega_2, m)) \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \quad (5.20)$$

и функция $H_q(\Omega_2, m)$ есть м.м.ф. в бесконечности как функция от m . Используя этот факт, оценки (5.17), (5.18), (5.20), свойства м.м.ф., даваемых леммами 4.5 и 4.6, получаем оценку (2.19) в случае $1 \leq q < \infty$. В случае $q = \infty$ рассуждения тривиальным образом видоизменяются и также получается оценка (2.19). Из оценки (2.19) вытекают достаточные условия равносходимости (2.16) и (2.18). Тем самым теорема 2.4 полностью доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2.6. Предположим, что выполняется условие (2.20).

Для доказательства теоремы 2.6 воспользуемся теоремой 2.4.

Введем непрерывные неубывающие функции $\hat{\Omega}_1(\delta)$ и $\hat{\Omega}_2(\delta)$ на отрезке $[0, 1]$, которые удовлетворяют условию 2.1 МИ и на некотором достаточно малом отрезке $[0, \varepsilon_0] \subset [0, 1]$ выполняются равенства

$$\hat{\Omega}_1(\delta) = \frac{1}{\ln^\alpha 1/\delta}, \quad \hat{\Omega}_2(\delta) = \frac{1}{\ln^\beta 1/\delta}, \quad (\hat{\Omega}_1(0) := 0, \hat{\Omega}_2(0) := 0). \quad (5.21)$$

Вне отрезка $[0, \varepsilon_0]$ конкретный вид функций $\hat{\Omega}_1(\delta)$ и $\hat{\Omega}_2(\delta)$ не принципиален. Ясно, что таких функций существует бесконечно много.

С учетом соотношений (5.21) из оценок (2.19) теоремы 2.4 для любого компакта $K \subset (0, 1)$ при $m \gg 1$ следуют оценки

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, p_1, K) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^\alpha m} H_q(\hat{\Omega}_2, m) + \frac{1}{\ln^\alpha m} + \frac{1}{\ln^\beta m} \right). \quad (5.22)$$

В случае $1 \leq q < \infty$ из формулы (2.7) для функции $H_q(h, m)$ и равенства (5.21) для функции $\hat{\Omega}_2(\delta)$, будем иметь

$$\begin{aligned}
H_q^q(\hat{\Omega}_2, m) &= \int_{1/m}^1 \frac{1}{\xi} \hat{\Omega}_2^q(\xi) d\xi = \int_{1/m}^{\varepsilon_0} \frac{1}{\xi} \hat{\Omega}_2^q(\xi) d\xi + \int_{\varepsilon_0}^1 \frac{1}{\xi} \hat{\Omega}_2^q(\xi) d\xi = \\
&= \int_{1/m}^{\varepsilon_0} \frac{1}{\xi} \frac{1}{\ln^{\beta q} \frac{1}{\xi}} d\xi + C = \int_{1/m}^m \frac{1}{\tau} \frac{1}{\ln^{\beta q} \tau} d\tau + C = \int_{1/\varepsilon_0}^m \frac{1}{\ln^{\beta q} \tau} d \ln \tau + C.
\end{aligned}$$

Отсюда следуют оценки:

$$\begin{cases} H_q^q(\hat{\Omega}_2, m) \leq C \left(\frac{\ln m}{\ln^{\beta q} m} + 1 \right), & \text{если } \beta q \neq 1, \\ H_q^q(\hat{\Omega}_2, m) \leq C(\ln \ln m + 1) \leq C \ln \ln m, & \text{если } \beta q = 1. \end{cases}$$

Таким образом, в случае $1 \leq q < \infty$ получим:

$$\begin{cases} H_q(\hat{\Omega}_2, m) \leq C \left(\frac{\ln^{\frac{1}{q}} m}{\ln^{\beta} m} + 1 \right), & \text{если } \beta q \neq 1 \\ H_q(\hat{\Omega}_2, m) \leq C(\ln \ln m)^{1/q}, & \text{если } \beta q = 1. \end{cases} \quad (5.23)$$

Если же $q = \infty$, то

$$H_{\infty}(\hat{\Omega}_2, m) = 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (5.24)$$

Учитывая оценки (5.23) в (5.22), будем иметь при $1 \leq q < \infty$:

- если $\beta q \neq 1$, то

$$\begin{aligned}
\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} &\leq C(f, p_1, K) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^{\alpha} m} \left(\frac{\ln^{\frac{1}{q}} m}{\ln^{\beta} m} + 1 \right) + \frac{1}{\ln^{\alpha} m} + \frac{1}{\ln^{\beta} m} \right) = \\
&\leq C(f, p_1, K) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^{\alpha} m} + \frac{1}{\ln^{\beta} m} \right), \quad (5.25)
\end{aligned}$$

- если $\beta q = 1$, то

$$\begin{aligned}
\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} &\leq C(f, p_1, K) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{(\ln \ln m)^{1/q}}{\ln^{\alpha} m} + \frac{1}{\ln^{\alpha} m} + \frac{1}{\ln^{\beta} m} \right) = \\
&\leq C(f, p_1, K) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{(\ln \ln m)^{1/q}}{\ln^{\alpha} m} + \frac{1}{\ln^{\beta} m} \right). \quad (5.26)
\end{aligned}$$

Если же $q = \infty$, то учитывая равенство (5.24) в (5.22), будем иметь

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, p_1, K) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^{\alpha} m} + \frac{1}{\ln^{\beta} m} \right). \quad (5.27)$$

Из оценок (5.25)–(5.27) следует утверждение теоремы 2.6. Тем самым теорема 2.6 полностью доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афонин С. В., Ломов И. С. О сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами нечетного порядка с негладкими коэффициентами // Докл. РАН. — 2010. — 431, № 2. — С. 151–153.
2. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961.
3. Винокуров В. А., Садовничий В. А. Равномерная равносходимость ряда Фурье по собственным функциям первой краевой задачи и тригонометрического ряда Фурье // Докл. РАН. — 2001. — 380, № 6. — С. 731–735.
4. Волков В. Е., Йо И. Оценка разности частичных сумм спектральных разложений, отвечающих двум операторам Шредингера // Дифф. уравн. — 1986. — 22, № 11. — С. 1865–1876.
5. Гомилко А. М., Радзиевский Г. В. Равносходимость рядов по собственным функциям обыкновенных функционально-дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. — 1991. — 316, № 2. — С. 265–270.

6. Ильин В. А. О равномерной равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье// Докл. АН СССР. — 1975. — 223, № 3. — С. 548–551.
7. Ильин В. А. О равносходимости разложений в тригонометрический ряд Фурье и по собственным функциям пучка М. В. Келдыша обыкновенных несамосопряженных дифференциальных операторов// Докл. АН СССР. — 1975. — 225, № 3. — С. 497–499.
8. Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. I// Дифф. уравн. — 1980. — 16, № 5. — С. 771–794.
9. Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. II// Дифф. уравн. — 1980. — 16, № 6. — С. 980–1009.
10. Ильин В. А. Равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям одномерного оператора Шредингера с комплексным потенциалом из класса L_1 // Дифф. уравн. — 1991. — 27, № 4. — С. 577–597.
11. Ильин В. А. Покомпонентная равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым вектор-функциям оператора Шредингера с матричным неэрмитовым потенциалом, все элементы которого только суммируемы// Дифф. уравн. — 1991. — 27, № 11. — С. 1862–1879.
12. Ильин В. А., Йо И. Оценка разности частичных сумм разложений, отвечающих двум произвольным неотрицательным самосопряженным расширениям двух операторов типа Штурма–Лиувилля, для абсолютно непрерывной функции// Докл. АН СССР. — 1978. — 243, № 6. — С. 1381–1383.
13. Ильин В. А., Йо И. Оценка разности частичных сумм разложений, отвечающих двум произвольным неотрицательным самосопряженным расширениям двух операторов типа Штурма–Лиувилля, для абсолютно непрерывной функции// Дифф. уравн. — 1979. — 15, № 7. — С. 1175–1193.
14. Корнев В. В., Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях// Мат. сб. — 2001. — 192, № 10. — С. 33–55. — DOI: 10.4213/sm601.
15. Купцов Н. П. Теорема равносходимости для разложения Фурье в пространствах Банаха// Мат. заметки. — 1967. — 1, № 4. — С. 469–474.
16. Курбанов В. М. О неравенстве Хаусдорфа–Юнга для систем корневых вектор-функций дифференциального оператора n -го порядка// Дифф. уравн. — 1997. — 33, № 3. — С. 358–367.
17. Курбанов В. М. О скорости равносходимости спектральных разложений// Докл. РАН. — 1999. — 365, № 4. — С. 444–449.
18. Курбанов В. М. Равносходимость биортогональных разложений по корневым функциям дифференциальных операторов. I// Дифф. уравн. — 1999. — 35, № 12. — С. 1619–1633. — <http://mi.mathnet.ru/de10045>.
19. Курбанов В. М. Равносходимость биортогональных разложений по корневым функциям дифференциальных операторов. II// Дифф. уравн. — 2000. — 36, № 3. — С. 319–335. — <http://mi.mathnet.ru/de10107>.
20. Лажетич Н. О сходимости спектральных разложений, отвечающих неотрицательным самосопряженным расширениям оператора Штурма–Лиувилля, для функций из класса H_p^α // Дифф. уравн. — 1981. — 17, № 12. — С. 2149–2159.
21. Лажетич Н. О сходимости спектральных разложений, отвечающих неотрицательным самосопряженным расширениям оператора Штурма–Лиувилля, для функций из класса H_p^α // Дифф. уравн. — 1984. — 20, № 1. — С. 61–68.
22. Лебедь Г. К. Нервенства для полиномов и их производных// Докл. АН СССР. — 1957. — 117, № 4. — С. 570–572.
23. Ломов И. С. О скорости равносходимости рядов Фурье по собственным функциям операторов Штурма–Лиувилля в интегральной метрике// Дифф. уравн. — 1982. — 18, № 9. — С. 1480–1493.
24. Ломов И. С. Об аппроксимации функций на отрезке спектральными разложениями оператора Шредингера// Докл. РАН. — 1995. — 342, № 6. — С. 735–738.
25. Ломов И. С. Об аппроксимации функций на отрезке спектральными разложениями оператора Шредингера// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1995. — № 4. — С. 43–54.
26. Ломов И. С. Коэффициентные условия сходимости в $L_p(0, 1)$ биортогональных разложений функций// Дифф. уравн. — 1998. — 34, № 1. — С. 31–39.
27. Ломов И. С. О влиянии степени суммируемости коэффициентов дифференциальных операторов на скорость равносходимости спектральных разложений. I// Дифф. уравн. — 1998. — 34, № 5. — С. 619–628. — <https://mi.mathnet.ru/de9712>.

28. Ломов И. С. О влиянии степени суммируемости коэффициентов дифференциальных операторов на скорость равносходимости спектральных разложений. II// Дифф. уравн. — 1998. — 34, № 8. — С. 1066–1077. — <https://www.mathnet.ru/rus/de9749>.
29. Ломов И. С. Формула среднего значения Е. И. Моисеева для обыкновенных дифференциальных операторов четного порядка с негладкими коэффициентами// Дифф. уравн. — 1999. — 35, № 8. — С. 1046–1057.
30. Ломов И. С. О локальной сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами с негладкими коэффициентами. I// Дифф. уравн. — 2001. — 37, № 3. — С. 328–342. — DOI: 10.1023/A:1019242515472.
31. Ломов И. С. О локальной сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами с негладкими коэффициентами. II// Дифф. уравн. — 2001. — 37, № 5. — С. 648–660. — DOI: 10.1023/A:1019268615898.
32. Ломов И. С. Равномерная сходимость и сходимость в L_p на замкнутом интервале спектральных разложений неклассических обыкновенных дифференциальных операторов// Дисс. д.ф.-м.н. — Москва, 2002.
33. Ломов И. С. Сходимость биортогональных разложений функций на отрезке для дифференциальных операторов высокого порядка// Дифф. уравн. — 2005. — 41, № 5. — С. 632–646.
34. Ломов И. С. Зависимость оценок скорости локальной сходимости спектральных разложений от расстояния внутреннего компакта до границы// Дифф. уравн. — 2010. — 46, № 10. — С. 1409–1420.
35. Ломов И. С. Оценки скорости сходимости и равносходимости спектральных разложений обыкновенных дифференциальных операторов// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2015. — 15, № 4. — С. 405–418. — DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-405-418.
36. Ломов И. С., Марков А. С. Оценки скорости локальной сходимости спектральных разложений дифференциальных операторов четного порядка// Дифф. уравн. — 2013. — 49, № 5. — С. 557–563. — DOI: 10.1134/S03740641130.
37. Минкин А. М. Теоремы равносходимости для дифференциальных операторов// Дисс. к.ф.-м.н. — Саратов, 1982.
38. Минкин А. М. Разложение по собственным функциям одного класса негладких дифференциальных операторов// Дифф. уравн. — 1990. — 26, № 2. — С. 356–358.
39. Моисеев Е. И. Формула среднего значения для регулярного решения обыкновенного дифференциального уравнения// Докл. АН СССР. — 1975. — 223, № 3. — С. 562–565.
40. Моисеев Е. И. Асимптотическая формула среднего значения для регулярного решения дифференциального уравнения// Дифф. уравн. — 1980. — 16, № 5. — С. 827–844.
41. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
42. Никольская Е. И. Оценка разности между частичными суммами разложений абсолютно непрерывной функции по корневым функциям, отвечающим двум одномерным операторам Шредингера с комплексными потенциалами из класса L_1 // Дифф. уравн. — 1992. — 28, № 4. — С. 598–612.
43. Радзиевский Г. В. Краевые задачи и связанные с ними модули непрерывности// Функци. анализ и его прил. — 1995. — 29, № 3. — С. 87–90.
44. Рыхлов В. С. Разложение по собственным и присоединенным функциям квазидифференциальных и интегральных операторов// Дисс. к.ф.-м.н. — Саратов, 1981.
45. Рыхлов В. С. Асимптотика системы решений квазидифференциального уравнения// В сб.: «Дифференциальные уравнения и теория функций. Разложение и сходимость. Вып. 5». — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1983. — С. 51–59.
46. Рыхлов В. С. О скорости равносходимости для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n-1)$ -й производной// Докл. АН СССР. — 1984. — 279, № 5. — С. 1053–1056.
47. Рыхлов В. С. Скорость равносходимости для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n-1)$ -й производной// Дифф. уравн. — 1990. — 26, № 6. — С. 975–989.
48. Рыхлов В. С. О скорости равносходимости в аналоге теоремы Штейнгауза// ТВИМ. — 2015. — № 3. — С. 62–81.
49. Савчук А. М., Шкаликов А. А. Операторы Штурма—Лиувилля с сингулярными потенциалами// Мат. заметки. — 1999. — 66, № 6. — С. 897–912.
50. Садовничая И. В. О скорости равносходимости разложений в ряды по тригонометрической системе и по собственным функциям оператора Штурма—Лиувилля с потенциалом-распределением// Дифф. уравн. — 2008. — 44, № 5. — С. 656–664.
51. Садовничая И. В. О равносходимости разложений в ряды по собственным функциям операторов Штурма—Лиувилля с потенциалами-распределениями// Мат. сб. — 2010. — 201, № 9. — С. 61–76. — DOI: 10.4213/sm7598.

52. Садовничая И. В. Равносходимость в пространствах Соболева и Гельдера разложений по собственным функциям операторов Штурма—Лиувилля с потенциалами-распределениями// Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 162–163.
53. Садовничая И. В. Равносходимость спектральных разложений для системы Дирака с потенциалом из пространств Лебега// Тр. МИАН. — 2016. — 293. — С. 296–324. — DOI: 10.1134/S0371968516020205.
54. Садовничая И. В. Вопросы равносходимости для операторов Штурма—Лиувилля и Дирака// Дисс. д.ф.-м.н. — Москва, 2016.
55. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985.
56. Стеклов В. А. Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions définies par les equations différentielles du second ordre et leurs applications au problème du développement d'une fonction arbitraire en série procédant suivant les dites fonctions// Сообщ. Харьк. мат. об-ва. — 1907. — 10. — С. 97–199.
57. Стеклов В. А. Об асимптотическом выражении некоторых функций, определяемых линейным дифференциальным уравнением второго порядка и их применении к задаче разложения произвольной функции в ряд по этим функциям. — Харьков: Изд-во Харьк. гос. ун-та, 1956.
58. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и разложение произвольных функций в ряды. — Петроград: Тип. М. П. Фроловой, 1917.
59. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 2. — М.: ИЛ, 1961.
60. Хромов А. П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов// Мат. сб. — 1981. — 114, № 3. — С. 378–405. — DOI: 10.1070/SM1982v042n03ABEH002257.
61. Хромов А. П. Спектральный анализ дифференциальных операторов на конечном интервале// Дифф. уравн. — 1995. — 31, № 10. — С. 1691–1696.
62. Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям конечномерных возмущений оператора интегрирования// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2000. — № 2. — С. 21–26.
63. Хромов А. П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях// Мат. сб. — 2006. — 197, № 11. — С. 115–142. — DOI: 10.4213/sm1534.
64. Черных Н. И. О приближении функций полиномами со связями// Тр. МИАН. — 1967. — 88. — С. 75–130.
65. Юрко В. А. О дифференциальных операторах высших порядков с регулярной особенностью// Мат. сб. — 1995. — 186, № 6. — С. 133–160.
66. Alimov Š. A., Joó I. Equiconvergence theorem with exact order// Stud. Sci. Math. Hung. — 1980. — 15. — С. 431–439.
67. Djakov P., Mityagin B. Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions// Indiana Univ. Math. J. — 2012. — 61, № 1. — С. 359–398.
68. Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme// Math. Ann. — 1910. — 69. — С. 331–371. — DOI: 10.1007/BF01456326.
69. Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme// Math. Ann. — 1911. — 71. — С. 38–53. — DOI: 10.1007/BF01456927.
70. Hobson E. W. On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by series of normal functions// Proc. London Math. Soc. — 1908. — 6. — С. 349–395.
71. Karamata J. Sur certains «Tauberian theorems» de M. M. Hardy et Littlewood// Mathematica (Cluj). — 1930. — 3. — С. 33–48.
72. Kurbanov V. M. Dependence rate of equiconvergence on the module of continuity of potential of the Sturm—Liouville operator// Stud. Sci. Math. Hung. — 2004. — 41, № 3. — С. 347–364.
73. Minkin A. M. Equiconvergence theorems for differential operators// J. Math. Sci. — 1999. — 96, № 6. — С. 3631–3715. — DOI: 10.1007/bf02172664.
74. Parameswaran S. Partition functions whose logarithms are slowly oscillating// Trans. Am. Math. Soc. — 1961. — 100. — С. 217–240.
75. Radzieskii G. V. The rate of convergence of decompositions of ordinary functional-differential operators by eigenfunctions// В сб.: «Some Problems of the Modern Theory of Differential Equations». — Kiev: Inst. Math. Ukr. Nat. Acad. Sci., 1994. — С. 14–27.
76. Rykhlov V. S. On the rate of equiconvergence for differential operators with nonzero coefficient of the $(n - 1)$ -st derivative// Sov. Math. Dokl. — 1984. — 30, № 3. — С. 777–779.
77. Rykhlov V. S. Rate of equiconvergence for differential operators with nonzero coefficient of the $(n - 1)$ -th derivative// Differ. Equ. — 1990. — 26, № 6. — С. 704–715.
78. Rykhlov V. S. Equiconvergence rate in terms of general moduli of continuity for differential operators// Res. Math. — 1996. — 29. — С. 153–168. — DOI: 10.1007/BF03322215.

79. *Sadovnichaya I. V.* Equiconvergence theorems for Sturm–Liouville operators with singular potentials (rate of equiconvergence in W_2^θ -norm) // Eurasian Math. J. — 2010. — 1, № 1. — С. 137–146.
80. *Steinhaus H.* Sur le développement du produit de deux fonctions en une série de Fourier // Bull. Intern. de l'Acad. de Cracovie. — Kraków, 1913. — С. 113–116.
81. *Stone M. H.* A comparison of the series of Fourier and Birkhoff // Trans. Am. Math. Soc. — 1926. — 28. — С. 695–761.
82. *Tamarkine J. D.* Sur quelques points de la theory des equations differentielles lineaires ordinaires et sur la generalisation de la serie de Fourier // Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1912. — 34. — С. 345–382.
83. *Tamarkin J. D.* Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions // Math. Z. — 1928. — 27, № 1. — С. 1–54. — DOI: 10.1007/bf01171084.

В. С. РЫХЛОВ

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

E-mail: RykhlovVS@yandex.ru

UDC 517.984

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-452-477

EDN: FMENVB

Equiconvergence of expansions in root functions of a differential operator and in a trigonometric Fourier series

V. S. Rykhlov

Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky, Saratov, Russia

Abstract. We consider a non-self-adjoint ordinary differential operator defined on a finite interval by an n th-order linear differential expression with a nonzero coefficient of the $(n - 1)$ th derivative and two-point Birkhoff regular boundary conditions. We study the uniform equiconvergence of expansions of a given function in a biorthogonal series in eigenfunctions and associated functions (or, briefly, root functions) of this operator and in an ordinary trigonometric Fourier series, as well as an estimate of the difference of the corresponding partial sums (or, briefly, the rate of equiconvergence) under the most general conditions on the expanded function and the coefficient of the $(n - 1)$ th derivative. We obtain estimates for the difference of the expansions in terms of general (integral) moduli of continuity of the expanded function and the coefficient of the $(n - 1)$ th derivative uniform inside the fundamental interval. From these estimates, corresponding estimates are derived in the case where moduli of continuity are bounded from above by slowly varying functions and, in particular, by logarithmic functions. Based on this, sufficient conditions for equiconvergence in the indicated cases are formulated. These results are obtained using the author's previously obtained estimate for the difference between the partial sums of expansions of a given function in a biorthogonal series in eigenfunctions and associated functions of the differential operator under consideration and in a modified trigonometric Fourier series, as well as analogues of the Steinhaus theorem. The modification of the trigonometric Fourier series consisted in applying a very specific bounded operator to the ordinary trigonometric Fourier series expressed through the coefficient of the $(n - 1)$ th derivative and its inverse operator to the expanded function.

Keywords: non-self-adjoint ordinary differential operator, expansion in root functions, Fourier series, equiconvergence of expansion, rate of equiconvergence.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: V. S. Rykhlov, “Equiconvergence of expansions in root functions of a differential operator and in a trigonometric Fourier series,” *Sovrem. Mat. Fundam. Naprav.*, 2025, vol. **71**, No. 3, 452–477. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-452-477>

REFERENCES

1. S. V. Afonin and I. S. Lomov, “O skhodimosti biortogonal’nykh ryadov, svyazannykh s differentsial’nymi operatorami nechetnogo poryadka s negladkimi koeffitsientami” [On the convergence of biorthogonal series associated with odd-order differential operators with nonsmooth coefficients], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2010, **431**, No. 2, 151–153 (in Russian).
2. N. K. Bari, *Trigonometricheskie ryady* [Trigonometric Series], Fizmatgiz, Moscow, 1961 (in Russian).
3. V. A. Vinokurov and V. A. Sadovnichiy, “Ravnomernaya ravnoskhodimost’ ryada Fur’e po sobstvennym funktsiyam pervoy kraevoy zadachi i trigonometricheskogo ryada Fur’e” [Uniform equiconvergence of the Fourier series in eigenfunctions of the first boundary-value problem and the trigonometric Fourier series], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2001, **380**, No. 6, 731–735 (in Russian).
4. V. E. Volkov and I. Yo, “Otsenka raznosti chastichnykh summ spektral’nykh razlozheniy, otvechayushchikh dvum operatoram Shredingera” [Estimate of the difference between partial sums of spectral decompositions corresponding to two Schrödinger operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1986, **22**, No. 11, 1865–1876 (in Russian).
5. A. M. Gomilko and G. V. Radzievskiy, “Ravnoskhodimost’ ryadov po sobstvennym funktsiyam obyknennykh funktsional’no-differentsial’nykh operatorov” [Equiconvergence of series in eigenfunctions of ordinary functional differential operators], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1991, **316**, No. 2, 265–270 (in Russian).
6. V. A. Il’in, “O ravnomernoy ravnoskhodimosti razlozheniy po sobstvennym i prisoedinennym funktsiyam nesamosopryazhennogo obyknennogo differentsial’nogo operatora i v trigonometricheskiy ryad Fur’e” [On the uniform equiconvergence of expansions in eigenfunctions and associated functions of a non-self-adjoint ordinary differential operator and in a trigonometric Fourier series], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1975, **223**, No. 3, 548–551 (in Russian).
7. V. A. Il’in, “O ravnoskhodimosti razlozheniy v trigonometricheskiy ryad Fur’e i po sobstvennym funktsiyam puchka M. V. Keldysha obyknennykh nesamosopryazhennykh differentsial’nykh operatorov” [On the equiconvergence of expansions in trigonometric Fourier series and in eigenfunctions of the M. V. Keldysh pencil of ordinary non-self-adjoint differential operators], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1975, **225**, No. 3, 497–499 (in Russian).
8. V. A. Il’in, “Neobkhodimye i dostatochnye usloviya bazisnosti i ravnoskhodimosti s trigonometricheskim ryadom spektral’nykh razlozheniy. I” [Necessary and sufficient conditions for the basis property and equiconvergence with the trigonometric series of spectral decompositions. I], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1980, **16**, No. 5, 771–794 (in Russian).
9. V. A. Il’in, “Neobkhodimye i dostatochnye usloviya bazisnosti i ravnoskhodimosti s trigonometricheskim ryadom spektral’nykh razlozheniy. II” [Necessary and sufficient conditions for the basis property and equiconvergence with the trigonometric series of spectral decompositions. II], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1980, **16**, No. 6, 980–1009 (in Russian).
10. V. A. Il’in, “Ravnoskhodimost’ s trigonometricheskim ryadom razlozheniy po kornevym funktsiyam odnomernogo operatora Shredingera s kompleksnym potentsialom iz klassa L_1 ” [Equiconvergence with the trigonometric series of expansions in root functions of the one-dimensional Schrödinger operator with a complex potential of the class L_1], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1991, **27**, No. 4, 577–597 (in Russian).
11. V. A. Il’in, “Pokomponentnaya ravnoskhodimost’ s trigonometricheskim ryadom razlozheniy po kornevym vektor-funktsiyam operatora Shredingera s matrichnym neermitovym potentsialom, vse elementy kotorogo tol’ko summiruemy” [Componentwise equiconvergence with a trigonometric series of expansions in root vector functions of the Schrödinger operator with a matrix non-Hermitian potential, all elements of which are only summable], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1991, **27**, No. 11, 1862–1879 (in Russian).
12. V. A. Il’in and I. Yo, “Otsenka raznosti chastichnykh summ razlozheniy, otvechayushchikh dvum proizvol’nym neotritsatel’nym samosopryazhennym rasshireniyam dvukh operatorov tipa Shturma—Liuvillya, dlya absolutno nepreryvnoy funktsii” [Estimate of the difference of partial sums of expansions corresponding to two arbitrary nonnegative self-adjoint extensions of two Sturm—Liouville-type operators for an absolutely continuous function], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1978, **243**, No. 6, 1381–1383 (in Russian).
13. V. A. Il’in and I. Yo, “Otsenka raznosti chastichnykh summ razlozheniy, otvechayushchikh dvum proizvol’nym neotritsatel’nym samosopryazhennym rasshireniyam dvukh operatorov tipa Shturma—Liuvillya, dlya absolutno nepreryvnoy funktsii” [Estimate of the difference of partial sums of expansions corresponding to

- two arbitrary nonnegative self-adjoint extensions of two Sturm–Liouville-type operators for an absolutely continuous function], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1979, **15**, No. 7, 1175–1193 (in Russian).
14. V. V. Kornev and A. P. Khromov, “O ravnoskhodimosti razlozheniy po sobstvennym funktsiyam integral’nykh operatorov s yadrami, dopuskayushchimi razryvy proizvodnykh na diagonalnykh” [On the equiconvergence of expansions in eigenfunctions of integral operators with kernels that admit discontinuities of derivatives on the diagonals], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2001, **192**, No. 10, 33–55 (in Russian), DOI: 10.4213/sm601.
 15. N. P. Kuptsov, “Teorema ravnoskhodimosti dlya razlozhenii Fur’e v prostranstvakh Banakha” [Equiconvergence theorem for Fourier expansions in Banach spaces], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1967, **1**, No. 4, 469–474 (in Russian).
 16. V. M. Kurbanov, “O neravenstve Khausdorfa–Yunga dlya sistem kornevykh vektor-funktsiy differentsial’nogo operatora n -go poryadka” [On the Hausdorff–Young inequality for systems of root vector functions of an n th-order differential operator], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1997, **33**, No. 3, 358–367 (in Russian).
 17. V. M. Kurbanov, “O skorosti ravnoskhodimosti spektral’nykh razlozheniy” [On the rate of equiconvergence of spectral decompositions], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1999, **365**, No. 4, 444–449 (in Russian).
 18. V. M. Kurbanov, “Ravnoskhodimost’ biortogonal’nykh razlozheniy po kornevym funktsiyam differentsial’nykh operatorov. I” [Equiconvergence of biorthogonal expansions in root functions of differential operators. I], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1999, **35**, No. 12, 1619–1633 (in Russian). — <http://mi.mathnet.ru/de10045>.
 19. V. M. Kurbanov, “Ravnoskhodimost’ biortogonal’nykh razlozheniy po kornevym funktsiyam differentsial’nykh operatorov. II” [Equiconvergence of biorthogonal expansions in root functions of differential operators. II], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2000, **36**, No. 3, 319–335 (in Russian). — <http://mi.mathnet.ru/de10107>.
 20. N. Lazhetich, “O skhodimosti spektral’nykh razlozheniy, otvechayushchikh neotritsatel’nym samosopryazhennym rasshireniyam operatora Shturma–Liuvillya, dlya funktsiy iz klassa H_p^α ” [On the convergence of spectral expansions corresponding to nonnegative self-adjoint extensions of the Sturm–Liouville operator for functions of the class H_p^α], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1981, **17**, No. 12, 2149–2159 (in Russian).
 21. N. Lazhetich, “O skhodimosti spektral’nykh razlozheniy, otvechayushchikh neotritsatel’nym samosopryazhennym rasshireniyam operatora Shturma–Liuvillya, dlya funktsiy iz klassa H_p^α ” [On the convergence of spectral expansions corresponding to nonnegative self-adjoint extensions of the Sturm–Liouville operator for functions of the class H_p^α], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1984, **20**, No. 1, 61–68 (in Russian).
 22. G. K. Lebed’, “Nerventstva dlya polinomov i ikh proizvodnykh” [Inequalities for polynomials and their derivatives], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1957, **117**, No. 4, 570–572 (in Russian).
 23. I. S. Lomov, “O skorosti ravnoskhodimosti ryadov Fur’e po sobstvennym funktsiyam operatorov Shturma–Liuvillya v integral’noy metrike” [On the rate of equiconvergence of Fourier series in eigenfunctions of Sturm–Liouville operators in the integral metric], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1982, **18**, No. 9, 1480–1493 (in Russian).
 24. I. S. Lomov, “Ob approksimatsii funktsiy na otrezke spektral’nymi razlozheniyami operatora Shredingera” [On the approximation of functions on an interval by spectral decompositions of the Schrödinger operator], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1995, **342**, No. 6, 735–738 (in Russian).
 25. I. S. Lomov, “Ob approksimatsii funktsiy na otrezke spektral’nymi razlozheniyami operatora Shredingera” [On the approximation of functions on an interval by spectral decompositions of the Schrödinger operator], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 1995, No. 4, 43–54 (in Russian).
 26. I. S. Lomov, “Koeffitsientnye usloviya skhodimosti v $L_p(0,1)$ biortogonal’nykh razlozheniy funktsiy” [Coefficient conditions for convergence in $L_p(0,1)$ of biorthogonal expansions of functions], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1998, **34**, No. 1, 31–39 (in Russian).
 27. I. S. Lomov, “O vliyani stepeni summiruемости koeffitsientov differentsial’nykh operatorov na skorost’ ravnoskhodimosti spektral’nykh razlozheniy. I” [On the influence of the degree of summability of the coefficients of differential operators on the rate of equiconvergence of spectral decompositions. I], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1998, **34**, No. 5, 619–628 (in Russian). — <https://mi.mathnet.ru/de9712>.
 28. I. S. Lomov, “O vliyani stepeni summiruемости koeffitsientov differentsial’nykh operatorov na skorost’ ravnoskhodimosti spektral’nykh razlozheniy. II” [On the influence of the degree of summability of the coefficients of differential operators on the rate of equiconvergence of spectral decompositions. II], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1998, **34**, No. 8, 1066–1077 (in Russian). — <https://www.mathnet.ru/rus/de9749>.
 29. I. S. Lomov, “Formula srednego znacheniya E. I. Moiseeva dlya obyknovennykh differentsial’nykh operatorov chetnogo poryadka s negladkimi koeffitsientami” [E. I. Moiseev’s mean value formula for even-order ordinary

- differential operators with nonsmooth coefficients], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1999, **35**, No. 8, 1046–1057 (in Russian).
30. I. S. Lomov, “O lokal’noy skhodimosti biortogonal’nykh ryadov, svyazannykh s differentsial’nymi operatorami s negladyimi koeffitsientami. I” [On local convergence of biorthogonal series associated with differential operators with nonsmooth coefficients. I], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2001, **37**, No. 3, 328–342 (in Russian), DOI: 10.1023/A:1019242515472.
 31. I. S. Lomov, “O lokal’noy skhodimosti biortogonal’nykh ryadov, svyazannykh s differentsial’nymi operatorami s negladyimi koeffitsientami. II” [On local convergence of biorthogonal series associated with differential operators with nonsmooth coefficients. II], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2001, **37**, No. 5, 648–660 (in Russian), DOI: 10.1023/A:1019268615898.
 32. I. S. Lomov, “Ravnomernaya skhodimost’ i skhodimost’ v L_p na zamknutom intervale spektral’nykh razlozheniy neklassicheskikh obyknovennykh differentsial’nykh operatorov” [Uniform convergence and convergence in L_p on a closed interval of spectral expansions of nonclassical ordinary differential operators], *Diss. d.f.-m.n.* [Doctoral thesis], Moskva, 2002 (in Russian).
 33. I. S. Lomov, “Skhodimost’ biortogonal’nykh razlozheniy funktsiy na otrezke dlya differentsial’nykh operatorov vysokogo poriyadka” [Convergence of orthogonal expansions of functions on an interval for higher-order differential operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2005, **41**, No. 5, 632–646 (in Russian).
 34. I. S. Lomov, “Zavisimost’ otsenok skorosti lokal’noy skhodimosti spektral’nykh razlozheniy ot rasstoyaniya vnutrennego kompakta do granitsy” [Dependence of estimates of the rate of local convergence of spectral decompositions on the distance of the inner compact set to the boundary], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2010, **46**, No. 10, 1409–1420 (in Russian).
 35. I. S. Lomov, “Otsenki skorosti skhodimosti i ravnoskhodimosti spektral’nykh razlozheniy obyknovennykh differentsial’nykh operatorov” [Estimates of the rate of convergence and equiconvergence of spectral decompositions of ordinary differential operators], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.* [Bull. Saratov Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inf.], 2015, **15**, No. 4, 405–418 (in Russian), DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-405-418.
 36. I. S. Lomov and A. S. Markov, “Otsenki skorosti lokal’noy skhodimosti spektral’nykh razlozheniy differentsial’nykh operatorov chetnogo poriyadka” [Estimates of the rate of local convergence of spectral expansions of even-order differential operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2013, **49**, No. 5, 557–563 (in Russian), DOI: 10.1134/S037406411130.
 37. A. M. Minkin, “Teoremy ravnoskhodimosti dlya differentsial’nykh operatorov” [Equiconvergence theorems for differential operators], *Disc. k.f.-m.n.* [PhD thesis], Saratov, 1982 (in Russian).
 38. A. M. Minkin, “Razlozhenie po sobstvennym funktsiyam odnogo klassa negladyikh differentsial’nykh operatorov” [Expansion in eigenfunctions of one class of nonsmooth differential operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1990, **26**, No. 2, 356–358 (in Russian).
 39. E. I. Moiseev, “Formula srednego znacheniya dlya regul'yarnogo resheniya obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya” [The mean value formula for the regular solution of an ordinary differential equation], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1975, **223**, No. 3, 562–565 (in Russian).
 40. E. I. Moiseev, “Asimptoticheskaya formula srednego znacheniya dlya regul'yarnogo resheniya differentsial'nogo uravneniya” [Asymptotic formula for the mean value of a regular solution of a differential equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1980, **16**, No. 5, 827–844 (in Russian).
 41. M. A. Naimark, *Lineynye differentsial'nye operatory* [Linear Differential Operators], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
 42. E. I. Nikol'skaya, “Otsenka raznosti mezhdu chastichnymi summami razlozheniy absolyutno nepreryvnoy funktsii po kornevym funktsiyam, otvechayushchim dvum odnomernym operatoram Shredingera s kompleksnymi potsentsialami iz klassa L_1 ” [Estimate of the difference between partial sums of expansions of an absolutely continuous function in root functions corresponding to two one-dimensional Schrödinger operators with complex potentials from the class L_1], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1992, **28**, No. 4, 598–612 (in Russian).
 43. G. V. Radzievskiy, “Kraevye zadachi i svyazannye s nimi moduli nepreryvnosti” [Boundary-value problems and related moduli of continuity], *Funkts. anal. i ego pril.* [Funct. Anal. Appl.], 1995, **29**, No. 3, 87–90 (in Russian).
 44. V. S. Rykhlov, “Razlozhenie po sobstvennym i prisoedinennym funktsiyam kvazidifferentsial'nykh i integral'nykh operatorov” [Expansion in eigenfunctions and associated functions of quasi-differential and integral operators], *Diss. k.f.-m.n.* [PhD thesis], Saratov, 1981 (in Russian).
 45. V. C. Rykhlov, “Asimptotika sistemy resheniy kvazidifferentsial'nogo uravneniya” [Asymptotics of a system of solutions of a quasi-differential equation], In: *Differentsial'nye uravneniya i teoriya funktsiy. Razlozhenie*

- i skhodimost'. Vyp. 5* [Differential Equations and Function Theory. Expansion and Convergence. Iss. 5], Saratov Univ., Saratov, 1983, pp. 51–59 (in Russian).
46. V. S. Rykhlov, “O skorosti ravnoskhodimosti dlya differentsial’nykh operatorov s nenulevym koeffitsientom pri $(n-1)$ -y proizvodnoy” [On the rate of equiconvergence for differential operators with a nonzero coefficient at the $(n-1)$ th derivative], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1984, **279**, No. 5, 1053–1056 (in Russian).
 47. V. S. Rykhlov, “Skorost’ ravnoskhodimosti dlya differentsial’nykh operatorov s nenulevym koeffitsientom pri $(n-1)$ -y proizvodnoy” [Rate of equiconvergence for differential operators with a nonzero coefficient at the $(n-1)$ th derivative], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1990, **26**, No. 6, 975–989 (in Russian).
 48. V. S. Rykhlov, “O skorosti ravnoskhodimosti v analoge teoremy Shteyngauza” [On the rate of equiconvergence in the analogue of the Steinhaus theorem], *TVIM* [Taurida Bull. Inf. Math.], 2015, No. 3, 62–81 (in Russian).
 49. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, “Operatory Shturma—Liuvillya s singulyarnymi potentsialami” [Sturm–Liouville operators with singular potentials], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1999, **66**, No. 6, 897–912 (in Russian).
 50. I. V. Sadovnichaya, “O skorosti ravnoskhodimosti razlozheniy v ryady po trigonometricheskoy sisteme i po sobstvennym funktsiyam operatora Shturma—Liuvillya s potentsialom-raspredeleniem” [On the rate of equiconvergence of expansions in series in the trigonometric system and in eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator with a distribution potential], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2008, **44**, No. 5, 656–664 (in Russian).
 51. I. V. Sadovnichaya, “O ravnoskhodimosti razlozheniy v ryady po sobstvennym funktsiyam operatorov Shturma—Liuvillya s potentsialami-raspredeleniyami” [On the equiconvergence of expansions in series in eigenfunctions of Sturm–Liouville operators with distribution potentials], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2010, **201**, No. 9, 61–76 (in Russian), DOI: 10.4213/sm7598.
 52. I. V. Sadovnichaya, “Ravnoskhodimost’ v prostranstvakh Soboleva i Gel’dera razlozheniy po sobstvennym funktsiyam operatorov Shturma—Liuvillya s potentsialami-raspredeleniyami” [Equiconvergence in Sobolev and Hölder spaces of expansions in eigenfunctions of Sturm–Liouville operators with distribution potentials], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2011, **437**, No. 2, 162–163 (in Russian).
 53. I. V. Sadovnichaya, “Ravnoskhodimost’ spektral’nykh razlozheniy dlya sistemy Diraka s potentsialom iz prostranstv Lebege” [Equiconvergence of spectral expansions for the Dirac system with a potential from Lebesgue spaces], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2016, **293**, 296–324 (in Russian), DOI: 10.1134/S0371968516020205.
 54. I. V. Sadovnichaya, “Voprosy ravnoskhodimosti dlya operatorov Shturma—Liuvillya i Diraka” [Equiconvergence issues for Sturm–Liouville and Dirac operators], *Diss. d.f.-m.n.* [Doctoral thesis], Moskva, 2016 (in Russian).
 55. E. Seneta, *Pravil’no menyayushchiesya funktsii* [Regularly Varying Functions], Nauka, Moscow, 1985 (Russian translation).
 56. V. A. Steklov, “Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions definies par les equations différentielles du second ordre et leurs applications au problème du développement d’une fonction arbitraire en série procédant suivant les dites fonctions” [Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions definies par les equations différentielles du second ordre et leurs applications au problème du développement d’une fonction arbitraire en série procédant suivant les dites fonctions], *Soobshch. Khar’k. mat. ob-va* [Commun. Kharkov Math. Soc.], 1907, **10**, 97–199 (in Russian).
 57. V. A. Steklov, *Ob asimptoticheskom vyrazhenii nekotorykh funktsiy, opredelyaemykh lineynym differentsial’nym uravneniem vtorogo poryadka i ikh primenenii k zadache razlozheniya proizvol’noy funktsii v ryad po etim funktsiyam* [On the Asymptotic Expression of Some Functions Defined by a Linear Second-Order Differential Equation and Their Application to the Problem of Expanding an Arbitrary Function into a Series in Terms of These Functions], Kharkov State Univ., Kharkov, 1956 (in Russian).
 58. Ya. D. Tamarkin, *O nekotorykh obshchikh zadachakh teorii obyknovennykh differentsial’nykh uravneniy i razlozhenie proizvol’nykh funktsiy v ryady* [On some general problems of the theory of ordinary differential equations and expansion of arbitrary functions into series], Frolova, Petrograd, 1917 (in Russian).
 59. E. Ch. Titchmarsh, *Razlozheniya po sobstvennym funktsiyam, svyazannye s differentsial’nymi uravneniyami vtorogo poryadka. T. 2* [Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations. Pt. 2], IL, Moscow, 1961 (Russian translation).
 60. A. P. Khromov, “Teoremy ravnoskhodimosti dlya integro-differentsial’nykh i integral’nykh operatorov” [Equiconvergence theorems for integro-differential and integral operators], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1981, **114**, No. 3, 378–405 (in Russian), DOI: 10.1070/SM1982v042n03ABEH002257.

61. A. P. Khromov, “Spektral’nyy analiz differentsial’nykh operatorov na konechnom intervale” [Spectral analysis of differential operators on a finite interval], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1995, **31**, No. 10, 1691–1696 (in Russian).
62. A. P. Khromov, “O ravnoskhodimosti razlozheniy po sobstvennym funktsiyam konechnomernykh vozmushcheniy operatora integrirovaniya” [On the equiconvergence of expansions in eigenfunctions of finite-dimensional perturbations of the integration operator], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 2000, No. 2, 21–26 (in Russian).
63. A. P. Khromov, “Integral’nye operatory s yadrami, razryvnymi na lomanykh liniyakh” [Integral operators with kernels discontinuous at broken lines], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2006, **197**, No. 11, 115–142 (in Russian), DOI: 10.4213/sm1534.
64. N. I. Chernykh, “O priblizhenii funktsiy polinomami so svyazyami” [On the approximation of functions by polynomials with constraints], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1967, **88**, 75–130 (in Russian).
65. V. A. Yurko, “O differentsial’nykh operatorakh vysshikh poryadkov s regul’arnoy osobennost’yu” [On higher-order differential operators with a regular singularity], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1995, **186**, No. 6, 133–160 (in Russian).
66. Š. A. Alimov and I. Joó, “Equiconvergence theorem with exact order,” *Stud. Sci. Math. Hung.*, 1980, **15**, 431–439.
67. P. Djakov and B. Mityagin, “Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions,” *Indiana Univ. Math. J.*, 2012, **61**, No. 1, 359–398.
68. A. Haar, “Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme,” *Math. Ann.*, 1910, **69**, 331–371, DOI: 10.1007/BF01456326.
69. A. Haar, “Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme,” *Math. Ann.*, 1911, **71**, 38–53, DOI: 10.1007/BF01456927.
70. E. W. Hobson, “On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by series of normal functions,” *Proc. London Math. Soc.*, 1908, **6**, 349–395.
71. J. Karamata, “Sur certains «Tauberian theorems» de M. M. Hardy et Littlewood,” *Mathematica (Cluj)*, 1930, **3**, 33–48.
72. V. M. Kurbanov, “Dependence rate of equiconvergence on the module of continuity of potential of the Sturm–Liouville operator,” *Stud. Sci. Math. Hung.*, 2004, **41**, No. 3, 347–364.
73. A. M. Minkin, “Equiconvergence theorems for differential operators,” *J. Math. Sci.*, 1999, **96**, No. 6, 3631–3715, DOI: 10.1007/bf02172664.
74. S. Parameswaran, “Partition functions whose logarithms are slowly oscillating,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1961, **100**, 217–240.
75. G. V. Radzieskii, “The rate of convergence of decompositions of ordinary functional-differential operators by eigenfunctions,” In: *Some Problems of the Modern Theory of Differential Equations*, Inst. Math. Ukr. Nat. Acad. Sci., Kiev, 1994, pp. 14–27.
76. V. S. Rykhlov, “On the rate of equiconvergence for differential operators with nonzero coefficient of the $(n - 1)$ -st derivative,” *Sov. Math. Dokl.*, 1984, **30**, No. 3, 777–779.
77. V. S. Rykhlov, “Rate of equiconvergence for differential operators with nonzero coefficient of the $(n - 1)$ -th derivative,” *Differ. Equ.*, 1990, **26**, No. 6, 704–715.
78. V. S. Rykhlov, “Equiconvergence rate in terms of general moduli of continuity for differential operators,” *Res. Math.*, 1996, **29**, 153–168, DOI: 10.1007/BF03322215.
79. I. V. Sadovnichaya, “Equiconvergence theorems for Sturm–Liouville operators with singular potentials (rate of equiconvergence in W_2^{θ} -norm),” *Eurasian Math. J.*, 2010, **1**, No. 1, 137–146.
80. H. Steinhaus, “Sur le développement du produit de deux fonctions en une série de Fourier,” *Bull. Intern. de l’Acad. de Cracovie*, Kraków, 1913, 113–116.
81. M. H. Stone, “A comparison of the series of Fourier and Birkhoff,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1926, **28**, 695–761.
82. J. D. Tamarkine, “Sur quelques points de la theory des equations differentielles lineaires ordinaires et sur la generalisation de la serie de Fourier,” *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 1912, **34**, 345–382.
83. J. D. Tamarkin, “Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions,” *Math. Z.*, 1928, **27**, No. 1, 1–54, DOI: 10.1007/bf01171084.

V. S. Rykhlov

Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky, Saratov, Russia

E-mail: RykhlovVS@yandex.ru

УДК 517.984

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-478-507

EDN: DUAASN

ВТОРОЙ ЧЕТЫРЕХЭЛЕКТРОННЫЙ СИНГЛЕТ В ПРИМЕСНОЙ МОДЕЛИ ХАББАРДА

С. М. ТАШПУЛАТОВ, Р. Т. ПАРМАНОВА

Институт ядерной физики АН Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан

Аннотация. Мы рассматриваем оператор энергии четырехэлектронных систем в примесной модели Хаббарда и исследуем структуру существенного спектра и дискретных спектров для второго синглетного состояния системы. Показано, что в одномерном и двумерном случаях для существенного и дискретного спектра существуют такие ситуации: (а). существенный спектр оператора второго синглетного состояния четырех электронов в примесной модели Хаббарда состоит из объединения восьми сегментов, а дискретный спектр оператора состоит из шести собственных значений; (б). существенный спектр оператора состоит из объединения шестнадцати сегментов, а дискретный спектр оператора состоит из четырнадцати собственных значений; (в). существенный спектр оператора состоит из объединения тринадцати сегментов, а дискретный спектр оператора состоит из девяти собственных значений; (г). существенный спектр оператора состоит из объединения трех сегментов, а дискретный спектр оператора состоит из трех собственных значений. В трехмерном случае возникают такие ситуации: (а). существенный спектр оператора состоит из объединений восьми сегментов, а дискретный спектр оператора состоит из шести собственных значений, или существенный спектр оператора состоит из объединений трех сегментов, а дискретный спектр оператора состоит из трех собственных значений; (б). существенный спектр оператора состоит из объединений восьми сегментов, а дискретный спектр оператора состоит из шести собственных значений; (в). существенный спектр оператора состоит из объединений шестнадцати сегментов, а дискретный спектр оператора состоит из четырнадцати собственных значений; (г). существенный спектр оператора состоит из объединений трех сегментов, а дискретный спектр оператора состоит из трех собственных значений.

Ключевые слова: четырёхэлектронная система, примесная модель Хаббарда, квинтетные состояния, триплетные состояния, синглетные состояния, существенный спектр, дискретный спектр.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: С. М. Ташпулатов, Р. Т. Парманова. Второй четырехэлектронный синглет в примесной модели Хаббарда // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 3. С. 478–507. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-478-507>

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1963 г. почти одновременно и независимо появились три работы [5, 6, 10], в которых была предложена простая модель металла, ставшая фундаментальной моделью теории сильно коррелированных электронных систем. В этой модели рассматривается единственная невырожденная зона электронов с локальным кулоновским взаимодействием. Гамильтониан модели содержит

всего два параметра: параметр B перескока электрона с узла на соседний узел решетки и параметр U кулоновского отталкивания двух электронов в одном узле. В представлении вторичного квантования он записывается в виде

$$H = B \sum_{m,\tau,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m+\tau,\gamma} + U \sum_m a_{m,\uparrow}^+ a_{m,\uparrow} a_{m,\downarrow}^+ a_{m,\downarrow}. \quad (1.1)$$

Здесь через $a_{m,\gamma}^+$ ($a_{m,\gamma}$) обозначен Ферми-оператор рождения (уничтожения) электрона со спином γ на узле m , суммирование по τ означает суммирование по ближайшим соседям в решетке.

Предложенная в [5, 6, 10] модель получила название модели Хаббарда в честь Дж. Хаббарда, внесшего фундаментальный вклад в изучение статистической механики этой системы, хотя локальная форма кулоновского взаимодействия впервые введена Андерсоном для примесной модели в металле (см. [3]). Напомним также, что модель Хаббарда является частным случаем полярной модели Шубина—Вонсовского (см. [18]), появившейся за тридцать лет до [5, 6, 10]. В модели Шубина—Вонсовского наряду с кулоновским взаимодействием на одном узле учитывается взаимодействие электронов на соседних узлах.

Модель Хаббарда является приближением, которое используется в физике твердого тела для описания перехода между проводящим и диэлектрическим состояниями. Она представляет собой простейшую модель, описывающую взаимодействие частиц в решетке. Эти частицы могут быть фермионами или бозонами.

Модель Хаббарда и примесная модель Хаббарда в настоящее время являются одними из наиболее изученных многоэлектронных моделей металлов (см. [4, 9, 13], а также [1, гл. III]) и [11, 12, 14, 15, 26]. Обзор [4] суммирует результаты, полученные для модели Хаббарда.

Чем больше прогресса достигается в получении теоретических решений, тем яснее становится, что эта простая модель может демонстрировать поразительный набор фаз и режимов, многие из которых имеют явные параллели с наблюдаемым поведением широкого спектра сложных материалов. Например, имеются убедительные доказательства того, что ферромагнетизм, различные формы антиферромагнетизма, нетрадиционная сверхпроводимость, волны зарядовой плотности, электронные жидкокристаллические фазы и топологически упорядоченные фазы (такие как «спиновые жидкости»), среди прочих фаз, встречаются в конкретных реализациях модели Хаббарда.

Роль модели Хаббарда в изучении высокотемпературной сверхпроводимости в купратах обсуждается в работе [4]. Также показано, что положительные собственные значения модели Хаббарда (соответствующие отталкивательным эффективным взаимодействиям) ослабевают, а отрицательные увеличиваются. Различные собственные функции соответствуют, но не определяются полностью неприводимым представлением точечной группы кристалла в модели Хаббарда. Однако о точных результатах для спектра и волновых функций кристалла, описываемого моделью Хаббарда, известно мало, поэтому получение соответствующих утверждений представляет большой интерес. Спектр и волновые функции системы двух электронов в кристалле, описываемой гамильтонианом Хаббарда, изучались в работе [11]. Известно, что двухэлектронные системы могут находиться в двух состояниях: триплетном и синглетном. В [11] доказано, что спектр гамильтониана системы H^t в триплетном состоянии является чисто непрерывным и совпадает с отрезком $[m, M] = [A - 2B\nu, A + 2B\nu]$, где ν — размерность решетки, а оператор H^s системы в синглетном состоянии, помимо непрерывного спектра $[m, M]$, имеет единственное антисвязанное состояние при некоторых значениях квазиимпульса.

В работе [19] исследованы спектр и волновые функции системы трёх электронов в кристалле, описываемой гамильтонианом Хаббарда. В трёхэлектронных системах существует квартетное состояние и два типа дублетных состояний. В работе [19] доказано, что существенный спектр системы в квартетном состоянии состоит из одного сегмента, а связанное трёхэлектронное состояние отсутствует. Также показано, что существенный спектр системы в дублетных состояниях представляет собой объединение не более трёх сегментов, и доказано, что связанные трёхэлектронные состояния существуют в дублетных состояниях. Кроме того, спектры этих дублетных состояний различны, т. е. эти два дублетных состояния имеют разное происхождение.

1.1. Постановка задачи. В работе [20, 21] исследованы спектр и волновые функции системы четырёх электронов в кристалле, описываемой гамильтонианом Хаббарда. В четырёхэлектронных системах существует шесть состояний: квинтетное, триплетное трёхтипное и синглетное двухтипные. В работе [20] исследованы спектр и волновые функции четырёхэлектронных систем в модели Хаббарда в триплетных состояниях. В работе [21] рассмотрены спектр и волновые функции четырёхэлектронных систем в модели Хаббарда в квинтетном и синглетном состояниях.

В работе [21] доказано, что существенный спектр системы в квинтетном состоянии чисто непрерывный и состоит из отрезка $[4A - 8B\nu, 4A + 8B\nu]$, а четырехэлектронное связанное состояние или четырехэлектронное антисвязанное состояние отсутствуют.

Естественным образом возникает вопрос: если рассматривать четырёхэлектронную систему в примесной модели Хаббарда, то как может измениться спектр системы? И собственно это привело нас к рассмотрению следующей задачи. Кроме того, интенсивное развитие физики плёнок, а также использование плёнок в различных областях физики и техники обуславливают большой интерес к изучению локальных примесных состояний магнетиков. Поэтому важно изучать спектральные свойства электронных систем в примесной модели Хаббарда. Спектр оператора энергии трёхэлектронных систем в примесной модели Хаббарда во втором дублетном состоянии исследовался в [2]. Структура существенных спектров и дискретного спектра трёхэлектронных систем в примесной модели Хаббарда в квинтетном состоянии изучалась в [22]. Структура существенных спектров и дискретного спектра двухэлектронных систем в примесной модели Хаббарда в синглетном состоянии исследовалась в работах С. Ташпулатова [23, 24].

2. ЧЕТЫРЁХЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ В ПРИМЕСНОЙ МОДЕЛИ ХАББАРДА. ВТОРОЕ СИНГЛЕТНОЕ СОСТОЯНИЕ

В настоящей работе рассматривается оператор энергии четырёхэлектронных систем в примесной модели Хаббарда и исследуется структура существенного и дискретного спектров системы для второго синглетного состояния. Гамильтониан выбранной модели имеет вид

$$H = A \sum_{m,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m,\gamma} + B \sum_{m,\tau,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m+\tau,\gamma} + U \sum_m a_{m,\uparrow}^+ a_{m,\uparrow} a_{m,\downarrow}^+ a_{m,\downarrow} + (A_0 - A) \sum_{\gamma} a_{0,\gamma}^+ a_{0,\gamma} + (B_0 - B) \sum_{\tau,\gamma} (a_{0,\gamma}^+ a_{\tau,\gamma} + a_{\tau,\gamma}^+ a_{0,\gamma}) + (U_0 - U) a_{0,\uparrow}^+ a_{0,\uparrow} a_{0,\downarrow}^+ a_{0,\downarrow}. \quad (2.1)$$

Здесь A (A_0) — энергия электрона в регулярном (примесном) узле решетки; B (B_0) — интеграл переноса между электронами (между электроном и примесью) в соседних узлах (для удобства будем считать, что $B > 0$ и $B_0 > 0$), $\tau = \pm e_j$ для $j = 1, 2, \dots, \nu$, где e_j — единичные взаимно ортогональные векторы, т. е. суммирование ведется по ближайшим соседям, U (U_0) — параметр внутриузельного кулоновского взаимодействия двух электронов, соответственно, в регулярном (примесном) узле решетки; γ — индекс спина, $\gamma = \uparrow, \downarrow, \uparrow$ или $\downarrow$ обозначают значения спина $\frac{1}{2}$ или $-\frac{1}{2}$, а $a_{m,\gamma}^+$ и $a_{m,\gamma}$ — соответствующие операторы рождения и уничтожения электрона в узле $m \in Z^\nu$.

Четырёхэлектронное второе синглетное состояние соответствует четырем связанным состояниям электронов (или антисвязанным состояниям) с базисными функциями: ${}^2s_{p,q,r,t}^0 = a_{p,\uparrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{t,\downarrow}^+ \varphi_0$. Подпространство ${}^2\tilde{H}_s^0$, соответствующее четырехэлектронному второму синглетному состоянию, представляет собой множество всех векторов вида

$${}^2\psi_s^0 = \sum_{p,q,r,t \in Z^\nu} f(p, q, r, t) {}^2s_{p,q,r,t}^0, \quad f \in l_2^{as},$$

где l_2^{as} — подпространство антисимметричных функций в $l_2((Z^\nu)^4)$.

В четырехэлектронных системах существуют квинтетные состояния, синглетные состояния двух типов и триплетные состояния трех типов.

Энергия системы зависит от ее полного спина S . Наряду с гамильтонианом, электронная система N_e характеризуется полным спином S , $S = S_{max}, S_{max} - 1, \dots, S_{min}$, $S_{max} = \frac{N_e}{2}$,

$S_{min} = 0, \frac{1}{2}$. Гамильтониан (2.1) коммутирует со всеми компонентами оператора полного спина $S = (S^+, S^-, S^z)$, поэтому структура собственных функций и собственных значений системы зависит от S .

Гамильтониан H действует в антисимметричном пространстве Фока $\tilde{\mathbb{H}}_{as}$. Пусть φ_0 — вакуумный вектор в пространстве $\tilde{\mathbb{H}}_{as}$.

Четырехэлектронное второе синглетное состояние соответствует свободному движению четырех электронов по решетке и их взаимодействию.

Обозначим через ${}^2H_s^0$ ограничение оператора H на подпространство ${}^2\tilde{\mathbb{H}}_s^0$. Оператор ${}^2H_s^0$ мы называем оператором четырехэлектронного второго синглетного состояния.

Теорема 2.1 (см. [21]). *Подпространство ${}^2\tilde{\mathbb{H}}_s^0$ инвариантно относительно оператора H , а оператор ${}^2H_s^0$ является ограниченным самосопряженным оператором. Он порождает ограниченный самосопряженный оператор ${}^2\overline{H}_s^0$, действующий в пространстве l_2^{as} следующим образом:*

$$\begin{aligned} {}^2H_s^0 {}^2\psi_s^0 = & 4Af(p, q, r, t) + B \sum_{\tau} \left[f(p+\tau, q, r, t) + f(p, q+\tau, r, t) + f(p, q, r+\tau, t) + f(p, q, r, t+\tau) \right] + \\ & + U(\delta_{p,q} + \delta_{p,t} + \delta_{q,r} + \delta_{r,t})f(p, q, r, t) + (A_0 - A)(\delta_{p,0} + \delta_{q,0} + \delta_{r,0} + \delta_{t,0})f(p, q, r, t) + \\ & + (B_0 - B) \sum_{\tau} \left[\delta_{p,0}f(\tau, q, r, t) + \delta_{q,0}f(p, \tau, r, t) + \delta_{r,0}f(p, q, \tau, t) + \delta_{t,0}f(p, q, r, \tau) + \right. \\ & \left. + \delta_{p,\tau}f(0, q, r, t) + \delta_{q,\tau}f(p, 0, r, t) + \delta_{r,\tau}f(p, q, 0, t) + \delta_{t,\tau}f(p, q, r, 0) \right] + \\ & + (U_0 - U) \left[\delta_{p,q}\delta_{p,0} + \delta_{q,r}\delta_{q,0} + \delta_{p,t}\delta_{p,0} + \delta_{r,t}\delta_{r,0} \right] f(p, q, r, t), \quad (2.2) \end{aligned}$$

где $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера. Оператор ${}^2H_s^0$ действует на вектор ${}^2\psi_s^0 \in {}^2\tilde{\mathbb{H}}_s^0$ следующим образом:

$${}^2H_s^0 {}^2\psi_s^0 = \sum_{p,q,r,t} ({}^2\overline{H}_s^0 f)(p, q, r, t) {}^2s_{p,q,r,t}^0. \quad (2.3)$$

Доказательство. Действуем гамильтонианом H на векторы $\psi \in {}^2\tilde{\mathbb{H}}_s^0$, используя стандартные антикоммутационные соотношения между операторами рождения и уничтожения электронов в узлах решетки, $\{a_{m,\gamma}, a_{n,\beta}^+\} = \delta_{m,n}\delta_{\gamma,\beta}$, $\{a_{m,\gamma}, a_{n,\beta}\} = \{a_{m,\gamma}^+, a_{n,\beta}^+\} = \theta$, а также учитываем, что $a_{m,\gamma}\varphi_0 = \theta$, где θ — нулевой элемент ${}^2\tilde{\mathbb{H}}_s^0$. Это даёт утверждение теоремы. $\square$

Лемма 2.1. *Спектры операторов ${}^2H_s^0$ и ${}^2\overline{H}_s^0$ совпадают.*

Доказательство. Поскольку ${}^2H_s^0$ и ${}^2\overline{H}_s^0$ являются ограниченными самосопряженными операторами, то отсюда следует, что если $\lambda \in \sigma({}^2H_s^0)$, то критерий Вейля (см. [16, гл. VII, с. 262-263]) подразумевает, что существует последовательность $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ такая, что $\psi_i = \sum_{p,q,r,t} f_i(p, q, r, t) {}^2s_{p,q,r,t}^0$, $\|\psi_i\| = 1$, и

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|({}^2H_s^0 - \lambda)\psi_i\| = 0. \quad (2.4)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|({}^2H_s^0 - \lambda)\psi_i\|^2 &= \|({}^2H_s^0 - \lambda)\psi_i, ({}^2H_s^0 - \lambda)\psi_i\| = \\ &= \sum_{p,q,r,t} \|({}^2\overline{H}_s^0 - \lambda)f_i(p, q, r, t)\|^2 (a_{p,\uparrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{t,\downarrow}^+ \varphi_0, a_{p,\uparrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{t,\downarrow}^+ \varphi_0) = \\ &= \sum_{p,q,r,t} \|({}^2\overline{H}_s^0 - \lambda)f_i(p, q, r, t)\|^2 (a_{t,\downarrow} a_{r,\uparrow} a_{q,\downarrow} a_{p,\uparrow} a_{p,\uparrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{t,\downarrow}^+ \varphi_0, \varphi_0) = \\ &= \sum_{p,q,r,t} \|({}^2\overline{H}_s^0 - \lambda)f_i(p, q, r, t)\|^2 (\varphi_0, \varphi_0) = \|({}^2\overline{H}_s^0 - \lambda)F_i\|^2 \end{aligned}$$

и $\|F_i\|^2 = \sum_{p,q,r,t} |f_i(p,q,r,t)|^2 = \|\psi_i\|^2 = 1$. Отсюда и из формул (2.4) следует, что $\|{}^2\overline{H}_s^0 F_i - \lambda F_i\| \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, и $F_i = \sum_{p,q,r,t} f_i(p,q,r,t)$. Следовательно, $\lambda \in \sigma({}^2\overline{H}_s^0)$. Таким образом, $\sigma({}^2H_s^0) \subset \sigma({}^2\overline{H}_s^0)$.

С другой стороны, пусть $\bar{\lambda} \in \sigma({}^2\overline{H}_s^0)$. Опять же по критерию Вейля существует последовательность $\{F_i\}_{i=1}^\infty$ такая, что $\|F_i\| = 1$ и

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|({}^2\overline{H}_s^0 - \bar{\lambda})\psi_i\| = 0. \quad (2.5)$$

Приняв $F_i = \sum_{p,q,r,t} f_i(p,q,r,t)$, имеем $\|F_i\| = \left(\sum_{p,q,r,t} |f_i(p,q,r,t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ и заключаем, что $\|\psi_i\| = \|F_i\| = 1$ и $\|({}^2\overline{H}_s^0 - \bar{\lambda})F_i\| = \|({}^2\overline{H}_s^0 - \bar{\lambda})\psi_i\| \rightarrow 0$, поскольку $i \rightarrow \infty$. Это означает, что $\bar{\lambda} \in \sigma({}^2H_s^0)$ и, следовательно, $\sigma({}^2\overline{H}_s^0) \subset \sigma({}^2H_s^0)$. Эти два отношения дают равенство $\sigma({}^2\overline{H}_s^0) = \sigma({}^2H_s^0)$. $\square$

Обозначим через F преобразование Фурье: $F : l_2((T^\nu)^4) \rightarrow L_2((T^\nu)^4) \equiv {}^2\tilde{H}_s^0$, где T^ν — это ν -мерный тор, наделенный нормализованной мерой Лебега $d\lambda$, $\lambda(T^\nu) = 1$.

Положим ${}^2\tilde{H}_s^0 = F {}^2\overline{H}_s^0 F^{-1}$. В квазиимпульсном представлении оператор ${}^2\overline{H}_s^0$ действует в гильбертовом пространстве $L_2^{as}((T^\nu)^4)$, где L_2^{as} — подпространство антисимметричных функций в $L_2((T^\nu)^4)$.

Теорема 2.2 (см. [21]). *Преобразование Фурье оператора ${}^2\overline{H}_s^0$ — это ограниченный самосопряженный оператор ${}^2\tilde{H}_s^0 = F {}^2\overline{H}_s^0 F^{-1}$, действующий в пространстве ${}^2\tilde{H}_s^0$ по формуле*

$$\begin{aligned} {}^2\tilde{H}_s^0 \{ {}^2\psi_s^0 \} = & \{ 4A + 2B \sum_{i=1}^\nu [\cos \lambda_i + \cos \mu_i + \cos \gamma_i + \cos \theta_i] \} \tilde{f}(\lambda, \mu, \gamma, \theta) + \\ & + U \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, \mu, \lambda + \gamma - s, \eta) ds + U \int_{T^\nu} \tilde{f}(t, \mu, \gamma, \lambda + \theta - t) dt + U \int_{T^\nu} \tilde{f}(\lambda, \xi, \mu + \gamma - \xi, \theta) d\xi + \\ & + U \int_{T^\nu} \tilde{f}(\lambda, \eta, \gamma, \mu + \theta - \eta) d\eta + \varepsilon_1 \left[\int_{T^\nu} f(s, \mu, \gamma, \theta) ds + \int_{T^\nu} f(\lambda, t, \gamma, \theta) dt + \right. \\ & + \int_{T^\nu} f(\lambda, \mu, \xi, \theta) d\xi + \int_{T^\nu} f(\lambda, \mu, \gamma, \eta) d\eta \left. \right] + 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \sum_{i=1}^\nu [\cos \lambda_i + \cos s_i] \times \\ & \times \tilde{f}(s, \mu, \gamma, \theta) ds + 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \sum_{i=1}^\nu [\cos \mu_i + \cos t_i] \tilde{f}(\lambda, t, \gamma, \theta) dt + 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \sum_{i=1}^\nu [\cos \gamma_i + \cos \xi_i] \times \\ & \times \tilde{f}(\lambda, \mu, \xi, \theta) d\xi + 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \sum_{i=1}^\nu [\cos \theta_i + \cos \eta_i] \tilde{f}(\lambda, \mu, \gamma, \eta) d\eta + \varepsilon_3 \left[\int_{T^\nu} \int_{T^\nu} f(s, \mu, \xi, \theta) ds d\xi + \right. \\ & + \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} f(\lambda, t, \xi, \theta) dt d\xi + \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} f(s, \mu, \gamma, \eta) ds d\eta + \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} f(\lambda, t, \xi, \theta) dt d\xi \left. \right]. \quad (2.6) \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы 2.2 рассмотрим преобразование Фурье (2.2).

Используя тензорные произведения гильбертовых пространств и тензорные произведения операторов в гильбертовых пространствах [17], можно проверить, что оператор ${}^2\tilde{H}_0^s$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} {}^2\tilde{H}_0^s = & \{ \tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1 + 2U \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, \lambda + \mu - s) ds + 2(U_0 - U) \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, t) ds dt \} \otimes \\ & \otimes I \otimes I + I \otimes I \otimes \{ \tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1 + 2U \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, \lambda + \mu - s) ds + 2(U_0 - U) \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, t) ds dt \}, \quad (2.7) \end{aligned}$$

где

$$(\tilde{H}_1 \tilde{f})(\lambda) = \{A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \lambda_i]\} \tilde{f}(\lambda) + \varepsilon_1 \int_{T^{\nu}} \tilde{f}(s) ds + 2\varepsilon_2 \sum_{i=1}^{\nu} \int_{T^{\nu}} [\cos \lambda_i + \cos s_i] f(s) ds$$

— оператор энергии одноэлектронных систем в примесной модели Хаббарда.

Спектральные свойства четырёхэлектронных систем в примесной модели Хаббарда в первом синглетном состоянии тесно связаны со свойствами её одноэлектронных подсистем в примесной модели Хаббарда. Поэтому сначала исследуется спектр и локализованные примесные состояния одноэлектронных систем.

Использование плёнок в различных областях физики и техники обуславливает большой интерес к изучению локализованного примесного состояния (ЛПС) магнетика. В связи с этим изучение спектральных свойств электронных систем в примесной модели Хаббарда представляется важным.

3. ОДНОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ В ПРИМЕСНОЙ МОДЕЛИ ХАББАРДА

Гамильтониан одноэлектронных систем в примесной модели Хаббарда имеет вид

$$H = A \sum_{m,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m,\gamma} + B \sum_{m,\tau,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m+\tau,\gamma} + (A_0 - A) \sum_{\gamma} a_{0,\gamma}^+ a_{0,\gamma} + (B_0 - B) \sum_{\tau,\gamma} (a_{0,\gamma}^+ a_{\tau,\gamma} + a_{\tau,\gamma}^+ a_{0,\gamma}), \quad (3.1)$$

где A (A_0) — энергия электрона в регулярном (примесном) узле решетки; $B > 0$ ($B_0 > 0$) — интеграл переноса между электронами (между электроном и примесью) в соседних узлах, $\tau = \pm e_j$, $j = 1, 2, \dots, \nu$, где e_j — единичные взаимно ортогональные векторы, что означает, что суммирование производится по ближайшим соседям; γ — индекс спина, $\gamma = \uparrow$ или $\gamma = \downarrow$, $\uparrow$ и $\downarrow$ обозначают значения спина $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$, а $a_{m,\gamma}^+$ и $a_{m,\gamma}$ — соответствующие операторы рождения и уничтожения электрона в узле $m \in Z^{\nu}$.

Обозначим через $\tilde{H}_1$ гильбертово пространство, натянутое на векторы вида $\psi = \sum_p a_{p,\uparrow}^+ \varphi_0$. Оно называется *пространством одноэлектронных состояний* оператора H . Пространство $\tilde{H}_1$ инвариантно относительно действия оператора H . Обозначим через $H_1 = H|_{\tilde{H}_1}$ ограничение H на подпространство $\tilde{H}_1$.

Как и при доказательстве теоремы 2.1, используя стандартные антикоммутационные соотношения между операторами рождения и уничтожения электронов в узлах решетки, получаем следующее утверждение.

Теорема 3.1 (см. [23]). *Подпространство $\tilde{H}_1$ инвариантно относительно действия оператора H , а ограничение H_1 является линейным ограниченным самосопряженным оператором, действующим в $\tilde{H}_1$ по формуле*

$$H_1 \psi = \sum_p (\bar{H}_1 f)(p) a_{p,\uparrow}^+ \varphi_0, \quad \psi \in \tilde{H}_1, \quad (3.2)$$

где $\bar{H}_1$ — линейный ограниченный самосопряженный оператор, действующий в пространстве l_2 по формуле

$$(\bar{H}_1 f)(p) = A f(p) + B \sum_{\tau} f(p + \tau) + \varepsilon_1 \delta_{p,0} f(p) + \varepsilon_2 \sum_{\tau} (\delta_{p,\tau} f(0) + \delta_{p,0} f(\tau)). \quad (3.3)$$

Лемма 3.1. *Спектры операторов $\bar{H}_1$ и H_1 совпадают.*

Доказательство леммы 3.1 аналогично доказательству леммы 2.1.

Как и в разделе 2, обозначим через $F: l_2(Z^{\nu}) \rightarrow L_2(T^{\nu}) \equiv \tilde{H}_1$ преобразование Фурье. Полагая $\tilde{H}_1 = F \bar{H}_1 F^{-1}$, получаем, что оператор $\bar{H}_1$ действует в гильбертовом пространстве $L_2(T^{\nu})$.

Используя равенство (3.3) и свойства преобразования Фурье, получаем следующее утверждение.

Теорема 3.2 (см. [23]). *Оператор $\tilde{H}_1$ действует в пространстве $\tilde{H}_1$ по формуле*

$$\begin{aligned}
(\tilde{H}_1 f)(\mu) &= [A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} \cos \mu_i] f(\mu) + \varepsilon_1 \int_{T^\nu} f(s) ds + \\
&+ 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \mu_i + \cos s_i] f(s) ds, \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n), s = (s_1, \dots, s_n) \in T^\nu. \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Ясно, что непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_1$ не зависит от чисел ε_1 и ε_2 и равен отрезку $[m_\nu, M_\nu] = [A - 2B\nu, A + 2B\nu]$, где $m_\nu = \min_{x \in T^\nu} h(x)$, $M_\nu = \max_{x \in T^\nu} h(x)$ (здесь $h(x) = A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} \cos x_i$).

Для нахождения собственных значений и собственных функций оператора $\tilde{H}_1$ перепишем (3.4) в следующем виде:

$$\{A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} \cos \mu_i - z\} f(\mu) + \varepsilon_1 \int_{T^\nu} f(s) ds + 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \mu_i + \cos s_i] f(s) ds = 0, \quad (3.5)$$

где $z \in \mathbb{R}$.

Пусть $\nu = 1$. Обозначим $a = \int_T f(s) ds$, $b = \int_T f(s) \cos s ds$, $h(\mu) = A + 2B \cos \mu$. Из (3.5) следует, что

$$f(\mu) = -\frac{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \cos \mu)a + 2\varepsilon_2 b}{h(\mu) - z}. \quad (3.6)$$

Теперь подставим (3.6) в выражение для a и b , что даёт следующую систему двух линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
(1 + \int_T \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \cos s}{h(s) - z} ds) a + 2\varepsilon_2 \int_T \frac{ds}{h(s) - z} b &= 0; \\
\int_T \frac{\cos s (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \cos s)}{h(s) - z} ds a + (1 + 2\varepsilon_2 \int_T \frac{\cos s ds}{h(s) - z}) b &= 0.
\end{aligned}$$

Эта система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель $\Delta_1(z)$ этой системы равен нулю, где

$$\Delta_1(z) = (1 + \int_T \frac{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \cos s) ds}{h(s) - z}) \cdot (1 + 2\varepsilon_2 \int_T \frac{\cos s ds}{h(s) - z}) - 2\varepsilon_2 \int_T \frac{ds}{h(s) - z} \int_T \frac{\cos s (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \cos s)}{h(s) - z} ds.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.2. Если действительное число $z \notin [m_1, M_1]$, то z является собственным значением оператора $\tilde{H}_1$ тогда и только тогда, когда $\Delta_1(z) = 0$.

Доказательство. Если z_0 является собственным значением оператора $\tilde{H}_1$, то правая часть (3.5) равна $z_0 f(\lambda)$. Следовательно, $\Delta_1(z_0) = 0$.

Теперь пусть $\Delta_1(z_0) = 0$. Тогда однородное уравнение

$$f(\lambda) + \varepsilon_1 \int_{T^\nu} \frac{f(s) ds}{A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} \cos s_i - z} + 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \frac{\sum_{i=1}^{\nu} [\cos s_i + \cos \lambda_i] ds}{A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} \cos s_i - z} = 0$$

имеет нетривиальное решение. Следовательно, число $z = z_0$ является собственным значением оператора $\tilde{H}_1$. $\square$

Спектр оператора $\tilde{H}_1$ подробно описан в работах [23] и [24]. Для полноты изложения приведем эти теоремы.

Теорема 3.3 (см. [23, 24]).

- A) Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -2B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 2B$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z = A + \varepsilon_1$, лежащее ниже (выше) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- B) Если $\varepsilon_1 < 0$ и $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ (соответственно, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z = A - \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$ (соответственно, $z = A + \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$), лежащее ниже (выше) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- C) Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ или $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$, то оператор $\tilde{H}_1$ имеет два собственных значения $z_1 = A - \frac{2BE}{\sqrt{E^2 - 1}}$ и $z_2 = A + \frac{2BE}{\sqrt{E^2 - 1}}$, где $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$, лежащие ниже и выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- D) Если $\varepsilon_1 = \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_1 = -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z = A + \frac{2B(E^2 + 1)}{E^2 - 1}$ (соответственно, $z = A - \frac{2B(E^2 + 1)}{E^2 - 1}$), где $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$, лежащее выше (ниже) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- E) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}$, где $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$ и $\alpha > 1$, лежащее выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- F) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1} < m_1$, где $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$ и $\alpha > 1$, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- G) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения $z_1 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1} < m_1$ и $z_2 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1} > M_1$, где $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$ и $0 < \alpha < 1$, лежащие соответственно ниже и выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- H) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $-\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $-\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения $z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1} < m_1$ и $z_2 = A - \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1} > M_1$, где $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$ и $0 < \alpha < 1$, лежащие, соответственно, ниже и выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- I) Если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то оператор $\tilde{H}_1$ не имеет собственных значений, лежащих вне непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

Доказательство. В одномерном случае непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_1$ совпадает с отрезком $[m_1, M_1] = [A - 2B, A + 2B]$. Выражая все интегралы в уравнении $\Delta_1(z) = 0$ через интеграл

$J(z) = \int_T \frac{ds}{A + 2B \cos s - z}$, находим, что уравнение $\Delta_1(z) = 0$ эквивалентно уравнению

$$[\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)]J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0. \quad (3.7)$$

Более того, функция $J(z) = \int_T \frac{ds}{A + 2B \cos s - z}$ является дифференцируемой функцией на множестве $\mathbb{R} \setminus [m_1, M_1]$, при этом $J'(z) = \int_T \frac{ds}{[A + 2B \cos s - z]^2} > 0, z \notin [m_1, M_1]$. Таким образом, функция $J(z)$ является монотонно возрастающей функцией на $(-\infty, m_1)$ и на $(M_1, +\infty)$. Кроме того, $J(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$, $J(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow m_1 - 0$, $J(z) \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow M_1 + 0$, и $J(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$.

Если $\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A) \neq 0$, то из (3.7) следует, что

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}.$$

Функция $\psi(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}$ имеет точку асимптотического разрыва $z_0 = A - \frac{B^2 \varepsilon_1}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. Так как $\psi'(z) = \frac{(B + \varepsilon_2)^2 (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{[\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)]^2}$ для всех $z \neq z_0$, то функция $\psi(z)$ является монотонно возрастающей (убывающей) функцией на $(-\infty, z_0)$ и на $(z_0, +\infty)$ в случае $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 > 0$ (соответственно, $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 < 0$), кроме того, и если $\varepsilon_2 > 0$, или $\varepsilon_2 < -2B$, тогда $\psi(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$, $\psi(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow z_0 - 0$, $\psi(z) \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow z_0 + 0$, $\psi(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$ (соответственно, если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, тогда $\psi(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow -\infty$, $\psi(z) \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow z_0 - 0$, $\psi(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow z_0 + 0$, $\psi(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow +\infty$).

А) Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -2B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 2B$), то уравнение для собственных значений и собственных функций (3.7) имеет вид

$$\{\varepsilon_1 B^2 - B^2(z - A)\}J(z) = 0. \quad (3.8)$$

Ясно, что $J(z) \neq 0$ для значений $z \notin \sigma_{cont}(\tilde{H}_1)$. Следовательно, $\varepsilon_1 - z + A = 0$, т. е. $z = A + \varepsilon_1$. Если $\varepsilon_1 < -2B$ ($\varepsilon_1 > 2B$), то это собственное значение лежит ниже (выше) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

В) Если $\varepsilon_1 < 0$ и $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ (соответственно $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$), то уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид $\varepsilon_1 B^2 J(z) + B^2 = 0$, т. е. $J(z) = -\frac{1}{\varepsilon_1}$. Ясно, что интеграл $J(z)$, вычисленный снизу (сверху) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$, больше (меньше) нуля, следовательно, $\varepsilon_1 < 0$ ($\varepsilon_1 > 0$). Вычисленный снизу непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ интеграл $J(z) = \int_{T^+} \frac{ds}{A + 2B \cos s - z}$ имеет уравнение вида

$$\frac{1}{\sqrt{(A - z)^2 - 4B^2}} = -\frac{1}{\varepsilon_1}.$$

Это уравнение имеет решение $z = A - \sqrt{\varepsilon_1^2 + 4B^2}$, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ уравнение принимает вид

$$-\frac{1}{\sqrt{(z - A)^2 - 4B^2}} = -\frac{1}{\varepsilon_1}.$$

Это уравнение имеет решение вида $z = A + \sqrt{\varepsilon_1^2 + 4B^2}$, лежащее выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

С) Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ или $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$, то уравнения для собственных значений и собственных функций принимают вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2$$

или

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}.$$

Обозначим $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. Тогда $J(z) = -\frac{E}{z - A}$ или $J(z) = \frac{E}{A - z}$. Ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имеем уравнение вида

$$\frac{1}{\sqrt{(A - z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A - z}.$$

Это уравнение имеет решение $z = A - \frac{2BE}{\sqrt{E^2 - 1}}$. Очевидно, что $E^2 > 1$. Это собственное значение, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид

$$-\frac{1}{\sqrt{(z - A)^2 - 4B^2}} = -\frac{E}{z - A}.$$

Отсюда находим $z = A + \frac{2BE}{\sqrt{E^2 - 1}}$. Это собственное значение лежит выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

D) Если $\varepsilon_1 = \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, то уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2B)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2.$$

Отсюда

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2B)}. \quad (3.9)$$

Обозначим $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. В первом случае рассмотрим уравнение (3.9) ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Из уравнения (3.9) получаем

$$\frac{1}{\sqrt{(A - z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A - z - 2B}.$$

Отсюда находим $z_1 = A + \frac{2B(E^2 + 1)}{E^2 - 1}$ и $z_2 = A - 2B$. Теперь проверим условия $z_i < A - 2B, i = 1, 2$. Неравенство $z_1 < A - 2B$ неверно, и неравенство $z_2 < A - 2B$ также неверно. Выше непрерывной части спектра имеем

$$-\frac{1}{\sqrt{(z - A)^2 - 4B^2}} = -\frac{E}{z - A + 2B}.$$

В этом уравнении находим решения для непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Проверим условия $z_i > A + 2B, i = 1, 2$. Неравенство $z_1 > A + 2B$ верно, а неравенство $z_2 > A + 2B$ неверно. Следовательно, в этом случае оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z_1 = A + \frac{2B(E^2 + 1)}{E^2 - 1}$, лежащее выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

Пусть $\varepsilon_1 = -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, тогда уравнение собственных значений и собственных функций примет вид

$$J(z) = -\frac{E}{z - A - 2B},$$

где $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$.

Ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имеем уравнение вида

$$\frac{1}{\sqrt{(A - z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A - z + 2B}.$$

Отсюда находим $z_1 = A - \frac{2B(E^2 + 1)}{E^2 - 1}$ и $z_2 = A + 2B$. Полученное неравенство $z_1 < A - 2B$ верно, а $z_2 < A - 2B$ неверно. В приведенном выше уравнении непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имеем уравнение вида

$$-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2 - 4B^2}} = -\frac{E}{z-A-2B}.$$

Отсюда следует, что $z_1 = A - \frac{2B(E^2 + 1)}{E^2 - 1}$ и $z_2 = A + 2B$. Неравенства $z_1 > A + 2B$ и $z_2 > A + 2B$ неверны. Следовательно, в этом случае оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z_1 = A - \frac{2B(E^2 + 1)}{E^2 - 1}$, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

Е) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то необходимо считать, что $\varepsilon_1 = \alpha \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, где $\alpha > 1$ — действительное число. Тогда уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид

$$\left\{ \alpha \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A) \right\} J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0$$

или

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2\alpha B)J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0.$$

Отсюда

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2\alpha B)}.$$

Обозначим $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$, тогда $J(z) = -\frac{E}{z - A + 2\alpha B}$. В первом случае рассмотрим это уравнение ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A - z - 2\alpha B}.$$

Это уравнение имеет решения

$$z_1 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad z_2 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}.$$

Теперь проверим условия $z_i < A - 2B$, $i = 1, 2$. Решение z_1 не удовлетворяет условию $z_1 < A - 2B$, но z_2 удовлетворяют условию $z_2 < A - 2B$. Теперь проверим условие $z_2 < A - 2\alpha B$. Оказывается, это неравенство неверно. Неравенство $z_1 > A + 2B$ верно, а $z_2 > A + 2B$ неверно. Проверим теперь условие $z_1 > A - 2\alpha B$. Поскольку $A - 2\alpha B < A + 2B$, это неравенство верно. Следовательно, в этом случае оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение

$$z_1 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1},$$

расположенное выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

Ф) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то мы предполагаем, что $\varepsilon_1 = -\alpha \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, где $\alpha > 1$ — действительное число. Уравнение для собственных значений и собственных функций принимает вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A - 2\alpha B)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2.$$

Отсюда

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A - 2\alpha B)}.$$

Вводим обозначение $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. Тогда

$$J(z) = -\frac{E}{z - A - 2\alpha B}. \quad (3.10)$$

Ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имеем уравнение

$$J(z) = \frac{E}{A - z + 2\alpha B},$$

откуда

$$\frac{1}{\sqrt{(A - z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A - z + 2\alpha B}.$$

Это уравнение принимает вид

$$(E^2 - 1)(A - z)^2 - 4\alpha B(A - z) - 4B^2(E^2 + \alpha^2) = 0.$$

Находим

$$z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad z_2 = A - \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}.$$

Теперь проверим условия $z_i < m_1 = A - 2B$, $i = 1, 2$. Видно, что $z_1 < A - 2B$ верно, а $z_2 < A - 2B$ неверно. Теперь рассмотрим уравнение (3.10) выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Тогда $J(z) = -\frac{E}{z - A - 2\alpha B}$. Отсюда

$$-\frac{1}{\sqrt{(z - A)^2 - 4B^2}} = -\frac{E}{z - A - 2\alpha B}.$$

Находим

$$z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad z_2 = A + \frac{2B(-\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}.$$

Проверяем условия $z_i > A + 2B$, $i = 1, 2$. Таким образом, $z_1 > A + 2B$ неверно, а $z_2 > A + 2B$ верно. Проверим теперь условие $z_2 > A + 2\alpha B$. Это неравенство неверно. Следовательно, в этом случае оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение

$$z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1} < m_1,$$

т. е. лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

Г) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$),

то мы предполагаем, что $\varepsilon_1 = \alpha \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, где $0 < \alpha < 1$ — действительное число. Уравнение для собственных значений и собственных функций принимает вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2\alpha B)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3.11)$$

Обозначим $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$.

Тогда уравнение (3.11) примет вид

$$J(z) = -\frac{E}{z - A + 2\alpha B}.$$

Ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имеем уравнение вида

$$\frac{1}{\sqrt{(A - z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A - z - 2\alpha B}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Это уравнение имеет решения

$$z_1 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad z_2 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}.$$

Неравенства $z_1 < A - 2B$ и $z_1 < A - 2\alpha B$ выполняются. Неравенство $z_2 < A - 2B$ верно, а неравенство $z_1 < A - 2B$ неверно. Проверим теперь условие $z_2 < A - 2\alpha B$. Так как $A - 2B < A - 2\alpha B$, это неравенство верно. Рассмотрим теперь уравнение (3.11) выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Уравнение имеет вид

$$-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2 - 4B^2}} = -\frac{E}{z-A+2\alpha B}.$$

Это уравнение имеет решения

$$z_1 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad z_2 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}.$$

Неравенства $z_1 > A + 2B$ и $z_1 > A - 2\alpha B$ верны. Так как $A + 2B > A - 2\alpha B$, то неравенство $z_1 > A - 2\alpha B$ верно. Неравенства $z_2 > A + 2B$ и $z_2 > A + 2\alpha B$ неверны. Следовательно, в этом случае оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения

$$z_1 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad z_2 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1},$$

лежащие снизу и сверху непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

Н) Если $-\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $-\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$), то принимаем $\varepsilon_1 = -\alpha\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, где $0 < \alpha < 1$ — действительное число. Тогда уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A - 2\alpha B)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Обозначим $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. Тогда уравнение (3.7) примет вид

$$J(z) = -\frac{E}{z - A - 2\alpha B}.$$

Внизу непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имеем уравнение вида

$$\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A-z+2\alpha B}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Решения этого уравнения:

$$z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad z_2 = A - \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}.$$

Неравенства $z_1 < A - 2B$ и $z_1 < A - 2\alpha B$ выполняются. Неравенства $z_2 < A - 2B$ верны, и неравенство $z_1 < A - 2B$ верно. Проверим теперь условие $z_2 < A - 2\alpha B$. Так как $A - 2B < A - 2\alpha B$, это неравенство неверно. Рассмотрим теперь уравнение (3.11) верхней части непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Мы имеем уравнение вида

$$-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2 - 4B^2}} = -\frac{E}{z-A+2\alpha B}.$$

Решения этого уравнения:

$$z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad z_2 = A - \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}.$$

Неравенства $z_1 > A + 2B$ и $z_1 > A - 2\alpha B$ неверны. Так как $A + 2B > A - 2\alpha B$, неравенство $z_1 > A - 2\alpha B$ неверно. Неравенства $z_2 > A + 2B$ и $z_2 > A + 2\alpha B$ верны. Следовательно, в этом случае оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения

$$z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad z_2 = A - \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1},$$

лежащие снизу и сверху непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

I) Если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 < 0$ и функция $\psi(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}$ является убывающей функцией в интервалах $(-\infty, z_0)$ и $(z_0, +\infty)$. Имеем $\psi(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow -\infty$; $\psi(z) \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow z_0 - 0$; $\psi(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow +\infty$; $\psi(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow z_0 + 0$. Также $J(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$; $J(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow m_1 - 0$; $J(z) \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow M_1 + 0$; $J(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$. Следовательно, уравнение $\psi(z) = J(z)$ не может иметь решений вне непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Следовательно, в этом случае оператор $\tilde{H}_1$ не имеет собственных значений, лежащих вне непрерывного спектра оператор $\tilde{H}_1$. $\square$

Теперь рассмотрим двумерный случай. В двумерном случае имеем, что уравнение $\Delta_2(z) = 0$ эквивалентно уравнению вида

$$(\varepsilon_2 + B)^2 + \{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)\}J(z) = 0,$$

где

$$J(z) = \int_{T^2} \frac{ds_1 ds_2}{A + 2B(\cos s_1 + \cos s_2) - z}.$$

В этом случае также $J(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $J(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow m_2 - 0$; $J(z) \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow M_2 + 0$; $J(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$. В одномерном и двумерном случаях поведение функции $J(z)$ аналогично. Следовательно, получаем аналогичные результаты для одномерного случая.

Рассмотрим трёхмерный случай. Обозначим через W интеграл Ватсона [25]:

$$W = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{3dx dy dz}{3 - \cos x - \cos y - \cos z} \cong 1,516.$$

Поскольку мера λ нормирована,

$$J = \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \frac{dx dy dz}{3 - \cos x - \cos y - \cos z} = \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \frac{dx dy dz}{3 + \cos x + \cos y + \cos z} = \frac{W}{3}.$$

В трёхмерном случае спектр оператора $\tilde{H}_1$ также хорошо описан в работах [23, 24]. Для полноты изложения приведём эти теоремы.

Теорема 3.4 (см. [23, 24]). Пусть $\nu = 3$. Тогда:

- A) 1) Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -6B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 6B$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z = A + \varepsilon_1$, лежащее ниже (выше) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
 2) Если $\varepsilon_2 = -B$ и $-6B \leq \varepsilon_1 < -2B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $2B < \varepsilon_1 \leq 6B$), то оператор $\tilde{H}_1$ не имеет собственных значений, лежащих ниже (выше) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- B) Если $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 < 0$, $\varepsilon_1 \leq -\frac{6B}{W}$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 \geq \frac{6B}{W}$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1 (соответственно, z_2), лежащее ниже (выше) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Если $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 < 0$ и $-\frac{6B}{W} \leq \varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 < 0$ и $0 < \varepsilon_1 \leq \frac{6B}{W}$), то оператор $\tilde{H}_1$ не имеет собственных значений вне непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- C) Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $E < W$ (соответственно, $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$, $E < W$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z ($\tilde{z}$), где $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$, лежащее ниже (выше) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $E > W$ (соответственно, $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$, $E > W$), то оператор $\tilde{H}_1$ не имеет собственных значений вне непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

- D) Если $\varepsilon_1 = \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $E < \frac{4}{3}W$ (соответственно, $\varepsilon_1 = -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $E < \frac{4}{3}W$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z (соответственно, $\tilde{z}$), лежащее выше (ниже) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- E) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z , лежащее выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- F) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1 , лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- G) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)W < E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)W < E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения z_1 и z_2 , лежащие выше и ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- H) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $-\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$ и $\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)W < E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $-\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$ и $\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)W < E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения z_1 и z_2 , лежащие выше и ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.
- I) Если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то оператор $\tilde{H}_1$ не имеет собственных значений, лежащих вне непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

Доказательство. В случае $\nu = 3$ непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_1$ совпадает с отрезком $[m_3, M_3] = [A - 6B, A + 6B]$. Выражая все интегралы в уравнении

$$\Delta_3(z) = \left(1 + \int_{T^3} \frac{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \sum_{i=1}^3 \cos s_i) ds_1 ds_2 ds_3}{A + 2B \sum_{i=1}^3 \cos s_i - z}\right) \left(1 + 6\varepsilon_2 \int_{T^3} \frac{\cos s_i ds_1 ds_2 ds_3}{A + 2B \sum_{i=1}^3 \cos s_i - z}\right) -$$

$$- 6\varepsilon_2 \int_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{A + 2B \sum_{i=1}^3 \cos s_i - z} \int_{T^3} \frac{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \sum_{i=1}^3 \cos s_i) \cos s_1 ds_1 ds_2 ds_3}{A + 2B \sum_{i=1}^3 \cos s_i - z} = 0$$

через интеграл $J(z) = \int_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{A + 2B \sum_{i=1}^3 \cos s_i - z}$, мы находим, что уравнение $\Delta_3(z) = 0$ эквивалентно

$$\text{уравнению } [\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)] J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0.$$

Более того, функция $J(z) = \int_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{A + 2B \sum_{i=1}^3 \cos s_i - z}$ является дифференцируемой функцией на

множестве $\mathbb{R} \setminus [m_3, M_3]$ с производной $J'(z) = \int_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{[A + 2B \sum_{i=1}^3 \cos s_i - z]^2} > 0, z \notin [m_3, M_3]$.

В трехмерном случае интеграл $\int_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{3 + \cos s_1 + \cos s_2 + \cos s_3} = \int_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{3 - \cos s_1 - \cos s_2 - \cos s_3}$ имеет конечное значение, равное $\frac{W}{3}$. Выражая эти интегралы через интеграл Ватсона и учитывая, что мера нормирована, имеем, что $J(z) = \frac{W}{6B}$. Таким образом, функция $J(z)$ является монотонно возрастающей функцией как на $(-\infty, m_3)$, так и на $(M_3, +\infty)$. Кроме того, в трехмерном случае $J(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $J(z) = \frac{W}{6B}$ при $z = A - 6B$; $J(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$; $J(z) = -\frac{W}{6B}$ при $z = A + 6B$.

Если $\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A) \neq 0$, то из (3.7) следует, что

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}.$$

Функция $\psi(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}$ имеет точку асимптотического разрыва $z_0 = A - \frac{B^2 \varepsilon_1}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. Так как $\psi'(z) = \frac{(B + \varepsilon_2)^2 (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{[\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)]^2}$ для всех $z \neq z_0$, то функция $\psi(z)$ является монотонно возрастающей (убывающей) функцией на $(-\infty, z_0)$ и на $(z_0, +\infty)$ в случае $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 > 0$ (соответственно, $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 < 0$), кроме того, если $\varepsilon_2 > 0$ или $\varepsilon_2 < -2B$, то $\psi(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$, $\psi(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow z_0 - 0$, $\psi(z) \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow z_0 + 0$, $\psi(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$ (соответственно, если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то $\psi(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow -\infty$, $\psi(z) \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow z_0 - 0$, $\psi(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow z_0 + 0$, $\psi(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow +\infty$).

А) Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -6B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 6B$), то уравнение для собственных значений и собственных функций (3.7) имеет вид (3.8):

$$\{\varepsilon_1 B^2 - B^2(z - A)\}J(z) = 0.$$

Ясно, что $J(z) \neq 0$ для значений $z \notin \sigma_{cont}(\tilde{H}_1)$. Следовательно, $\varepsilon_1 - z + A = 0$, т. е. $z = A + \varepsilon_1$. Если $\varepsilon_1 < -6B$ ($\varepsilon_1 > 6B$), то это собственное значение, лежащее ниже (выше) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Если $-6B \leq \varepsilon_1 < -2B$ (соответственно, $2B < \varepsilon_1 \leq 6B$), то это собственное значение, не лежащее вне непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

В) Если $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 > 0$), то уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид $\varepsilon_1 B^2 J(z) + B^2 = 0$, т. е. $J(z) = -\frac{1}{\varepsilon_1}$. В трехмерном случае $J(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $J(z) = \frac{W}{6B}$ при $z = A - 6B$; $J(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$; $J(z) = -\frac{W}{6B}$ при $z = A + 6B$. Следовательно, для того чтобы уравнение $J(z) = -\frac{1}{\varepsilon_1}$ в области снизу (соответственно, сверху) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имело решение, необходимо выполнение неравенства $-\frac{1}{\varepsilon_1} < \frac{W}{6B}$ (соответственно, $-\frac{1}{\varepsilon_1} > -\frac{W}{6B}$), т. е. $\varepsilon_1 < -\frac{6B}{W}$, $\varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_1 > \frac{6B}{W}$, $\varepsilon_1 > 0$). Если $-\frac{6B}{W} < \varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $0 < \varepsilon_1 < \frac{6B}{W}$), то оператор $\tilde{H}_1$ не имеет собственных значений вне непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

С) Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ (соответственно, $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$), то уравнения для собственных значений и собственных функций принимают вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2$$

или

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}.$$

Обозначим $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. Тогда $J(z) = -\frac{E}{z - A}$ или $J(z) = \frac{E}{A - z}$. В трехмерном случае $J(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $J(z) = \frac{W}{6B}$ при $z = A - 6B$; $J(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$; $J(z) = -\frac{W}{6B}$ при

$z = A + 6B$. Поэтому, для того чтобы уравнение $J(z) = -\frac{E}{z-A}$ снизу (соответственно, сверху) непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имело решение, необходимо выполнение неравенства $\frac{E}{6B} < \frac{W}{6B}$ (соответственно, $-\frac{E}{6B} > -\frac{W}{6B}$), т. е. $E < W$. Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $E > W$ (соответственно, $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$, $E > W$), то оператор $\tilde{H}_1$ не имеет собственных значений вне непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

D) Если $\varepsilon_1 = \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, то уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2B)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2,$$

откуда имеем уравнение вида (3.9):

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2B)}.$$

Обозначим $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. В первом случае рассмотрим уравнение (3.9) снизу непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. В области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$, функция $\frac{E}{A - z - 2B} \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $\frac{E}{A - z - 2B} = \frac{E}{4B}$ при $z = A - 6B$; а в трехмерном случае $J(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $J(z) = \frac{W}{6B}$ при $z = A - 6B$; $J(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$; $J(z) = -\frac{W}{6B}$ при $z = A + 6B$. Следовательно, уравнение $J(z) = \frac{E}{A - z - 2B}$ имеет единственное решение, если $\frac{E}{4B} > \frac{W}{6B}$, т. е. $E > \frac{2W}{3}$. Это неравенство неверно. Следовательно, уравнение $\tilde{H}_1$ не имеет решения.

Рассмотрим теперь уравнение для собственных значений и собственных функций $J(z) = -\frac{E}{z - A + 2B}$ сверху непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ функция $\frac{E}{A - z - 2B} \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$; $\frac{E}{A - z - 2B} = -\frac{E}{8B}$ при $z = A + 6B$; а в трехмерном случае $J(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$; и $J(z) = -\frac{W}{6B}$ при $z = A + 6B$. Следовательно, выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ уравнение $J(z) = \frac{E}{A - z - 2B}$ имеет единственное решение, если $-\frac{E}{8B} > -\frac{W}{6B}$, т. е. $E < \frac{4W}{3}$. Это неравенство верно. Следовательно, из условия непрерывности спектра оператора $\tilde{H}_1$ следует, что это уравнение имеет единственное решение z .

Если $\varepsilon_1 = -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, то уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A - 2B)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2,$$

отсюда уравнение вида (3.9):

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2B)}.$$

Обозначим $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. В первом случае рассмотрим уравнение (3.9) ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ функция $\frac{E}{A - z + 2B} \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $\frac{E}{A - z + 2B} = \frac{E}{8B}$ при $z = A - 6B$; а в трехмерном случае $J(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $J(z) = \frac{W}{6B}$ при $z = A - 6B$; $J(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$; $J(z) = -\frac{W}{6B}$ при $z = A + 6B$. Следовательно,

уравнение $J(z) = \frac{E}{A - z + 2B}$ имеет единственное решение, если $\frac{E}{8B} < \frac{W}{6B}$, т. е. $E < \frac{4W}{3}$. Это неравенство верно. Следовательно, уравнение $\tilde{H}_1$ имеет единственное решение.

Рассмотрим теперь уравнение для собственных значений и собственных функций $J(z) = -\frac{E}{z - A - 2B}$, выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ функция $\frac{E}{A - z + 2B} \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$; $\frac{E}{A - z + 2B} = -\frac{E}{4B}$ при $z = A + 6B$; а в трехмерном случае $J(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$; $J(z) = -\frac{W}{6B}$ при $z = A + 6B$. Следовательно, выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ уравнение $J(z) = \frac{E}{A - z + 2B}$ имеет единственное решение, если $-\frac{E}{4B} > -\frac{W}{6B}$, т. е. $E < \frac{2W}{3}$. Это неравенство неверно. Следовательно, это уравнение не имеет решения.

Е) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то необходимо считать, что $\varepsilon_1 = \alpha \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, где $\alpha > 1$ — действительное число. Тогда уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид

$$\left\{ \alpha \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A) \right\} J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0$$

или

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2\alpha B)J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0.$$

Отсюда $J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2\alpha B)}$. Обозначим $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$, тогда $J(z) = -\frac{E}{z - A + 2\alpha B}$. В первом случае мы рассматриваем это уравнение ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Тогда $J(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $J(z) = \frac{W}{6B}$ при $z = A - 6B$; $-\frac{E}{z - A + 2\alpha B} \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $-\frac{E}{z - A + 2\alpha B} = \frac{E}{(6 - 2\alpha)B}$ при $z = A - 6B$. Уравнение

$$J(z) = -\frac{E}{z - A + 2\alpha B}$$

имеет единственное решение, если $\frac{E}{(6 - 2\alpha)B} < \frac{W}{6B}$. Отсюда $E < \frac{(3 - \alpha)W}{3}$. Это неравенство неверно. Следовательно, ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$, оператор $\tilde{H}_1$ не имеет собственных значений.

Выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имеем $J(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$; $J(z) = -\frac{W}{6B}$ при $z = A - 6B$. Кроме того, $-\frac{E}{z - A + 2\alpha B} \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$; $-\frac{E}{z - A + 2\alpha B} = -\frac{E}{6B + 2\alpha B}$ при $z = A + 6B$.

Уравнение

$$J(z) = -\frac{E}{z - A + 2\alpha B}$$

имеет единственное решение, если $-\frac{E}{(6 + 2\alpha)B} > -\frac{W}{6B}$. Отсюда $E < \frac{(3 + \alpha)W}{3}$. Это неравенство верно. Следовательно, из вышесказанного следует, что ниже непрерывного спектра оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1 .

Ф) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то мы предполагаем, что $\varepsilon_1 = -\alpha \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, где $\alpha > 1$ — действительное число. Уравнение для

собственных значений и собственных функций принимает вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A - 2\alpha B)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2.$$

Отсюда

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A - 2\alpha B)}.$$

Вводим обозначение $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. Тогда уравнение принимает вид

$$J(z) = -\frac{E}{z - A - 2\alpha B}. \quad (3.12)$$

Ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имеем уравнение

$$J(z) = \frac{E}{A - z + 2\alpha B}.$$

Ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1 - \frac{E}{z - A - 2\alpha B} \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $-\frac{E}{z - A - 2\alpha B} = \frac{E}{6B + 2\alpha B}$ при $z = A - 6B$.
Уравнение

$$J(z) = -\frac{E}{z - A + 2\alpha B}$$

имеет единственное решение, если $\frac{E}{(6 + 2\alpha)B} < \frac{W}{6B}$. Отсюда $E < \frac{(3 + \alpha)W}{3}$. Это неравенство верно. Следовательно, ниже непрерывного спектра оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение.

Выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1 - \frac{E}{z - A - 2\alpha B} \rightarrow -0$ при $z \rightarrow -\infty$; имеем $-\frac{E}{z - A - 2\alpha B} = -\frac{E}{6B - 2\alpha B}$ при $z = A + 6B$. Следовательно, выше непрерывного спектра оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение, если $-\frac{E}{6B - 2\alpha B} > -\frac{W}{6B}$. Отсюда $E < \frac{(3 - \alpha)W}{3}$, что неверно. Следовательно, выше непрерывного спектра оператор $\tilde{H}_1$ не имеет собственных значений.

Г) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то принимаем $\varepsilon_1 = \alpha \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, где $0 < \alpha < 1$ — действительное число. Тогда уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2\alpha B)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2, 0 < \alpha < 1. \quad (3.13)$$

Обозначим $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. Тогда уравнение (3.13) примет вид

$$J(z) = -\frac{E}{z - A + 2\alpha B}.$$

Ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имеем $-\frac{E}{z - A + 2\alpha B} \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $-\frac{E}{z - A + 2\alpha B} = \frac{E}{2B(3 - \alpha)}$ при $z = A - 6B$. Уравнение

$$J(z) = -\frac{E}{z - A + 2\alpha B}$$

имеет единственное решение ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$, если $\frac{E}{(6-2\alpha)B} > \frac{W}{6B}$. Отсюда $E > \frac{(3-\alpha)W}{3}$. Это неравенство справедливо. Следовательно, ниже непрерывного спектра оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1 .

Выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имеем $-\frac{E}{z-A+2\alpha B} \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$; $-\frac{E}{z-A+2\alpha B} = -\frac{E}{2B(3+\alpha)}$ при $z = A+6B$. Уравнение

$$J(z) = -\frac{E}{z-A+2\alpha B}$$

имеет единственное решение выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$, если $-\frac{E}{2B(3+\alpha)} > -\frac{W}{6B}$, т. е. $E < \frac{(3+\alpha)W}{3}$. Это неравенство верно.

Следовательно, в этом случае оператор $\tilde{H}_1$ имеет два собственных значения z_1 и z_2 , лежащие снизу и сверху непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$.

Н) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $-\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $-\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$), то принимаем $\varepsilon_1 = -\alpha \times \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$, где $0 < \alpha < 1$ — действительное число. Тогда уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид (3.13):

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A - 2\alpha B)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Обозначим $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. Тогда уравнение (3.13) примет вид

$$J(z) = -\frac{E}{z-A-2\alpha B}.$$

Ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имеем $-\frac{E}{z-A-2\alpha B} \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $-\frac{E}{z-A-2\alpha B} = \frac{E}{2B(3+\alpha)}$ при $z = A-6B$. Уравнение

$$J(z) = -\frac{E}{z-A-2\alpha B}$$

имеет единственное решение ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$, если $\frac{E}{(6+2\alpha)B} < \frac{W}{6B}$. Отсюда $E < \frac{(3+\alpha)W}{3}$. Это неравенство справедливо. Следовательно, ниже непрерывного спектра оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1 .

Выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$ имеем $-\frac{E}{z-A-2\alpha B} \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$; $-\frac{E}{z-A-2\alpha B} = -\frac{E}{2B(3-\alpha)}$ при $z = A+6B$. Уравнение

$$J(z) = -\frac{E}{z-A-2\alpha B}$$

имеет единственное решение выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$, если $-\frac{E}{2B(3-\alpha)} < -\frac{W}{6B}$, т. е. $E > \frac{(3-\alpha)W}{3}$. Это неравенство верно.

Следовательно, в этом случае оператор $\tilde{H}_1$ имеет два собственных значения z_1 и z_2 , лежащие ниже и выше непрерывного спектра $\tilde{H}_1$.

I) Если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 < 0$, и функция $\psi(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}$ является убывающей функцией на интервалах $(-\infty, z_0)$ и $(z_0, +\infty)$. Имеем $\psi(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow -\infty$; $\psi(z) \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow z_0 - 0$; $\psi(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow +\infty$; $\psi(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow z_0 + 0$. Также $J(z) \rightarrow +0$ при $z \rightarrow -\infty$; $J(z) = \frac{W}{6B}$ при $z = A - 6B$; $J(z) = \frac{W}{6B}$ при $z = A + 6B$; $J(z) \rightarrow -0$ при $z \rightarrow +\infty$. Следовательно, уравнение $\psi(z) = J(z)$ не может иметь решений вне непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Значит, в этом случае оператор $\tilde{H}_1$ не имеет собственных значений, лежащих вне непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. $\square$

Из полученных результатов очевидно, что спектр оператора $\tilde{H}_1$ состоит из непрерывного спектра и не более, чем из двух собственных значений.

Спектр оператора $A \otimes I + I \otimes B$, где A и B — плотно определённые ограниченные линейные операторы, изучался в [7, 8]. Там же приведены явные формулы, выражающие существенный спектр $\sigma_{ess}(A \otimes I + I \otimes B)$ и дискретный спектр $\sigma_{disc}(A \otimes I + I \otimes B)$ оператора $A \otimes I + I \otimes B$ через спектр $\sigma(A)$ и дискретный спектр $\sigma_{disc}(A)$ оператора A , а также через спектр $\sigma(B)$ и дискретный спектр $\sigma_{disc}(B)$ оператора B :

$$\sigma_{disc}(A \otimes I + I \otimes B) = \{\sigma(A) \setminus \sigma_{ess}(A) + \sigma(B) \setminus \sigma_{ess}(B)\} \cup \{(\sigma_{ess}(A) + \sigma(B)) \cup (\sigma(A) + \sigma_{ess}(B))\}, \quad (3.14)$$

и

$$\sigma_{ess}(A \otimes I + I \otimes B) = (\sigma_{ess}(A) + \sigma(B)) \cup (\sigma(A) + \sigma_{ess}(B)) \quad (3.15)$$

Ясно, что $\sigma(A \otimes I + I \otimes B) = \{\lambda + \mu : \lambda \in \sigma(A), \mu \in \sigma(B)\}$.

Из представления (2.7) видно, что сначала необходимо исследовать спектры оператора

$$\tilde{H}_2 = \tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1 + 2U \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, \lambda + \mu - s) ds + 2\varepsilon_3 \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, t) ds dt.$$

4. СТРУКТУРА СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА И ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ВТОРОГО СИНГЛЕТНОГО СОСТОЯНИЯ

Пусть оператор представлен в виде

$${}^2\tilde{H}_s^0 = \tilde{H}_2 \otimes I \otimes I + I \otimes I \otimes \tilde{H}_2. \quad (4.1)$$

Сначала рассмотрим оператор

$$\tilde{H}(U) = \tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1 + 2U \int_{T^\nu} f(s, \lambda + \mu - s) ds.$$

Поскольку семейство операторов $\tilde{H}(U)$ является семейством ограниченных операторов, то $\tilde{H}(U)$ является семейством ограниченных операторнозначных аналитических функций. Следовательно, к этому семейству применима теорема Като—Реллиха.

Теорема 4.1 (теорема Като—Реллиха, см. [17]). Пусть $T(\beta)$ — аналитическое по Като семейство. Пусть E_0 — невырожденное собственное значение $T(\beta_0)$. Тогда при приближении β к β_0 найдётся ровно одна точка $E(\beta) \in \sigma(T(\beta))$ вблизи E_0 , и эта точка изолирована и невырождена. $E(\beta)$ является аналитической функцией по β , поскольку при приближении β к β_0 , существует аналитический собственный вектор $\Omega(\beta)$. Если при действительном $\beta - \beta_0$ оператор $T(\beta)$ является самосопряжённым оператором, то $\Omega(\beta)$ можно выбрать таким образом, чтобы он был нормализован относительно действительного $\beta - \beta_0$.

Поскольку оператор $\tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1$ имеет невырожденное собственное значение, например, близкое к собственному значению $2z_1$ оператора $\tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1$, то оператор $\tilde{H}(U)$ при U , вблизи $U_0 = 0$, имеет ровно одно собственное значение $E(U) \in \sigma(\tilde{H}(U))$, близкое к $2z_1$, и эта точка изолирована и невырождена. $E(U)$ является аналитической функцией U при U , близком к $U_0 = 0$.

При больших значениях существование не более одного дополнительного собственного значения оператора $\tilde{H}(U)$ следует из того же, что возмущение $(K_1 \tilde{f})(\lambda, \mu) = 2U \int_{T^\nu} f(s, \lambda + \mu - s) ds$

является одномерным оператором при фиксированном значении полного квазиимпульса двух электронов. Это дополнительное собственное значение оператора $\tilde{H}_2$ обозначим через z_3 .

Рассмотрим новое семейство операторов

$$\tilde{H}(\varepsilon_3) = \tilde{H}(U) + 2\varepsilon_3 \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, t) ds dt.$$

У оператора $\tilde{H}(U)$ есть невырожденное собственное значение вблизи собственного значения $E(U)$ оператора $\tilde{H}(U)$, оператор $\tilde{H}(\varepsilon_3)$ в окрестности точки $\varepsilon_3 = 0$ имеет ровно одно собственное значение $E(\varepsilon_3) \in \sigma(\tilde{H}(\varepsilon_3))$ в окрестности $E(U)$, и эта точка является изолированной и невырожденной. Функция $E(\varepsilon_3)$ аналитична по ε_3 вблизи $\varepsilon_3 = 0$.

Так как оператор $\tilde{H}(U)$ имеет невырожденное собственное значение, следовательно, оператор $\tilde{H}(U)$, оператор $\tilde{H}(\varepsilon_3)$ при ε_3 , близком к $\varepsilon_3 = 0$, имеет ровно одно собственное значение $E(\varepsilon_3) \in \sigma(\tilde{H}(\varepsilon_3))$ в окрестности $E(U)$, и эта точка является изолированной и невырожденной. $E(\varepsilon_3)$ является аналитической функцией ε_3 вблизи $\varepsilon_3 = 0$.

Эти собственные значения мы обозначим через z_4 .

Теперь, используя полученные результаты (теоремы (3.3) и (3.4)) и представления (2.7) и (4.1), опишем структуру существенного спектра и дискретного спектра оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$.

Теорема 4.2 (см. [21]). Пусть $\nu = 1$. Тогда:

- A) Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -2B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 2B$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z, 3A + 6B + z] \cup [2A - 4B + 2z, 2A + 4B + 2z] \cup [A - 2B + 3z, A + 2B + 3z] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [A - 2B + z + z_3, A + 2B + z + z_3] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + z + z_4, A + 2B + z + z_4]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z, 2z + z_3, 2z + z_4, 2z_3, 2z_4, z_3 + z_4\}$, где $z = A + \varepsilon_1$, а z_3 и z_4 — дополнительные собственные значения оператора $\tilde{H}_2$.
- B) Если $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 > 0$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z, 3A + 6B + z] \cup [2A - 4B + 2z, 2A + 4B + 2z] \cup [A - 2B + 3z, A + 2B + 3z] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [A - 2B + z + z_3, A + 2B + z + z_3] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + z + z_4, A + 2B + z + z_4]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z, 2z + z_3, 2z + z_4, 2z_3, 2z_4, z_3 + z_4\}$, где $z = A - \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$ (соответственно $z = A + \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$).
- C) Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ или $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$, то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения тринадцати отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z_1, 3A + 6B + z_1] \cup [3A - 6B + z_2, 3A + 6B + z_2] \cup [2A - 4B + 2z_1, 2A + 4B + 2z_1] \cup [2A - 4B + 2z_2, 2A + 4B + 2z_2] \cup [A - 2B + 3z_1, A + 2B + 3z_1] \cup [A - 2B + 3z_2, A + 2B + 3z_2] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + z_1 + z_4, A + 2B + z_1 + z_4] \cup [A - 2B + z_2 + z_4, A + 2B + z_2 + z_4] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [A - 2B + z_1 + z_3, A + 2B + z_1 + z_3] \cup [A - 2B + z_2 + z_3, A + 2B + z_2 + z_3]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из девяти собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z_1, 2z_1 + z_4, 4z_2, 2z_2 + z_4, 2z_1 + z_3, 2z_2 + z_3, z_3 + z_4, 2z_3, 2z_4\}$, где $z_1 = A - \frac{2BE}{\sqrt{E^2 - 1}}$ и $z_2 = A + \frac{2BE}{\sqrt{E^2 - 1}}$ и $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$.
- D) Если $\varepsilon_1 = \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_1 = -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z, 3A + 6B + z] \cup [2A - 4B + 2z, 2A + 4B + 2z] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + 3z, A + 2B + 3z] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [A - 2B + z + z_3, A + 2B + z + z_3] \cup [A - 2B + z + z_4, A + 2B + z + z_4]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений:

$\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z, 2z + z_3, 2z + z_4, 2z_3, 2z_4, z_3 + z_4\}$, где $z = A + \frac{2B(E^2 + 1)}{E^2 - 1}$ (соответственно, $z = A - \frac{2B(E^2 + 1)}{E^2 - 1}$) и $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$.

- Е) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z, 3A + 6B + z] \cup [2A - 4B + 2z, 2A + 4B + 2z] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + 3z, A + 2B + 3z] \cup [2A - 4B + z + z_4, 2A + 4B + z + z_4] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [A - 2B + z + z_3, A + 2B + z + z_3]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z, 2z + z_4, 2z + z_3, 2z_3, 2z_4, z_3 + z_4\}$, где $z = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}$ и $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$, а $\alpha > 1$ — действительное число.
- Ф) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z, 3A + 6B + z] \cup [2A - 4B + 2z, 2A + 4B + 2z] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + 3z, A + 2B + 3z] \cup [2A - 4B + z + z_4, 2A + 4B + z + z_4] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [A - 2B + z + z_3, A + 2B + z + z_3]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z, 2z + z_4, 2z + z_3, 2z_3, 2z_4, z_3 + z_4\}$, где $z = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}$ и $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$, а $\alpha > 1$ — действительное число.
- Г) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения шестнадцати отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z_1, 3A + 6B + z_1] \cup [3A - 6B + z_2, 3A + 6B + z_2] \cup [2A - 4B + 2z_1, 2A + 4B + 2z_1] \cup [2A - 4B + 2z_2, 2A + 4B + 2z_2] \cup [2A - 4B + z_1 + z_2, 2A + 4B + z_1 + z_2] \cup [A - 2B + 3z_1, A + 2B + 3z_1] \cup [A - 2B + 3z_2, A + 2B + 3z_2] \cup [A - 2B + 2z_1 + z_2, A + 2B + 2z_1 + z_2] \cup [A - 2B + z_1 + 2z_2, A + 2B + z_1 + 2z_2] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + z_1 + z_3, A + 2B + z_1 + z_3] \cup [A - 2B + z_1 + z_4, A + 2B + z_1 + z_4] \cup [A - 2B + z_2 + z_3, A + 2B + z_2 + z_3] \cup [A - 2B + z_2 + z_4, A + 2B + z_2 + z_4, 2z_4]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из четырнадцати собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z_1, 3z_1 + z_2, 2z_1 + 2z_2, z_1 + 3z_2, 4z_2, 2z_1 + z_3, z_1 + z_2 + z_3, 2z_2 + z_3, 2z_1 + z_4, 2z_2 + z_4, z_1 + z_2 + z_4, z_3 + z_4, 2z_3, 2z_4\}$, где $z_1 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}$, $z_2 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}$ и $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$ с действительным числом $0 < \alpha < 1$.
- Н) Если $\varepsilon_2 > 0$ и $-\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $-\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения шестнадцати отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z_1, 3A + 6B + z_1] \cup [3A - 6B + z_2, 3A + 6B + z_2] \cup [2A - 4B + 2z_1, 2A + 4B + 2z_1] \cup [2A - 4B + 2z_2, 2A + 4B + 2z_2] \cup [2A - 4B + z_1 + z_2, 2A + 4B + z_1 + z_2] \cup [A - 2B + 3z_1, A + 2B + 3z_1] \cup [A - 2B + 3z_2, A + 2B + 3z_2] \cup [A - 2B + 2z_1 + z_2, A + 2B + 2z_1 + z_2] \cup [A - 2B + z_1 + 2z_2, A + 2B + z_1 + 2z_2] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + z_1 + z_3, A + 2B + z_1 + z_3] \cup [A - 2B + z_1 + z_4, A + 2B + z_1 + z_4] \cup [A - 2B + z_2 + z_3, A + 2B + z_2 + z_3] \cup [A - 2B + z_2 + z_4, A + 2B + z_2 + z_4]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из четырнадцати собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z_1, 3z_1 + z_2, 2z_1 + 2z_2, z_1 + 3z_2, 4z_2, 2z_1 + z_3, z_1 + z_2 + z_3, 2z_2 + z_3, 2z_1 + z_4, 2z_2 + z_4, z_1 + z_2 + z_4, z_3 + z_4, 2z_4, 2z_3\}$, где $z_1 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}$, $z_2 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}$ и $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$ с действительным числом $0 < \alpha < 1$.
- И) Если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения трёх отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4]$,

а дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из трёх собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{2z_3, z_3 + z_4, 2z_4\}$.

Доказательство.

А) Из представлений (2.7), (4.1) и формул (3.14) и (3.15), а также теоремы 3.3 следует, что в одномерном случае непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_1$ состоит из $\sigma_{cont}(\tilde{H}_1) = [A - 2B, A + 2B]$, а дискретный спектр оператора $\tilde{H}_1$ состоит из единственного собственного значения $z = A + \varepsilon_1$. Следовательно, существенный спектр оператора $\tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1$ состоит из отрезков $[2A - 4B, 2A + 4B]$ и $[A - 2B + z, A + 2B + z]$. Дискретный спектр оператора $\tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1$ состоит из собственного значения $2z$. Оператор

$$\tilde{H}_2 = \tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1 + 2U \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, \Lambda - s) ds + 2\varepsilon_3 \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} f(s, t) ds dt,$$

где $\Lambda = \lambda + \mu$, имеет дополнительные собственные значения z_3 и z_4 . Из этого следует, что существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков, а дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений. Это и есть утверждение А) теоремы 4.2.

В) В этом случае оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1 , лежащее вне непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Следовательно, существенный спектр оператора $\tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1$ состоит из объединения двух отрезков, а дискретный спектр оператора $\tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1$ состоит из одной точки. Это даёт утверждение В) теоремы 4.2.

Остальные утверждения теоремы 4.2 доказываются аналогично. $\square$

Следующая теорема описывает структуру существенного спектра оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ в трехмерном случае.

Теорема 4.3 (см. [21]). Пусть $\nu = 3$. Тогда:

- А) 1) Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -6B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 6B$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [3A - 18B + z, 3A + 18B + z] \cup [2A - 12B + 2z, 2A + 12B + 2z] \cup [A - 6B + 3z, A + 6B + 3z] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + z + z_3, A + 6B + z + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [A - 6B + z + z_4, A + 6B + z + z_4]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z, 2z + z_3, 2z + z_4, 2z_3, z_3 + z_4, 2z_4\}$, где $z = A + \varepsilon_1$, z_3 и z_4 — собственные значения оператора $\tilde{H}_2$.
- 2) Если $\varepsilon_2 = -B$ и $-6B \leq \varepsilon_1 < -2B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $2B < \varepsilon_1 \leq 6B$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения трёх отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из трёх собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{2z_3, 2z_4, z_3 + z_4\}$.
- В) Если $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$, и $\varepsilon_1 < 0$, $\varepsilon_1 \leq -\frac{6B}{W}$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$, и $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 \geq \frac{6B}{W}$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [3A - 18B + z_1, 3A + 18B + z_1] \cup [2A - 12B + 2z_1, 2A + 12B + 2z_1] \cup [A - 6B + 3z_1, A + 6B + 3z_1] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + z_1 + z_3, A + 6B + z_1 + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [A - 6B + z_1 + z_4, A + 6B + z_1 + z_4]$ (соответственно, $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [3A - 18B + z_2, 3A + 18B + z_2] \cup [2A - 12B + 2z_2, 2A + 12B + 2z_2] \cup [A - 6B + 3z_2, A + 6B + 3z_2] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + z_2 + z_3, A + 6B + z_2 + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [A - 6B + z_2 + z_4, A + 6B + z_2 + z_4]$), и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z_1, 2z_1 + z_3, 2z_1 + z_4, 2z_3, z_3 + z_4, 2z_4\}$ (соответственно, $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z_2, 2z_2 + z_3, 2z_2 + z_4, 2z_3, 2z_4, z_3 + z_4\}$), где z_1 (соответственно, z_2) — собственное значение оператора $\tilde{H}_1$.

Если $-\frac{6B}{W} \leq \varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $0 < \varepsilon_1 \leq \frac{6B}{W}$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения трёх отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4]$, а дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из трёх собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{z_3 + z_4, 2z_3, 2z_4\}$.

- C) Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0, E < W$ (соответственно, $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B, E < W$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [3A - 18B + z, 3A + 18B + z] \cup [2A - 12B + 2z, 2A + 12B + 2z] \cup [A - 6B + 3z, A + 6B + 3z] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + z + z_3, A + 6B + z + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [A - 6B + z + z_4, A + 6B + z + z_4]$ (соответственно, $\sigma_{ess}({}^1\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [3A - 18B + \tilde{z}, 3A + 18B + \tilde{z}] \cup [2A - 12B + 2\tilde{z}, 2A + 12B + 2\tilde{z}] \cup [A - 6B + 3\tilde{z}, A + 6B + 3\tilde{z}] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + \tilde{z} + z_3, A + 6B + \tilde{z} + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [A - 6B + \tilde{z} + z_4, A + 6B + \tilde{z} + z_4]$), и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z, 2z + z_3, 2z + z_4, 2z_3, z_3 + z_4, 2z_4\}$ (соответственно, $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4\tilde{z}, 2\tilde{z} + z_3, 2\tilde{z} + z_4, 2z_3, z_3 + z_4, 2z_4\}$), где z (соответственно, $\tilde{z}$) – собственное значение оператора $\tilde{H}_1$ и $E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0, E > W$

(соответственно, $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B, E > W$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения трёх отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4]$, а дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из трёх собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{z_3 + z_4, 2z_3, 2z_4\}$.

- D) Если $\varepsilon_1 = \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $E < \frac{4}{3}W$ (соответственно, $\varepsilon_1 = -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $E < \frac{4}{3}W$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [3A - 18B + z, 3A + 18B + z] \cup [2A - 12B + 2z, 2A + 12B + 2z] \cup [A - 6B + 3z, A + 6B + 3z] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + z + z_3, A + 6B + z + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [A - 6B + z + z_4, A + 6B + z + z_4]$ (соответственно, $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [3A - 18B + \tilde{z}, 3A + 18B + \tilde{z}] \cup [2A - 12B + 2\tilde{z}, 2A + 12B + 2\tilde{z}] \cup [A - 6B + 3\tilde{z}, A + 6B + 3\tilde{z}] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + \tilde{z} + z_3, A + 6B + \tilde{z} + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [A - 6B + \tilde{z} + z_4, A + 6B + \tilde{z} + z_4]$), и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z, 2z + z_3, 2z + z_4, 2z_3, z_3 + z_4, 2z_4\}$ (соответственно, $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4\tilde{z}, 2\tilde{z} + z_3, 2\tilde{z} + z_4, 2z_3, z_3 + z_4, 2z_4\}$), где z (соответственно, $\tilde{z}$) – собственное значение оператора $\tilde{H}_1$.

- E) Если $\varepsilon_2 > 0, \varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B, \varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [3A - 18B + z_1, 3A + 18B + z_1] \cup [2A - 12B + 2z_1, 2A + 12B + 2z_1] \cup [A - 6B + 3z_1, A + 6B + 3z_1] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + z_1 + z_3, A + 6B + z_1 + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [A - 6B + z_1 + z_4, A + 6B + z_1 + z_4]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z_1, 2z_1 + z_3, 2z_1 + z_4, 2z_3, z_3 + z_4, 2z_4\}$, где z_1 – собственное значение оператора $\tilde{H}_1$.

- F) Если $\varepsilon_2 > 0, \varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B, \varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [3A - 18B + z_1, 3A + 18B + z_1] \cup [2A - 12B + 2z_1, 2A + 12B + 2z_1] \cup [A - 6B + 3z_1, A + 6B + 3z_1] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + z_1 + z_3, A + 6B + z_1 + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [A - 6B + z_1 + z_4, A + 6B + z_1 + z_4]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z_1, 2z_1 + z_3, 2z_1 + z_4, 2z_3, z_3 + z_4, 2z_4\}$, где z_1 – собственное значение оператора $\tilde{H}_1$.

- Г) Если $\varepsilon_2 > 0$, $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)W < E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$, $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}$ и $\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)W < E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения шестнадцати отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [3A - 18B + z_1, 3A + 18B + z_1] \cup [3A - 18B + z_2, 3A + 18B + z_2] \cup [2A - 12B + 2z_1, 2A + 12B + 2z_1] \cup [2A - 12B + z_1 + z_2, 2A + 12B + z_1 + z_2] \cup [2A - 12B + 2z_2, 2A + 12B + 2z_2] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [A - 6B + 3z_1, A + 6B + 3z_1] \cup [A - 6B + 2z_1 + z_2, A + 6B + 2z_1 + z_2] \cup [A - 6B + z_1 + 2z_2, A + 6B + z_1 + 2z_2] \cup [A - 6B + z_1 + z_4, A + 6B + z_1 + z_4] \cup [A - 6B + 3z_2, A + 6B + 3z_2] \cup [A - 6B + z_2 + z_4, A + 6B + z_2 + z_4] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + z_1 + z_3, A + 6B + z_1 + z_3] \cup [A - 6B + z_2 + z_3, A + 6B + z_2 + z_3]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из четырнадцати собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z_1, 4z_2, 3z_1 + z_2, 2z_1 + 2z_2, 2z_1 + z_3, 2z_3, 2z_4, z_3 + z_4, 2z_1 + z_4, z_1 + 3z_2, z_1 + z_2 + z_3, z_1 + z_2 + z_4, 2z_2 + z_3, 2z_2 + z_4\}$, где z_1 и z_2 — собственные значения оператора $\tilde{H}_1$.
- Н) Если $\varepsilon_2 > 0$, $-\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$ и $\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)W < E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$, $-\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$ и $\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)W < E < \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)W$), то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения шестнадцати отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [3A - 18B + z_1, 3A + 18B + z_1] \cup [3A - 18B + z_2, 3A + 18B + z_2] \cup [2A - 12B + 2z_1, 2A + 12B + 2z_1] \cup [2A - 12B + z_1 + z_2, 2A + 12B + z_1 + z_2] \cup [2A - 12B + 2z_2, 2A + 12B + 2z_2] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [A - 6B + 3z_1, A + 6B + 3z_1] \cup [A - 6B + 2z_1 + z_2, A + 6B + 2z_1 + z_2] \cup [A - 6B + z_1 + 2z_2, A + 6B + z_1 + 2z_2] \cup [A - 6B + z_1 + z_4, A + 6B + z_1 + z_4] \cup [A - 6B + 3z_2, A + 6B + 3z_2] \cup [A - 6B + z_2 + z_4, A + 6B + z_2 + z_4] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + z_1 + z_3, A + 6B + z_1 + z_3] \cup [A - 6B + z_2 + z_3, A + 6B + z_2 + z_3]$, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из четырнадцати собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{4z_1, 2z_1 + 2z_2, 3z_1 + z_2, 2z_1 + z_3, 2z_1 + z_4, z_1 + 3z_2, 4z_2, 2z_2 + z_3, 2z_2 + z_4, 2z_4, z_1 + z_2 + z_4, z_1 + z_2 + z_3, 2z_3, z_3 + z_4\}$, где z_1 и z_2 — собственные значения оператора $\tilde{H}_1$.
- И) Если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения трёх отрезков: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3]$, а дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из трёх собственных значений: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{z_3 + z_4, 2z_3, 2z_4\}$.

Доказательство.

А) Из представлений (2.7), (4.1) и формул (3.14) и (3.15), а также теоремы 3.4 следует, что в трехмерном случае непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_1$ состоит из $\sigma_{cont}(\tilde{H}_1) = [A - 6B, A + 6B]$, а дискретный спектр оператора $\tilde{H}_1$ состоит из единственного собственного значения $z = A + \varepsilon_1$. Следовательно, существенный спектр оператора $\tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1$ состоит из отрезков $[2A - 12B, 2A + 12B]$ и $[A - 6B + z, A + 6B + z]$. Дискретный спектр оператора $\tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1$ состоит из собственного значения $2z$. Оператор

$$\tilde{H}_2 = \tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1 + 2U \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, \Lambda - s) ds + 2\varepsilon_3 \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} f(s, t) ds dt,$$

где $\Lambda = \lambda + \mu$, имеет дополнительные собственные значения z_3 и z_4 . Из этого следует, что существенный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения восьми отрезков, и дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из шести собственных значений. Это и есть утверждение А) теоремы 4.3.

Г) Из представления (2.7), (4.1) и формул (3.14) и (3.15), а также теоремы 3.4 следует, что в трехмерном случае непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_1$ состоит из $\sigma_{cont}(\tilde{H}_1) = [A - 6B, A + 6B]$, а дискретный спектр оператора $\tilde{H}_1$ состоит ровно из двух собственных значений z_1 и z_2 . Следовательно, существенный спектр оператора $\tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1$ состоит из отрезков $[2A - 12B, 2A + 12B]$, $[A - 6B + z_1, A + 6B + z_1]$ и $[A - 6B + z_2, A + 6B + z_2]$. Дискретный спектр оператора $\tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1$

состоит из собственных значений $2z_1$, $z_1 + z_2$ и $2z_2$. Оператор

$$\tilde{H}_2 = \tilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \tilde{H}_1 + 2U \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, \Lambda - s) ds + 2\varepsilon_3 \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} f(s, t) ds dt,$$

где $\Lambda = \lambda + \mu$, имеет дополнительные собственные значения z_3 и z_4 . Отсюда следует, что существенный спектр оператора ${}^1\tilde{H}_s^0$ состоит из объединения шестнадцати отрезков, а дискретный спектр оператора ${}^2\tilde{H}_s^0$ состоит из четырнадцати собственных значений. Это и есть утверждение G) теоремы 4.3.

Остальные утверждения теоремы 4.3 доказываются аналогично. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Изюмов Ю. А., Чащин Н. И., Алексеев Д. С. Теория сильно коррелированных систем. Метод производящего функционала. — М.—Ижевск: Инст. комп. исслед., 2006.
2. Ташпулатов С. М. Спектр оператора энергии в трехэлектронных системах с примесью в модели Хаббарда. Второе дублетное состояние // Современ. мат. Фундам. направл. — 2019. — 65, № 3. — С. 109–123. — DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-109-123.
3. Anderson P. W. Localized Magnetic States in Metals // Phys. Rev. — 1961. — **124**. — С. 41–53.
4. Arovas D. P., Berg E., Kivelson S. A., Raghy S. The Hubbard model // Annu. Rev. Condens. Matt. Phys. — 2022. — **13**. — С. 239–274. — DOI: 10.1146/annurev-conmatphys-031620-102024.
5. Gutzwiller M. C. Effect of correlation on the ferromagnetism of transition metals // Phys. Rev. Lett. — 1963. — **10**. — С. 159–162.
6. Hubbard J. Electron correlations in narrow energy bands // Proc. Roy. Soc. A — 1963. — **276**. — С. 238–257.
7. Ichinose T. Spectral properties of tensor products of linear operators, 1 // Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — **235**. — С. 75–113.
8. Ichinose T. Spectral properties of tensor products of linear operators, 2: The approximate point spectrum and Kato essential spectrum // Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — **237**. — С. 223–254.
9. Izyumov U. A. Hubbard model of strong correlations // Phys.-Uspekhi — 1995. — **38**, No. 4. — С. 385–408. — DOI: 10.1070/PU1995v038n04ABEH000081.
10. Kanamori J. Electron correlation and ferromagnetism of transition metals // Prog. Theor. Phys. — 1963. — **30**. — С. 275–289.
11. Karpenko B. V., Dyakin V. V., Budrina G. L. Two electrons in the Hubbard Model // Phys. Met. Metallogr. — 1986. — **61**. — С. 702–706.
12. Moskalenko V. A., Dohotaru L. A., Digor D. F., Cebotari I. D. Diagram theory for the two fold degenerate Anderson impurity model // Theor. Math. Phys. — 2014. — **178**. — С. 115–129. — DOI: 10.1007/s11232-014-0133-6.
13. Ovchinnikov S. G., Shneider E. I. Spectral functions in the Hubbard model with half-filling // Phys. Solid State — 2004. — **46**. — С. 1469–1473. doi: 10.1134/1.1788780
14. Öz Ya., Klumper A. A Hubbard model with integrable impurity // J. Phys. A. Math. Theor. — 2019. — **52**, No. 32. — 325001. — DOI: 10.1088/1751-8121/ab2cf4.
15. Rammelmüller L., Huber D. u др. Magnetic impurity in a one-dimensional fewfermion system // SciPost Phys. — 2023. — **14**, No. 1. — 006. — DOI: 10.21468/SciPostPhys.14.1.006.
16. Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathetical Physics. 1. Functional Analysis. — New York: Acad. Press, 1972.
17. Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathetical Physics. 4. Operator Analysis. — New York: Acad. Press, 1978.
18. Shubin S. P., Wonsowsky S. V. On the electron theory of metals // Proc. Roy. Soc. A — 1934. — **145**. — С. 159–180.
19. Tashpulatov S. M. Spectral properties of three-electron systems in the Hubbard Model // Theor. Math. Phys. — 2014. — **179**, No. 5. — С. 712–728.
20. Tashpulatov S. M. Spectra of the energy operator of four-electron systems in the triplet state in the Hubbard Model // J. Phys. Conf. Ser. — 2016. — **697**. — 012025. — DOI: 10.1088/1742-6596/697/1/012025.
21. Tashpulatov S. M. The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the Hubbard model in a singlet state // Lobachevskii J. Math. — 2017. — **38**, No. 3. — С. 530–541.
22. Tashpulatov S. M. The structure of essential spectra and discrete spectrum of three-electron systems in the impurity Hubbard model. quartet state // J. Appl. Math. Phys. — 2021. — **9**. — С. 1391–1421.
23. Tashpulatov S. M. Spectra of the energy operator of two-electron system in the impurity Hubbard model // J. Appl. Math. Phys. — 2022. — **10**. — С. 2743–2779.

24. *Tashpulatov S. M.* Spectra of the Two-Electron System in the Impurity Hubbard Model. — Lambert Academic Publishing, 2022.
25. *Val'kov V. V., Ovchinnikov S. G., Petrakovskii O. P.* The excitation spectra of two-magnon systems in easy-axis quasidimensional ferromagnets // Sov. Phys. Solid State — 1988. — **30**. — С. 3044–3047.
26. *Zvyagin A. A., Schlottmann P.* Magnetic impurity in the one-dimensional Hubbard model // Phys. Rev. B — 1997. — **56**. — С. 300–306. — DOI: 10.1103/PhysRevB.56.300.

С. М. Ташпулатов

Институт ядерной физики АН Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан

E-mail: sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.tu

Р. Т. Парманова

Институт ядерной физики АН Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан

E-mail: parmanova.r@inp.uz

UDC 517.984

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-478-507

EDN: DUAASN

The second four-electron singlet in the Hubbard impurity model

S. M. Tashpulatov and R. T. Parmanova

Institute of Nuclear Physics of the Uzbekistanian Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

Abstract. We consider the energy operator of four-electron systems in the Hubbard impurity model and investigate the structure of the essential spectrum and discrete spectra for the second singlet state of the system. It is shown that in the one-dimensional and two-dimensional cases the following situations exist for the essential and discrete spectrum: (a). the essential spectrum of the operator of the second singlet state of four electrons in the Hubbard impurity model consists of a union of eight segments, and the discrete spectrum of the operator consists of six eigenvalues; (b). the essential spectrum of the operator consists of a union of sixteen segments, and the discrete spectrum of the operator consists of fourteen eigenvalues; (c). the essential spectrum of the operator consists of a union of thirteen segments, and the discrete spectrum of the operator consists of nine eigenvalues; (d). the essential spectrum of the operator consists of a union of three segments, and the discrete spectrum of the operator consists of three eigenvalues. In the three-dimensional case the following situations arise: (a). the essential spectrum of an operator consists of unions of eight segments, and the discrete spectrum of the operator consists of six eigenvalues, or the essential spectrum of an operator consists of unions of three segments, and the discrete spectrum of the operator consists of three eigenvalues; (b). the essential spectrum of an operator consists of unions of eight segments, and the discrete spectrum of the operator consists of six eigenvalues; (c). the essential spectrum of an operator consists of unions of sixteen segments, and the discrete spectrum of the operator consists of fourteen eigenvalues; (d). the essential spectrum of an operator consists of unions of three segments, and the discrete spectrum of the operator consists of three eigenvalues.

Keywords: four-electron system, Hubbard impurity model, quintet states, triplet states, singlet states, essential spectrum, discrete spectrum.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: S. M. Tashpulatov, R. T. Parmanova, “The second four-electron singlet in the Hubbard impurity model,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 3, 478–507. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-478-507>

REFERENCES

1. Yu. A. Izyumov, N. I. Chashchin, and D. S. Alekseev, *Teoriya sil'no korrelirovannykh sistem. Metod proizvodnyashchego funktsionala* [Theory of Strongly Correlated Systems. Generating Functional Method], Inst. Komp. Issled., Moscow–Izhevsk (2006).
2. S. M. Tashpulatov, “Spektr operatora energii v trekhelektronnykh sistemakh s primes'yu v modeli Khabbarda. Vtoroe dubletnoe sostoyanie” [The spectrum of the energy operator in three-electron systems with an impurity in the Hubbard model. The second doublet state] *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], **65**, No. 3, 109–123 (2019), DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-109-123.
3. P. W. Anderson, “Localized Magnetic States in Metals,” *Phys. Rev.*, **124**, 41–53 (1961).
4. D. P. Arovas, E. Berg, S. A. Kivelson, and S. Raghy, “The Hubbard model,” *Annu. Rev. Condens. Matt. Phys.*, **13**, 239–274 (2022), DOI: 10.1146/annurev-conmatphys-031620-102024.
5. M. C. Gutzwiller, “Effect of correlation on the ferromagnetism of transition metals,” *Phys. Rev. Lett.*, **10**, 159–162 (1963).
6. J. Hubbard, “Electron correlations in narrow energy bands,” *Proc. Roy. Soc. A*, **276**, 238–257 (1963).
7. T. Ichinose, “Spectral properties of tensor products of linear operators, 1,” *Trans. Am. Math. Soc.*, **235**, 75–113 (1978).
8. T. Ichinose, “Spectral properties of tensor products of linear operators, 2: The approximate point spectrum and Kato essential spectrum,” *Trans. Am. Math. Soc.*, **237**, 223–254 (1978).
9. U. A. Izyumov, “Hubbard model of strong correlations,” *Phys.-Uspekhi*, **38**, No. 4, 385–408 (1995), DOI: 10.1070/PU1995v038n04ABEH000081.
10. J. Kanamori, “Electron correlation and ferromagnetism of transition metals,” *Prog. Theor. Phys.*, **30**, 275–289 (1963).
11. B. V. Karpenko, V. V. Dyakin, and G. L. Budrina, “Two electrons in the Hubbard Model,” *Phys. Met. Metallogr.*, **61**, 702–706 (1986).
12. V. A. Moskalenko, L. A. Dohotaru, D. F. Digor, and I. D. Cebotari, “Diagram theory for the two fold degenerate Anderson impurity model,” *Theor. Math. Phys.*, **178**, 115–129 (2014), DOI: 10.1007/s11232-014-0133-6.
13. S. G. Ovchinnikov and E. I. Shneider, “Spectral functions in the Hubbard model with half-filling,” *Phys. Solid State*, **46**, 1469–1473 (2004). doi: 10.1134/1.1788780
14. Ya. Öz and A. Klumper, “A Hubbard model with integrable impurity,” *J. Phys. A: Math. Theor.*, **52**, No. 32, 325001 (2019), DOI: 10.1088/1751-8121/ab2cf4.
15. L. Rammelmuller, D. Huber et al., “Magnetic impurity in a one-dimensional fewfermion system,” *SciPost Phys.*, **14**, No. 1, 006 (2023), DOI: 10.21468/SciPostPhys.14.1.006.
16. M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. 1. Functional Analysis*, Acad. Press, New York (1972).
17. M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. 4. Operator Analysis*, Acad. Press, New York (1978).
18. S. P. Shubin and S. V. Wonsowsky, “On the electron theory of metals,” *Proc. Roy. Soc. A*, **145**, 159–180 (1934).
19. S. M. Tashpulatov, “Spectral properties of three-electron systems in the Hubbard Model,” *Theor. Math. Phys.*, **179**, No. 5, 712–728 (2014).
20. S. M. Tashpulatov, “Spectra of the energy operator of four-electron systems in the triplet state in the Hubbard Model,” *J. Phys. Conf. Ser.*, **697**, 012025 (2016), DOI: 10.1088/1742-6596/697/1/012025.
21. S. M. Tashpulatov, “The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the Hubbard model in a singlet state,” *Lobachevskii J. Math.*, **38**, No. 3, 530–541 (2017).
22. S. M. Tashpulatov, “The structure of essential spectra and discrete spectrum of three-electron systems in the impurity Hubbard model. quartet state,” *J. Appl. Math. Phys.*, **9**, 1391–1421 (2021).
23. S. M. Tashpulatov, “Spectra of the energy operator of two-electron system in the impurity Hubbard model,” *J. Appl. Math. Phys.*, **10**, 2743–2779 (2022).
24. S. M. Tashpulatov, *Spectra of the Two-Electron System in the Impurity Hubbard Model*, Lambert Academic Publishing (2022).

25. V. V. Val'kov, S. G. Ovchinnikov, and O. P. Petrakovskii, "The excitation spectra of two-magnon systems in easy-axis quasidimensional ferromagnets," *Sov. Phys. Solid State*, **30**, 3044–3047 (1988).
26. A. A. Zvyagin and P. Schlottmann, "Magnetic impurity in the one-dimensional Hubbard model," *Phys. Rev. B*, **56**, 300–306 (1997), DOI: 10.1103/PhysRevB.56.300.

S. M. Tashpulatov

Institute of Nuclear Physics of the Uzbekistanian Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

E-mail: sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.tu

R. T. Parmanova

Institute of Nuclear Physics of the Uzbekistanian Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

E-mail: parmanova.r@inp.uz

УДК 517.98

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-508-523

EDN: EBRWZE

КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С ИНЕРЦИОННОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Д. О. ЦВЕТКОВ

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия

Аннотация. Исследуется задача о малых движениях и нормальных колебаниях вязкой жидкости, когда на свободной поверхности находятся весомерные частицы некоторого вещества, которые в процессе колебания свободной поверхности не взаимодействуют друг с другом, или их взаимодействие пренебрежимо мало. Исходная начально-краевая задача сводится к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в некотором гильбертовом пространстве. После детального изучения свойств операторных коэффициентов доказана теорема о разрешимости полученной задачи Коши. На этой основе найдены достаточные условия существования решения начально-краевой задачи, описывающей эволюцию исходной гидросистемы. Доказаны утверждения о структуре спектра задачи и о базисности системы собственных функций.

Ключевые слова: вязкая жидкость, инерционная свободная поверхность, малые движения, нормальные колебания, начально-краевая задача.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Д. О. Цветков. Колебания вязкой жидкости с инерционной свободной поверхностью // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 3. С. 508–523. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-508-523>

ВВЕДЕНИЕ

Предположим, что на свободной поверхности жидкости плавают весомерные частицы некоторого вещества, которые в процессе колебаний свободной поверхности не взаимодействуют друг с другом, или их взаимодействие пренебрежимо мало. Жидкость с такой поверхностью принято называть *флотирующей жидкостью*, или *жидкостью с инерционной свободной поверхностью* [2, 16]. Первоначально модель жидкости с инерционной поверхностью использовалась при описании динамических явлений поверхности северных морей, покрытых сплошным ковром из крошки битого льда.

Подробную библиографию и изложение наиболее важных результатов по изучению динамических характеристик идеальной однородной флотирующей жидкости можно найти в работе [2]. Отметим отдельно работы [11, 18], где с позиции функционального анализа изучались вопросы разрешимости линейных краевых задач, исследовались структуры и характер спектра нормальных колебаний однородной, а также стратифицированной идеальной жидкости, свободная поверхность которой состоит из трех областей: поверхности жидкости без льда, области упругого льда и области, состоящей из крошки битого льда (крошеного льда). Упругий лед моделировался упругой пластиной.

Также отметим работу [12], где изучалась задача с внутренней флотацией. Интерес к таким проблемам может быть связан с тем, что при экспериментальных исследованиях распределения характеристик воды, например, в Черном море было обнаружено, что на границе раздела двух основных слоев (верхнего и нижнего) «плавают» частицы различных материалов, объемная плотность которых больше плотности верхнего слоя, но меньше нижнего. Этими материалами являются намокшее дерево, водоросли, растительные остатки, «экологический мусор» и тому подобное.

Заметим, что если теория динамических свойств идеальной флотирующей жидкости сравнительно хорошо изучена, то число работ, посвященных флотирующей вязкой жидкости, исчисляется единицами. Отметим, например, работу [10], где строится решение линеаризованной задачи о распространении инерционных волн во флотирующей вязкой жидкости, находящейся в полости равномерно вращающегося цилиндра.

В данной работе исследуется задача о малых движениях и нормальных колебаниях вязкой жидкости с инерционной свободной поверхностью, заполняющей неподвижный контейнер. Исследование проводится на основе подхода, связанного с применением теории операторных блок-матриц, действующих в гильбертовом пространстве, и позволяющего перейти от исходной начально-краевой задачи к равносильной задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве, а также на применении абстрактных дифференциально-операторных уравнений и спектральной теории операторных пучков. Методами этих теорий удастся установить ряд общих и тонких результатов. Общие идеи применяемых методов можно найти, например, в [14, 15].

1. ИССЛЕДОВАНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

1.1. Постановка начально-краевой задачи. Пусть однородная несжимаемая жидкость плотности ρ , имеющая коэффициент динамической вязкости μ , расположена в некотором неподвижном контейнере и занимает в состоянии покоя область Ω , ограниченную твердой стенкой контейнера S и свободной поверхностью Γ , покрытой плавающими частицами некоторого вещества. Последнее условие эквивалентно предположению о том, что ее свободная поверхность является весомой и имеет поверхностную плотность ρ_0 , которая совпадает с массой плавающих частиц на единице поверхности. Предположим также, что начало O декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ выбрано на Γ , которая является плоской и расположена перпендикулярно ускорению силы тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси Ox_3 .

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Через $\vec{u} = \vec{u}(t, x)$, $x \in \Omega$, обозначим поле скорости в жидкости, $p = p(t, x)$ — динамическое давление, равное разности полного и статического давлений, а через $\zeta = \zeta(t, \hat{x})$ ($\hat{x} = (x_1, x_2) \in \Gamma$) — отклонение свободно движущейся поверхности жидкости $\Gamma(t)$ от Γ по нормали $\vec{n}$. Кроме того, полагаем, что на исследуемую гидродинамическую систему дополнительно к гравитационному полю действует малое поле внешних сил $\vec{f} = \vec{f}(t, x)$. Тогда малые движения исходной системы описываются следующей начально-краевой задачей:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{u} + \rho \vec{f}(x, t) \quad (\text{в } \Omega), \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad (1.1)$$

$$\vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \vec{u} \cdot \vec{n} \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta \, d\Gamma = 0, \quad (1.2)$$

$$\mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_k} \right) = 0 \quad (k = 1, 2, \text{ на } \Gamma), \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = p - \rho g \zeta - 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (\text{на } \Gamma), \quad (1.3)$$

$$\vec{u}(0, x) = \vec{u}^0(x) \quad (x \in \Omega), \quad \zeta(0, \hat{x}) = \zeta^0(\hat{x}) \quad (\hat{x} \in \Gamma). \quad (1.4)$$

Линеаризация уравнения Навье—Стокса и уравнения неразрывности приводит к уравнениям (1.1). На границе S задано условие прилипания жидкости, которое в терминах вектора скорости имеет вид первого уравнения (1.2). После линеаризации кинематическое условие на поверхности Γ принимает вид второго уравнения (1.2), а динамические условия — (1.3). Здесь первое динамическое условие состоит в равенстве касательных напряжений, для вывода второго требуется записать второй закон Ньютона для весомых частиц и линеаризовать его (см., например, [2]).

Далее, третье условие (1.2) — следствие условия сохранения объема Ω при колебаниях системы. Последние два условия — начальные условия, которые добавлены для полноты формулировки.

1.2. Закон баланса полной энергии. Прежде чем исследовать поставленную начально-краевую задачу, выведем для ее решения закон баланса полной энергии. Предположим, что задача (1.1)–(1.4) имеет классическое решение, т. е. такие функции $u(t, x)$, $p(t, x)$ и $\zeta(t, \hat{x})$, для которых непрерывны по всем переменным все слагаемые, входящие в уравнения и краевые условия данной задачи, кроме того, эти уравнения выполнены для указанных функций.

Лемма 1.1. *Для классического решения задачи (1.1)–(1.4) имеет место закон баланса полной энергии гидромеханической системы:*

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left[\left(\rho \int_{\Omega} |\vec{u}|^2 d\Omega + \rho_0 \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right|^2 d\Gamma_2 \right) + \rho g \int_{\Gamma} |\zeta|^2 d\Gamma \right] = \rho \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{u} d\Omega - \mu E(\vec{u}, \vec{u}). \quad (1.5)$$

Доказательство. Умножим обе части (1.1) скалярно на вектор-функцию $\vec{u}(t, x)$ и проинтегрируем по Ω ; соответственно умножим обе части второго уравнения (1.3) скалярно на $\partial \zeta / \partial t$ и проинтегрируем по Γ . Используя формулу Грина для векторного оператора Лапласа (см., например, [14, с. 128, формула (2.10)])

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta \vec{u} \cdot \vec{v} d\Omega &= -E(\vec{u}, \vec{v}) + \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i} \right) v_i dS, \\ E(\vec{u}, \vec{u}) &= \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 |\tau_{ij}(\vec{u})|^2 d\Omega, \quad \tau_{ij}(\vec{u}) := \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1.6)$$

а также формулу Гаусса—Остроградского с условием соленоидальности и прилипания жидкости на твердой стенке:

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \vec{u} d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div} (p \vec{u}) d\Omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{u} d\Omega = \int_{\partial\Omega} p u_n dS = \int_{\Gamma} p u_n d\Gamma.$$

приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \rho \int_{\Omega} \vec{u} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} d\Omega &= -\mu E(\vec{u}, \vec{u}) + \int_{\Gamma} \left(2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - p \right) \frac{\partial \zeta}{\partial t} d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{u} d\Omega, \\ \rho_0 \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \frac{\partial \zeta}{\partial t} d\Gamma &= \int_{\Gamma} \left(p - 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial t} d\Gamma - \int_{\Gamma} \rho g \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial t} d\Gamma. \end{aligned}$$

Складывая левые и правые части полученных равенств, приходим к закону баланса энергии (1.5). $\square$

Отметим, что левая часть (1.5) представляет собой сумму производной по t полной кинетической энергии системы и ее потенциальной энергии. Полная кинетическая энергия (круглая скобка слева) равна сумме кинетической энергии жидкости в области Ω и кинетической энергии весомых частиц. За потенциальную энергию отвечает третье слагаемое слева, обусловленное колебаниями свободной поверхности. Правая часть есть мощность внешних и диссипативных сил.

1.3. Основные функциональные пространства. Вспомогательные краевые задачи и их операторы. Свойства оператора потенциальной энергии. Начально-краевую задачу (1.1)–(1.4) приведем к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. С этой целью для области Ω воспользуемся известным разложением пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega)$ в ортогональную сумму (см. [14, с. 118]):

$$\begin{aligned} \vec{L}_2(\Omega) &= \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega), \quad \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) := \{ \vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega) \mid \vec{v} = \nabla \varphi, \varphi = 0 \text{ (на } \Gamma) \}, \\ \vec{J}_{0,S}(\Omega) &:= \{ \vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega) \mid \operatorname{div} \vec{v} = 0 \text{ (в } \Omega), v_n := \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ (на } S) \}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Отметим, что наличие вязких сил приводит к диссипации энергии, скорость которой вычисляется по формуле (1.6).

Совокупность векторных соленоидальных полей, удовлетворяющих условиям прилипания на твердой стенке S и конечной скорости диссипации энергии в вязкой жидкости, образуют подпространство $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$, которое плотно в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ (см. [14, с. 132-133], [7, п. 2.3.2]).

Так как в подпространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ квадрат нормы вводится по формуле $\|\vec{u}\|_{1,\Omega}^2 := E(\vec{u}, \vec{u})$ и эта норма эквивалентна стандартной норме пространства $\vec{H}^1(\Omega)$, то имеют место неравенства

$$0 < c_1 \leq \|\vec{u}\|_{1,\Omega}^2 / \|\vec{u}\|_{\vec{H}^1(\Omega)}^2 \leq c_2 < \infty,$$

а потому

$$\|\vec{u}\|_{1,\Omega}^2 \geq c_1 \|\vec{u}\|_{\vec{H}^1(\Omega)}^2 \geq c_1 \|\vec{u}\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \forall \vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega).$$

Отсюда следует, что $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ и $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ образуют гильбертову пару (см. подробнее, [7, с. 20]), а порождающий оператор A этой пары образует шкалу пространств E^α , $\alpha \in \mathbb{R}$, такую, что

$$E^0 = \vec{J}_{0,S}(\Omega), \quad E^{1/2} = \vec{J}_{0,S}^1(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \|\vec{u}\|_{1,\Omega}^2 = \|A^{1/2}\vec{u}\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \forall u \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega).$$

Вспомогательная задача I (см. [15, с. 69], [6, теорема 5]). По заданной функции $\vec{g}_1$ найти функции $\vec{v}$ и p_1 , являющиеся решениями задачи

$$\begin{aligned} \mu A\vec{v} &:= -\mu P_{0,S}\Delta\vec{v} + \nabla p_1 = \vec{g}_1, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \vec{v} = \vec{0} \text{ (на } S), \\ \mu\tau_{i3}(\vec{v}) - p_1\delta_{i3} &= 0 \text{ (на } \Gamma), \quad i = 1, 2, 3, \quad \Delta p_1 = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \partial p_1 / \partial n = 0 \text{ (на } S), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $P_{0,S} : \vec{L}_2(\Omega) \rightarrow \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ — ортопроектор на подпространство $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, оператор A является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором, порожденным гильбертовой парой $(\vec{J}_{0,S}^1(\Omega); \vec{J}_{0,S}(\Omega))$, и обладает следующими свойствами:

1. $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) = \vec{J}_{0,S}^1(\Omega) \subset \vec{J}_{0,S}(\Omega)$, $\overline{\mathcal{D}(A)} = \vec{J}_{0,S}(\Omega)$;
2. обратный оператор A^{-1} есть компактный и положительный, действующий в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$;
3. оператор A имеет дискретный положительный спектр $\{\lambda_n(A)\}_{n=1}^\infty$ с единственной предельной точкой $\lambda = +\infty$ и асимптотическим поведением [17]:

$$\lambda_n(A) = c_A^{-2/3} n^{2/3} [1 + o(1)] \quad (n \rightarrow +\infty), \quad c_A = (3\pi^2)^{-1} \operatorname{mes} \Omega. \quad (1.9)$$

Отметим, что если задача (1.8) имеет решение $\vec{v} \in \vec{H}^2(\Omega) \cap \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$, то $\nabla p_1 \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$,

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega) := \left\{ \vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega) : \vec{v} = \nabla p, \Delta p = 0 \text{ (в } \Omega), \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ (на } S), \int_\Gamma p d\Gamma = 0 \right\}.$$

При $\vec{g}_1 \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ задача (1.8) (см. подробнее [6, теорема 5]) имеет единственное обобщенное решение $\vec{v} = \mu^{-1} A^{-1} \vec{g}_1 \in \mathcal{D}(A)$, где обобщенное решение определяется следующим тождеством: $E(\vec{\eta}, \vec{v}) = (\vec{\eta}, \vec{g}_1)_{\vec{L}_2(\Omega)}$, $\vec{\eta} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$.

Наряду с введенными пространствами рассмотрим гильбертово пространство $L_2(\Gamma)$ со скалярным произведением

$$(\xi, \eta)_0 = \int_\Gamma \xi(\hat{x}) \eta(\hat{x}) d\Gamma, \quad \hat{x} \in \Gamma. \quad (1.10)$$

Из третьего условия (1.2), получаем, что функция $\zeta(t, \hat{x})$ при каждом t должна принадлежать гильбертову пространству $L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$ функций из $L_2(\Gamma)$, которые ортогональны к функции 1_Γ , тождественно равной единице.

Введем оператор нормального следа γ_n , действующий по закону

$$\gamma_n \vec{u} := (\vec{u} \cdot \vec{n})_\Gamma \quad \forall \vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega).$$

Так как $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ — подпространство $\vec{H}^1(\Omega)$, а граница области Ω состоит (будем предполагать) из двух частей: равновесной поверхности Γ — достаточно гладкой (бесконечно дифференцируемой)

и твердой стенки S — липшицевой, то по теореме Гальярдо (см., например, [7, с. 51]) получаем, что оператор γ_n ограниченно действует из $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ в пространство $H^{1/2}(\Gamma)$ с квадратом нормы

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 := \int_{\Gamma} |\varphi|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{|\varphi(\zeta) - \varphi(\eta)|^2}{|\zeta - \eta|^3} d\Gamma_{\zeta} d\Gamma_{\eta}.$$

Отметим, что для элементов $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ выполнено условие $\gamma_n \vec{u} \in L_{2,\Gamma}$. Следовательно, γ_n ограниченно действует из $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ в пространство $H_{\Gamma}^{1/2} := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}$, плотно вложенное в $L_{2,\Gamma}$. Более того, $H_{\Gamma}^{1/2}$ и $L_{2,\Gamma}$ образуют гильбертову пару пространств, и по ней строится оснащение $H_{\Gamma}^{1/2} \subset L_{2,\Gamma} \subset (H_{\Gamma}^{1/2})^*$ (см. [7, с. 52], [1, п. 2]).

Вспомогательная задача II (см. [14, с. 107]). По заданной функции $\psi(\hat{x})$, $\hat{x} \in \Gamma$, найти функцию $p_2(x)$, $x \in \Omega$, являющуюся решением задачи

$$\Delta p_2 = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \frac{\partial p_2}{\partial n} = 0 \text{ (на } S), \quad p_2 = \psi \text{ (на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \psi d\Gamma = 0.$$

Данная задача является известной задачей Зарембы для уравнения Лапласа. Если $\psi \in H_{\Gamma}^{1/2}$, то данная задача имеет единственное решение $p_2 \in H_{\Gamma}^1(\Omega)$,

$$H_{\Gamma}^1(\Omega) = \{p \in H^1(\Omega) : \int_{\Gamma} p d\Gamma = 0\}, \quad \|p\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla p|^2 d\Omega.$$

Отметим, что если $p_2(x)$ — решение задачи II для $\psi \in H_{\Gamma}^{1/2}$, то $\nabla p_2(x) = G\psi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$.

Лемма 1.2. Имеют место свойства $\mathcal{D}(\gamma_n) \subset \mathcal{D}(G^*)$, $G^*|_{\mathcal{D}(\gamma_n)} = \gamma_n$.

Доказательство. Пусть $\vec{v} \in \vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$, $\psi \in H_{\Gamma}^{1/2}$. Тогда

$$\begin{aligned} (\nabla p_2, \vec{v}) &= \int_{\Omega_1} \nabla p_2 \cdot \vec{v} d\Omega_1 = \int_{\Omega_1} \operatorname{div}(p_2 \vec{v}) d\Omega_1 = \int_{\partial\Omega_1} p_2 \vec{v}_n dS = \int_{\Gamma} p_2 \vec{v}_n d\Gamma = \int_{\Gamma} \psi \vec{v}_n d\Gamma = \\ &= (\psi, \gamma_n \vec{v})_0 \Rightarrow (G\psi, \vec{v}) = (\psi, \gamma_n \vec{v})_0, \quad \psi \in H_{\Gamma}^{1/2}, \quad \vec{v} \in \vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1), \end{aligned} \quad (1.11)$$

следовательно, $\mathcal{D}(\gamma_n) \subset \mathcal{D}(G^*)$, $G^*|_{\mathcal{D}(\gamma_n)} = \gamma_n$. Лемма доказана. $\square$

Замечание 1.1. Из леммы 1.2 следует, что оператор γ_n может быть расширен до оператора $\tilde{\gamma}_n$ с областью определения $\mathcal{D}(\tilde{\gamma}_n) = \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$. Действительно, соотношение (1.11) выполняется, когда в правой части имеем $(\psi, \tilde{\gamma}_n \vec{v})_0$ для $\psi \in H_{\Gamma}^{1/2}$, $\tilde{\gamma}_n \vec{v} \in (H_{\Gamma}^{1/2})^*$. Эта ситуация имеет место для $\vec{v} \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$. При этом получаем, что на множестве $\vec{J}_0(\Omega_1)$ оператор $\tilde{\gamma}_n$ равен нулевому оператору, т. е. $\ker \tilde{\gamma}_n = \vec{J}_0(\Omega_1)$. Так как имеют место вложения $H_{\Gamma}^{1/2} \subset L_{2,\Gamma} \subset (H_{\Gamma}^{1/2})^*$, то, очевидно, $\gamma_n \subset G^* \subset \tilde{\gamma}_n$. Обозначим через $\hat{\gamma}_n$ такое расширение γ_n , для которого область значений совпадает с $L_{2,\Gamma}$. Тогда $\hat{\gamma}_n = G^*$, при этом $\mathcal{D}(G^*) = \{\vec{v} \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) | \gamma_n \vec{v} \in L_2(\Gamma)\}$. В дальнейшем вместо $\hat{\gamma}_n$ для простоты снова будем писать γ_n .

Как следствие из леммы 1.2 и замечания 1.1 получаем такое утверждение.

Лемма 1.3. Для операторов A и γ_n выполнены включения

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) = \vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1) \subset \mathcal{D}(\gamma_n).$$

1.4. Переход к дифференциально-операторному уравнению и свойства его операторных коэффициентов. Основываясь на разложении (1.7), применим метод ортогонального проектирования к исходной начально-краевой задаче. В силу условия соленоидальности в Ω и условия прилипания на S считаем, что $\vec{u}(t, x) \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$. Далее, представим $\nabla p(t, x)$ в виде $\nabla p(t, x) = \nabla \varphi + \nabla \tilde{p} \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega) =: \vec{G}(\Omega)$.

Применим ортопроекторы $P_{0,\Gamma}$ и $P_{0,S}$ (ортопроекторы на подпространства $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$ и $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ соответственно, $P_{0,S} + P_{0,\Gamma} = I$) к уравнению (1.1):

$$\vec{0} = -\nabla\varphi + P_{0,\Gamma}(\mu\Delta\vec{u}) + \rho P_{0,\Gamma}\vec{f}(t, x), \quad (1.12)$$

$$\rho \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = -\nabla\tilde{p} + P_{0,S}(\mu\Delta\vec{u}) + \rho P_{0,S}\vec{f}(t, x). \quad (1.13)$$

Соотношение (1.12) показывает, что $\nabla\varphi$ может быть найдено, если известно решение $\vec{u}$. Поэтому в дальнейшем достаточно ограничиться рассмотрением соотношения (1.13), а также второго условия (1.3) с соответствующей заменой $p \rightarrow \tilde{p}$, так как $p = \tilde{p} + \varphi$, $\varphi = 0$ (на Γ). Условимся называть решения уравнения (1.12) *тривиальными*.

Представим $\nabla\tilde{p} \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$ в виде $\nabla\tilde{p} = \nabla p_1 + \nabla p_2$, где p_1 — функция из вспомогательной задачи I, а p_2 есть решение вспомогательной задачи II для $\psi = \rho_0(\partial^2\zeta/\partial t^2) + \rho g\zeta$.

Итогом приведенных выше преобразований является лемма.

Лемма 1.4. *Решение начально-краевой задачи (1.1)–(1.4) с учетом (1.12) является решением задачи Коши для системы дифференциально-операторных уравнений*

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} + \mu A\vec{u} + \rho g G\zeta + \rho_0 G \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \rho P_{0,S}\vec{f} =: \vec{f}_{0,S}, \quad (1.14)$$

$$\frac{d\zeta}{dt} - \gamma_n \vec{u} = 0, \quad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \quad \zeta(0) = \zeta^0, \quad \zeta'(0) = \zeta^1 = \gamma_n \vec{u}^0.$$

Здесь все искомые и заданные функции переменной t и пространственных переменных считаем функциями одной переменной t со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах, что уже и было учтено в проведенных выше построениях. В связи с этим все производные $\partial/\partial t$ заменили на d/dt .

Будем считать, что функция $(\gamma_n \vec{u})(t)$ непрерывно дифференцируема по t и ее производная принадлежит $\mathcal{D}(G) = H_\Gamma^{1/2}$, тогда $G(d^2\zeta/dt^2) = G\gamma_n(d\vec{u}/dt)$.

С учетом сказанного задачу (1.14) перепишем в виде задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma}$:

$$\mathcal{C} \frac{dy}{dt} + \mathcal{A}_0 y = \mathcal{F}, \quad y(0) = y^0, \quad (1.15)$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \rho I + \rho_0 G \gamma_n & 0 \\ 0 & \rho g I_\Gamma \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} \mu A & \rho g G \\ -\rho g \gamma_n & 0 \end{pmatrix}, \quad y = (\vec{u}; \zeta)^\tau, \quad \mathcal{F} = (f_{0,S}; 0)^\tau, \quad (1.16)$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(G), \quad \mathcal{D}(\mathcal{C}) = \{ (\vec{u}; \zeta)^\tau \in \mathcal{H} : \vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega) \}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{D}(\mathcal{C}).$$

Здесь индекс $(\dots)^\tau$ означает операцию транспонирования матрицы. Кроме того, всюду далее будем считать, что $\mathbb{R}_+ := [0; +\infty)$.

Определение 1.1. *Сильным решением (по переменной t) исходной начально-краевой задачи (1.1)–(1.4) назовем набор функций $\vec{u}(t)$, $\nabla p(t)$ и $\zeta(t)$, для которых функция $y(t) = (\vec{u}(t); \zeta(t))^\tau$ являются решением задачи (1.15). В свою очередь *решением* задачи (1.15) назовем такую функцию $y(t)$, что $y(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ при $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{A}_0 y \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $y(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, выполнено начальное условие и уравнение (1.15) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.*

Лемма 1.5. *Оператор $\mathcal{C}$ (определенный в (1.16)) является положительно определенным оператором, действующим в $\mathcal{H}$.*

Доказательство. Оператор $\mathcal{C}$, очевидно, плотно определен. Для $y_1 = (\vec{u}_1, \zeta_1)^\tau$ и $y_2 = (\vec{u}_2, \zeta_2)^\tau$ из $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}y_1, y_2)_\mathcal{H} &= \rho (\vec{u}_1, \vec{u}_2)_{\vec{L}_2(\Omega)} + \rho_0 (G\gamma_n \vec{u}_1, \vec{u}_2)_{\vec{L}_2(\Omega)} + (\zeta_1, \zeta_2)_0 = \\ &= \rho (\vec{u}_1, \vec{u}_2)_{\vec{L}_2(\Omega)} + \rho_0 (\gamma_n \vec{u}_1, \gamma_n \vec{u}_2)_0 + (\zeta_1, \zeta_2)_0 = \dots = (y_1, \mathcal{C}y_2)_\mathcal{H}. \end{aligned}$$

Отсюда следует симметричность оператора $\mathcal{C}$. Пусть теперь $y_1 = y_2 = y$, тогда из последнего получим

$$(\mathcal{C}y, y)_\mathcal{H} = \rho \|\vec{u}\|_{\vec{L}_2(\Omega)}^2 + \rho_0 \|\gamma_n \vec{u}\|_0^2 + \|\zeta\|_0^2 \geq \rho \|\vec{u}\|_{\vec{L}_2(\Omega)}^2 + \|\zeta\|_0^2 \geq \min(\rho; 1) \cdot \|y\|_\mathcal{H}^2.$$

Таким образом, $\mathcal{C}$ — положительно определенный оператор, действующий в $\mathcal{H}$. $\square$

Введем вспомогательные операторы

$$Q = \gamma_n(\mu A)^{-1/2}, \quad \mathcal{D}(Q) = \vec{J}_{0,S}(\Omega), \quad Q^+ = (\mu A)^{-1/2}G, \quad \mathcal{D}(Q^+) = \mathcal{D}(G).$$

Лемма 1.6. Для операторов Q и Q^+ справедливы свойства

$$Q^+ \subset Q^*, \quad Q^+ = Q^*|_{\mathcal{D}(G)}, \quad \overline{Q^+} = Q^*.$$

Доказательство. Для любого $\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и $\eta \in \mathcal{D}(G)$ имеем

$$(Q\vec{v}, \eta)_0 = (\gamma_n(\mu A)^{-1/2}\vec{v}, \eta)_0 = ((\mu A)^{-1/2}\vec{v}, G\eta) = (\vec{v}, (\mu A)^{-1/2}G\eta) = (\vec{v}, Q^+\eta).$$

Отсюда следует, что $Q^+ \subset Q^*$ и $Q^+ = Q^*|_{\mathcal{D}(G)}$. Покажем, что оператор Q^+ ограничен на $\mathcal{D}(G)$. Оператор Q ограниченно действует из $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ в $L_{2,\Gamma}$. Действительно, оператор $A^{-1/2}$ отображает $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ на $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$, а оператор γ_n , согласно теореме о следах, компактен как оператор из $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ в $L_{2,\Gamma}$. Таким образом, оператор Q ограничен (даже компактен). Отсюда следует, что оператор Q^* тоже ограничен. Тогда для любого $\eta \in \mathcal{D}(G)$ имеет место следующее неравенство:

$$\|Q^+\eta\| = \|Q^*\eta\| \leq \|Q^*\| \cdot \|\eta\|_0.$$

Откуда следует, что Q^+ ограничен на $\mathcal{D}(G)$, а поэтому расширяется по непрерывности до ограниченного оператора Q^* , т. е. $\overline{Q^+} = Q^*$. $\square$

Покажем, что оператор $\mathcal{A}_0$ замыкаем и замыкание $\overline{\mathcal{A}_0}$ есть замкнутый максимальный аккретивный оператор, т. е. других замкнутых аккретивных расширений у оператора $\mathcal{A}_0$ нет. Подобные построения для операторных блоков проводились в работах [5, 13].

Лемма 1.7. Оператор $\mathcal{A}_0$ замыкаем и $\overline{\mathcal{A}_0} =: \mathcal{A}$, при этом оператор $\mathcal{A}$ — максимальный аккретивный и представим в следующем виде:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} (\mu A)^{1/2} & 0 \\ 0 & I_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \rho g Q^* \\ -\rho g Q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mu A)^{1/2} & 0 \\ 0 & I_\Gamma \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ y = (\vec{u}; \zeta)^\tau \in \mathcal{H} = \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma} \mid \vec{u} + \rho g (\mu A)^{-1/2} Q^* \zeta \in \mathcal{D}(A) \right\}. \quad (1.18)$$

Доказательство. I этап. Оператор $\mathcal{A}_0$, очевидно, плотно определен. Далее непосредственно проверяется, что для любого $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ выполняется $\operatorname{Re}(\mathcal{A}_0 y, y)_{\mathcal{H}} = \|(\mu A)^{1/2} \vec{u}\|^2 \geq 0$. Таким образом, оператор $\mathcal{A}_0$ аккретивен, а значит (см., например, [9, с. 109], [3, с. 51]), допускает замыкание.

Построим замыкание оператора $\mathcal{A}_0$, используя включение $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(\gamma_n)$. Пусть

$$y_n := (\vec{u}_n; \zeta_n)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0), \quad y_n \rightarrow y = (\vec{u}; \zeta)^\tau, \quad \mathcal{A}_0 y_n \rightarrow y_0 := (\vec{u}_0; \zeta_0)^\tau. \quad (1.19)$$

Отсюда, $\vec{u}_n + \rho g (\mu A)^{-1} G \zeta_n \in \mathcal{D}(A)$, $A(\vec{u}_n + \rho g (\mu A)^{-1} G \zeta_n) \rightarrow \vec{u}_0$, кроме того

$$\vec{u}_n + \rho g (\mu A)^{-1} G \zeta_n = \vec{u}_n + \rho g (\gamma_n(\mu A)^{-1})^* \zeta_n \rightarrow \vec{u} + \rho g (\gamma_n(\mu A)^{-1})^* \zeta.$$

Оператор A самосопряжен, а потому замкнут, таким образом, имеем

$$\vec{u} + \rho g (\gamma_n(\mu A)^{-1})^* \zeta \in \mathcal{D}(A), \quad A(\vec{u} + \rho g (\gamma_n(\mu A)^{-1})^* \zeta) = u_0.$$

Из (1.19) следует, что $\vec{u}_n \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(\gamma_n)$, $\vec{u}_n \rightarrow \vec{u}$, $-\gamma_n \vec{u}_n \rightarrow \zeta_0$. Оператор γ_n замкнут, а значит, $\vec{u} \in \mathcal{D}(\gamma_n)$ и $-\gamma_n \vec{u} = \zeta_0$. Следовательно, $y \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0})$ и $\overline{\mathcal{A}_0} y = y_0$, где

$$\overline{\mathcal{A}_0} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\vec{u} + \rho g (\gamma_n(\mu A)^{-1})^* \zeta) \\ -\gamma_n \vec{u} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0}) = \left\{ (\vec{u}; \zeta)^\tau \in \mathcal{H} \mid \vec{u} \in \mathcal{D}(\gamma_n), \vec{u} + \rho g (\gamma_n(\mu A)^{-1})^* \zeta \in \mathcal{D}(A) \right\}.$$

Используем теперь включение $\mathcal{D}(A^{1/2}) \subset \mathcal{D}(\gamma_n)$ (см. лемму 1.3). Отсюда следует равенство

$$(\gamma_n(\mu A)^{-1})^* = (\gamma_n(\mu A)^{-1/2}(\mu A)^{-1/2})^* = (\mu A)^{-1/2}(\gamma_n(\mu A)^{-1/2})^* = (\mu A)^{-1/2} Q^*.$$

Из включения $\vec{u} + \rho g (\gamma_n(\mu A)^{-1})^* \zeta = \vec{u} + \rho g (\mu A)^{-1/2} Q^* \zeta \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$ и факта, что $\mathcal{D}(A^{1/2})$ является линейным, следует, что $\vec{u} \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \subset \mathcal{D}(\gamma_n)$. Следовательно, условие $\vec{u} \in \mathcal{D}(\gamma_n)$ в описании множества $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0})$ можно опустить. Из проведенных рассуждений получим, что

$$\overline{\mathcal{A}_0} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \zeta \end{pmatrix} =: \mathcal{A} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\vec{u} + \rho g (\mu A)^{-1/2} Q^* \zeta) \\ -\rho g Q(\mu A)^{1/2} \vec{u} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ (\vec{u}; \zeta)^\tau \in \mathcal{H} \mid \vec{u} + \rho g (\mu A)^{-1/2} Q^* \zeta \in \mathcal{D}(A) \right\}.$$

Непосредственными вычислениями проверяется, что множество $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ из (1.18) является естественной областью определения для факторизации (1.17).

II этап. Докажем, что замкнутый аккретивный оператор $\mathcal{A}$ максимален. Для этого достаточно установить (см. [9, с. 109, теорема 4.3]), что $\rho(\mathcal{A}) \cap \{\lambda < 0\} \neq \emptyset$, где $\rho(\mathcal{A})$ — резольвентное множество оператора $\mathcal{A}$.

Действительно, при $\lambda \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{A} - \lambda \mathcal{I} &= \begin{pmatrix} (\mu A)^{1/2} & 0 \\ 0 & I_\Gamma \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} I & \rho g Q^* \\ -\rho g Q & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda(\mu A)^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda I_\Gamma \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} (\mu A)^{1/2} & 0 \\ 0 & I_\Gamma \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (\mu A)^{1/2} & 0 \\ 0 & I_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - \lambda(\mu A)^{-1} & \rho g Q^* \\ -\rho g Q & -\lambda I_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mu A)^{1/2} & 0 \\ 0 & I_\Gamma \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (\mu A)^{1/2} & 0 \\ 0 & I_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\lambda^{-1} \rho g Q^* \\ 0 & I_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - \lambda(\mu A)^{-1} - \lambda^{-1}(\rho g)^2 Q^* Q & 0 \\ 0 & -\lambda I_\Gamma \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} I & 0 \\ \lambda^{-1} \rho g Q & I_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mu A)^{1/2} & 0 \\ 0 & I_\Gamma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Определим оператор-функцию $L(\lambda) = I - \lambda(\mu A)^{-1} - \lambda^{-1}(\rho g)^2 Q^* Q$. Очевидно, что при $\lambda < 0$ (ограниченный) оператор $L(\lambda)$ самосопряжен и положительно определен, а значит, существует, ограничен и задан на всем пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ оператор $L^{-1}(\lambda)$. Из последнего представления при $\lambda < 0$ найдем, что существует

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})^{-1} &= \begin{pmatrix} (\mu A)^{-1/2} & 0 \\ -\lambda^{-1} \rho g Q & I_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & -\lambda I_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mu A)^{-1/2} & \lambda^{-1} \rho g Q^* \\ 0 & I_\Gamma \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (\mu A)^{-1/2} L^{-1}(\lambda) (\mu A)^{-1/2} & \lambda^{-1} \rho g (\mu A)^{-1/2} L^{-1}(\lambda) Q^* \\ -\lambda^{-1} \rho g Q L^{-1}(\lambda) (\mu A)^{-1/2} & -\lambda^{-2} (\rho g)^2 Q L^{-1}(\lambda) Q^* - \lambda I_\Gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \end{aligned}$$

а значит, $\{\lambda < 0\} \subset \rho(\mathcal{A})$. □

1.5. Теорема существования сильного решения.

Теорема 1.1. *Если выполнены условия $\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A)$, $\zeta^0 \in \mathcal{D}(G) = H_\Gamma^{1/2}$, а функция $\vec{f}(t)$ удовлетворяет условию Гельдера, т. е. для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$ найдутся такие числа $K = K(\tau) > 0$, $k = k(\tau) \in (0, 1]$, что*

$$\|\vec{f}(t) - \vec{f}(s)\|_{\vec{L}_2(\Omega)} \leq K|t - s|^k \quad \forall 0 \leq s, t \leq \tau.$$

Тогда начально-краевая задача (1.1)–(1.4) имеет единственное сильное решение (в смысле определения 1.1).

Доказательство. I этап. Согласно лемме 1.5 оператор $\mathcal{C}$ имеет ограниченный обратный оператор $\mathcal{C}^{-1}$, поэтому с операторным уравнением (1.15) будем ассоциировать следующее уравнение с оператором $\mathcal{A}$:

$$\frac{dy}{dt} = -\mathcal{C}^{-1} \mathcal{A} y + \mathcal{C}^{-1} \mathcal{F}, \quad y(0) = y^0. \quad (1.20)$$

Введем в $\mathcal{H}$ новое скалярное произведение $(y, z)_{\mathcal{H}_\mathcal{C}} := (\mathcal{C}y, z)_\mathcal{H}$, порождающее норму, эквивалентную исходной норме $\mathcal{H}$. Соответствующее энергетическое пространство для этой нормы обозначим через $\mathcal{H}_\mathcal{C}$.

Докажем, что оператор $-\mathcal{C}^{-1} \mathcal{A}$ является генератором голоморфной полугруппы в $\mathcal{H}_\mathcal{C}$. Для этого достаточно показать, что оператор $\mathcal{C}^{-1} \mathcal{A}$ является максимальным секториальным в $\mathcal{H}_\mathcal{C}$ (см., например, [8, с. 234, 235]).

Проверим, что $C^{-1}\mathcal{A}$ секториален в $\mathcal{H}_C$. Пусть $y = (y_1; y_2)^\tau \in \mathcal{D}(C^{-1}\mathcal{A})$, тогда $y_1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ и из факторизации оператора $\mathcal{A}$ имеем, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(C^{-1}\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}_C} &= \operatorname{Re} \left(\begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} & \rho g Q^* \\ -\rho g Q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mu A)^{1/2} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\mu A)^{1/2} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}} = \|(\mu A)^{1/2} y_1\|_{\mathcal{H}_1}^2; \\ \left| \operatorname{Im}(C^{-1}\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}_C} \right| &= \left| \operatorname{Im} \left((\rho g Q^* y_2, (\mu A)^{1/2} y_1)_{\mathcal{H}_1} - (\rho g Q (\mu A)^{1/2} y_1, y_2)_{\mathcal{H}_2} \right) \right| = \\ &= \left| 2\rho g \operatorname{Im}(Q^* y_2, (\mu A)^{1/2} y_1)_{\mathcal{H}_1} \right| \leq 2\rho g \|(\mu A)^{1/2} y_1\|_{\mathcal{H}_1} \cdot \|Q^* y_2\|_{\mathcal{H}_1}. \end{aligned}$$

Из этих оценок при любом $\theta > 0$ получаем, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(C^{-1}\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}_C} - \theta \left| \operatorname{Im}(C^{-1}\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}_C} \right| &\geq \left(\|(\mu A)^{1/2} y_1\|_{\mathcal{H}_1} - \theta \|Q^* y_2\|_{\mathcal{H}_1} \right)^2 - \theta^2 \|Q^* y_2\|_{\mathcal{H}_1}^2 \geq \\ &\geq -\theta^2 \|Q^*\|^2 \cdot \|y_2\|_{\mathcal{H}_2}^2 \geq -\theta^2 \|Q^*\|^2 \cdot \|y\|_{\mathcal{H}}^2 = -\theta^2 \|Q^*\|^2 \|C^{-1}\|^2 \|y\|_{\mathcal{H}_C}^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re} \left((C^{-1}\mathcal{A} + \gamma(\theta))y, y \right)_{\mathcal{H}_C} - \theta \left| \operatorname{Im} \left((C^{-1}\mathcal{A} + \gamma(\theta))y, y \right)_{\mathcal{H}_C} \right| \geq 0,$$

где $\gamma(\theta) = -\theta^2 \|Q^*\|^2 \|C^{-1}\|^2$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Im} \left((C^{-1}\mathcal{A} + \gamma(\theta))y, y \right)_{\mathcal{H}_C} \right| &\leq \theta^{-1} \operatorname{Re} \left((C^{-1}\mathcal{A} + \gamma(\theta))y, y \right)_{\mathcal{H}_C}, \\ \forall 0 \neq y \in \mathcal{D}(C^{-1}\mathcal{A}), \quad \theta > 0, \end{aligned}$$

Отсюда следует, что оператор $C^{-1}\mathcal{A}$ секториальный с вершиной $\gamma(\theta)$ и полураствором сектора $\arctg \theta^{-1}$. Максимальность оператора $C^{-1}\mathcal{A}$ следует из $(C^{-1}\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ при достаточно больших $\lambda < 0$ (идея доказательства совпадает с этапом II из леммы 1.7).

II этап. Пусть выполнены условия теоремы на начальные данные, тогда

$$y(0) \in \mathcal{D}(C^{-1}\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(G) \subset \mathcal{D}(C^{-1}\mathcal{A}).$$

Из условия на функцию $\vec{f}(t)$ следует, что функция $C^{-1}\mathcal{F}(t)$ также локально гильбертова. Так как оператор $-C^{-1}\mathcal{A}$ порождает голоморфную полугруппу, приходим к тому, что задача (1.20) имеет единственное решение $y(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_C) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ (см., например, [3, с. 130, теорема 1.4], [8, с. 248, теорема 6.5]).

II этап. Пусть $y(t) = (\vec{u}(t); \zeta(t))^\tau$ — решение задачи (1.20). Перепишем уравнение (1.20) в следующем виде:

$$\begin{cases} d\vec{u}/dt = -C_0^{-1}(\mu A) (\vec{u} + \rho g (\mu A)^{-1/2} Q^* \zeta) + C_0^{-1} \vec{f}_{0,S}, \\ d\zeta/dt = Q(\mu A)^{1/2} \vec{u}, \quad C_0 := \rho I + \rho_0 G \gamma_n. \end{cases} \quad (1.21)$$

Заметим, что учитывая определение $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, скобки в первом уравнении раскрыть нельзя, так как каждое слагаемое в скобках может принадлежать $\mathcal{D}(A^{1/2})$ и только сумма попадает в $\mathcal{D}(A)$.

Цель дальнейших преобразований — избавиться от упомянутого затруднения и перейти от системы (1.21) к системе уравнений, отвечающей не замкнутому оператору $\mathcal{A}$, а его сужению $\mathcal{A}_0$. Для этого из второго уравнения (1.21) выразим $\zeta(t)$ и подставим в первое уравнение (1.21), в результате получим

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -C_0^{-1}(\mu A) \left(\vec{u} + \rho g (\mu A)^{-1/2} Q^* \zeta^0 + \rho g (\mu A)^{-1/2} Q^* \int_0^t Q(\mu A)^{1/2} \vec{u}(s) ds \right) + C_0^{-1} \vec{f}_{0,S}.$$

Так как по условию теоремы $\zeta^0 \in \mathcal{D}(G)$, следовательно, из леммы 1.6 следует, что $Q^* \zeta^0 = Q^+ \zeta^0$ и поэтому $(\mu A)^{-1/2} Q^* \zeta^0 = (\mu A)^{-1} G \zeta^0 \in \mathcal{D}(A)$. Таким образом,

$$\vec{u} + \rho g \int_0^t A^{-1/2} Q^* Q A^{1/2} \vec{u}(s) ds =: \vec{u}_0(t), \quad \vec{u}_0(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A)). \quad (1.22)$$

Определим на $\mathcal{D}(A)$ норму $\|\vec{u}\|_{\mathcal{D}(A)} := \|(\mu A)\vec{u}\|_{\tilde{J}_{0,S}(\Omega)}$ и превратим его тем самым в банахово пространство E_A . Будем рассматривать уравнение (1.22) как уравнение Вольтерра второго порядка в E_A . Ядро $K(t, s) := A^{-1/2}Q^*QA^{1/2}$ интегрального оператора в (1.22) есть сильно непрерывная оператор-функция, так как оператор $A^{-1/2}Q^*QA^{1/2}$ ограничен в E_A . Докажем данный факт.

Для любого $\vec{u}(t) \in E_A$ имеем

$$\begin{aligned} & \|(\mu A)^{-1/2}Q^*Q(\mu A)^{1/2}\vec{u}\|_{E_A} = \|(\mu A)^{1/2}Q^*Q(\mu A)^{1/2}\vec{u}\|_{\tilde{J}_{0,S}(\Omega)} = \\ & = \|(\mu A)^{1/2}Q^*|_{\mathcal{D}(G)}(\gamma_n(\mu A)^{-1/2})(\mu A)^{-1/2}(\mu A\vec{u})\|_{\tilde{J}_{0,S}(\Omega)} = \|G\gamma_n(\mu A)^{-1}(\mu A\vec{u})\|_{\tilde{J}_{0,S}(\Omega)} \leq \\ & \leq \|G\gamma_n(\mu A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\tilde{J}_{0,S}(\Omega))} \cdot \|(\mu A)\vec{u}\|_{\tilde{J}_{0,S}(\Omega)} = \|G\gamma_n(\mu A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\tilde{J}_{0,S}(\Omega))} \cdot \|\vec{u}\|_{E_A}. \end{aligned}$$

Таким образом, $(\mu A)^{-1/2}Q^*Q(\mu A)^{1/2} \in \mathcal{L}(E_A)$ и уравнение (1.22) имеет единственное решение $\vec{u}(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A))$. Отсюда следует, что в первом уравнении системы (1.21) можно раскрыть скобки. Это означает, что функция $y(t)$ — решение задачи (1.15) (в смысле определения 1.1). Теорема доказана. $\square$

2. ЗАДАЧА О НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

2.1. Формулировка задачи. Рассмотрим так называемые нормальные колебания данной гидросистемы. Прежде чем это сделать, заметим следующее обстоятельство. При исследовании начально-краевой задачи (1.1)–(1.4) выяснилось, что этой задаче можно сопоставить матричный оператор $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}$, являющийся максимальным аккретивным оператором, действующим в $\mathcal{H}$. Поэтому естественным является следующее определение.

Определение 2.1. Назовем *нормальными движениями (колебаниями)* изучаемой гидросистемы такие решения $y(t)$ однородного уравнения (1.20), которые зависят от t по закону $\exp(-\lambda t)$.

Полагая в (1.20) $\mathcal{F} \equiv 0$ (свободные движения гидросистемы) и

$$y(t) = \exp(-\lambda t)y, \quad y \in \mathcal{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

приходим к спектральной задаче

$$\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}y = \lambda y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}_{\mathcal{C}}. \quad (2.1)$$

Лемма 2.1. Число $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (2.1).

Доказательство. Пусть $\lambda = 0$, тогда для $y = (\vec{u}, \zeta)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$:

$$(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}_{\mathcal{C}}} = (\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}} = 0, \quad \operatorname{Re}(\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}} = \|(\mu A)^{1/2}\vec{u}\|_{\tilde{J}_{0,S}(\Omega)}^2 = 0,$$

откуда $\vec{u} = 0$. Далее, из факторизации для оператора $\mathcal{A}$ (см. подробнее лемму 1.7) при $\vec{u} = 0$ имеем $\zeta \in \operatorname{Ker} Q^* = \{0\}$. Таким образом, $\zeta = 0$, а значит, $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (2.1). $\square$

Лемма 2.2. Спектр задачи (2.1) совпадает со спектром операторного пучка

$$L(\lambda) = I - \lambda V_1 - \lambda^{-1}V_2, \quad (2.2)$$

$$V_1 := \rho(\mu A)^{-1} + \rho_0 Q^*Q, \quad V_2 := \rho g Q^*Q.$$

Доказательство. Пусть $\lambda \neq 0$, тогда (с учетом обозначения $C_0 = \rho I + \rho_0 G\gamma_n$)

$$\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I} =$$

$$\begin{aligned} & = \begin{pmatrix} C_0^{-1} & 0 \\ 0 & (\rho g)^{-1}I_{\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mu A)^{1/2} & 0 \\ 0 & I_{\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - \lambda(\mu A)^{-1/2}C_0(\mu A)^{-1/2} & \rho g Q^* \\ -\rho g Q & -\lambda \rho g I_{\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mu A)^{1/2} & 0 \\ 0 & I_{\Gamma} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} C_0^{-1} & 0 \\ 0 & (\rho g)^{-1}I_{\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mu A)^{1/2} & 0 \\ 0 & I_{\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\lambda^{-1}Q^* \\ 0 & I_{\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & -\lambda \rho g I_{\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \lambda^{-1}Q & I_{\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mu A)^{1/2} & 0 \\ 0 & I_{\Gamma} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $L(\lambda) = I - \lambda(\rho(\mu A)^{-1} + \rho_0 Q^*Q) - \lambda^{-1} \rho g Q^*Q$.

Если $\lambda \neq 0$ принадлежит резольвентному множеству операторного пучка $L(\lambda)$ ($\lambda \in \rho(L(\lambda))$), тогда из последних преобразований $\lambda \in \rho(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A})$, а потому $\sigma(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}) \subset \sigma(L(\lambda))$.

Докажем обратное включение. Пусть λ — собственное значение операторного пучка $L(\lambda)$, т. е. существует $x \neq 0$ такой, что $L(\lambda)x = 0$. Определим

$$y = (\vec{u}; \zeta)^\tau := ((\mu A)^{-1/2}x; -\lambda^{-1}(\rho g)^{-1}Qx)^\tau, \quad (2.3)$$

тогда $0 \neq y \in \mathcal{D}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A})$ и $(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A} - \lambda I)y = 0$. Действительно, согласно равенству $L(\lambda)x = 0$, непосредственно проверяется равенство $(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A} - \lambda I)y = 0$. Далее, из факторизации

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\rho g Q (\mu A)^{-1/2} & I_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu A & 0 \\ 0 & (\rho g)^2 Q^* Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \rho g (\mu A)^{-1/2} Q^* \\ 0 & I_\Gamma \end{pmatrix}$$

имеем

$$\begin{aligned} \vec{u} + \rho g (\mu A)^{-1/2} Q^* \zeta &= (\mu A)^{-1/2}x + \rho g (\mu A)^{-1/2} Q^* (-\lambda^{-1}(\rho g)^{-1}Qx) = \\ &= (\mu A)^{-1/2}x - (\mu A)^{-1/2}(I - \lambda V_1)x = \lambda (\mu A)^{-1/2} V_1 x = \lambda (\mu A)^{-1} C_0 (\mu A)^{-1/2}x \in \mathcal{D}(A). \end{aligned}$$

Таким образом, $\sigma(L(\lambda)) \subset \sigma(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A})$. $\square$

Лемма 2.3. Оператор $V_1 = \rho(\mu A)^{-1} + \rho_0 Q^* Q$, действующий в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, является компактным положительным оператором, имеющим асимптотику

$$\lambda_n(V_1) = \rho_0 \lambda_n(Q^* Q) [1 + o(1)] = \rho_0 \mu^{-1} \left(\frac{\text{mes } \Gamma}{16\pi} \right)^{1/2} n^{-1/2} [1 + o(1)], \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Доказательство. Очевидно, что оператор $Q^* Q$ — неотрицателен. Кроме того, как доказано (см. доказательство леммы 1.6), оператор $\gamma_n A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(\vec{J}_{0,S}(\Omega); L_{2,\Gamma})$, а потому компактен и $Q^* Q$. Далее, имеет место асимптотическая формула (см. [15, с. 75])

$$\lambda_n(Q^* Q) = \mu^{-1} \left(\frac{\text{mes } \Gamma}{16\pi} \right)^{1/2} n^{-1/2} [1 + o(1)], \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Оператор A^{-1} является компактным положительным оператором, действующим в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ с асимптотическим поведением собственных значений (см. свойства вспомогательной задачи I):

$$\lambda_n(A^{-1}) = \left(\frac{\text{mes } \Omega}{3\pi^2} \right)^{2/3} n^{-2/3} [1 + o(1)], \quad n \rightarrow +\infty. \quad (2.6)$$

Далее, так как операторы $Q^* Q$ и A^{-1} — вполне непрерывные самосопряженные неотрицательные операторы, то для ненулевых s -чисел справедливо:

$$s_n(Q^* Q) = \lambda_n(Q^* Q), \quad s_n(A^{-1}) = \lambda_n(A^{-1}). \quad (2.7)$$

С учетом (2.5), (2.6) и (2.7) имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} s_n(Q^* Q) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} \lambda_n(Q^* Q) = \left(\frac{\text{mes } \Gamma}{16\pi} \right)^{1/2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} s_n(A^{-1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} \lambda_n(A^{-1}) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом (см., например, [4, с. 52]),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} \lambda_n(Q^* Q + A^{-1}) = \left(\frac{\text{mes } \Gamma}{16\pi} \right)^{1/2},$$

отсюда следует (2.4). $\square$

2.2. Основные свойства спектра. Рассмотрим операторный пучок $L(\lambda)$ из (2.2). Так как

$$0 < V_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\vec{J}_{0,S}(\Omega)), \quad 0 \leq V_2 \in \mathfrak{S}_\infty(\vec{J}_{0,S}(\Omega)),$$

то $L(\lambda)$ — фредгольмова оператор-функция в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. В силу свойств операторов V_1 и V_2 при отрицательных λ оператор $L(\lambda)$ положительно определен и, следовательно, обратим. Поэтому к нему можно применить утверждения [14, п. 1.6.3, с. 66], из которых следует, что спектр $L(\lambda)$ в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности, точками сгущения спектра могут быть только 0 и ∞ . При этом имеют место следующие асимптотические формулы [15, с. 99]:

$$\lambda_n^{(0)} = \lambda_n(V_2)[1 + o(1)], \quad \lambda_n^{(\infty)} = \lambda_n^{-1}(V_1)[1 + o(1)], \quad n \rightarrow \infty.$$

Пусть λ_0 — собственное значение операторного пучка $L(\lambda)$ и x_0 — соответствующий ему собственный элемент: $x_0 = \lambda_0 V_1 + \lambda^{-1} V_2 x_0$. Умножая обе части этого равенства на x_0 , приходим к квадратному уравнению

$$\lambda_0^2(V_1 x_0, x_0) - \lambda_0(x_0, x_0) + (V_2 x_0, x_0) = 0, \quad (2.8)$$

откуда

$$\lambda_0 = \frac{(x_0, x_0) \pm \sqrt{(x_0, x_0)^2 - 4(V_1 x_0, x_0)(V_2 x_0, x_0)}}{2(V_1 x_0, x_0)}. \quad (2.9)$$

Из данного представления следует, что $\operatorname{Re} \lambda_0 > 0$. Пусть $\operatorname{Im} \lambda_0 \neq 0$, что означает

$$(x_0, x_0)^2 < 4(V_1 x_0, x_0)(V_2 x_0, x_0) \iff \frac{(x_0, x_0)}{2(V_1 x_0, x_0)} < \frac{2(V_2 x_0, x_0)}{(x_0, x_0)}. \quad (2.10)$$

Из (2.9) следует, что

$$|\lambda_0|^2 = \frac{(V_2 x_0, x_0)}{(V_1 x_0, x_0)} = \frac{2(V_2 x_0, x_0)}{(x_0, x_0)} \cdot \frac{(x_0, x_0)}{2(V_1 x_0, x_0)}.$$

Отсюда, с учетом (2.10), имеем

$$\left(\frac{(x_0, x_0)}{2(V_1 x_0, x_0)} \right)^2 < |\lambda_0|^2 < \left(\frac{2(V_2 x_0, x_0)}{(x_0, x_0)} \right)^2 \implies (2\|V_1\|)^{-1} \leq |\lambda_0| \leq 2\|V_2\|.$$

Так как из (2.9) при $\operatorname{Im} \lambda_0 \neq 0$ следует неравенство

$$\operatorname{Re} \lambda_0 = \frac{(x_0, x_0)}{2(V_1 x_0, x_0)} \geq (2\|V_1\|)^{-1},$$

то все невещественные собственные значения расположены в сегменте

$$\operatorname{Re} \lambda \geq (2\|V_1\|)^{-1}, \quad |\lambda| \leq 2\|V_2\|. \quad (2.11)$$

Заметим, что если невещественное число λ_0 является собственным значением пучка $L(\lambda)$, то комплексно-сопряженное число $\bar{\lambda}_0$ также является собственным значением пучка $L(\lambda)$. Так как пучок $L(\lambda)$ самосопряженный, то оператор $L(\lambda_0)$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $(L(\lambda_0))^* = L(\bar{\lambda}_0)$.

Рассмотрим теперь вопрос о присоединенных элементах к элементу x_0 , предполагая, что $\operatorname{Im} \lambda_0 = 0$. Первый присоединенный элемент x_1 к собственному элементу x_0 является решением уравнения

$$(I - \lambda_0 V_1 - \lambda_0^{-1} V_2)x_1 + (-V_1 + \lambda_0^{-2} V_2)x_0 = 0.$$

Умножая обе части скалярно на элемент x_0 , используя самосопряженность оператора $L(\lambda_0)$ при $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ получаем, что $((-V_1 + \lambda_0^{-2} V_2)x_0, x_0) = 0$. Рассмотрим это уравнение и уравнение (2.8) как систему относительно $(V_1 x_0, x_0)$ и $(V_2 x_0, x_0)$:

$$\lambda_0^2(V_1 x_0, x_0) + (V_2 x_0, x_0) = \lambda_0(x_0, x_0), \quad -(V_1 x_0, x_0) + \lambda_0^{-2}(V_2 x_0, x_0) = 0.$$

Решение данной системы можно записать в виде

$$\frac{(x_0, x_0)}{2(V_1 x_0, x_0)} = \lambda_0 = \frac{2(V_2 x_0, x_0)}{(x_0, x_0)}.$$

Откуда получаем (2.11). Отметим, что если выполнено условие $(x_0, x_0)^2 > 4(V_1 x_0, x_0)(V_2 x_0, x_0)$ или более жесткое условие $4\|V_1\| \cdot \|V_2\| < 1$, то последние равенства невыполнимы и, следовательно, присоединенных элементов нет.

С учетом сказанного, сформулируем выводы о структуре спектра задачи (2.1).

Лемма 2.4. *Спектр задачи (2.1) состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности, расположенных в правой комплексной полуплоскости и имеющих в качестве точек сгущения точки 0 и ∞ .*

Справедливы асимптотические формулы

$$\lambda_n^{(0)} = \lambda_n(V_2) = g\rho\lambda_n(Q^*Q) = \frac{g\rho}{\mu} \left(\frac{\text{mes } \Gamma}{16\pi} \right)^{1/2} n^{-1/2} [1 + o(1)], \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\lambda_n^{(\infty)} = \lambda_n^{-1}(V_1) = \frac{\mu}{\rho_0} \left(\frac{\text{mes } \Gamma}{16\pi} \right)^{-1/2} n^{1/2} [1 + o(1)], \quad n \rightarrow \infty.$$

В сегменте

$$\left\{ \lambda \mid \operatorname{Re} \lambda \geq (2\|V_1\|)^{-1}, \quad |\lambda| \leq 2\|V_2\| \right\}, \quad V_1 = \rho(\mu A)^{-1} + \rho_0 Q^*Q, \quad V_2 := \rho g Q^*Q.$$

расположены не вещественные собственные значения (симметрично относительно вещественной оси), а также вещественные собственные значения, для которых отвечающие им собственные элементы имеют присоединенные элементы. Если выполнено условие (так называемое условие сильной демпфированности пучка $L(\lambda)$)

$$4\|V_1\| \cdot \|V_2\| < 1, \quad (2.12)$$

то все собственные значения вещественны и присоединенных элементов нет.

2.3. Базисность. Общие результаты [15, п. 8.2, с. 88–97] позволяют для задачи

$$L(\lambda)x = (I - \lambda V_1 - \lambda^{-1} V_2)x = 0, \quad (2.13)$$

а значит, и для задачи (2.1), установить свойства базисности совокупности мод нормальных колебаний.

Пусть выполнено условие (2.12), тогда спектр задачи (2.13) состоит из двух ветвей вещественных собственных значений (присоединенных нет): $\{\lambda_j^+\}_{j=1}^\infty$ с предельной точкой $+\infty$ и $\{\lambda_j^-\}_{j=1}^\infty$ с предельной точкой 0. В этом случае [15, с. 92] собственные элементы $\{x_j^+\}_{j=1}^\infty$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_j^+\}_{j=1}^\infty$ задачи (2.13), образуют базис Рисса в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$. Далее, для собственных значений $\{\lambda_j^-\}_{j=1}^\infty$ отвечающие им собственные элементы $\{x_j^-\}_{j=1}^\infty$ после проектирования на $\vec{M}_0(\Omega) = \vec{J}_{0,S}(\Omega) \ominus \vec{N}_0(\Omega)$, где $\vec{N}_0(\Omega) = \operatorname{Ker} V_2 = \{\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega) : \gamma_n A^{-1/2} \vec{u} = 0\}$, образуют базис Рисса в $\vec{M}_0(\Omega)$. Более того (см. (2.3)), множество $\{\vec{u}_j^- = (\mu A)^{-1/2} x_j^-\}_{j=1}^\infty$ будет базисом Рисса в $\vec{M}_1(\Omega) = \vec{J}_{0,S}^1(\Omega) \ominus \{\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega) : \gamma_n \vec{u} = 0\}$. Если ввести (см. (2.3)) $\zeta_j^- = -(\lambda_j^-)^{-1} Q x_j^-$, то множество $\{\lambda_k^- \zeta_k^-\}_{k=1}^\infty$ будет базисом Рисса в $H_\Gamma^{1/2}$.

Если условие (2.12) не выполнено, то в этом случае [15, с. 97] собственным значениям $\{\lambda_j^+\}_{j=1}^\infty$ отвечает множество собственных элементов $\{x_j^+\}_{j=1}^\infty$, образующих в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ базис Рисса с точностью до конечного дефекта. Отсюда получаем, что элементы $\{\vec{u}_j^+ = (\mu A)^{-1/2} x_j^+\}_{j=1}^\infty$ образуют базис Рисса в $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ также с точностью до конечного дефекта. Для собственных значений $\{\lambda_j^-\}_{j=1}^\infty$ множество отвечающих им собственных элементов, после проектирования на $\vec{M}_0(\Omega)$ образует базис Рисса в $\vec{M}_0(\Omega)$ с точностью до конечного дефекта. Отсюда, как и выше, устанавливаем, что множество $\{\lambda_k^- \zeta_k^-\}_{k=1}^\infty$ образует базис Рисса в $H_\Gamma^{1/2}$ с точностью до конечного дефекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агранович М. С. Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей // Усп. мат. наук. — 2002. — 57, № 5. — С. 3–78.
2. Габов С. А., Свешиников А. Г. Математические задачи динамики флотирующей жидкости // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. — 1990. — 28. — С. 3–86.

3. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Выща школа, 1989.
4. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
5. Загора Д. А. Спектральные свойства операторов в задаче о нормальных колебаниях смеси вязких сжимаемых жидкостей// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2023. — 69, № 1. — С. 73–97.
6. Копачевский Н. Д. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложениях к задаче Стокса// ТВИМ. — 2004. — 2. — С. 52–80.
7. Копачевский Н. Д. Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения. — Симферополь: ФОРМА, 2016.
8. Копачевский Н. Д., Азизов Т. Я., Загора Д. А., Цветков Д. О. Операторные методы в прикладной математике. Т. 2. Основные курсы. — Симферополь: АРИАЛ, 2022.
9. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
10. Солдатов И. Н., Ключева Н. В. Азимутальные волны во вращающейся вязкой флотирующей жидкости// Прикл. мех. техн. физ. — 2021. — 62, № 2. — С. 110–121.
11. Цветков Д. О. Колебания стратифицированной жидкости, частично покрытой льдом (общий случай)// Мат. заметки. — 2020. — 107, № 1. — С. 130–144.
12. Цветков Д. О. Об одной краевой задаче, связанной с внутренней флотацией// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2024. — 70, № 3. — С. 498–515.
13. Atkinson F. V., Langer H., Mennicken R., Shkalikov A. A. The essential spectrum of some matrix operators// Math. Nachr. — 1994. — 167. — С. 5–20.
14. Kopachevsky N. D., Krein S. G. Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1. — Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 2001.
15. Kopachevsky N. D., Krein S. G. Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2. — Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 2003.
16. Mandal B. N., Kundu K. A note on the singularities in the theory of water waves with an inertial surface// Austral. Math. Soc. — 1986. — 28, № 2. — С. 271–278.
17. Metivier G. Valeurs propres d'opérateurs définis par la restriction de systèmes variationnels à des sous-espaces// J. Math. Pures Appl. — 1978. — 57, № 2. — С. 133–156.
18. Tsvetkov D. O. Oscillations of a liquid partially covered with ice// Lobachevskii J. Math. — 2021. — 42, № 5. — С. 1078–1093.

Д. О. Цветков

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия

E-mail: tsvetdo@gmail.com

UDC 517.98

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-508-523

EDN: EBRWZE

Oscillations of a viscous fluid with an inertial free surface

D. O. Tsvetkov

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia

Abstract. The problem of small motions and normal oscillations of a viscous fluid is investigated. The free surface contains heavy particles of some substance. These particles do not interact with each other during the free surface oscillations, or their interaction is negligible. The original initial-boundary value problem is reduced to the Cauchy problem for a first-order differential equation in a Hilbert space. After a detailed study of the properties of the operator coefficients, a theorem on the solvability of the resulting Cauchy problem is proved. Based on this, sufficient conditions for the existence of a solution to the initial-boundary value problem describing the evolution of the original hydraulic system are found. Statements regarding the structure of the problem spectrum and the basis property of the system of eigenfunctions are proved.

Keywords: viscous fluid, inertial free surface, small motions, normal vibrations, initial-boundary value problem.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: D. O. Tsvetkov, “Oscillations of a viscous fluid with an inertial free surface,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 3, 508–523. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-508-523>

REFERENCES

1. M. S. Agranovich, “Spektral’nye zadachi dlya sil’no ellipticheskikh sistem vtorogo poryadka v oblastiakh s gladkoy i negladkoy granitsey” [Spectral problems for strongly elliptic second-order systems in domains with smooth and nonsmooth boundaries], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2002, **57**, No. 5, 3–78 (in Russian).
2. S. A. Gabov and A. G. Sveshnikov, “Matematicheskie zadachi dinamiki flotiruyushchey zhidkosti” [Mathematical problems of the dynamics of floating fluid], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Mat. analiz* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1990, **28**, 3–86 (in Russian).
3. J. A. Goldstein, *Polugruppy lineynykh operatorov i ikh prilozheniya* [Semigroups of Linear Operators and Applications], Vyshcha shkola, Kiev, 1989 (Russian translation).
4. I. Ts. Gokhberg and M. G. Krein, *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov v gil’bertovom prostranstve* [Introduction to the Theory of Linear Non-Self-Adjoint Operators in Hilbert Space], Nauka, Moscow, 1965 (Russian translation).
5. D. A. Zakora, “Spektral’nye svoystva operatorov v zadache o normal’nykh kolebaniyakh smesi vyazkikh szhi-maemykh zhidkostey” [Spectral properties of operators in the problem on normal oscillations of a mixture of viscous compressible fluids], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 1, 73–97 (in Russian).
6. N. D. Kopachevskiy, “Ob abstraktnoy formule Grnina dlya troyki gil’bertovykh prostranstv i ee prilozhe-niyakh k zadache Stoksa” [On Green’s abstract formula for a triple of Hilbert spaces and its applications to the Stokes problem], *TVIM* [Taurida Bull. Inf. Math.], 2004, **2**, 52–80 (in Russian).

7. N. D. Kopachevskiy, *Abstraktnaya formula Grina i nekotorye ee prilozheniya* [Green's Abstract Formula and Some of Its Applications], FORMA, Simferopol', 2016 (in Russian).
8. N. D. Kopachevskiy, T. Ya. Azizov, D. A. Zakora, and D. O. Tsvetkov, *Operatornye metody v prikladnoy matematike. T. 2. Osnovnye kursy* [Operator Methods in Applied Mathematics. Vol. 2. Basic Courses], ARIAL, Simferopol', 2022 (in Russian).
9. S. G. Krein, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
10. I. N. Soldatov and N. V. Klyueva, "Azimutal'nye volny vo vrashchayushcheyasya vyazkoy flotiruyushchey zhidkosti" [Azimuthal waves in a rotating viscous floating fluid], *Prikl. mekh. tekhn. fiz.* [Appl. Mech. Techn. Phys.], 2021, **62**, No. 2, 110–121 (in Russian).
11. D. O. Tsvetkov, "Kolebaniya stratifitsirovannoy zhidkosti, chastichno pokrytoy l'dom (obshchiy sluchay)" [Oscillations of a stratified fluid partially covered with ice (general case)], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2020, **107**, No. 1, 130–144 (in Russian).
12. D. O. Tsvetkov, "Ob odnoy kraevoy zadache, svyazannoy s vnutrenney flotatsiey" [On one boundary-value problem related to internal flotation], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2024, **70**, No. 3, 498–515 (in Russian).
13. F. V. Atkinson, H. Langer, R. Mennicken, and A. A. Shkalikov, "The essential spectrum of some matrix operators," *Math. Nachr.*, 1994, **167**, 5–20.
14. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 2001.
15. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 2003.
16. B. N. Mandal and K. Kundu, "A note on the singularities in the theory of water waves with an inertial surface," *Austral. Math. Soc.*, 1986, **28**, No. 2, 271–278.
17. G. Metivier, "Valeurs propres d'operateurs definis par le restriction de systemes variationnelles a des sousespaces," *J. Math. Pures Appl.*, 1978, **57**, No. 2, 133–156.
18. D. O. Tsvetkov, "Oscillations of a liquid partially covered with ice," *Lobachevskii J. Math.*, 2021, **42**, No. 5, 1078–1093.

D. O. Tsvetkov

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia

E-mail: tsvetdo@gmail.com

УДК 517.982+517.984.48

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-524-546

EDN: FOVYRO

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ САМОСОПРЯЖЁННЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОНТЯГИНА И КРЕЙНА

В. А. ШТРАУС

*Южно-Уральский государственный университет (Национальный исследовательский университет),
Россия, Челябинск*

Аннотация. Рассмотрен самосопряжённый оператор, действующий в пространстве Крейна и обладающий инвариантным подпространством, которое является максимальным неотрицательным и распадается в прямую сумму равномерно положительного (т. е. эквивалентного гильбертову пространству по отношению к внутреннему псевдоскалярному произведению) и конечномерного нейтрального подпространств. Доказано существование разностного выражения, преобразующего порождённую этим оператором последовательность моментов в последовательность, представляемую как разность позитивных последовательностей моментов. В случае циклического оператора этот результат применён для построения функционального пространства, в котором исследуемый оператор моделируется как оператор умножения на независимую переменную.

Ключевые слова: самосопряжённый оператор, пространство Крейна, пространство Понтягина, инвариантное подпространство, спектральное разложение.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2025-1543.

Для цитирования: В. А. Штраус. Спектральное разложение самосопряжённых операторов в пространствах Понтягина и Крейна // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 3. С. 524–546. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-524-546>

1. ВВЕДЕНИЕ

Как хорошо известно (см. [24, гл. 5, следствие 5.7]), унитарные и самосопряжённые операторы в пространствах Понтягина являются примерами обобщённых спектральных операторов. В случае пространств Крейна те же типы операторов, вообще говоря, теряют это свойство. Вместе с тем для некоторых подклассов самосопряжённых операторов удаётся доказать их обобщённую спектральность.

Одному из таких классов и посвящена настоящая работа. Она тесно примыкает к другой работе автора, и ряд результатов будет только кратко описан в первом разделе, затем во втором разделе кратко напоминает предложенное Х. Лангером аналитическое разложение резольвенты самосопряжённого оператора в пространстве Понтягина. Исследованию связанной с самосопряжённым оператором в пространстве Крейна последовательности моментов и смежным вопросам посвящен очередной раздел. В четвёртом разделе предыдущие результаты применяются к построению функциональной модели для исследуемого класса.

2. НЕКОТОРЫЕ КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В наиболее общей постановке (см. [2,6]) *пространство с индефинитной метрикой* определяется как (комплексное) линейное пространство $\mathcal{L}$ с заданной на нём эрмитовой полуторалинейной формой (внутренним эрмитовым произведением) $Q(x, y)$, причём такой, что соответствующая квадратичная форма $q(x) := Q(x, x)$ является знаконеопределённой (т. е. $Q(x, x)$ принимает положительные, отрицательные и нулевые значения). В случае конечномерного пространства $\mathcal{L}$ используется также (см. [13]) термин *псевдоунитарное пространство*.

Теорема 2.1. Пусть $q(x)$ — вещественнозначная функция, заданная на линейном пространстве $\mathcal{L}$. Функция $q(x)$ тогда и только тогда порождается некоторой квадратичной формой, когда она удовлетворяет следующим условиям:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а. } q(\alpha x) = |\alpha|^2 q(x), \quad x \in \mathcal{L}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \\ \text{б. для любых } x, y \in \mathcal{L} \text{ выражение } q(x + \lambda y) \text{ опре-} \\ \text{деляет функцию, непрерывную по переменной} \\ \lambda \in \mathbb{C}, \\ \text{в. для } q(\cdot) \text{ верно тождество параллелограмма} \\ q(x + y) + q(x - y) = 2(q(x) + q(y)). \end{array} \right\}$$

Обычно пространство с индефинитной метрикой снабжается той или иной топологией. В частности, пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$. Пространство $\mathcal{H}$ называется *гильбертовым пространством с индефинитной метрикой*, если оно дополнительно оснащено непрерывной эрмитовой полуторалинейной формой $[\cdot, \cdot]$, такой что соответствующая квадратичная форма знакопеременна.

Заметим, что именно внутреннее произведение $[\cdot, \cdot]$ является для нас основным, а вот гильбертово скалярное произведение играет вспомогательную роль и может меняться на топологически ему эквивалентное. В силу непрерывности внутреннее произведение может быть представлено в форме $[\cdot, \cdot] = (G\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$, где G — так называемый оператор Грама, который необходимо является ограниченным. Кроме того, эрмитовость внутреннего произведения влечёт за собой самосопряжённость G как оператора в гильбертовом пространстве.

Такие пространства с индефинитной метрикой обычно называют *гильбертовыми пространствами с G -метрикой* (см. [1,19]). Теория операторов в них сравнительно бедна результатами и, возможно, ещё ждёт своих исследователей. Намного более развитой является теория операторов в гильбертовых пространствах с G -метрикой в случае ограниченно обратимого оператора Грама (т. е. в регулярных гильбертовых пространствах с G -метрикой [1,19]).

Предложение 2.1. Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ с G -метрикой будет регулярным тогда и только тогда, когда для любого действующего на всём $\mathcal{H}$ непрерывного линейного функционала f найдётся такой вектор y_f , что

$$fx = [x, y_f], \quad x \in \mathcal{H}.$$

Гильбертово скалярное произведение в регулярном гильбертовом пространстве с G -метрикой может быть заменено топологически эквивалентным ему произведением так, что $[\cdot, \cdot] = (J\cdot, \cdot)$, где $J = P_+ - P_-$, P_+ и P_- — (гильбертовы) ортопроекторы, $P_+ + P_- = I$. Последнее равенство влечёт равенство $P_+(P_+ + P_-) = P_+$, откуда следует

$$P_+P_- = 0 \quad \text{и} \quad P_-P_+ = 0. \quad (2.1)$$

Положим $\mathcal{H}_+ = P_+\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_- = P_-\mathcal{H}$. В силу (2.1) подпространства $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$ образуют прямую сумму и, кроме того, ортогональны в смысле внутреннего произведения $[\cdot, \cdot]$.

Разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+[\cdot] \mathcal{H}_-$ называется *каноническим разложением*, а оператор J — *канонической симметрией*. Пространство с индефинитной метрикой, в котором оператор Грама является канонической симметрией, называется *J -пространством*, или *пространством Крейна*.

В этих заметках мы будем предполагать, что $\mathcal{H}$ является пространством Крейна или его частным случаем — пространством Понтрягина: J -пространство называется *пространством Понтрягина*, или *пространством Π_κ* , если $\dim \mathcal{H}_- = \kappa < \infty$.

Вектор $0 \neq x \in \mathcal{H}$ называется *положительным*, *неотрицательным* или *нейтральным* если, соответственно, $[x, x] > 0$, $[x, x] \geq 0$ или $[x, x] = 0$. Аналогично определяются отрицательные и

неположительные векторы. Два вектора $x, y \in \mathcal{H}$ называются J -ортогональными ($x \perp y$), если $[x, y] = 0$. Аналогично вводятся определения J -ортогональных множеств, J -ортогонального дополнения и т. п. J -ортогональное дополнение к множеству $X \subset \mathcal{H}$ обозначается $X^{[\perp]}$.

Термин «подпространство» у нас всегда обозначает замкнутое линейное многообразие, а линейное многообразие, которое может быть незамкнутым, называется *линеалом*. Линеал называется *положительным*, если все его ненулевые векторы положительны, аналогично определяются *отрицательные*, *неотрицательные* и т. п. линеалы.

Положительное подпространство называется *максимальным положительным*, если оно не является собственным подпространством другого положительного подпространства. Аналогично определяются *максимальные отрицательные*, *максимальные неположительные* и т. п. подпространства. Далее, подпространство $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ называется *невыврожденным*, если $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]} = \{0\}$, в противном случае подпространство $\mathcal{L}$ называется *вырожденным*. Если $\mathcal{L}$ является вырожденным подпространством, то подпространство $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]}$ называется *изотропной частью* $\mathcal{L}$. Если $\mathcal{L}$ — невырожденное подпространство, то можно образовать J -ортогональную прямую сумму $\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{L}^{[\perp]}$. В общем случае эта сумма плотна в J -пространстве, но не совпадает с ним, если же $\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{L}^{[\perp]} = \mathcal{H}$, то подпространство $\mathcal{L}$ называется *проекционно полным*.

Предложение 2.2. *Подпространство $\mathcal{L}$ является проекционно полным тогда и только тогда, когда оно является регулярным гильбертовым G -пространством, на котором внутреннее произведение — это $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{L}}$.*

Заметим, что в пространстве Π_{κ} подпространство является проекционно полным тогда и только тогда, когда оно невырождено. Все определения, равно как и большинство упомянутых результатов и их доказательства, а также дальнейшее описание геометрии J -пространств можно найти в монографии [3, 20] и лекциях [4, 5]. Мы будем придерживаться стандартных обозначений в случае понятий, связанных с гильбертовой структурой на $\mathcal{H}$ (ортогональность, ортогональное дополнение, ортогональная сумма и т. п.).

Все операторы, упомянутые в этой работе, полагаются, если только прямо не оговорено противное, линейными и ограниченными. Символами $\sigma(A)$ и $\rho(A)$ обозначаются, соответственно, спектр и множество регулярных точек (в другой терминологии — резольвентное множество) оператора A . Итак, пусть $A: \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ — некоторый оператор.

Оператор A^c называется J -сопряжённым (J -с.) к оператору A , если $[Ax, y] = [x, A^c y]$ для всех $x, y \in \mathcal{H}$. Отметим, что спектры операторов A и A^c расположены симметрично относительно вещественной оси (т. е. $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A^c)$). Оператор A называется J -самосопряжённым (J -с.с.), если $A = A^c$. Заметим, что часть спектра J -с.с. оператора может быть невещественной, а собственным значениям оператора могут соответствовать нетривиальные жордановы цепочки из собственных и присоединённых векторов, причём это верно не только для операторов в пространстве Крейна, но и в псевдоунитарном пространстве (см. [3–5, 13, 20]).

Замечание 2.1. Структура пространства Крейна позволяет переформулировать в терминах внутреннего произведения $[\cdot, \cdot]$ многие результаты, обычно формулируемые в терминах гильбертова скалярного произведения. Приведём два примера.

1. Пусть $\langle x, y \rangle$ — дополнительная непрерывная полуторалинейная форма, заданная в пространстве Крейна $\mathcal{H}$. Тогда найдётся такой оператор D , что $\langle x, y \rangle = [Dx, y]$, если форма $\langle x, y \rangle$ — эрмитова, то D — J -с.с. оператор, а если соответствующая квадратичная форма $\langle x, x \rangle$ неотрицательна, то D — J -неотрицательный оператор.
2. Если C — J -неотрицательный оператор, то $\|C\| = \sup_{x: \|x\|=1} \{[Cx, x]\}$.

3. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ J -С.С. ОПЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ ПОНТЯГИНА

В этом разделе пространство с индефинитной метрикой — это пространство Понтягина, и указанное условие дальше оговариваться не будет. Если J -с.с. оператор A имеет только вещественный спектр, то у него есть собственная спектральная функция (с.с.ф.) E_{λ} с конечным множеством критических точек Λ . Точные формулировки будут приведены ниже. Поскольку некоторые формулы, полученные в процессе доказательства существования с.с.ф., используются для построения

модельного пространства по версии [25], то мы приведём его набросок по схеме, предложенной в [27] (класс операторов, охваченный в [27], шире, чем рассматриваемый нами). На первом этапе вещественность спектра оператора A предполагаться не будет. Итак, по известной теореме Понтрягина найдётся такое максимальное неположительное подпространство $\mathcal{L}_-$, что $A\mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}_-$. В силу определения пространства Понтрягина размерность подпространства $\mathcal{L}_-$ равна κ , поэтому оператор $A|_{\mathcal{L}_-}$ действует в конечномерном пространстве, и его спектр — конечное множество. Пусть $N(t)$ — минимальный аннулирующий многочлен для $A|_{\mathcal{L}_-}$ (т. е. $N(A|_{\mathcal{L}_-}) = 0$ и $N(t)$ имеет минимальную степень среди всех многочленов с таким свойством), коэффициент которого при старшей степени для определённости равен единице, $\bar{N}(t)$ — многочлен, коэффициенты которого сопряжены к коэффициентам многочлена $N(t)$. Тогда

$$0 = [N(A)x, y] = [x, \bar{N}(A)y], \text{ где } x \in \mathcal{L}_-, y \in \mathcal{H}$$

и $\bar{N}(A)\mathcal{H} \subset \mathcal{L}_+$, где $\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_-^{\perp}$ — максимальное неотрицательное подпространство. Введём на $\mathcal{H}$ новую полуторалинейную форму $\langle x, y \rangle := [N(A)x, \bar{N}(A)y]$. Тогда

$$\langle x, x \rangle = [\bar{N}(A)N(A)x, x] = [N(A)\bar{N}(A)x, x] = [\bar{N}(A)x, \bar{N}(A)x] \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}. \quad (3.1)$$

Отметим, что свойство (3.1) называется *дефинизируемостью* оператора A , при этом многочлен $N(A)\bar{N}(A)$ называется *дефинизирующим*.

Рассмотрим последовательность степенных моментов

$$\{c_k = \langle A^k x, x \rangle\}_{k=0}^{+\infty}, \quad (3.2)$$

которая, очевидно, удовлетворяет следующему условию роста:

$$|c_k| \leq \|x\|^2 \|N(A)\|^2 \|A\|^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.3)$$

Так как квадратичная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ неотрицательна, то по теореме Гамбургера (см., например, [7, теорема 2.1.1]) последовательность $\{c_k\}_{k=0}^{+\infty}$ допускает представление

$$c_k = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k d\sigma^{(x)}(t), \quad (3.4)$$

где $\sigma^{(x)}(t)$ — неубывающая функция, $\sigma^{(x)}(-\infty) = 0$, $\sigma^{(x)}(t-0) = \sigma^{(x)}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$. В силу условия (3.3) функция $\sigma^{(x)}(t)$ не имеет точек роста на полубесконечных интервалах $(-\infty, -\|A\|)$ и $(\|A\|, +\infty)$, а именно

$$\sigma^{(x)}(t) = 0 \text{ при } t < -\|A\| \text{ и } \sigma^{(x)}(t) = [N(A)x, \bar{N}(A)x] \text{ при } t > \|A\|. \quad (3.5)$$

Благодаря (3.5) представление (3.4) может быть переписано в виде

$$c_k = \int_{-\|A\|}^{\|A\|+\epsilon} t^k d\sigma^{(x)}(t), \quad \epsilon = \text{const} > 0.$$

Из последнего равенства следует (см., например, [7, теорема 2.6.4]), что функция $\sigma^{(x)}(t)$ определяется единственным образом (проблема моментов является определённой). Укажем также, что $\sigma^{(x)}(t)$ может быть восстановлена по $\{c_k\}_0^\infty$ с помощью аналитической функции $f(\xi)$, первоначально заданной в окрестности бесконечно удалённой точки рядом:

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^{-(k+1)},$$

а затем аналитически продолженной на область $\mathbb{C} \setminus [-\|A\|, \|A\|]$ формулой

$$f(\xi) = \int_{-\|A\|}^{\|A\|+\epsilon} \frac{1}{\xi - t} d\sigma^{(x)}(t), \quad \epsilon = \text{const} > 0. \quad (3.6)$$

Несложно показать, что

$$\frac{\sigma^{(x)}(t-0) + \sigma^{(x)}(t+0)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} f(\xi) d\xi, \quad (3.7)$$

где $\Gamma_\delta^{(t)}$ — положительно ориентированная граница прямоугольной области $[-\|A\| - 1, t] \times i[-1, 1]$ без участка границы между точками $(t, -i\delta)$ и $(t, i\delta)$. Чтобы не усложнять формулы, мы будем использовать дальше представление (3.4), но при этом иметь в виду, что соответствующие интегралы фактически берутся по конечному промежутку. Далее, для фиксированного t функция $\sigma^{(x)}(t)$ определяет неотрицательную числовую функцию по отношению к x . Поскольку эта функция порождена (как следует из (3.4)) эрмитовыми полуторалинейными формами $\langle A^k x, x \rangle$, для которых, очевидно, выполняются тождество параллелограмма и соотношение однородности, то, в силу единственности представления (3.4) и формулы восстановления (3.7), оба эти условия выполнены и для $\sigma^{(x)}(t)$. Кроме того, $\sigma^{(x)}(t) \leq [N(A)x, N(A)x]$, поэтому функция $\sigma^{(x)}(t)$ непрерывна по x в нормированной топологии. Итак, для $\sigma^{(x)}(t)$ выполнены условия теоремы 2.1. Последнее обстоятельство открывает возможность ввести эрмитову полуторалинейную форму

$$\prec x, y \succ^{(t)} := \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 i^m \cdot \sigma^{(x+i^m y)}(t).$$

Поскольку квадратичная форма $\sigma^{(x)}(t)$ непрерывна по x , введённая полуторалинейная форма $\prec x, y \succ^{(t)}$ непрерывна в гильбертовой нормированной топологии. В силу сказанного (см. также замечание 2.1) найдётся операторнозначная функция G_t , такая что (s-lim — предел в сильной операторной топологии)

- $G_{-\infty} = 0$, $G_t = \text{s-lim}_{\tau \rightarrow t-0} G_\tau$ для любого $t \in \mathbb{R}$;
- для любого $t \in \mathbb{R}$ и $\tau \in (-\infty, t)$ оператор $(G_t - G_\tau)$ является J -неотрицательным;
- $N(A)\bar{N}(A)A^k x = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k dG_t x$ для любого $x \in \mathcal{H}$ и $k = 0, 1, 2, \dots$

Указанное интегральное представление степеней оператора A и стандартное разложение его резольвенты $R_\xi(A)$ в окрестности бесконечно удалённой точки (см. [15, гл. XI, § 1, п. 148, формула (5)]) приводит к следующему представлению:

$$N(A)\bar{N}(A)R_\xi(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t - \xi} dG_t, \quad (3.8)$$

где $\xi \in \mathbb{C} \setminus [-\|A\|, \|A\|]$. Далее, выражение $M(t, \xi) = \frac{N(\xi)\bar{N}(\xi) - N(t)\bar{N}(t)}{t - \xi}$ превращается после его очевидного доопределения в исключительной подобласти $t = z$ в полином от двух переменных, т. е. выражению $M(A, \xi) = R_\xi(A)(N(\xi)\bar{N}(\xi)I - N(A)\bar{N}(A))$ можно придать корректный смысл. Последняя формула и представление (3.8) приводят к новому представлению

$$R_\xi(A) = \frac{1}{N(\xi)\bar{N}(\xi)} \left(M(A, \xi) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t - \xi} dG_t \right), \quad (3.9)$$

где сходимость интеграла можно понимать как в сильной, так и в равномерной операторной топологиях. Непосредственно из этого представления следует, что вне вещественной оси функция $R_\xi(A)$ аналитична всюду за исключением, быть может, конечного числа полюсов. Последнее означает, что не вещественный спектр A состоит из конечного числа собственных значений с конечной длиной жордановых цепочек. Несложно показать, что инвариантное подпространство оператора A , состоящее из всех его собственных и присоединённых векторов, отвечающих ровно одному собственному значению, нейтрально и потому в случае пространства Понтрягина конечномерно. Кроме того, спектр любого J -с.с. оператора (как в случае пространства Понтрягина, так и пространства Крейна) симметричен относительно вещественной оси. Всё сказанное позволяет отделить инвариантное подпространство оператора A , отвечающее его не вещественному спектру,

от инвариантного подпространства, отвечающего его вещественному спектру. Эти подпространства оказываются J -ортогональными и проекционно полными, а первое подпространство — ещё и конечномерным. Соответствующие J -ортогональные проекторы могут быть построены как проекторы Рисса (по поводу последних см., например, [15, гл. XI, § 1, п. 148, теорема о разложении]). J -с.с. операторы в конечномерных J -пространствах полностью описываются методами линейной алгебры [13], поэтому в дальнейшем, если прямо не оговорено противное, мы будем предполагать, что

$$\sigma(A) \subset \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

При условии (3.10) все коэффициенты многочлена $N(\xi)$ вещественны, поэтому формула (3.9) может быть заменена на формулу

$$R_\xi(A) = \frac{1}{N^2(\xi)} \left(M(A, \xi) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t - \xi} dG_t \right). \quad (3.11)$$

Положим

$$\Lambda := \{\lambda : N(\lambda) = 0\}.$$

Множество Λ в дальнейшем называется *множеством критических точек* для оператора A и для его спектральной функции, к определению которой мы переходим.

Обозначим $\mathbb{R}_G$ множество тех $t \in \mathbb{R}$, для которых G_t непрерывна в сильной операторной топологии. Действуя так же, как и в (3.7), положим

$$E_t = \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} R_\xi(A) d\xi \quad (3.12)$$

для всех $t \in \mathbb{R}_G \setminus \Lambda$, и доопределим E_t по формуле $E_t = \lim_{\tau \in \mathbb{R}_G, \tau \rightarrow t-0} E_\tau$ для остальных $t \in \mathbb{R} \setminus \Lambda$.

Существование предела в (3.12) следует, грубо говоря, из теоремы о существовании сильного предела у монотонной ограниченной последовательности операторов в гильбертовом пространстве (см. [15, гл. II, § 1, п. 104, теорема Вижье—С.-Надя]) и формулы (3.11), однако соответствующее доказательство не вполне тривиально, по этому поводу см. [26, 27] или [18]. Результатом вычисления (3.12) является следующая теорема.

Теорема 3.1. *В пространстве Понтрягина J -с.с. оператор A с вещественным спектром обладает спектральной функцией E_t , такой что (здесь $\Delta = [a, b)$, $a, b \notin \Lambda$)*

- | | |
|---|---|
| <p>a. для любого $t \in \mathbb{R} \setminus \Lambda$ верно $AE_t = E_tA$;</p> <p>b. если $E(\Delta)\mathcal{H} \neq \{0\}$, то $\sigma(A _{E(\Delta)\mathcal{H}}) \subset \bar{\Delta}$;</p> <p>c. если $\Delta \cap \Lambda = \emptyset$ и $E(\Delta)\mathcal{H} \neq \{0\}$, то подпространство $E(\Delta)\mathcal{H}$ положительно и $AE(\Delta) = \int_{\Delta} t dE_t$;</p> <p>d. если $\Delta \cap \Lambda \neq \emptyset$, то подпространство $E(\Delta)\mathcal{H}$ либо отрицательно, либо индефинитно.</p> | } |
|---|---|

Поясним последний пункт. В условиях этого пункта подпространство $E(\Delta)\mathcal{H}$ содержит либо отрицательный, либо нейтральный собственный вектор оператора A , вместе с тем оно проекционно полно. Проекционно полное подпространство не может быть семидефинитным (в данном случае — неположительным), поэтому оно либо отрицательно, либо (если найдётся нейтральный собственный вектор) индефинитно. Продолжим тему. Пусть $\lambda_0 \in \Lambda$. Тогда возможны три взаимоисключающих варианта:

- для некоторого интервала $\Delta = [a, b)$, такого что $(a, b) \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$ и $a, b \notin \Lambda$, спектральная функция $E_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ ограничена и после доопределения $E_{\lambda_0} = \lim_{t \rightarrow \lambda_0-0} E_t$ справедливо $AE(\Delta) = \int_{\Delta} t dE_t$;

- для некоторого интервала $\Delta = [a, b)$, такого что $(a, b) \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$ и $a, b \notin \Lambda$, спектральная функция $E_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ ограничена, но после доопределения $E_{\lambda_0} = \text{s-lim}_{t \rightarrow \lambda_0-0} E_t$ имеем $AE(\Delta) \neq \int_{\Delta} t dE_t$;
- для некоторого интервала $\Delta = [a, b)$, такого что $(a, b) \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$ и $a, b \notin \Lambda$, спектральная функция $E_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ неограничена.

Отметим, что ограниченность спектральной функции $E_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ имеет (или не имеет) место одновременно для всех интервалов $\Delta = [a, b)$, подчинённых условиям $(a, b) \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$ и $a, b \notin \Lambda$ с фиксированным λ_0 , а наличие предела $\text{s-lim}_{t \rightarrow \lambda_0-0} E_t$ следует из теоремы Вижье—С.-Надя (см. [15, гл. VII, § 1, п. 104]). Интерпретируем теперь каждую из этих опций в терминах теории спектральных операторов (см. [9]). Первый вариант означает, что оператор $A|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ подобен самосопряжённому оператору, т. е. является скалярным спектральным оператором с вещественным спектром. Второй вариант соответствует случаю, когда оператор $\lambda_0 \in \Lambda$ является спектральным оператором, состоящим из суммы скалярного спектрального оператора и нетривиального конечномерного нильпотентного оператора. Итак, только третий вариант отвечает случаю обобщённых спектральных операторов.

4. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ J -С.С. ОПЕРАТОРА КЛАССА D_{κ}^+

В этом разделе пространство с индефинитной метрикой — это сепарабельное гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, а операторы, если не оговорено противное, ограничены и действуют в $\mathfrak{H}$.

Вначале отметим следующий геометрический факт.

Предложение 4.1. *Если $\mathfrak{L}$ является максимальным семидефинитным подпространством из $\mathfrak{H}$, а P есть J -ортотпроектор и $P\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}$, то линейал $P\mathfrak{L}$ является максимальным семидефинитным подпространством относительно $P\mathfrak{H}$.*

Пусть $\mathcal{L}$ — подпространство пространства Крейна, символ $\mathcal{L}^0 = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]}$ — это его изотропную часть. Говорят, что подпространство $\mathcal{L}_+$ ($\mathcal{L}_-$) принадлежит классу $\mathbf{h}^+$ ($\mathbf{h}^-$), если $\mathcal{L}_+^0$ ($\mathcal{L}_-^0$) конечномерно, а фактор-пространство $\hat{\mathcal{L}}_+ = \mathcal{L}_+/\mathcal{L}_+^0$ ($\hat{\mathcal{L}}_- = \mathcal{L}_-/\mathcal{L}_-^0$) является гильбертовым (антигильбертовым) относительно индуцированной индефинитной метрики, или, что эквивалентно, $\mathcal{L}_+ \in \mathbf{h}^+$ ($\mathcal{L}_- \in \mathbf{h}^-$), если оно разлагается в сумму конечномерного изотропного и равномерно положительного (равномерно отрицательного) подпространств.

Множество максимальных неотрицательных и максимальных неположительных подпространств обозначим через $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$, соответственно.

Будем говорить, что оператор T принадлежит классу $\mathbf{H}$ и писать $T \in \mathbf{H}$, если у него существуют инвариантные подпространства $\mathcal{L}_{\pm} \in \mathfrak{M}^{\pm}$ и все такие подпространства принадлежат классу $\mathbf{h}^{\pm}$, соответственно.

Определение 4.1. Множество $\mathfrak{A} = \{A\}$ самосопряжённых линейных операторов, действующих в пространстве Крейна, принадлежит классу $\mathbf{K}(\mathbf{H})$, $\mathfrak{A} \in \mathbf{K}(\mathbf{H})$, если существует такой самосопряжённый оператор $B \in \mathcal{H}$ в этом пространстве, что $BA = AB$ при всех $A \in \mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ состоит из одного оператора A , то будем говорить, что A принадлежит классу $\mathbf{K}(\mathbf{H})$ и писать $A \in \mathbf{K}(\mathbf{H})$.

Определение 4.2. Скажем, что семейство $\mathfrak{A} = \{A\}$ самосопряжённых линейных операторов, действующих в пространстве Крейна, принадлежит классу $\mathbf{D}_{\kappa}^+$, $\mathfrak{A} \in \mathbf{D}_{\kappa}^+$, если для него найдётся пара инвариантных подпространств $\mathcal{L}_{\pm} \in \mathfrak{M}^{\pm} \cap \mathbf{h}^{\pm}$, $\mathcal{L}_+[\perp]\mathcal{L}_-$ с размерностью подпространства $\mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_-$, равной κ , $\kappa < \infty$. Если семейство $\mathfrak{A} = \{A\}$ состоит из единственного оператора A , то мы будем также писать $A \in \mathbf{D}_{\kappa}^+$.

Предложение 4.2. *Если J -с.с. оператор A принадлежит к классу $\mathbf{D}_{\kappa}^+$, $\mathfrak{L}_+$ — соответствующее инвариантное подпространство из определения 4.2, то его не вещественный спектр либо пуст, либо состоит из конечного числа собственных значений. При этом максимальная длина присоединённой цепочки векторов, отвечающих такому собственному значению, не превосходит размерности изотропной части подпространства $\mathfrak{L}_+$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L}_- = \mathfrak{L}_+^{[1]}$. Положим

$$\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_+ \cap \mathfrak{L}_-, \quad \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_+ \ominus \mathfrak{L}_1, \quad \mathfrak{L}_3 = \mathfrak{L}_- \ominus \mathfrak{L}_1, \quad \mathfrak{L}_0 = J\mathfrak{L}_1. \quad (4.1)$$

Поскольку по условию подпространства $\mathfrak{L}_2$ и $\mathfrak{L}_3$ являются равномерно дефинитными, то без ограничения общности можно считать, что относительно разложения

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_0 \oplus \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2 \oplus \mathfrak{L}_3 \quad (4.2)$$

оператор J имеет матричное представление

$$J = \begin{pmatrix} 0 & V^{-1} & 0 & 0 \\ V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_3 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

где $V: \mathfrak{L}_0 \rightarrow \mathfrak{L}_1$ — изометрический оператор, а I_2 и I_3 — тождественные операторы в соответствующих подпространствах. Относительно того же разложения (4.2) оператор A имеет представление

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & 0 & 0 & 0 \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & 0 & A_{22} & 0 \\ A_{30} & 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

откуда

$$JA = \begin{pmatrix} V^{-1}A_{10} & V^{-1}A_{11} & V^{-1}A_{12} & V^{-1}A_{13} \\ VA_{00} & 0 & 0 & 0 \\ A_{20} & 0 & A_{22} & 0 \\ -A_{30} & 0 & 0 & -A_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Оператор JA является самосопряжённым в обычном гильбертовом смысле, поэтому

$$\left. \begin{aligned} V^{-1}A_{10} &= A_{10}^*V, \quad A_{00} = V^{-1}A_{11}^*V, \quad A_{20} = A_{12}^*V, \\ A_{30} &= -A_{13}^*V, \quad A_{22} = A_{22}^*, \quad A_{33} = A_{33}^*. \end{aligned} \right\}. \quad (4.6)$$

Непосредственные вычисления показывают, что резольвента $R_\xi(A)$ определена для тех значений $\xi \in \mathbb{C}$, для которых одновременно имеют смысл операторы $R_\xi(A_{00})$, $R_\xi(A_{11})$, $R_\xi(A_{22})$, $R_\xi(A_{33})$ и

$$R_\xi(A) = \begin{pmatrix} R_\xi(A_{00}) & 0 & 0 & 0 \\ R_{10} & R_\xi(A_{11}) & R_{12} & R_{13} \\ R_{20} & 0 & R_\xi(A_{22}) & 0 \\ R_{30} & 0 & 0 & R_\xi(A_{33}) \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

где

$$\begin{aligned} R_{30} &= -R_\xi(A_{33})A_{30}R_\xi(A_{00}), \quad R_{20} = -R_\xi(A_{22})A_{20}R_\xi(A_{00}), \\ R_{12} &= -R_\xi(A_{11})A_{12}R_\xi(A_{22}), \quad R_{13} = -R_\xi(A_{11})A_{13}R_\xi(A_{33}), \\ R_{10} &= \{R_\xi(A_{11})A_{10} + R_{12}A_{20} + R_{13}A_{30}\}R_\xi(A_{00}). \end{aligned}$$

Поскольку операторы A_{22} и A_{33} самосопряжены, не вещественный спектр оператора A совпадает с объединением не вещественных спектров конечномерных операторов A_{00} и A_{11} , и поэтому он конечен. Кроме того, из представления (4.7) следует, что при $\xi \rightarrow \xi_0 \in \sigma(A)$, $\xi \neq \xi_0$, $\xi_0 \neq \bar{\xi}_0$ резольвента $R_\xi(A)$ имеет степенной рост, не превосходящий сумму показателей роста резольвент $R_\xi(A_{00})$ и $R_\xi(A_{11})$. Если одновременно $\xi_0 \in \sigma(A_{00})$, $\xi_0 \in \sigma(A_{11})$, то и $\bar{\xi}_0 \in \sigma(A_{00})$, $\bar{\xi}_0 \in \sigma(A_{11})$, причём $\dim RS_{\xi_0}(A_{00}) = \dim RS_{\xi_0}(A_{11})$ и $\dim RS_{\bar{\xi}_0}(A_{00}) = \dim RS_{\bar{\xi}_0}(A_{11})$. Итак, показатель роста резольвенты $R_\xi(A)$ при $\xi \rightarrow \xi_0$ не превосходит суммы $\dim RS_{\bar{\xi}_0}(A_{00}) + \dim RS_{\xi_0}(A_{00})$, которая, в свою очередь, не больше $\dim \mathfrak{L}_0$. $\square$

Предложение 4.3. Пусть J -с.с. оператор A принадлежит к классу D_κ^+ , $\mathfrak{L}_+$ — соответствующее инвариантное подпространство из определения 4.2 и $\sigma(A) \setminus \mathbb{R} \neq \emptyset$. Тогда пространство $\mathfrak{H}$ однозначно представимо в виде

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'[+] \mathfrak{H}'',$$

где $\mathfrak{H}'$ и $\mathfrak{H}''$ — инвариантные подпространства оператора A , $\sigma(A|_{\mathfrak{H}'}) \subset \mathbb{R}$, $\sigma(A|_{\mathfrak{H}''}) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\dim \mathfrak{H}'' < \infty$ и оператор $A|_{\mathfrak{H}'}$ принадлежит к классу $D_{\kappa'}$, $\kappa' < \kappa$ (возможно, $\kappa' = 0$).

Доказательство. Существование разложения $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'[+] \mathfrak{H}''$ со свойствами $\sigma(A|_{\mathfrak{H}'}) \subset \mathbb{R}$, $\sigma(A|_{\mathfrak{H}''}) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ и его единственность тривиально следуют из предложения 4.2, поскольку в силу этого предложения невещественная часть $\sigma(A)$ является изолированным подмножеством множества $\sigma(A)$ и проектор Рисса (см. [8, 15])

$$P' = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R_{\xi}(A) d\xi,$$

где Γ — такой простой положительно ориентированный симметричный относительно $\mathbb{R}$ контур, $\Gamma \subset \rho(A)$, что весь невещественный спектр оператора A лежит вне Γ и, наоборот, его вещественная часть располагается внутри Γ , определяет подпространство $\mathfrak{H}'$ ($\mathfrak{H}' = P'\mathfrak{H}$), а двойственный ему проектор $P'' = I - P'$ — подпространство $\mathfrak{H}''$. Поскольку контур Γ симметричен относительно $\mathbb{R}$ и поэтому $P' - J$ -с.с. оператор, то $\mathfrak{H}'[\perp] \mathfrak{H}''$.

Далее, из вида оператора P' следует, что подпространство $\mathfrak{L}_+$ будет для него инвариантным, поэтому из предложения 4.1 вытекает, что подпространство $P'\mathfrak{L}_+$ является искомым инвариантным подпространством оператора $A|_{\mathfrak{H}'}$ и, таким образом, нам осталось лишь проверить конечномерность подпространства $\mathfrak{H}''$. Итак, подпространство $P''\mathfrak{L}_+$ является для оператора $A|_{\mathfrak{H}''}$ максимальным неотрицательным инвариантным подпространством, которое к тому же псевдорегулярно, а его изотропная часть конечномерна. Покажем, что в действительности $P''\mathfrak{L}_+$ нейтрально. В самом деле, если мы допустим противное, т. е. что в $P''\mathfrak{L}_+$ есть хоть один положительный вектор, то получим, что $\sigma(A|_{\mathfrak{H}''}) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$, однако это невозможно в силу выбора $\mathfrak{H}''$. Итак, подпространство $P''\mathfrak{L}_+$ нейтрально и, следовательно (см. 4.1), $P''\mathfrak{L}_+ \subset \mathfrak{L}_1$, поэтому $\dim P''\mathfrak{L}_+ = \kappa'' \leq \kappa$. Наконец, поскольку $P''\mathfrak{L}_+$ — максимальное нейтральное подпространство относительно $\mathfrak{H}''$, то $\dim \mathfrak{H}'' = 2\kappa''$. $\square$

Замечание 4.1. В условиях предложения 4.3 справедливо $\mathfrak{H}'' \cap \mathfrak{L}_1 \neq \emptyset$.

Представление (4.7) полезно в том смысле, что позволяет локализовать спектр оператора $A \in D_{\kappa}^+$, но непосредственно с его помощью сложно доказать существование у A спектрального разложения того же типа, что у самосопряжённого оператора в пространстве Понтрягина. Наша ближайшая цель — построить аналитическое представление резольвенты оператора A , аналогичное представлению, изложенному в работах [18, 26, 27]. Оно будет похоже на представление (3.9), для чего так же, как в работе [18], будут рассмотрены последовательности вида $\{[P(A)A^n x, x]\}_{n=0}^{\infty}$, где $x \in \mathfrak{H}$, а $P(\xi)$ — некоторый фиксированный полином. В [18] это был дефинирующий полином, но в наших условиях такой полином, вообще говоря, не существует.

Рассмотрим теперь матричное представление оператора $A^+ = A|_{\mathcal{L}_+}$ и его резольвенты. Итак,

$$A^+ = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad R_{\xi}(A^+) = \begin{pmatrix} R_{\xi}(A_{11}) & -R_{\xi}(A_{11})A_{12}R_{\xi}(A_{22}) \\ 0 & R_{\xi}(A_{22}) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим структуру операторов A_{12} и $R_{\xi}(A_{11})A_{12}R_{\xi}(A_{22})$. Для упрощения предположим, что оператор A_{11} представляет собой одну жорданову клетку с собственным числом μ и базисом $\{e_j\}_1^k$, т. е.

$$A_{11}e_j = \mu e_j + e_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, k-1, \quad A_{11}e_k = \mu e_k, \quad \text{Lin}\{e_j\}_1^k = \mathfrak{L}_1. \quad (4.8)$$

Далее, найдётся такая система $\{y_j\}_1^k \subset \mathfrak{L}_1$, что $A_{12}x = \sum_{j=1}^k (x, y_j)e_j$. Поскольку образ оператора

A_{12} может быть, вообще говоря, подпространством пространства $\mathfrak{L}_1$, система $\{y_j\}_1^k$ может быть линейно зависимой. Более того, благодаря предложению 4.3 гильбертова структура пространства $\mathfrak{H}$ может быть выбрана так, что в случае невещественного μ все $y_j = 0$, поэтому в дальнейшем предполагается, что собственное число μ вещественно. Наконец, пусть $E_{\lambda}^{(22)}$ непрерывная слева спектральная функция оператора A_{22} , т. е. $A_{22} = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_{\lambda}^{(22)}$. Тогда

$$R_{\xi}(A_{22}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - \xi} dE_{\lambda}^{(22)}, \quad R_{\xi}(A_{11})e_l = \sum_{j=l}^k (-1)^{j-l} \frac{1}{(\mu - \xi)^{j-l+1}} e_j, \quad l = 1, 2, \dots, k,$$

$$\begin{aligned}
R_\xi(A_{11})A_{12}R_\xi(A_{22})x &= \sum_{l=1}^k \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - \xi} dE_\lambda^{(22)} x, y_l \right) \sum_{j=l}^k (-1)^{j-l} \frac{1}{(\mu - \xi)^{j-l+1}} e_j = \\
&= \sum_{j=1}^k \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - \xi} \left(\sum_{l=1}^j (-1)^{j-l} \frac{1}{(\mu - \xi)^{j-l+1}} d(E_\lambda^{(22)} x, y_l) \right) \right) e_j.
\end{aligned}$$

Интегральное представление оператора $R_\xi(A_{11})A_{12}R_\xi(A_{22})$ получено нами в предположении (4.8), но от этого частного случая достаточно легко перейти к общей ситуации: если жордановых клеток несколько, то надо взять сумму по всем этим клеткам. Итак, пусть оператор A_{11} состоит из p клеток и соответствующий базис пространства $\mathfrak{L}_1$ разбит на p групп: $\{e_j^{(m)}\}_{j=1}^{k_m}$, $m = 1, 2, \dots, p$, $k_1 + k_2 + \dots + k_p = \kappa$. Тогда

$$R_\xi(A_{11})A_{12}R_\xi(A_{22})x = \sum_{m=1}^p \sum_{j=1}^{k_m} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - \xi} \left(\sum_{l=1}^j (-1)^{j-l} \frac{1}{(\mu_m - \xi)^{j-l+1}} d(E_\lambda^{(22)} x, y_l^{(m)}) \right) \right) e_j^{(m)}. \quad (4.9)$$

Возьмём открытый промежуток $\Delta = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, такой что

$$[\alpha, \beta] \cap \sigma(A_{11}) = \emptyset, \quad \alpha, \beta \notin \sigma_p(A_{22}), \quad (4.10)$$

и построим прямоугольник $[\alpha, \beta] \times i[-h, h]$ с соблюдением одного из условий того же типа $[\alpha, \beta] \times i[-h, h] \cap \sigma(A_{11}) = \emptyset$. Обозначим $\Gamma(\Delta)$ положительно ориентированную границу этого прямоугольника. Наша задача — найти значение проектора Рисса, трактуя последний как интеграл в смысле главного значения:

$$E^+(\Delta) = \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) \text{s-lim}_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta(\Delta)} R_\xi(A^+) d\xi, \quad (4.11)$$

где $\Gamma_\delta(\Delta)$ — часть контура $\Gamma(\Delta)$ без двух участков границы, первый из которых находится между точками $(\alpha, -i\delta)$ и $(\alpha, i\delta)$, а второй — между точками $(\beta, -i\delta)$ и $(\beta, i\delta)$. Проектор Рисса как интеграл в смысле главного значения был использован в сообщении [11], посвящённом существованию спектральной функции у J -с.с. оператора в пространстве Понтрягина. Детальное изложение доказательства сходимости указанного интеграла можно найти в работе [27] (см. также [18]). Непосредственный подсчёт даёт следующий результат:

$$E^+(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & E^{(12)}(\Delta) \\ 0 & E^{(22)}(\Delta) \end{pmatrix},$$

где

$$E^{(12)}(\Delta)x = - \sum_{m=1}^p \sum_{j=1}^{k_m} \left(\int_{\Delta} \left(\sum_{l=1}^j (-1)^{j-l} \frac{1}{(\mu_m - \lambda)^{j-l+1}} d(E_\lambda^{(22)} x, y_l^{(m)}) \right) \right) e_j^{(m)}. \quad (4.12)$$

Представление (4.12) наглядным образом показывает, что условие $\alpha, \beta \notin \sigma_p(A_{22})$ не является существенным и от него можно отказаться, но, вообще говоря, связанный с J -с.с. оператором проектор $E^+(\Delta)$ является неограниченной функцией от α и β .

Перейдём к представлению оператора $A^+E^+(\Delta)$. Равенство $A^+R_\xi(A^+) = I + \xi R_\xi(A^+)$ позволяет представить этот оператор в виде, аналогичном (4.11)

$$A^+E^+(\Delta) = \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) \text{s-lim}_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta(\Delta)} \xi R_\xi(A^+) d\xi,$$

откуда рассуждениями, подобными приведённым выше, получаем представление

$$A^+E^+(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & A_{12}(\Delta) \\ 0 & A_{22}(\Delta) \end{pmatrix},$$

где

$$A_{12}(\Delta)x = - \sum_{m=1}^p \sum_{j=1}^{k_m} \left(\int_{\Delta} \left(\sum_{l=1}^j (-1)^{j-l} \frac{\lambda}{(\mu_m - \lambda)^{j-l+1}} d(E_\lambda^{(22)} x, y_l^{(m)}) \right) \right) e_j^{(m)}.$$

Аналогичным образом выглядит оператор $(A^+)^n E^+(\Delta)$ для любого натурального n . Для упрощения записи можно учесть что операторы A^+ и $E^+(\Delta)$ коммутируют, а к тому же $E^+(\Delta)$ идемпотентен, поэтому

$$(A^+)^n E^+(\Delta) = (A^+ E^+(\Delta))^n = \begin{pmatrix} 0 & A_{12}(\Delta)(A_{22}(\Delta))^{(n-1)} \\ 0 & (A_{22}(\Delta))^n \end{pmatrix},$$

где

$$A_{12}(\Delta)(A_{22}(\Delta))^{(n-1)}x = - \sum_{m=1}^p \sum_{j=1}^{k_m} \left(\int_{\Delta} \left(\sum_{l=1}^j (-1)^{j-l} \frac{\lambda^n}{(\mu_m - \lambda)^{j-l+1}} d(E_{\lambda}^{(22)} x, y_l^{(m)}) \right) \right) e_j^{(m)}. \quad (4.13)$$

Доопределим теперь оператор $E^+(\Delta)$ на всём пространстве $\mathfrak{H}$ как J -ортогональный проектор $E_+(\Delta)$ с помощью матричного представления (сопоставьте с (4.4), (4.5), (4.6)):

$$E_+(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ E^{(12)}(\Delta)(E^{(12)}(\Delta))^*V & 0 & E^{(12)}(\Delta) & 0 \\ (E^{(12)}(\Delta))^*V & 0 & E^{(22)}(\Delta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подпространство $E_+(\Delta)\mathfrak{H}$ инвариантно относительно оператора A , поэтому $AE_+(\Delta) = E_+(\Delta)AE_+(\Delta)$. Применив к последнему равенству операцию сопряжения, мы получим $E_+(\Delta)A = E_+(\Delta)AE_+(\Delta)$, поэтому $AE_+(\Delta) = E_+(\Delta)A$.

Зафиксируем произвольный интервал (a, b) , содержащий носитель спектральной меры $E_{\lambda}^{(22)}$. Пусть $\{\mu_j\}_1^k$ — совокупность всех попарно различных (т. е. кратность не учитывается) вещественных собственных чисел оператора A_{11} , так что $k \leq \kappa$, $X_{\epsilon} = \bigcup_{j=1}^k [\mu_j - \epsilon, \mu_j + \epsilon]$, где $\epsilon > 0$ — достаточно малое число, при котором отрезки, из которых состоит множество X_{ϵ} , не пересекаются между собой, $Y_{\epsilon} = (a, b) \setminus X_{\epsilon}$. Поскольку Y_{ϵ} — это объединение непересекающихся интервалов, то операторы $E_+(Y_{\epsilon})$ и $E^+(Y_{\epsilon})$ корректно определяются по принципу аддитивности, в частности

$$E_+(Y_{\epsilon}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ E^{(12)}(Y_{\epsilon})(E^{(12)}(Y_{\epsilon}))^*V & 0 & E^{(12)}(Y_{\epsilon}) & 0 \\ (E^{(12)}(Y_{\epsilon}))^*V & 0 & E^{(22)}(Y_{\epsilon}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$M(\xi) — \text{минимальный аннулирующий многочлен оператора } A_{11} \text{ со старшим коэффициентом, равным единице, } \widetilde{M}(\xi) — \text{аналогичный многочлен для оператора } A_{00}, \quad (4.14)$$

так что их коэффициенты будут сопряжены. Пусть $x \in \mathfrak{H}, y \in \mathfrak{L}_1$, тогда $[\widetilde{M}(A)x, y] = [x, M(A)y] = 0$, т. е. $\widetilde{M}(A)\mathfrak{H}[\perp]\mathfrak{L}_1$, иными словами

$$\widetilde{M}(A)\mathfrak{H} \subset \mathfrak{L}_1 \dot{+} \mathfrak{L}_2 \dot{+} \mathfrak{L}_3. \quad (4.15)$$

Далее, пусть

$$\{\tau_{\nu}\}_1^q = \sigma(A_{11}) \cap \sigma_p(A_{22}), \quad Q(\xi) = \Pi_1^q(\xi - \tau_{\nu}), \quad \widetilde{N}(\xi) = \widetilde{M}(\xi)Q(\xi). \quad (4.16)$$

Тогда благодаря (4.15) для многочлена $\widetilde{N}(\xi)$ и любого $x \in \mathfrak{H}$ верно

$$\widetilde{N}(A)x = z_1 + z_2 + z_3, \quad z_1 \in \mathfrak{L}_1, \quad z_2 \in \mathfrak{L}_2, \quad z_3 \in \mathfrak{L}_3 \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} E^{(22)}(Y_{\epsilon})z_2 = z_2. \quad (4.17)$$

Итак, пусть $N(\xi) = M(\xi)Q(\xi)$. С учётом (4.4) мы имеем

$$\left. \begin{aligned} N(A) &= \begin{pmatrix} N(A_{00}) & 0 & 0 & 0 \\ N_{10} & 0 & N_{12} & N_{13} \\ N_{20} & 0 & N(A_{22}) & 0 \\ N_{30} & 0 & 0 & N(A_{33}) \end{pmatrix}, \\ \tilde{N}(A) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{N}_{10} & \tilde{N}(A_{11}) & \tilde{N}_{12} & \tilde{N}_{13} \\ \tilde{N}_{20} & 0 & \tilde{N}(A_{22}) & 0 \\ \tilde{N}_{30} & 0 & 0 & \tilde{N}(A_{33}) \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}, \quad (4.18)$$

откуда

$$\begin{aligned} N(A)\tilde{N}(A) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{12}\tilde{N}_{20} + N_{13}\tilde{N}_{30} & 0 & N_{12}\tilde{N}(A_{22}) & N_{13}\tilde{N}(A_{33}) \\ N(A_{22})\tilde{N}_{20} & 0 & N(A_{22})\tilde{N}(A_{22}) & 0 \\ N(A_{33})\tilde{N}_{30} & 0 & 0 & N(A_{33})\tilde{N}(A_{33}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{12}\tilde{N}_{20} & 0 & N_{12}\tilde{N}(A_{22}) & 0 \\ N(A_{22})\tilde{N}_{20} & 0 & N(A_{22})\tilde{N}(A_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{13}\tilde{N}_{30} & 0 & 0 & N_{13}\tilde{N}(A_{33}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ N(A_{33})\tilde{N}_{30} & 0 & 0 & N(A_{33})\tilde{N}(A_{33}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Проанализируем первое слагаемое:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{12}\tilde{N}_{20} & 0 & N_{12}\tilde{N}(A_{22}) & 0 \\ N(A_{22})\tilde{N}_{20} & 0 & N(A_{22})\tilde{N}(A_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N_+(A)\tilde{N}_+(A), \quad (4.19)$$

где

$$N_+(A) = \begin{pmatrix} N(A_{00}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{12} & 0 \\ N_{20} & 0 & N(A_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{N}_+(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{N}(A_{11}) & \tilde{N}_{12} & 0 \\ \tilde{N}_{20} & 0 & \tilde{N}(A_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что операторы $N(A)$ и $\tilde{N}(A)$ J -сопряжены, поэтому J -сопряжены операторы $N_+(A)$ и $\tilde{N}_+(A)$. Далее, оператор $N_+(A)\tilde{N}_+(A)$ является в некотором смысле дефинизирующим, поскольку

$$[N_+(A)\tilde{N}_+(A)x, x] = [\tilde{N}_+(A)x, \tilde{N}_+(A)x] \geq 0, \quad x \in \mathfrak{H}. \quad (4.20)$$

Чтобы с его помощью построить позитивную последовательность моментов, надо проверить, что операторы A и $N_+(A)\tilde{N}_+(A)$ коммутируют. Мы это сделаем с помощью проектора $E_+(Y_\epsilon)$. Рассмотрим выражение $N(A)E_+(Y_\epsilon)\tilde{N}(A)x$, где $x \in \mathfrak{H}$. Согласно (4.17) $\tilde{N}(A)x = z_1 + z_2 + z_3$, откуда

$$\begin{aligned} N(A)E_+(Y_\epsilon)\tilde{N}(A)x &= N(A)E_+(Y_\epsilon)(z_1 + z_2 + z_3) = N(A)(E_{12}(Y_\epsilon)z_2 + E_{22}(Y_\epsilon)z_2) = \\ &= (N_{12}E_{22}(Y_\epsilon)z_2 + N(A_{22})E_{22}(Y_\epsilon)z_2). \end{aligned}$$

В силу (4.17) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(A)E_+(Y_\epsilon)\tilde{N}(A)x = (N_{12}z_2 + N(A_{22})z_2)$. Поскольку $z_2 = \tilde{N}_{20}x_0 + \tilde{N}(A_{22})x_2$, то

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(A)E_+(Y_\epsilon)\tilde{N}(A)x = N_+(A)\tilde{N}_+(A)x.$$

Осталось заметить, что проектор $E_+(Y_\epsilon)$ коммутирует с оператором A^n , поэтому для любого натурального n верно $A^n N(A)E_+(Y_\epsilon)\tilde{N}(A) = N(A)E_+(Y_\epsilon)\tilde{N}(A)A^n$, откуда

$$A^n N_+(A)\tilde{N}_+(A) = N_+(A)\tilde{N}_+(A)A^n.$$

Аналогично (4.19) введём разложение

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{13}\tilde{N}_{30} & 0 & 0 & N_{13}\tilde{N}(A_{33}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ N(A_{33})\tilde{N}_{30} & 0 & 0 & N(A_{33})\tilde{N}(A_{33}) \end{pmatrix} = N_-(A)\tilde{N}_-(A), \quad (4.21)$$

где

$$N_-(A) = \begin{pmatrix} N(A_{00}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{30} & 0 & 0 & N(A_{33}) \end{pmatrix}, \quad \tilde{N}_-(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{N}(A_{11}) & 0 & \tilde{N}_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{N}_{30} & 0 & 0 & \tilde{N}(A_{33}) \end{pmatrix}.$$

Итак, рассмотрим три последовательности:

$$c_n = [N(A)\tilde{N}(A)A^n x, x], \quad c_n^+ = [N_+(A)\tilde{N}_+(A)A^n x, x], \quad c_n^- = [N_-(A)\tilde{N}_-(A)A^n x, x], \quad n = 0, 1, \dots$$

В силу (4.20) последовательность $\{c_n^+\}_0^\infty$ положительна и имеет следующее ограничение на рост: $|c_n^+| \leq C\|A\|^n$. По аналогичной причине последовательность $\{c_n^-\}_0^\infty$ отрицательна и имеет аналогичную оценку роста. Как хорошо известно (см., напр, [7]) найдутся такие неубывающие непрерывные слева функции $\sigma_+^{(x)}(t)$ и $\sigma_-^{(x)}(t)$, что

$$c_n^+ = \int_{-\|A\|}^{\|A\|+0} t^n d\sigma_+^{(x)}(t), \quad c_n^- = - \int_{-\|A\|}^{\|A\|+0} t^n d\sigma_-^{(x)}(t), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.22)$$

причём эти функции определяются с точностью до константы. Символ $\|A\|+0$ означает, что мы учитываем возможный скачок функций $\sigma_\pm^{(x)}(t)$ в точке $\|A\|$. Из приведённых формул следует, что

$$c_n = \int_{-\|A\|}^{\|A\|+0} t^n d\eta^{(x)}(t), \quad \eta^{(x)}(t) = \sigma_+^{(x)}(t) - \sigma_-^{(x)}(t), \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.23)$$

Отметим удивительный факт [23], что представление последнего типа допускает произвольная вещественная последовательность, но в этом случае верхний предел интегрирования будет бесконечен. На основании представлений (4.22) в [18, 27] показано, что найдутся такие неубывающие операторные функции $G_t^\pm$, что

- $G_{-\infty}^\pm = 0$, $G_t^\pm = \text{s-lim}_{\tau \rightarrow t-0} G_\tau^\pm$ для любого $t \in \mathbb{R}$;
- для любого $t \in \mathbb{R}$ и $\tau \in (-\infty, t)$ оператор $(G_t^\pm - G_\tau^\pm)$ является J -неотрицательным;
- $N_\pm(A)\tilde{N}_\pm(A)A^k x = \pm \int_{-\|A\|}^{\|A\|+0} t^k dG_t^\pm x$ для любого $x \in \mathcal{H}$ и $k = 0, 1, 2, \dots$

Связь между операторами $N(A)\tilde{N}(A)$, $N_+(A)\tilde{N}_+(A)$ и $N_-(A)\tilde{N}_-(A)$ (см. (4.19) и (4.21)) приводит к представлению

$$N(A)\tilde{N}(A)A^k x = \int_{-\|A\|}^{\|A\|+0} t^k dG_t x \quad (4.24)$$

для любого $x \in \mathcal{H}$ и $k = 0, 1, 2, \dots$, где $G_t = G_t^+ - G_t^-$. Представление (4.24) и стандартное разложение резольвенты $R_\xi(A)$ в окрестности бесконечно удалённой точки (см. [15, гл. XI, § 1, п. 148]) приводит к представлению

$$N(A)\tilde{N}(A)R_\xi(A) = \int_{-\|A\|}^{\|A\|+0} \frac{1}{t-\xi} dG_t, \quad (4.25)$$

где $\xi \in \mathbb{C} \setminus [-\|A\|, \|A\|]$. Далее, выражение $M(t, \xi) = \frac{N(\xi)\tilde{N}(\xi) - N(t)\tilde{N}(t)}{t - \xi}$ превращается после его очевидного доопределения в особой подобласти $t = z$ в полином от двух переменных, т. е. выражению

$$M(A, \xi) = R_\xi(A)(N(\xi)\tilde{N}(\xi)I - N(A)\tilde{N}(A))$$

можно придать корректный смысл. Последняя формула и представление (4.25) приводят к новому представлению

$$R_\xi(A) = \frac{1}{N(\xi)\tilde{N}(\xi)} \left(M(A, \xi) + \int_{-\|A\|}^{\|A\|+0} \frac{1}{t - \xi} dG_t \right). \quad (4.26)$$

Предложение 4.4. Пусть спектр J -с.с. оператора $A \in D_\kappa^+$ веществен, $\mathfrak{L}_+$ — отвечающее определению 4.2 подпространство, инвариантное относительно A . Тогда оператор A обладает вещественной с.с.ф. E_λ с конечным множеством спектральных особенностей Λ ($\mathfrak{R}_\Lambda$ — множество промежутков $\Delta = [a, b)$ $a, b \notin \Lambda$), причём

$$\left. \begin{aligned} \text{a.} \quad & \text{для любого } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \Lambda \text{ верно } E_\lambda \in \text{Alg } A; \\ \text{b.} \quad & \text{если } \Delta \in \mathfrak{R}_\Lambda \text{ и } \Delta \cap \Lambda = \emptyset, \text{ то } E(\Delta)\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\Delta^+[+] \mathfrak{H}_\Delta^-, A\mathfrak{H}_\Delta^+ \subset \mathfrak{H}_\Delta^+, \\ & A\mathfrak{H}_\Delta^- \subset \mathfrak{H}_\Delta^-, \mathfrak{H}_\Delta^+ \text{ — равномерно положительное, а } \mathfrak{H}_\Delta^- \text{ — равно-} \\ & \text{мерно отрицательное подпространство (каждое из подпро-} \\ & \text{странств } \mathfrak{H}_\Delta^+ \text{ и } \mathfrak{H}_\Delta^- \text{ может вырождаться в } \{0\}); \\ \text{c.} \quad & \text{если } \Delta \in \mathfrak{R}_\Lambda \text{ и } \Delta \cap \Lambda \neq \emptyset, \text{ то } E(\Delta)\mathfrak{L}_+ \cap \mathfrak{L}_1 \neq \{0\} \text{ и оператор} \\ & A|_{E(\Delta)\mathfrak{H}} \text{ не является скалярным спектральным оператором.} \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Доказательство. Демонстрация справедливости этого предложения может быть реализована по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.1 из [18], которая посвящена аналогичному результату для пространства Понтрягина, поэтому мы покажем только путь, приводящий к этой схеме. Итак, пусть $N(\xi)$ — тот же многочлен, что и в (4.14), (4.16), (4.18), который в силу вещественности спектра соответствующего оператора будет иметь вещественные коэффициенты, так что формула (4.26) может быть заменена на формулу

$$R_\xi(A) = \frac{1}{N^2(\xi)} \left(M(A, \xi) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t - \xi} dG_t \right). \quad (4.28)$$

Положим

$$\Lambda := \{\lambda : N(\lambda) = 0\}.$$

Множество Λ является кандидатом в множество особых точек для оператора A и для его спектральной функции, к определению которой мы переходим.

Обозначим $\mathbb{R}_G$ множество тех $t \in \mathbb{R}$, для которых G_t непрерывна в сильной операторной топологии. Действуя так же, как и в (3.7), положим

$$E_t = \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) \text{s-lim}_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} R_\xi(A) d\xi \quad (4.29)$$

для всех $t \in \mathbb{R}_G \setminus \Lambda$ и доопределим E_t по формуле $E_t = \text{s-lim}_{\tau \in \mathbb{R}_G, \tau \rightarrow t-0} E_\tau$ для остальных $t \in \mathbb{R} \setminus \Lambda$.

Существование предела в (4.29) следует, в первом приближении, из теоремы о существовании сильного предела у монотонной ограниченной последовательности операторов в гильбертовом пространстве (см. [15, гл. VII, § 1, п. 104, теорема Вижье—С.-Надя]) и формулы (4.28), однако соответствующее доказательство имеет ряд особенностей. С учётом структуры G_t из (4.24) они исчерпывающим образом описаны в [18]. В заключение остановимся на пунктах **b** и **c** (4.27). Первый из этих пунктов гарантирует, что при условии $\Delta \in \mathfrak{R}_\Lambda$ и $\Delta \cap \Lambda = \emptyset$ оператор $A|_{E(\Delta)\mathfrak{H}}$

является скалярным спектральным оператором, т. е. $A|_{E(\Delta)\mathfrak{H}} = \int_{\Delta} \lambda dE_{\lambda}|_{E(\Delta)\mathfrak{H}}$. Второе условие имеет отчасти противоположный смысл, т. е. исключает из Λ те точки, в которых оператор $A|_{E(\Delta)\mathfrak{H}}$ оказался спектральным оператором. Это может произойти, если соответствующее собственное подпространство оператора A регулярно и индефинитно. В этом состоит отличие множества критических точек для J -с.с. оператора в пространстве Понтрягина и множеством особых точек для J -с.с. оператора в пространстве Крейна. $\square$

Заметим, что последнее предложение можно было бы доказать, не повторяя путь доказательства аналогичной теоремы в пространстве Понтрягина, а используя саму теорему, однако формулы (4.24) и (4.25) полезны и сами по себе, поскольку открывают естественную постановку вопроса о создании модели J -с.с. оператора по схеме Йонаса—Лангера—Тексториуса, которую они использовали в случае пространства Понтрягина (об этом см. ниже). При этом вопрос о связи дефинируемой числовой последовательности (интегро-полиномиальное представление такой последовательности получено в [28]) и циклического J -с.с. оператора достаточно сложен. Приведём следующий пример.

Пример 4.1. Пусть $\{e_j^+, e_j^-\}_0^\infty$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, индефинитная структура на котором задана оператором $J : Je_j^\pm = \pm e_j^\pm$, $j = 0, 1, \dots$. Зададим в $\mathfrak{H}$ дополнительную J -ортонормированную систему, которая полна в $\mathfrak{H}$, но базисом не является:

$$h_j^+ = \frac{j}{\sqrt{2j-1}}(e_j^+ + \frac{j-1}{j}e_j^-), \quad h_j^- = \frac{j}{\sqrt{2j-1}}(\frac{j-1}{j}e_j^+ + e_j^-), \quad j = 0, 1, \dots,$$

и два оператора $Ae_j^\pm = \frac{\pm 1}{j+1}e_j^\pm$ и $Bh_j^\pm = \frac{\pm 1}{j+1}h_j^\pm$, $j = 0, 1, \dots$. Далее, пусть

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2}(e_j^+ + e_j^-), \quad y = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2}(h_j^+ + h_j^-).$$

Тогда

$$\begin{aligned} A^n x &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^{2+n}}(e_j^+ + (-1)^n e_j^-), & B^n y &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^{2+n}}(h_j^+ + (-1)^n h_j^-), \\ [A^n x, x] &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^{4+n}}(1 + (-1)^{n+1}), & [B^n y, y] &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^{4+n}}(1 + (-1)^n). \end{aligned}$$

Итак, две последовательности моментов совпадают, но порождающие эти последовательности операторы A и B подобными не являются, в частности, $A \in D_0^+$, а оператор B не принадлежит к D_κ^+ ни при каком κ . Отметим при этом, что последовательность

$$d_n = [A^{n+1}x, x] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^{4+n}}(1 + (-1)^{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots$$

положительна, т. е. операторы A и B дефинируемы.

Пример 4.2. Пусть система $e, g, f, h_1, h_2, h_3, \dots$ образует ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, и пусть полуторалинейная форма на $\mathfrak{H}$ задаётся формулой

$$[x, y] = (x, e)(g, y) + (x, g)(e, y) + (x, f)(f, y) + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j (x, h_j)(h_j, y).$$

Тогда это пространство превращается в пространство Крейна. Зададим на $\mathcal{H}$ оператор A с помощью следующих условий:

$$Ae = 0, \quad Ah_j = \frac{1}{j} \cdot (h_j + e), \quad j = 1, 2, \dots, \quad Ag = f + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1)^j}{j} \cdot h_j, \quad Af = e.$$

Расширяя область определения A по линейности и непрерывности на всё пространство $\mathcal{H}$ получим, что A — это компактный J -с.с. оператор, $A(h_j + e) = \frac{1}{j} \cdot (h_j + e)$, $j = 1, 2, \dots$. Спектральная функция оператора A может быть полностью описана равенством

$$E\left(\left\{\frac{1}{j}\right\}\right)x = (-1)^j[x, (h_j + e)] \cdot (h_j + e),$$

так что

$$E_t x = \left(I - E\left(\left\{\frac{1}{j}\right\}_{j=1}^n\right)\right)x = x - \sum_{j=1}^n (-1)^j[x, (h_j + e)] \cdot (h_j + e),$$

где $n = [1/t]$, $[1/t]$ — целая часть числа $1/t$.

Этот пример будет проанализирован в следующем разделе.

5. СХЕМА ЙОНАСА—ЛАНГЕРА—ТЕКСТОРИУСА

В работе [25] была предложена модель ограниченного циклического J -с.с. оператора в пространстве Понтрягина, базирующегося на интегральном представлении последовательности вида (3.2).

Напомним для начала определение циклического вектора и циклического оператора (см., например, [17, гл. 14, п. 126], [14, гл. VII, п. 2]).

Если B — некоторый оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то *циклическим вектором* этого оператора называется любой вектор $x \in \mathcal{H}$, такой что система векторов $\{B^n x\}_{n=0}^\infty$ полна в $\mathcal{H}$.

Далеко не для всякого оператора существуют циклические векторы. В случае самосопряжённого оператора B в гильбертовом пространстве наличие циклического вектора эквивалентно простоте спектра у B , но для спектральных или обобщённых спектральных операторов картина усложняется. Если оператор B обладает циклическим вектором, то он называется *циклическим*. Циклическим, в частности, является оператор A из примера 4.2, а его циклическим вектором будет, скажем, g .

Далее, всякий ограниченный J -с.с. оператор A , действующий в пространстве Понтрягина $\mathcal{H}$, полиномиально дефинизируем, т. е. для A найдётся такой (дефинизирующий) полином $\mathcal{P}(\cdot)$, для которого оператор $\mathcal{P}(A)$ J -неотрицателен. В (3.1) показано, что можно положить $\mathcal{P}(\cdot) = N(\cdot)\tilde{N}(\cdot)$, однако, вообще говоря, для одного и того же оператора существуют разные дефинизирующие полиномы и для дальнейшего конкретный вид $\mathcal{P}(\cdot)$ неважен, дальше лишь предполагается, что коэффициенты у $\mathcal{P}(\cdot)$ вещественны, а коэффициент при его старшей степени равен единице. Итак, пусть A — фиксированный ограниченный J -с.с. оператор, действующий в пространстве Понтрягина $\mathcal{H}$, и для него найдётся такой вектор g , что последовательность $\{A^n g\}_0^\infty$ полна в $\mathcal{H}$. Выберем и зафиксируем полином $\mathcal{P}(\xi) = \xi^m + \eta_{m-1}\xi^{m-1} + \eta_{m-2}\xi^{m-2} + \dots + \eta_0$, который дефинирует A . Последовательность $\{d_n = [\mathcal{P}(A)A^n g, g]\}_0^\infty$ является позитивной последовательностью моментов и поэтому допускает уже упомянутое представление (3.4)

$$d_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n d\sigma(t),$$

которое мы используем для регуляризованного интегрального представления последовательности моментов

$$\{c_n = [A^n g, g]\}_0^\infty.$$

Указанные последовательности моментов связаны соотношениями

$$d_n = c_{n+m} + \eta_{m-1}c_{n+m-1} + \eta_{m-2}c_{n+m-2} + \dots + \eta_0 c_n,$$

которое в результате ряда преобразований приводит (ср. с [28])

$$c_n = \sum_{j=0}^m \alpha_j^{(n)} c_j + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^n - \sum_{j=0}^m \alpha_j^{(n)} t^j}{\mathcal{P}(t)} d\sigma(t), \quad (5.1)$$

где $\sum_{j=0}^m \alpha_j^{(n)} t^j$ — интерполяционный многочлен для t^n , $n = 0, 1, \dots$. Поясним, что для $n < m$ представление (5.1) сводится к тривиальному равенству $c_n = c_n$.

Перейдём теперь к формированию модельного пространства Понтрягина как некоторого пространства функций. отождествим (циклический) вектор g с тождественной единицей, вектор Ag — с t , A^2g — с t^2 и т. д. Итак, стартовым линейным многообразием функций у нас будет множество полиномов $\mathfrak{P}$. Превратим множество $\mathfrak{P}$ в линейное пространство с внутренним скалярным произведением $[\cdot, \cdot]$ полагая $[t^j, t^l] = c_{j+l}$, $j, l = 0, 1, \dots$, где величины c_{j+l} заданы в (5.1).

По построению линейал $\mathfrak{P}$ изометричен плотному подмножеству пространства Понтрягина $\mathcal{H}$, поэтому он после пополнения превращается в пространство Понтрягина, которое мы обозначим $\Pi(\Phi)$, а исходный оператор будет подобен действующему в $\Pi(\Phi)$ оператору умножения A_T на независимую переменную.

Указанное пополнение можно реализовать разными способами, но все эти способы топологически эквивалентны. Один из вариантов — выделить в $\mathfrak{P}$ максимальное отрицательное подпространство $\mathcal{L}_-$ и найти в $\mathfrak{P}$ J -ортогональное дополнение $\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_-^{\perp}$. Линейал $\mathcal{L}_+$ с внутренним эрмитовым произведением $[\cdot, \cdot]$ — это предгильбертово пространство, пополнив которое, мы и получим (в прямой сумме с $\mathcal{L}_-$) пространство Понтрягина $\Pi(\Phi)$.

Формулы (5.1) показывают, что, вообще говоря, как гильбертова структура, так и структура пространства Понтрягина на функциональном пространстве $\Pi(\Phi)$ может задаваться не обычной мерой Лебега—Стилтьеса, а некоторым распределением (обобщённой функцией) Φ . Разбор конкретного примера можно найти в м [18].

Перейдём теперь к проблеме модельного представления циклического J -с.с. оператора класса D_κ^+ . Отметим, что такой оператор относится к классу **H**. Обратное неверно главным образом потому, что для циклического оператора допустимы жордановы цепочки, отвечающие одному собственному вектору, но невозможны собственные подпространства размерностью больше единицы. Различие, впрочем, невелико, так как у оператора класса **H** собственных подпространств размерностью больше единицы может быть только конечное число и каждое из них должно иметь конечную размерность.

Итак, пусть $\mathfrak{H}$ — это гильбертово J -пространство, оператор $A \in D_\kappa^+$ действует в этом пространстве, J -самосопряжён и существует такой вектор $g \in \mathfrak{H}$, что система $\{A^j g\}_0^\infty$ полна в $\mathfrak{H}$. Поскольку $A \in D_\kappa^+$, то существует разложение (4.2) и соответствующие матричные представления (4.3) и (4.4). Вектор g может быть представлен в соответствии с (4.2) в виде $g = g_0 + g_1 + g_2 + g_3$. Структура угловых операторов $E^{(12)}(\Delta)$ и $A_{12}(\Delta)(A_{22}(\Delta))^{(n-1)}$ (см. (4.12) (4.13)), отвечающих операторам $E^+(\Delta)$ и $(A^+)^n E^+(\Delta)$ соответственно, показывает, что у них есть совместное ядро $\mathfrak{K}_2 \subset \mathfrak{L}_2$ — ортогональное дополнение к векторам $\{E^{(22)}(\Delta)y_j^{(m)}\}_{j=1}^{k_m}\}_{m=1}^p$ (см. (4.9)), Δ пробегает множество интервалов вида (4.10). $\mathfrak{K}_2$ является положительным инвариантным подпространством оператора A и его можно отделить. Итак, мы можем допустить, что совместного нетривиального ядра у указанной системы угловых операторов нет. Тогда в силу соотношения сопряжённости (4.6) матричных элементов A_{20} и A_{12} оператора A , а также его степеней, ясно, что замыкание линейной оболочки системы подпространств $\{(A^k)_{20}\mathfrak{L}_0\}_0^\infty$, где $(A^k)_{20}$ — соответствующий угловой оператор оператора A^k , совпадает с $\mathfrak{L}_2$. Итак, без ограничения общности можно считать, что $g = g_0$.

Тогда существует многочлен $\mathcal{P}(t)$ с вещественными коэффициентами, при котором последовательность $d_n = [\mathcal{P}(A)A^n g, g]$, $n = 0, 1, \dots$ представима в виде (4.23)

$$d_n = \int_{-\|A\|}^{\|A\|+0} t^n d\eta(t), \quad \eta(t) = \sigma_+(t) - \sigma_-(t), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5.2)$$

где $\sigma_+(t)$ и $\sigma_-(t)$ неубывающие непрерывные слева функции. В силу простоты спектра оператора A разложение $\eta(t) = \sigma_+(t) - \sigma_-(t)$ является разложением Хана (см. [10]). Наряду с последовательностью $\{d_n\}_0^\infty$ рассмотрим последовательность моментов

$$\{c_n = [A^n g, g]\}_0^\infty. \quad (5.3)$$

Указанные последовательности моментов связаны соотношениями

$$d_n = c_{n+m} + \gamma_{m-1}c_{n+m-1} + \gamma_{m-2}c_{n+m-2} + \dots + \gamma_0c_n,$$

где коэффициентами являются коэффициенты многочлена $\mathcal{P}(\xi)$. Нам в дальнейшем будет удобно считать, что степень многочлена чётная, и он представлен в виде $\mathcal{P}(\xi) = N(\xi)\tilde{N}(\xi)$, где $N(\xi)$ и $\tilde{N}(\xi)$ — многочлены с сопряжёнными коэффициентами. На возможность манипуляции со степенями многочленов указывается в [28], а элементы соответствующих представлений могут быть восстановлены через равенство

$$c_n = \sum_{j=0}^m \alpha_j^{(n)} c_j + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^n - \sum_{j=0}^m \alpha_j^{(n)} t^j}{\mathcal{P}(t)} d\eta(t), \quad (5.4)$$

где $\sum_{j=0}^m \alpha_j^{(n)} t^j$ — интерполяционный многочлен для t^n , $n = 0, 1, \dots$, функция $\eta(t)$ та же, что и в (5.3). При $n < m$ представление (5.4) превращается в тривиальное равенство $c_n = c_n$.

Приступим к построению модельного пространства Крейна как некоторого пространства функций. отождествим вектор g с тождественной единицей, вектор Ag — с t , A^2g — с t^2 и т. д. Итак, стартовым линейным многообразием функций у нас будет множество полиномов $\mathfrak{P}$. Превратим множество $\mathfrak{P}$ в линейное пространство с внутренним скалярным произведением $[\cdot, \cdot]$ полагая $[t^j, t^l] = c_{j+l}$, $j, l = 0, 1, \dots$, где величины c_{j+l} заданы в (5.3). По построению линейал $\mathfrak{P}$ изометричен плотному подмножеству пространства Крейна $\mathfrak{H}$, поэтому он после пополнения превращается в пространство Крейна, которое мы обозначим $\mathfrak{K}$, а исходный оператор будет подобен действующему в $\mathfrak{K}$ оператору умножения A_T на независимую переменную. Как было показано выше (пример 4.1), такие пополнения определяются неоднозначно, и они топологически могут быть неэквивалентны, в этом состоит радикальное различие между случаями пространств Понтрягина и Крейна. Мы воспользуемся представлением (5.2), элементы которого определяются в существенном однозначно. Итак, рассмотрим сначала линейал $\mathfrak{L}$ — линейную оболочку полиномов вида $N(t)t^k$, $k = 0, 1, \dots$. При этом

$$\langle N(t)t^j, N(t)t^l \rangle = \int_{-\|A\|}^{\|A\|+0} t^{l+j} d(\sigma_+(t) + \sigma_-(t)), \quad j, l = 0, 1, \dots$$

Линейал $\mathfrak{L}$ линейно изоморфен плотному линейному подмножеству в $\mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2 \oplus \mathfrak{L}_3$, но внутреннее произведение $[\cdot, \cdot]$ вырождается на $\mathfrak{L}_1$, поэтому полунормы $\langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$ недостаточно для пополнения подпространства $\mathfrak{L}$. Введём на $\mathfrak{L}$ дополнительные полунормы

$$p_j(Q(t)) = \|[Q(t), t^j]\|, \quad j = 0, 1, (m/2) - 1,$$

где m — степень многочлена $\mathcal{P}(\xi)$ (напомним, что она чётна). Далее, для произвольного многочлена $u(t) \in \mathfrak{L}$ введём норму

$$\|u(t)\|^2 = \sum_{j=1}^{(m/2)-1} |p_j(u(t))|^2 + \langle Q(t), Q(t) \rangle.$$

Тогда пополнение $\mathfrak{L}$ по этой норме превращает $\mathfrak{L}$ в гильбертово пространство. Следующий этап — это дополнение пополненного пространства до пополнения $\mathfrak{P}$, но это уже не является проблемой, поскольку дополняющее подпространство конечномерно и его элементы известны, это система t^j $j = 0, 1, (m/2) - 1$. Дальнейшее очевидно.

Проиллюстрируем предложенную схему на примере 4.2. Имеем

- $Ag = f + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} \cdot h_j,$
- $A^2g = e + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^2} \cdot (h_j + e),$

$$\begin{aligned} \bullet \quad A^3 g &= e + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^3} \cdot (h_j + e), \\ \dots \\ \bullet \quad A^k g &= e + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^k} \cdot (h_j + e), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \bullet \quad c_0 &= 0, \\ \bullet \quad c_1 &= [Ag, g] = 0, \\ \bullet \quad c_2 &= [A^2 g, g] = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^2}, \\ \bullet \quad c_3 &= [A^3 g, g] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^3}, \\ \dots \\ \bullet \quad c_k &= [A^k g, g] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^k}. \end{aligned}$$

Итак, первым членом последовательности моментов, который может быть задан через знакопеременную меру (заряд) является c_2 , а функция, задающая знакопеременную меру, выглядит следующим образом:

$$\forall t \leq 0 \quad \sigma(t) = 0, \quad \forall t > 0 \quad \sigma(t) = 1 + \sum_{j \geq t^{-1}} \frac{(-1)^j}{j^2}.$$

Аналогично находится функция, задающая соответствующую положительную меру:

$$\forall t \leq 0 \quad \eta(t) = 0, \quad \forall t > 0 \quad \eta(t) = 1 + \sum_{j \geq t^{-1}} \frac{1}{j^2}.$$

Наконец, норма, по которой будет пополняться подпространство $\mathfrak{L}$ многочленов, выглядит следующим образом:

$$\|u(t)\|^2 = |[u(t), 1]|^2 + \langle u(t), u(t) \rangle,$$

или в терминах скалярного произведения $[\cdot, \cdot]$ полиномов $u(t)$ и $v(t)$

$$[u(t), v(t)] = [u(t), 1][1, v(t)] + \langle u(t), v(t) \rangle.$$

Так как $\sigma(t)$ и $\eta(t)$ являются функциями, графически состоящими из счётного числа ступеней, то для функций, входящих в пополнение $\mathfrak{L}$, имеет смысл только то, какое значение имеет та или иная функция в точках скачков функций, задающих меру. С этой точки зрения величина $[1, u(t)]$ для полинома $u(t) = t^2 v(t)$, где $v(t)$ — другой полином, задаётся формулой

$$[1, u(t)] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^2} v\left(\frac{1}{j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j u\left(\frac{1}{j}\right). \quad (5.5)$$

Прямая проверка показывает, что последовательность функций t^n , $n = 2, 3, \dots$ является последовательностью Коши и сходится к функции $\varphi_1(t)$: $\varphi_1(t) = 0$ при $t \in [0, 1)$, $\varphi_1(1) = -1$, последовательность функций $4^n t^n (1-t)^n$ — к функции $\varphi_2(t)$: $\varphi_2(t) = 0$ при $t \in [0, 1/2) \cup (1/2, 1]$, $\varphi_2(1/2) = 1$ и т. д. Функция $\varphi_n(t)$ в этой схеме задаётся равенствами $\varphi_n(t)$: $\varphi_n(t) = 0$ при $t \in [0, 1/n) \cup (1/n, 1]$, $\varphi_n(1/n) = (-1)^n$. Подсчитывая с помощью предельного перехода значения внутреннего скалярного для этих функций, имеем $[\varphi_n(t), u(t)] = (-1)^n \bar{u}(1/n)$ и, в частности, $[\varphi_n(t), \varphi_l(t)] = (-1)^n \delta_{nl}$, где δ_{nl} — символ Кронекера. Одновременно

$$\langle \varphi_n(t), u(t) \rangle = \bar{u}(1/n), \quad \langle \varphi_n(t), \varphi_l(t) \rangle = \delta_{nl}.$$

Рассмотрим теперь последовательность

$$\psi_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \varphi_{2l}(t).$$

Внешне эта последовательность функций равномерно сходится к нулю, однако $[\psi_n(t), 1] = 1$ для любого $n = 1, 2, \dots$. С другой стороны, согласно методу средних арифметических для последовательностей (см. [12, теорема 4.1.П Сильвермана—Теплица]), для произвольного полинома $u(t)$ верно $\lim_{n \rightarrow \infty} [\psi_n(t), tu(t)] = 0$. Итак, для любого полинома $u(t)$ мы имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} [\psi_n(t), u(t)] = \overline{u(0)}$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t)$ можно отождествить с дельта-функцией Дирака $\delta(t)$, причём $[\delta(t), \delta(t)] = 0$ $\langle \delta(t), \delta(t) \rangle = 0$.

Перейдём к подсчёту скалярного произведения $[\cdot, \cdot]$ (см. (5.5)) для найденных элементов. Итак, $[\varphi_n(t), \varphi_l(t)] = (-1)^{n+l} + (-1)^n \delta_{nl}$, т. е. рассматриваемые функции не ортогональны! Но $[1, \varphi_n(t) - (-1)^n \delta(t)] = 0$, поэтому

$$(\varphi_n(t) - \delta(t), \varphi_l(t) - \delta(t)) = (-1)^n \delta_{nl}.$$

Последнее равенство означает, что система $\{\varphi_l(t) - \delta(t)\}_{l=1}^{\infty}$ является ортонормированной системой, поэтому ряд $\sum_{l=1}^{\infty} \nu_l(\varphi_l(t) - \delta(t))$ сходится тогда и только тогда, когда $\sum_{l=1}^{\infty} |\nu_l|^2 < \infty$.

Рассмотрим теперь последовательность

$$\vartheta_n(t) = \sum_1^n \frac{\varphi_l(t) - \delta(t)}{l}.$$

Наша цель — найти $\lim_{n \rightarrow \infty} [\vartheta_n(t), v(t)]$ для произвольного полинома $v(t)$, который, очевидно, может быть представлен в виде $v(t) = v(0) + v'(0)t + t^2 w(t)$. Итак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\vartheta_n(t), v(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(v'(0) \sum_1^n \frac{(-1)^l}{l^2} + \sum_1^n (-1)^l \frac{w(1/l)}{l^3} \right) = v'(0) \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^l}{l^2} + \sum_1^{\infty} (-1)^l \frac{w(1/l)}{l^3}.$$

С другой стороны,

$$[t, v(t)] = v'(0) \left(1 + \sum_1^{\infty} (-1)^l \frac{1}{l^2} \right) + \sum_1^{\infty} V \frac{w(1/l)}{l^3},$$

поэтому элемент $t - \lim_{n \rightarrow \infty} [\vartheta_n(t)$ из $\mathfrak{K}$ может быть отождествлён с обобщённой функцией $-\delta'(t)$.

Резюмируя вышеприведённые соображения, можно утверждать, что все элементы пространства $\mathfrak{K}$ могут быть представлены в виде $\alpha + \beta \delta(t) + \gamma \delta'(t) + \sum_{l=1}^{\infty} \nu_l(\varphi_l(t) - \delta(t))$, где $\sum_{l=1}^{\infty} |\nu_l|^2 < \infty$. При этом надо иметь ввиду, что $\sigma(t)$ — функция скачков, поэтому значения какой либо функции из $\mathfrak{K}$ на множестве $\bigcup_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l+1}, \frac{1}{l} \right)$ несущественны и, скажем, функции t и $-\delta'(t) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l}(\varphi_l(t) - \delta(t))$ представляют один и тот же элемент из $\mathfrak{K}$. Аналогичное замечание верно для пары функций t^2 и $\delta'(t) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \varphi_l(t) - \delta(t)$ и т. п. Оператор A_T после его замыкания задаётся равенствами

$$A_T \delta(t) = 0, \quad A_T \delta'(t) = -\delta(t), \quad A_T 1 = -\delta'(t) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l}(\varphi_l(t) - \delta(t)), \quad A_T \varphi_l(t) = \frac{1}{l} \varphi_l(t),$$

где $l = 1, 2, \dots$. Этим завершается описание модели оператора A из примера 4.2.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Самосопряжённые и унитарные операторы в пространствах Крейна — это, в целом, очень широкий класс операторов для того, чтобы его представители обладали таким набором свойств, которые были бы полезны при их использовании в смежных разделах теории операторов. Операторы, которые, наряду с самосопряжённостью, обладают инвариантным подпространством специального вида, имеют свойства, близкие к свойствам самосопряжённых операторов в пространстве Понтрягина, включая и возможность их модельного представления, что и было продемонстрировано в настоящей работе. Автор глубоко признателен доценту Д. А. Закоре, который много сделал для того, чтобы эта работа была написана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Линейные операторы в гильбертовых пространствах с G -метрикой // Усп. мат. наук. — 1971. — 26, № 4. — С. 43–92.
2. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой и их приложения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. — 1979. — 17. — С. 113–205
3. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
4. Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д. Введение в теорию пространств Понтрягина: Специальный курс лекций. — Симферополь: ТНУ, 2008.
5. Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д. Введение в теорию пространств Крейна: Специальный курс лекций. — Симферополь: ФОРМА, 2010.
6. Ароншайн Н. Квадратичные формы на векторных пространствах // Математика. — 1964. — 8, № 5. — С. 102–155.
7. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. — М.: Физматгиз, 1961.
8. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
9. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 3. Спектральные операторы. — М.: Мир, 1974.
10. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Физматлит, 2009.
11. Крейн М. Г., Лангер Г. К. О спектральной функции самосопряжённого оператора в пространстве с индефинитной метрикой // Докл. АН СССР. — 1963. — 152, № 1. — С. 39–42.
12. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. — М.: ФМЛ, 1960.
13. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. — СПб: Лань, 2009.
14. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1977.
15. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979.
16. Севастьянов В. А. Курс теории вероятностей и математической статистики. — М.: Наука, 1982.
17. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. — М.: Мир, 1970.
18. Штраус В. А. Модели унитарных и самосопряжённых операторов в пространствах Понтрягина // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2022. — 68, № 3. — С. 522–552.
19. Azizov T. Ya., Iokhvidov I. S. Linear operators in Hilbert spaces with G -metric // Russ. Math. Surv. — 1971. — 26, № 4. — С. 45–97.
20. Azizov T. Ya., Iokhvidov I. S. Linear operators in spaces with indefinite metric. — New York: Wiley, 1989.
21. Azizov T. Ya., Strauss V. A. Spectral decompositions for special classes of self-adjoint and normal operators on Krein spaces. Spectral Theory and its Applications // В сб.: «Proceedings dedicated to the 70-th birthday of Prof. I. Colojară». — Bucharest: Theta, 2003. — С. 45–67.
22. Azizov T. Ya., Strauss V. A. On a spectral decomposition of a commutative operator family in spaces with indefinite metric // Methods Funct. Anal. Topology — 2005. — 11, № 1. — С. 10–20.
23. Boas R. P. The Stieltjes moment problem for functions of bounded variation // Bull. Am. Math. Soc. — 1939. — 45. — С. 399–404.
24. Colojară I., Foiaş C. Theory of generalized spectral operators. — New York: Gordon and Breach, 1968.
25. Jonas P., Langer H., Textorius B. Models and unitary equivalence of cyclic selfadjoint operators in Pontrjagin spaces // В сб.: «Operator Theory and Complex Analysis». — Basel: Birkhauser, 1992. — С. 252–284.
26. Langer H. Spectraltheorie linearer Operatoren in J -räumen und einige Anwendungen auf die Shar $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C$. // Докт. дисс. — Dresden: Dresden Tech. Univ., 1965.
27. Langer H. Spectral functions of definitizable operators in Krein space // Lect. Notes Math. — 1982. — 948. — С. 1–46.
28. Navarro L. J., Strauss V. Some class of real sequences having indefinite Hankel forms. // Methods Funct. Anal. Topology. — 2011. — 17, № 1. — С. 65–74.

В. А. Штраус

Южно-Уральский государственный университет (Национальный исследовательский университет), Россия, Челябинск

E-mail: vstrauss@mail.ru

UDC 517.982+517.984.48

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-3-524-546

EDN: FOVYRO

Spectral decomposition of self-adjoint operators in Pontryagin and Krein spaces

V. A. Strauss

South Ural State University (national research university), Chelyabinsk, Russia

Abstract. We consider a self-adjoint operator acting in a Krein space and possessing an invariant subspace that is maximal nonnegative and decomposes into a direct sum of a uniformly positive (i.e., equivalent to a Hilbert space with respect to the inner pseudoscalar product) and a finite-dimensional neutral subspace. We prove the existence of a difference expression that transforms the moment sequence generated by this operator into a sequence representable as the difference of positive moment sequences. In the case of a cyclic operator, this result is applied to construct a function space in which the operator under study is modeled as the operator of multiplication by an independent variable.

Keywords: self-adjoint operator, Krein space, Pontryagin space, invariant subspace, spectral decomposition.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement No. 075-02-2025-1543.

For citation: V. A. Strauss, “Spectral decomposition of self-adjoint operators in Pontryagin and Krein spaces,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. 71, No. 3, 524–546. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-524-546>

REFERENCES

1. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, “Lineynye operatory v gil’bertovykh prostranstvakh s G -metrikoy” [Linear operators in Hilbert spaces with G -metric], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1971, **26**, No. 4, 43–92 (in Russian).
2. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, “Lineynye operatory v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy i ikh prilozheniya” [Linear operators in spaces with indefinite metric and their applications], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Mat. analiz* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1979, **17**, 113–205 (in Russian).
3. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Osnovy teorii lineynykh operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy* [Fundamentals of the Theory of Linear Operators in Spaces with Indefinite Metric], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
4. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevskiy, *Vvedenie v teoriyu prostranstv Pontryagina: Spetsial’nyy kurs lektsiy* [Introduction to the Theory of Pontryagin Spaces: A Special Course], TNU, Simferopol’, 2008 (in Russian).
5. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevskiy, *Vvedenie v teoriyu prostranstv Kreyna: Spetsial’nyy kurs lektsiy* [Introduction to the Theory of Krein Spaces: A Special Course], FORMA, Simferopol’, 2010 (in Russian).
6. N. Aronszajn, “Kvadratichnye formy na vektornykh prostranstvakh” [Quadratic forms on vector spaces], *Matematika* [Mathematics], 1964, **8**, No. 5, 102–155 (Russian translation).
7. N. I. Akhiezer, *Klassicheskaya problema momentov i nekotorye voprosy analiza, svyazannye s neyu* [The Classical Problem of Moments and Some Related Analytical Questions], Fizmatgiz, Moscow, 1961 (in Russian).
8. I. Ts. Gokhberg and M. G. Krein, *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov v gil’bertovom prostranstve* [Introduction to the Theory of Linear Non-Self-Adjoint Operators in Hilbert Space], Nauka, Moscow, 1965 (in Russian).

9. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Lineynye operatory. T. 3. Spektral'nye operatory* [Linear Operators, Pt. 3: Spectral Operators], Mir, Moscow, 1974 (Russian translation).
10. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis], Fizmatlit, Moscow, 2009 (in Russian).
11. M. G. Krein and G. K. Langer, "O spektral'noy funtsii samosopryazhennogo operatora v prostranstve s indefinitnoy metrikoy" [On the spectral function of a self-adjoint operator in a space with an indefinite metric], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1963, **152**, No. 1, 39–42 (in Russian).
12. R. G. Cooke, *Beskonechnye matritsy i prostranstva posledovatel'nostey* [Infinite Matrices and Sequence Spaces], FML, Moscow, 1960 (Russian translation).
13. A. I. Mal'tsev, *Osnovy lineynoy algebrы* [Fundamentals of Linear Algebra], Lan', SPb, 2009 (in Russian).
14. M. Reed and B. Simon, *Metody sovremennoy matematicheskoy fiziki. T. 1. Funktsional'nyy analiz* [Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 1. Functional analysis], Mir, Moscow, 1977 (Russian translation).
15. F. Riesz and B. Szőkefalvi-Nagy, *Lektsii po funktsional'nomu analizu* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1979 (Russian translation).
16. V. A. Sevast'yanov, *Kurs teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistiki* [Course in Probability Theory and Mathematical Statistics], Nauka, Moscow, 1982 (in Russian).
17. P. R. Halmos, *Gil'bertovo prostranstvo v zadachakh* [A Hilbert Space Problem Book], Mir, Moscow, 1970 (Russian translation).
18. V. A. Strauss, "Modeli unitarnykh i samosopryazhennykh operatorov v prostranstvakh Pontryagina" [Models of unitary and self-adjoint operators in Pontryagin spaces], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2022, **68**, No. 3, 522–552 (in Russian).
19. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, "Linear operators in Hilbert spaces with G -metric," *Russ. Math. Surv.*, 1971, **26**, No. 4, 45–97.
20. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Linear operators in spaces with indefinite metric*, Wiley, New York, 1989.
21. T. Ya. Azizov and V. A. Strauss, "Spectral decompositions for special classes of self-adjoint and normal operators on Krein spaces. Spectral Theory and its Applications," In: *Proceedings dedicated to the 70-th birthday of Prof. I. Colojoară*, Theta, Bucharest, 2003, pp. 45–67.
22. T. Ya. Azizov and V. A. Strauss, "On a spectral decomposition of a commutative operator family in spaces with indefinite metric," *Methods Funct. Anal. Topology*, 2005, **11**, No. 1, 10–20.
23. R. P. Boas, "The Stieltjes moment problem for functions of bounded variation," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1939, **45**, 399–404.
24. I. Colojoară and C. Foiaş, *Theory of generalized spectral operators*, Gordon and Breach, New York, 1968.
25. P. Jonas, H. Langer, and B. Textorius, "Models and unitary equivalence of cyclic selfadjoint operators in Pontryagin spaces," In: *Operator Theory and Complex Analysis*, Birkhauser, Basel, 1992, pp. 252–284.
26. H. Langer, "Spectraltheorie linearer Operatoren in J -räumen und einige Anwendungen auf die Shar $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C$," *Doctoral Thesis*, Dresden Tech. Univ., Dresden, 1965.
27. H. Langer, "Spectral functions of definitizable operators in Krein space," *Lect. Notes Math.*, 1982, **948**, 1–46.
28. L. J. Navarro and V. Strauss, "Some class of real sequences having indefinite Hankel forms," *Methods Funct. Anal. Topology*, 2011, **17**, No. 1, 65–74.

V. A. Strauss

South Ural State University (national research university), Chelyabinsk, Russia

E-mail: vstrauss@mail.ru