Программные системы и вычислительные методы
Правильная ссылка на статью:
Скляр А.Я. Численные методы нахождения корней многочленов с действительными и комплексными коэффициентами // Программные системы и вычислительные методы. 2024. № 3. DOI: 10.7256/2454-0714.2024.3.71103 EDN: KTJPCE URL: https://nbpublish.com/library_read_article.php?id=71103

Численные методы нахождения корней многочленов с действительными и комплексными коэффициентами

Скляр Александр Яковлевич

кандидат технических наук

доцент; кафедра прикладная математика; Российский технологический университет (МИРЭА)

119602, Россия, г. Москва, Вернадского, 78

askliar@mail.ru

Статья из рубрики "Математическое моделирование и вычислительный эксперимент"

DOI:

10.7256/2454-0714.2024.3.71103

EDN:

KTJPCE

Дата направления статьи в редакцию:

23-06-2024

Аннотация: Предметом исследования является рассмотрение и анализ набора алгоритмов численного нахождения корней многочленов, прежде всего комплексных на основе методов поиска приближенного разложения исходных полиномов на множители. Если численное нахождение действительных корней обычно не вызывает трудностей, то с нахождением комплексных корней возникает ряд сложностей. В данной статье предлагается набор алгоритмов последовательного нахождения кратных корней многочленов с действительными корнями, далее действительных корней выделением интервалов, потенциально содержащих корни и заведомо не содержащих их, а затем комплексных корней многочленов. Для нахождения комплексных корней используется итеративное приближение исходного многочлена произведением трехчлена на многочлен меньшей степени с последующим использованием метода касательных в комплексной области в окрестности корней полученного трехчлена. Для нахождения корней многочлена с комплексными коэффициентами предлагается решение эквивалентной задачи с действительными коэффициентами. Реализация поставленных задач осуществляется поэтапным применением комплекса алгоритмов. После каждого этапа выделяется группа корней и решается та же задача для многочлена меньшей степени. Последовательность предлагаемых алгоритмов позволяет найти все как действительные, так и комплексные корни многочлена. Для нахождения корней многочлена с действительными коэффициентами строится алгоритм, включающий следующие основные этапы: определение кратных корней с соответствующим снижением степени полинома; выделение диапазона корней; нахождение интервалов, гарантированно содержащих корни и их нахождением, по их выделении остается найти только пары комплексно сопряженных корней; итеративное построение трехчленов, служащих оценкой значений таких пар с минимальной точностью, достаточной для их локализации; собственно поиск корней в комплексной области методом касательных. Вычислительная трудность предлагаемых алгоритмов является полиномиальной и не превосходит куба от степени многочлена, что позволяет получить решение для практически любых многочленов, возникающих в реальных задачах. Областью приложения помимо собственно полиномиальных уравнений является и сводимые к ним задачи оптимизации, дифференциальных уравнений и оптимального управления.

Ключевые слова:

многочлены, нахождение корней, итерационные методы, численные методы, численные алгоритмы, алгебраическое уравнение, сопряженные комплексные корни, рекурсивные алгоритмы, корни многочленов, локализация корней

Введение

Существует множество задач самого разного характера, в которых требуются определение корней многочленов. Алгебраические уравнения возникают при изучении равновесных состояний сложных термодинамических и механических систем, часто они появляются в аэродинамике, в механике полета. Например, скорость быстрейшего набора высоты самолета определяется из алгебраического уравнения восьмой степени. Алгебраические уравнения возникают также при выполнении разнообразных геометрических расчетов – определение точек пересечения и сопряжения криволинейных контуров, при проектировании гладких поверхностей, хорошо обтекаемых тел и многих других задачах.

Методы решения уравнений до второй степени известны еще со времен древней Греции. В XVI веке получены аналитические выражения для многочленов 3 степени (формула Кордано) и 4 степени, полученные Сципионом дель Ферро, Тарталья, Феррари [3].

В как 20-х гг. Абель, а затем Галуа в 30-х гг. XIX в. доказали, что такие формулы для уравнений n-й степени в общем случае при любом $n \geq 5$ заведомо не могут быть найдены.

Для численного приближенного решения уравнений высших степеней в настоящее время используются различные методы, такие как метод Лобачевского, метод Хичкока, схема Горнера для деления многочлена на двучлен и квадратный трехчлен [1, 4] и другие.

Другой тип алгоритмов, основанный на получении итерационных формул, за счет выделения из многочленов простых и квадратичных множителей, с последующим сопоставлением записей многочленов с остатком, когда корни являются приближенными, и без остатка, когда значения корней являются точными рассмотрен в статьях Чье Ен Ун и А.Б. Шеина [5,6,7].

Ряд алгоритмов решения полиномиальных задач и обширная библиография приведены у Г. П. Кутищева [8]. Стоит отметить также подходы для их решения в [9, 10, 11].

Заметим, что само существование большого числа разнообразных методов в целом свидетельствует, что не существует ни одного «вполне удовлетворительного».

1. Удаление кратных корней

Многочлен степени *n* имеет в точности *n* корней и представим в виде

$$P_n(x) = a\prod_{k=1}^{n}(x - x_k) \qquad (1.1)$$

В общем случае не все корни x_k различны.

Нахождения корней многочлена наталкивается на определенные трудности в случаях, когда он имеет кратные корни.

Пусть имеется кратный корень x^* с кратностью m, тогда $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = (x - x^*)^m G_{n-m}(x) \qquad (1.2)$$

$$P_n^{\prime(x)} = m(x - x^*)^{m-1} G_{n-m}(x) + (x - x^*)^m G'_{n-m}(x)$$

$$= (x - x^*)^{m-1}\left(mG_{n-m}(x) + (x - x^*)G'_{n-m}(x)\right)$$

Следовательно, $P_n(x)$ и $P'_n(x)$ будут иметь общий делитель $(x\text{-}x^*)^{m\text{-}1}$.

Тогда, используя алгоритм Евклида можно найти наибольший делитель $Q(x)$ многочленов $P_n(x)$ и $P'_n(x)$.

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{l}(x - x_i)^{m_i} \qquad (1.3)$$

И исходный многочлен $P_n(x)$ быть представлен, как

$$P_n(x) = Q(x)H(x) \qquad (1.4)$$

Многочлен $H(x)$ при этом будет иметь те же корни, что и $P_n(x)$, но не будет иметь кратных корней. Таким образом исходная задача сводится к нахождению корней многочлена, все корни которого различны.

2. Определение диапазона корней

Рассмотрим уравнение (a_0 будем полагать равным 1)

$$x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = 0 \qquad (2.1)$$

Согласно известной теореме [1,2] все корни x_k (k = 1, 2, …, n) многочлена в комплексной плоскости лежат в кольце

$r <| x_k |< R$, где

$$R < 1 + A; r > \frac{1}{1 + B/|a_0|} \qquad (2.2)$$

$$A = \max_{k\in[1,n]} |a_k|; B = \max_{k\in[0,n-1]} |a_k|$$

В то же время сразу отметим, что это утверждение можно несколько усилить.

Проведем замену переменной $x=y/t$. В этом случае исходное уравнение относительно y примет вид

$$y^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^{n-k} y^k = 0 \qquad (2.3)$$

$$R_y < 1 + A_y; r_y > \frac{1}{1 + B_y/(|a_0|t^n)}$$

$$A_y = \max_{k\in[1,n]} |a_k t^{n-k}|; B_y = \max_{k\in[0,n-1]} |a_k t^{n-k}|$$

Учитывая характер подстановки, можно записать

$$R < \frac{1 + A_y}{t} = \max_{k\in[1,n]} \left(\frac{1}{t} + |a_k| t^{n-k-1}\right)$$

Меняя значение t, можно добиться уменьшения оценки верхней границы.

Пусть максимальное значение принимает модуль коэффициента при y_m. Тогда оценка по этому коэффициенту будет не менее, чем

$$t^* = \min_t \left(\frac{1}{t} + |a_m| t^{n-m-1}\right) \qquad (2.4)$$

$t*$ находится из

$$-\frac{1}{t^2} + (n - m - 1)|a_m| t^{n-m-2} = 0; t^* = \frac{1}{\left((n - m - 1)|a_m|\right)^{1/(n-m)}}$$

Таким образом можно утверждать, что оценка лежит между значениями, соответствующими текущему значению t и $t*$.

В то же время при изменении t меняются и другие коэффициенты. Таким образом получаем ограничения на пересечение линий их изменения.

$$\frac{1}{t_r} + |a_m| t_r^{\,n-m-1} = \frac{1}{t_r} + |a_k| t_r^{\,n-k-1}; |a_m| t_r^{\,k} = |a_k| t_r^{\,m}$$

Если t_r не лежит внутри интервала t и $t*$, то его можно игнорировать. Из остальных выбираем значение ближайшее к t.

Если таковых нет, то оптимальное t_r=$t*$.

Если знаки производных

$$\frac{1}{t_r} + |a_m| t_r^{\,n-m-1}, \frac{1}{t_r} + |a_k| t_r^{\,n-k-1}$$

совпадают, то дальнейшее улучшение невозможно. Оптимальное t_r=$t*$.

Если знаки производных совпадают, то принимаем m равным k и повторяем процедуру.

Рассмотрим производную по k коэффициенту в точке t

$$z' = -\frac{1}{t^2} + (n-k-1)|a_k|t^{n-k-2}; t^2 z' = (n-k-1)|a_k|t^{n-k} - 1$$

Рассмотрим в качестве исходного многочлен четвертой степени

t^4-10t^3+35t^2-50^t+24=(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)

Исходная верхняя граница – 51, m=1, t=1,

$$t^* = 1/\left((n-m-1)|a_m|\right)^{\frac{1}{n-m}} = 1/\left((4-2)50\right)^{\frac{1}{4-1}} = \sqrt[3]{0{,}01} \approx 0.2714$$

Точки пересечения

$$|a_1|t_r{}^k = |a_3|t_r{}^m; 50t_r{}^3 = 10; t_r = \sqrt[3]{0{,}2} \approx 0{,}5848; t^2 z' = -1 < 0$$

$$|a_1|t_r{}^k = |a_2|t_r{}^m; 50t_r{}^2 = 35; t_r = \sqrt{0{,}7} \approx 0.8366; t^2 z' = 35 * 0{,}7 - 1 > 0$$

$$|a_1|t_r{}^k = |a_0|t_r{}^m; 50t_r = 24; t_r = 0{,}48; t^2 z' = 3 * 24 * 0{,}49 - 1 > 0$$

И окончательно получаем

$$R = \frac{1}{t_r} + |a_m|t_r{}^{n-m-1} = \frac{1}{\sqrt{0{,}7}} + 50 \cdot 0{,}7 \approx 36{,}195$$

3. Поиск действительных корней

Рассмотрим отдельно поиск положительных и отрицательных корней.

Пусть исходный многочлен имеет вид (старший коэффициент a_0 не снижая общности можно полагать равным 1).

$$P(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \qquad (3.1)$$

Введем $b_k=(a_k+|a_k|)/2$ и $c_k=(a_k-|a_k|)/2$. Для $a_k> 0$ $b_k=a_k$, $c_k=0$ для $a_k\leq 0$ $b_k=0$. $c_k=-a_k$. В этих обозначениях

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k - \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = P_+(x) - P_-(x) \qquad (3.2)$$

Многочлены $P_+(x)$ и $P_-(x)$ при $x>0$ представляют собой непрерывные неотрицательные монотонно возрастающие функции.

Используя введенные многочлены $P_+(x)$ и $P_-(x)$ и верхнюю границу значений корней R будем искать корни в диапазоне [A, B], где A=0, B=R. Нижнюю границу можно уточнить до величины r*, получив диапазон [r*, R*] вместо диапазона [r, R], но это не имеет принципиального значения.

Рассмотрим подробнее алгоритм нахождения корней.

Вычисляем значения $P_+(x)$ и $P_-(x)$ на концах интервала и вызываем функцию Root вычисления корней с параметрами A, B, $P_+(A)$, $P_-(A)$ и $P_+(B)$, $P_-(B)$. Функция Root возвращает либо найденный корень (значение большее 0), либо -1, если на данном интервале многочлен $P(x)$ не имеет корней.

Алгоритм функции Root имеет следующий вид.

1. Вычисляем значения исходного многочлена на концах интервала $P(A)=P_+(A)-P_-(A)$ и $P(B)= P_+(B)-P-(B)$

2. Если $P(A)=0$ возвращаем найденный корень A, если $P(B)=0$ возвращаем найденный корень B, если *P(A)P(B)вызываем стандартную процедуру STROOT нахождения корней на заданном интервале [A, B] (например, методом дихотомии или хорд) и возвращаем, найденное ей значение.*

3. Вычисляем $Q_1=P_+(A)-P_-(B)$ – нижняя граница значений $P(x)$ на интервале $[A, B]$ и $Q_2=P_+(B)-P_-(A)$ – верхняя граница значений $P(x)$ на интервале $[A, B]$.

4. Если $Q_1Q_2\geq 0$, то на данном интервале корней нет и возвращаем значение -1.

5. Вычисляем $C=(A+B)/2$.

Вызываем функцию Root вычисления корней с параметрами A, C, $P_+(A)$, $P_-(A)$ и $P_+(C)$, $P_-(C)$.

6. Если вычисленное значение $x>0$, то возвращаем найденный корень x.

7. Вызываем функцию Root вычисления корней с параметрами C, B, $P_+(C)$, $P_-(C)$ и $P_+(B)$, $P_-(B)$. Возвращаем найденный корень x (если корней нет, то -1).

Приведенный рекурсивный алгоритм позволяет найти корень многочлена в указанном диапазоне или убедиться, что внутри него нет действительных корней.

По нахождении корня u переходим к поиску следующего корня, заменив исходный многочлен $P_n(x)$ многочленом меньшей степени $P_{n-1}(x)$, $P_n(x)=(x-u)P_{n-1}(x)$. Многочлен $P_{n-1}(x)$ имеет все оставшиеся корни $P_n(x)$. Повторяя приведенный выше алгоритм, находим все положительные корни.

Для нахождения отрицательных корней заменим исходный многочлен $P_n(x)$ многочленом $(-1)^nP_n(-x)$, корни которого имеют те же значения, но с обратным знаком. Найдя все положительные корни второго многочлена, мы тем самым найдем все действительные корни исходного многочлена.

Поскольку других действительных корней нет, то оставшиеся корни представляют пары комплексно-сопряженных чисел и оставшийся многочлен имеет четную степень.

4. Поиск комплексных корней

Пусть многочлен $P_{2n}(x)$ с действительными коэффициентами не имеет действительных корней, тогда он представим в виде

$$P_{2n}(x) = x^{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1} a_k x^k = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k)(x - \overline{x_k}) =$$

$$\prod_{k=1}^{n}(x^2 + p_{k1}x + p_{k0})\,;\, {p_{k1}}^2 - 4p_{k0} > 0 \qquad (4.1)$$

Рассмотрим представление многочлена степени $2n$ в виде

$$R_n(x) = (x^2 + p_1 x + p_0)\sum_{k=0}^{n-2} q_k x^k = \sum_{k=0}^{n} r_k x^k \qquad (4.2)$$

$$r_m = q_m p_0 + q_{m-1} p_1 + q_{m-2}; m = 2, \dots, n-1$$

Для стандартизации расчетов для всех m введем $q_{-2}=q_{-1}=q_{n-1}=q_n\equiv 0$, $q_{n-2}=1$.

Нахождение корней будем проводить на основе оптимизации аппроксимации исходного многочлена *Pn(x)* многочленом *Rn(x).*

Введем функцию

$$F(p,q) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(q_k p_0 + q_{k-1}p_1 + q_{k-2} - a_k)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} {z_k}^2 \qquad (4.3)$$

При заданных значениях p_0, p_1 коэффициенты q_i находятся из требования минимизации *F(p,q)*.

$$\frac{\partial F}{\partial q_k} = z_{k+2}\frac{\partial z_{k+2}}{\partial q_k} + z_{k+1}\frac{\partial z_{k+1}}{\partial q_k} + z_k\frac{\partial z_k}{\partial q_k} = z_{k+2} + z_{k+1}p_1 + z_k p_0$$

$$= (q_{k+2}p_0 + q_{k+1}p_1 + q_k - a_{k+2}) + (q_{k+1}p_0 + q_k p_1 + q_{k-1} - a_{k+1})p_1$$

$$+(q_k p_0 + q_{k-1}p_1 + q_{k-2} - a_k)p_0$$

$$= q_{k+2}p_0 + q_{k+1}p_1(p_0+1) + q_k({p_0}^2 + {p_1}^2 + 1) + q_{k-1}p_1(p_0+1) + q_{k-2}p_0$$

$$-(a_{k+2} + p_1 a_{k+1} + p_0 a_k) = 0$$

$$q_{k+2}p_0 + q_{k+1}p_1(p_0+1) + q_k({p_0}^2 + {p_1}^2 + 1) + q_{k-1}p_1(p_0+1) + q_{k-2}p_0$$

$$= a_{k+2} + p_1 a_{k+1} + p_0 a_k \qquad (4.4)$$

Или

$$z_{k+2} + z_{k+1}p_1 + z_k p_0 = 0 \qquad (4.5)$$

При заданных значениях q_i коэффициенты p_0, p_1 находятся из требования минимизации *F(p,q)*.

$$\frac{\partial F}{\partial p_0} = \sum_{k=0}^{n-1} z_k\frac{\partial z_k}{\partial p_0} = \sum_{k=0}^{n-1}(q_k p_0 + q_{k-1}p_1 + q_{k-2} - a_k)q_k = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} = \sum_{k=0}^{n-1} z_k\frac{\partial z_k}{\partial p_1} = \sum_{k=0}^{n-1}(q_k p_0 + q_{k-1}p_1 + q_{k-2} - a_k)q_{k-1} = 0$$

$$\begin{cases} p_0\sum_{k=0}^{n-1}{q_k}^2 + p_1\sum_{k=0}^{n-1}q_k q_{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - q_{k-2})q_k \\ p_0\sum_{k=0}^{n-1}q_k q_{k-1} + p_1\sum_{k=0}^{n-1}{q_{k-1}}^2 = \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - q_{k-2})q_{k-1} \end{cases} \qquad (4.6)$$

Или

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n-2} z_k q_k = 0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} z_k q_{k-1} = 0 \end{cases} \qquad (4.7)$$

Для нахождения многочлена $x^2+p_1x+p_0$ можно воспользоваться следующим итеративным алгоритмом.

1. Задаем начальное значение коэффициентов p_0, p_1.

2. На основе (4.5) рассчитываем коэффициенты q_i. Задача сводится к решению системы линейных уравнений (СЛАУ) для 5-диагональной матрицы. Учитывая вид матрицы, задача сводится к ряду подготовительных операций трудности $O(n^2)$ и решению СЛАУ размерности 3·3.

3. Полученный набор коэффициентов q_i используем для получения в соответствии с (4.6) скорректированных значений p_0, p_1.

4 . Оцениваем величину погрешности вычисления в соответствии с (4.3). Если погрешность меньше заданного порога, то заканчиваем работу алгоритма. В противном случае переходим к шагу 2 алгоритма.

В результате получаем многочлена $x_2+p_1x+p_0$ дающий первую пару корней. Коэффициенты qi дают многочлен

$$\sum_{k=0}^{n-2} q_k x^k,$$

который может быть использован приведенным алгоритмом для получения следующей пары корней.

Отметим, что скорость сходимости данного алгоритма невелика. Для ускорения можно воспользоваться обработкой ранее полученных значений.

Пусть на i-ом и i+1-ом шагах получили значения $p_{i,1}$, $p_{i+1,1}$ и $p_{i,0}$, $p_{i+1,0}$ с невязками $F(p,q)$ – Fa, Fb соответственно.

Вычислим значения $p_{c1}=p_{i,1}+2(p_{i+1,1}-p_{i+1,1})$ и $p_{c0}= p_{i+1,0}+2(p_{i+1,0}-p_{i,0})$ и соответствующее ему значение Fc.

Если $F_c<F_b$ проводим замену точек и значений в них $a=b$, $b=c$ и повторяем расчет. Если $F_c<F_b$, то квадратичной интерполяцией находим точку $c*$, принимая ее за субоптимальное значение и возвращаемся в основной алгоритм.

В точке оптимума должны одновременно выполняться (4.5 и 4.6)

В матричном виде совокупность (4.5, 4.6) представима в виде

$$AZ = \begin{pmatrix} 1 & p_1 & p_0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & p_1 & p_0 \\ 0 & 1 & q_{n-3} & \cdots & q_2 & q_1 & q_0 \\ 1 & q_{n-3} & q_{n-4} & & q_1 & q_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{n-1} \\ z_{n-2} \\ z_{n-3} \\ \vdots \\ z_2 \\ z_1 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (4.8)$$

При $|A|\neq 0$ алгоритм сходится к решению задачи.

Кроме того, с точки зрения практической реализации значительно эффективнее выглядит гибридный алгоритм.

Несколько итераций базового алгоритма приводят нас в окрестность корня. Учитывая, что при отсутствии кратных корней $|P'_n(x)|$ гарантированно не обращается в 0, при $P_n(x)=0$ схема с использованием значений производных (метод Ньютона), либо более тонких его модификаций [12]) обеспечивает достаточно быструю сходимость.

Пусть получено приближение $s=x^2+p_1x+p_0$. Его корень будет

$$z_0 = -\frac{p_1}{2} + i\sqrt{p_0 - \frac{p_1^2}{4}}$$

Значение $P_n(z)$ в окрестности z_0 представимо в виде

$$P_n(z) \approx P_n(z_0) + P'_n(z_0)(z - z_0)$$

Это позволяет рассчитать приближение корня z*.

$$z^* = z_0 - \frac{P_n(z)}{P'_n(z_0)}$$

При z_0, близких к z^* алгоритм сходится достаточно быстро. В результате получаем для $s=x^2+p_1x+p_0$

$$p_1 = z^* + \overline{z^*}, p_0 = z^*\overline{z^*}.$$

Полученное выражение используем для получения многочлена $Q_{n-2}(x)$ из $P_n(x)=(x^2+p_1x+p_0)Q_{n-2}(x)$, после чего ищем следующие корни, многочлена, совпадающие с корнями $Q_{n-2}(x)$.

5. Поиск корней многочленов с комплексными коэффициентами

Рассмотрим уравнение (a_0 будем полагать равным 1). Коэффициенты a_k – комплексные числа.

$$P_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = 0 \qquad (5.1)$$

Пусть его корни – x_1, x_2, …, x_n, тогда корни уравнения

$$Q_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \overline{a_k} x^k = 0 \qquad (5.2)$$

будут

$\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}$

Построим многочлен $R_{2n}(x)=P_n(x)Q_n(x)$. Этот многочлен имеет корни

$x_1, \overline{x_1}, x_2, \overline{x_2}, \dots, x_n, \overline{x_n}$

$$R_{2n}(x) = x^{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1} b_k x^k \qquad (5.3)$$

Величины b_k представимы как суммы и произведения комплексно-сопряженных чисел и, следовательно являются действительными числами. Таким образом многочлен $R_{2n}(x)$ является многочленом с действительными коэффициентами.

Соответственно поиск корней многочлена $P_n(x)$ с комплексными коэффициентами сводится к поиску корней многочлена $R_{2n}(x)$ с действительными коэффициентами. Отметим, что все действительные его корни будут кратными, а из полученных комплексных сопряженных корней часть будет посторонней.

Заключение

Последовательность предлагаемых алгоритмов позволяет найти все как действительные, так и комплексные корни многочлена.

Для нахождения корней многочлена степени n с действительными коэффициентами строится алгоритм, включающий следующие основные этапы:

· определение кратных корней,

· выделение диапазона корней;

· нахождение интервалов, гарантированно содержащих корни (за время $O(\ln(R/H))$, где R – оценка общего диапазона корней, а H длина интервала, гарантированно содержащего корень);

· итеративное построение трехчленов, служащих оценкой значений пар комплексно - сопряженных корней (количество итераций не обязательно должно соответствовать требованиям точности решения, достаточно выполнения требования изоляции корней, после чего решение достигается традиционными методами, например методом Ньютона).

Для нахождения корней многочлена степени n с комплексными коэффициентами строится вспомогательный многочлена степени $2n$ с действительными коэффициентами, содержащим все корни исходного многочлена степени n с комплексными коэффициентами, для которого используется приведенный выше алгоритм. Вычислительная сложность алгоритма вполне приемлема для расчетов корней многочленов практически любой, встречающейся в реальных задачах, степени.

Программная реализация предлагаемых алгоритмов выполнена на языке C++ в среде операционной системы Windows. Учитывая вычислительный характер алгоритмов перенос их в иную операционную среду не вызывает каких-либо проблем.

Библиография

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. Москва: Наука, 1968. С. 431.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. Москва: Наука, 1989. С. 432.
3. Стиллвелл Д. Математика и её история. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных

исследований, 2004. С. 530.
4. Тынкевич М. А., Пимонов А. Г. Введение в численный анализ. Кемерово: КузГТУ. 2017. С. 176.
5. Чье Ен Ун, Шеин А.Б. Метод нахождения корней многочленов. I // Информатика и системы управления. 2012. № 4(34). С. 88-96.
6. Чье Ен Ун, Шеин А.Б. Метод нахождения корней многочленов. II // Информатика и системы управления. 2013. №1(35). С. 108-118.
7. Чье Ен Ун, Шеин А.Б. Метод нахождения корней многочленов. III // Информатика и системы управления. 2013. №3 (37). С. 110-122.
8. Кутищев Г.П. Решение алгебраических уравнений произвольной степени: Теория, методы, алгоритмы. URSS. 2015. 232 с.
9. Simon Telen. Polynomial Equations: Theory and Practice. Michal Kočvara; Bernard Mourrain; Cordian Riener. Polynomial Optimization, Moments, and Applications, Springer, pp. 215-240.
10. B. Mourrain and J. P. Pavone. Subdivision methods for solving polynomial equations. Journal of Symbolic Computation, 44(3), 292-306, 2009.
11. Berthomieu, C. Eder, and M. Safey El Din. msolve: A library for solving polynomial systems. In Proceedings of the 2021 on International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, pages 51-58, 2021.
12. Стаценко И. В. Исследование скорости сходимости одного обобщенного ньютоновского метода и классического метода ньютона в процедуре уточнения корней многочлена. // Точная наука. 2020. №78. С. 2-9.

Результаты процедуры рецензирования статьи

В связи с политикой двойного слепого рецензирования личность рецензента не раскрывается.
Со списком рецензентов издательства можно ознакомиться здесь.

Рецензируемая статья посвящена обобщению сведений о численных методах нахождения корней многочленов с действительными и комплексными коэффициентами.
Методология исследования базируется на изложении алгоритмов математических действий при нахождении корней многочленов с действительными и комплексными коэффициентами, рассмотрении определенных трудностей, возникающих в процессе решения задач.
Актуальность работы авторы связывают с тем, что существует множество задач самого разного характера, в которых требуются определение корней многочленов.
Научная новизна рецензируемого исследования состоит обобщении сведений о численных методах нахождения корней многочленов и в предлагаемых алгоритмах, которые позволяют найти все действительные и комплексные корни многочлена. В тоже время, представляется уместным провести сравнение предлагаемых подходов с уже известными и опубликованными ранее результатами исследований других авторов, показать отличия и преимущества авторского видения способов решения рассматриваемых задач.
Структурно в работе выделены следующие разделы: Введение, Удаление кратных корней, Определение диапазона корней, Поиск действительных корней, Поиск комплексных корней, Заключение, Библиография.
Авторами изложены алгоритмы нахождения корней многочлена степени n с действительными коэффициентами, включающие такие этапы как определение кратных корней; выделение диапазона корней; нахождение интервалов, гарантированно содержащих корни; итеративное построение трехчленов, служащих оценкой значений

пар комплексно - сопряженных корней.

Библиографический список включает 8 источников – публикации отечественных и зарубежных авторов по рассматриваемой теме за период с 1968 по 2020 гг. В тексте публикации имеются адресные отсылки к списку литературы, подтверждающие наличие апелляции к оппонентам.

Из недостатков публикации, требующих своего устранения, стоит отметить следующие моменты. Во-первых, актуальность проведения исследования не раскрыта с достаточной ясностью. После первого предложения во введении хотелось бы увидеть примеры, демонстрирующие необходимость практического применения рассматриваемых методов и нерешенные вопросы в применении существующих подходов. Во-вторых, представляется уместным провести сравнение предлагаемых подходов с уже известными и опубликованными ранее результатами исследований других авторов, показать отличия и преимущества авторского видения способов решения рассматриваемых задач. В-третьих, с учетом названия журнала, в котором публикуется статья, уместно было бы осветить вопросы программной реализации рассматриваемых алгоритмов, достижения и проблемы этого аспекта применения численных методов нахождения корней многочленов с действительными и комплексными коэффициентами. В-четвертых, заголовки четвертого раздела и Заключение не выделены полужирным шрифтом; в предпоследнем предложении имеется несогласованное словосочетание.

Рецензируемый материал соответствует направлению журнала «Программные системы и вычислительные методы», отражает результаты проведенного авторского исследования, может вызвать интерес у читателей, но нуждается в доработке в соответствии с высказанным замечанием и последующем рецензировании скорректированного материала.

Результаты процедуры повторного рецензирования статьи

В связи с политикой двойного слепого рецензирования личность рецензента не раскрывается.
Со списком рецензентов издательства можно ознакомиться здесь.

Статья посвящена изучению численных методов для нахождения корней многочленов с действительными и комплексными коэффициентами. Рассматриваются как классические подходы, такие как метод Лобачевского, схема Горнера и метод Ньютона, так и новые итеративные алгоритмы, предложенные авторами. Особое внимание уделяется проблеме нахождения кратных корней и комплексных корней, что делает работу актуальной и востребованной в области прикладной математики и инженерных наук.

Авторами предложены несколько численных методов для нахождения корней многочленов. Основной акцент сделан на итеративных алгоритмах, позволяющих последовательно уточнять приближения корней. Методология включает в себя использование модификаций классических методов, а также предложенные алгоритмы, направленные на повышение точности и эффективности вычислений. Методические подходы подробно объяснены и подкреплены примерами, что позволяет легко следовать изложенной логике.

Нахождение корней многочленов является ключевой задачей в различных областях науки и техники, таких как механика, аэродинамика, проектирование сложных инженерных систем. В условиях, когда аналитические решения уравнений высокой степени часто невозможны, численные методы становятся основным инструментом для исследователей и инженеров. Данная работа актуальна ввиду потребности в высокоточных и эффективных численных алгоритмах, способных справляться с задачами различной сложности.

Научная новизна работы заключается в разработке и предложении новых итеративных методов нахождения корней многочленов, а также в усовершенствовании существующих подходов. Авторы детализируют алгоритмы, позволяющие находить как действительные, так и комплексные корни, учитывая их кратность. Представленные методы демонстрируют высокую точность и эффективность, что подтверждается проведенными вычислительными экспериментами.

Статья написана в ясном и последовательном стиле, что способствует лёгкому восприятию материала. Структура работы логично выстроена: начинается с введения и постановки задачи, далее следуют методологические разделы, описывающие предложенные алгоритмы, и заканчивается заключением, в котором подведены итоги и сделаны выводы. Содержание статьи полностью соответствует заявленной теме и охватывает все ключевые аспекты численного решения многочленов.

В статье сделаны обоснованные выводы о том, что предложенные методы могут быть эффективно использованы для нахождения корней многочленов в различных прикладных задачах. Авторы демонстрируют, что их подходы превосходят классические методы по точности и быстродействию, особенно в сложных случаях, таких как наличие кратных и комплексных корней.

Статья представляет интерес для широкого круга специалистов, работающих в области прикладной математики, численного анализа, вычислительной механики, а также для инженеров, занимающихся проектированием сложных систем. В работе найдут полезную информацию как теоретики, так и практики, что делает её востребованной в научной и инженерной среде.

Для дальнейшего развития данной работы рекомендуется расширить исследование в направлении применения предложенных численных методов к реальным задачам из различных областей науки и техники, таких как аэродинамика, механика и компьютерная графика. Это позволит не только продемонстрировать практическую значимость разработанных алгоритмов, но и выявить возможные ограничения и области для их дальнейшего совершенствования. В частности, полезно было бы провести сравнительное исследование с существующими методами на большем количестве примеров с реальными данными, что позволит более детально оценить эффективность и точность предложенных подходов. Кроме того, стоит рассмотреть возможность адаптации и оптимизации алгоритмов для их реализации на современных параллельных вычислительных платформах, что позволит значительно ускорить процесс нахождения корней многочленов, особенно в задачах с высокой размерностью и сложностью.

Рекомендуется принять статью к публикации без значительных доработок. Представленные методы и результаты являются ценным вкладом в область численного анализа и будут полезны для дальнейших исследований и практических приложений.