МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

 Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-7-17

УДК 517.95

Дата: поступления статьи: 15.09.2022
после рецензирования: 17.10.2022
принятия статьи: 05.12.2022

А.В. Богатов
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: andrebogato@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5797-1930
Л.С. Пулькина
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: louise@samdiff.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7947-6121

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

АННОТАЦИЯ

Исследуется разрешимость коэффициентной обратной задачи с нелокальными краевыми условиями и интегральным условием переопределения для одномерного параболического уравнения. Обоснование существования единственного решения базируется на полученных в работе априорных оценках и результатах о разрешимости прямой нелокальной задачи для изучаемого уравнения.

Ключевые слова: обратная задача; параболическая задача с неизвестным коэффициентом; интегральное условие переопределения; нелокальные краевые условия.

Цитирование. Богатов А.В., Пулькина Л.С. Разрешимость обратной коэффициентной задачи с интегральным переопределением для одномерного параболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2022. Т. 28, № 3–4. С. 7–17. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-7-17.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Андрей Владимирович Богатов — аспирант кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Людмила Степановна Пулькина — доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Статья посвящена исследованию разрешимости задачи, которую будем называть **задача K**, состоящей в нахождении пары функций $(U(x,t), p(t))$ таких, что в области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$

$$U_t - (a(x,t)U_x)_x + p(t)U + c(x,t)U = f(x,t), \tag{1}$$

выполняются начальное и краевые условия

$$U(x,0)=\varphi(x), \quad x\in[0,l], \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &a(0,t)U_x(0,t)+\alpha_1(t)U(0,t)+\beta_1(t)U(l,t)+\int\limits_0^l H_1(x,t)U(x,t)dx=0,\\ &a(l,t)U_x(l,t)+\alpha_2(t)U(0,t)+\beta_2(t)U(l,t)+\int\limits_0^l H_2(x,t)U(x,t)dx=0, \end{aligned} \tag{3}$$

а также условие переопределения

$$\int_0^l U(x,t)dx=E(t), \quad t\in[0,T]. \tag{4}$$

Функции $a(x,t), c(x,t), f(x,t), H_i(x,t), i = 1,2$, заданы в Q_T, причем $a(x,t) > 0$ всюду в $\bar{Q}_T$, $E(t), \alpha_i(t), \beta_i(t), i = 1,2$, заданы в $[0,T]$, и $E(t)\neq 0$ для всех $t\in[0,T]$, тогда как $p(t)$ подлежит определению.

Интерес к обратным задачам с неизвестным коэффициентом, зависящим лишь от переменной времени, связан с тем фактором, что такие ситуации возникают в различных приложениях, например, в задачах управления [1–3], в задачах со свободной границей [4].

Особенностью задачи $(1)--(4)$ являются нелокальные краевые условия.

Условия вида (3) возникают при изучении различных процессов тепломассопереноса, термоупругости, а также тесно связаны с задачами управления. Примеры, иллюстрирующие эти утверждения, можно найти в [3], а также в статьях, ссылки на которые содержатся в списке литературы отмеченной статьи.

Заметим, что нелокальные краевые условия (3) являются обобщением краевых условий статьи [3], которые, в свою очередь, являются обобщением условий (S) Стеклова [5], возникающих при исследовании процесса остывания твердого тела:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}u_x(0,t)+\alpha_{12}u_x(l,t)+\beta_{11}u(0,t)+\beta_{12}u(l,t)=g_1(t),\\ \alpha_{21}u_x(0,t)+\alpha_{22}u_x(l,t)+\beta_{21}u(0,t)+\beta_{22}u(l,t)=g_2(t), \end{aligned}$$

где α_{ij}, β_{ij} — числа. Эта статья, по-видиммому, является первой статьей, посвященной исследованию разрешимости задачи для уравнения теплопроводности с условиями (S), которые гораздо позднее стали называть нелокальными условиями.

Таким образом, условия (3) изучаемой задачи можно интерпретировать как возмущенные (в силу присутствия интегральных слагаемых) обобщения условий Стеклова.

Условие переопределения (4) имеет интегральное представление, и его естественно понимать как результат действия некоего прибора [6], дающего информацию о среднем значении искомого решения. Обратные задачи с интегральным условием переопределения рассматривались в работах Камынина [7–9], но в них задан интеграл по переменной времени t. В нашей работе условие переопределения представляет собой интеграл по пространственной переменной.

Нелинейные обратные задачи с неизвестными коэффициентами, зависящими от переменной времени, изучались различными методами многими авторами. Отметим как наиболее близкие по виду условия переопределения, кроме упомянутых уже [1–9] еще и работы [10; 11].

1. Разрешимость задачи K

Начнем исследование задачи K с выполнения преобразований

$$r(t)=\exp\{-\int_0^t p(\tau)d\tau\}, \quad u(x,t)=U(x,t)r(t). \tag{5}$$

Тогда, если $(U(x,t),p(t))$ — решение задачи K, то введенные в (5) новые функции удовлетворяют равенствам

$$u_t-(a(x,t)u_x)_x+c(x,t)u=r(t)f(x,t), \tag{6}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad x\in[0,l], \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &a(0,t)u_x(0,t)+\alpha_1(t)u(0,t)+\beta_1(t)u(l,t)+\int\limits_0^l H_1(x,t)u(x,t)dx=0,\\ &a(l,t)u_x(l,t)+\alpha_2(t)u(0,t)+\beta_2(t)u(l,t)+\int\limits_0^l H_2(x,t)u(x,t)dx=0, \end{aligned} \tag{8}$$

$$r(t)=[E(t)]^{-1}\int_0^l u(x,t)dx, \quad t\in[0,T]. \tag{9}$$

Из (6)–(9) видно, что преобразования (5) сводят коэффициентную и, стало быть, нелинейную, задачу K к линейной обратной задаче определения источника, другими словами, правой части уравнения (6). Назовем ее **задача R**. Если окажется, что существует решение (u, r) задачи R, то решение задачи K может быть получено с помощью обратных к (5) преобразований

$$U(x,t) = \frac{u(x,t)}{r(t)}, \quad p(t) = -\frac{r'(t)}{r(t)}. \tag{10}$$

Уточним понятие решений задач. Начнем с задачи K.

Определение 1. Решением задачи K будем называть пару функций (U, p) таких, что $U \in W_2^{1,1}(Q_T)$, $p \in L_2(0,T)$, $U(x,0) = \varphi(x)$, для всех $v \in \hat{W}_2^1(Q_T)$ справедливо тождество

$$\int_0^T \int_0^l [U_t v + a(x,t)U_x v_x + p(t)U + c(x,t)U]dxdt+$$
$$+\int_0^T v(l,t)[\alpha_2 U(0,t) + \beta_2 U(l,t) + \int_0^l H_2(x,t)U(x,t)dx]dt-$$
$$-\int_0^T v(0,t)[\alpha_1 U(0,t) + \beta_1 U(l,t) + \int_0^l H_1(x,t)U(x,t)dx]dt =$$
$$= \int_0^T \int_0^l f(x,t)v(x,t)dxdt \tag{11}$$

и выполняется равенство

$$\int_0^l U(x,t)dx = E(t).$$

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

$$a) \quad a, a_t, c \in C(\bar{Q}_T), \ \ \alpha_i, \beta_i \in C^1[0,T], \ \ \varphi \in L_2(0,l),$$
$$b) \ \ f, H_i, H_{it} \in C(\bar{Q}_T), \ \ E \in C[0,T], \ \ E(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0,T],$$
$$c) \quad \alpha_2(t) + \beta_1(t) = 0,$$
$$d) \ \ \alpha_1(t)\xi^2 + 2\beta_1(t)\xi\eta - \beta_2(t)\eta^2 \leqslant 0, \quad t \in [0,T].$$

Тогда существует единственное решение $(U(x,t), p(t))$ задачи K.

Доказательство Теоремы 1 базируется на факте разрешимости задачи R и будет предъявлено после того, как мы докажем существование единственного решения задачи R, принадлежащего нужному нам пространству, что мы уточним ниже. Поэтому перейдем к исследованию задачи R.

1.1. Разрешимость задачи R

Определение 2.

Решением задачи R будем называть пару функций (u, r) таких, что $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$, $r \in L_2(0,T)$, для всех $v \in \hat{W}_2^1(Q_T)$ справедливо тождество

$$\int_0^T \int_0^l [-uv_t + a(x,t)u_x v_x + c(x,t)u]dxdt + \int_0^l \varphi(x)v(x,0)dx+$$
$$+\int_0^T v(l,t)[\alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(l,t) + \int_0^l H_2(x,t)u(x,t)dx]dt-$$
$$-\int_0^T v(0,t)[\alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(l,t) + \int_0^l H_1(x,t)u(x,t)dx]dt =$$
$$= \int_0^T \int_0^l f(x,t)r(t)v(x,t)dxdt \tag{12}$$

и выполняется равенство

$$\int_0^l u(x,t)dx = E(t)r(t). \tag{13}$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия Теоремы 1. Тогда существует единственное решение задачи R.
Доказательство.

Не ограничивая общности, положим $\varphi(x) = 0$. Будем искать приближенные решения задачи R из соотношений:

$$\int_0^T \int_0^l (-u_n v_t + a(x,t)u_{nx}v_x + c(x,t)u_n v)dxdt-$$

$$-\int_0^T v(0,t)[\alpha_1(t)u_n(0,t)+\beta_1(t)u_n(l,t)+\int\limits_0^l H_1(x,t)u_n(x,t)dx]dt+$$

$$+\int_0^T v(l,t)[\alpha_2(t)u_n(0,t)+\beta_2(t)u_n(l,t)+\int\limits_0^l H_2(x,t)u_n(x,t)dx]dt=$$

$$=\int_0^T\int_0^l vf(x,t)r_n(t)dxdt, \tag{14}$$

$$r_n(t)=\frac{1}{E(t)}\int_0^l u_{n-1}(x,t)dx, \tag{15}$$

выбрав

$$u_0=\frac{E(t)}{l}.$$

В силу выбора нулевого приближения u_0 из (13 найдем $r_1(t)=1$. Тогда для $n=1$ (14) представляет собой тождество, определяющее обобщенное решение нелокальной прямой **задачи N** в Q_T, состоящей в нахождении решения уравнения

$$u_t-(a(x,t)u_x)_x+c(x,t)u=f(x,t),$$

удовлетворяющего начальным данным

$$u(x,0)=0,$$

и нелокальным условиям

$$a(0,t)u_x(0,t)+\alpha_1(t)u(0,t)+\beta_1(t)u(l,t)+\int\limits_0^l H_1(x,t)u(x,t)dx=0,$$

$$a(l,t)u_x(l,t)+\alpha_2(t)u(0,t)+\beta_2(t)u(l,t)+\int\limits_0^l H_2(x,t)u(x,t)dx=0.$$

Разрешимость в $W_2^{1,0}(Q_T)$ этой задачи доказана в [12], поэтому существует единственная функция $u_1(x,t)$, удовлетворяющая тождеству (12).

Тогда мы можем найти $r_2(t)$ из (15), причем очевидно, что $r_2\in L_2(0,T)$. Действительно,

$$r_2(t)=\frac{1}{E(t)}\int_0^l u_1(x,t)dx,$$

откуда с помощью неравенства Коши — Буняковского получим

$$r_2^2(t)\leqslant\frac{l}{E^2(t)}\int_0^l u_1^2(x,t)dx.$$

Интегрируя полученное неравенство по $(0,T)$ и учитывая, что $E(t)\neq 0$ всюду в $[0,T]$ и там же непрерывна, а следовательно, найдется положительное число E_0 такое, что $[E^2(t)]^{-1}<E_0$, приходим к неравенству

$$\int_0^T r_2^2dt\leqslant E_0\int_0^T\int_0^l u_1^2(x,t)dxdt,$$

из которого в силу принадлежности $u_1\in W_2^{1,0}(Q_T)$ следует ограниченность интеграла $\int_0^T r_2^2(t)dt$.

На следующем шаге заметим, что $fr_2\in L_2(0,T)$. Действительно, так как $f\in C(\bar{Q_T})$, то существует $k>0$ такое, что $\max\limits_{Q_T}|f|\leqslant\sqrt{k}$, тогда

$$\int_0^T f^2(x,t)r_2^2(t)dt\leqslant k\int_0^T r_2^2(t)dt,$$

и в силу доказанной выше принадлежности $r_2(t)$ пространству $L_2(0,T)$ убеждаемся в справедливости утверждения.

Продолжив этот процесс, мы построим последовательности $\{u_n(x,t)\}$ и $\{r_n(t)\}$.

Покажем теперь, что эти последовательности сходятся. Для этого воспользуемся результатами статьи [12], немного модифицировав в ней оценку.

Приведем кратко вывод априорной оценки решения задачи N в нужной нам форме и представим его в виде Леммы.

Лемма 1. Решение задачи N, принадлежащее пространству $W_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяет неравенству

$$||u||_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leqslant \sqrt{\varepsilon} M ||f||_{L_2(Q_T)},$$

где число $M > 0$ и будет уточнено при доказательстве.

Доказательство. В [12] доказано существование функции $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$, которая является решением задачи N. Существенную роль в доказательстве играет полученная априорная оценка. Оставляя неизменными основные этапы вывода этой оценки, внесем в нее некоторые коррективы. Для наглядности приведем здесь коротко вывод равенства, из которого получена оценка.

Приближенное решение задачи N ищется в виде

$$u^m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} c_{km}(t) w_k(x),$$

где $w_k(x)$ — фундаментальная система в $W_2^{1,0}$ из соотношений

$$\int_0^l [u_t^m w_i(x) + a(x,t) u_x^m w_i'(x) + c(x,t) u^m w_i(x)] dx -$$
$$-w_i(0)[\alpha_1 u^m(0,t) + \beta_1 u^m(l,t) + \int_0^l H_1(x,t) u^m(x,t) dx] +$$
$$+w_i(l)[\alpha_2 u^m(0,t) + \beta_2 u^m(l,t) + \int_0^l H_2(x,t) u^m(x,t) dx] =$$
$$= \int_0^l f(x,t) w_i(x) dx. \tag{16}$$

В результате преобразований, которые подробно проделаны в [12], и здесь их опустим, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^l (u^m(x,\tau)^2 dx + \int_0^\tau \int_0^l a(x,t)(u_x^m)^2 dxdt = -\int_0^\tau \int_0^l c(x,t)(u^m)^2 dxdt +$$
$$+\int_0^\tau \alpha_1(t)(u^m(0,t))^2 dt - \int_0^\tau \beta_2(t)(u^m(l,t))^2 dt + 2\int_0^\tau \beta_1(t) u^m(0,t) u^m(0,t) dt +$$
$$+\int_0^\tau u^m(0,t) \int_0^l H_1(x,t) u^m(x,t) dxdt - \int_0^\tau u^m(l,t) \int_0^l H_2(x,t) u^m(x,t) dxdt +$$
$$+\int_0^\tau \int_0^l f(x,t)^m(x,t) dxdt. \tag{17}$$

В силу условий теоремы 1 существуют положительные числа a_0, b_0, c_0, h_0 такие, что

$$a(x,t) \geqslant a_0, \max_{\bar{Q}_T} |c| \leqslant c_0, \max_{[0,T]} |\alpha_i, \beta_i| \leqslant b_0, \max_i \max_{[0,T]} \int_0^l H_i^2 dx \leqslant h_0.$$

Оценим правую часть равенства (17), применив неравенства Коши, Коши — Буняковского, учитывая условие (ii) Теоремы 1, а также используя неравенства, выведенные в [12]

$$\int_0^\tau (u^m(0,t))^2 \leqslant \frac{a_0}{2} \int_0^\tau \int_0^l (u_x^m(x,t))^2 dxdt + \frac{2(2l+a_0)}{a_0 l} \int_0^\tau \int_0^l (u^m)^2 dxdt,$$

$$\int_0^\tau (u^m(l,t)^2) \leqslant \frac{a_0}{2} \int_0^\tau \int_0^l (u_x^m)^2 dxdt + \frac{2(2l+a_0)}{a_0 l} \int_0^\tau \int_0^l (u^m)^2 dxdt,$$

получим

$$\int_0^l (u^m(x,\tau)^2 dx + a_0 \int_0^\tau \int_0^l (u_x^m(x,t))^2 dxdt \leqslant$$
$$\leqslant 2c_1 \int_0^\tau \int_0^l (u_x^m(x,t))^2 dxdt + 2|\int_0^\tau \int_0^l f(x,t) u^m(x,t) dxdt|, \tag{18}$$

где

$$c_1 = c_0 + h_0 + \frac{2(2l+a_0)}{a_0 l}.$$

Последнее слагаемое (18) оценим с помощью неравенства "Коши с ε"и получим

$$\int_0^l (u^m(x,\tau)^2 dx + a_0 \int_0^\tau \int_0^l (u_x^m(x,t))^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant c_2\int_0^\tau\int_0^l(u^m(x,t))^2dxdt+\varepsilon\int_0^\tau\int_0^l f^2(x,t)dxdt, \tag{19}$$

где

$$c_2=2c_1+\frac{1}{\varepsilon}.$$

Усилим неравенство (19), прибавив к его правой части слагаемое $c_2a_0\int_0^\tau\int_0^l(\tau-t)(u_x^m(x,t))^2dxdt$, что приводит к неравенству

$$\int_0^l(u^m(x,\tau)^2dx+a_0\int_0^\tau\int_0^l(u_x^m)^2dxdt\leqslant$$

$$\leqslant c_2[\int_0^\tau\int_0^l(u^m)^2dxdt+\;+a_0\int_0^\tau\int_0^l(\tau-t)(u_x^m)^2dxdt]+\varepsilon\int_0^\tau\int_0^l f^2dxdt. \tag{20}$$

Заметим, что справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^\tau\int_0^l(\tau-t)(u_x^m(x,t))^2dxdt=\int_0^\tau\int_0^l(u_x^m(x,t))^2dxdt,$$

и поэтому к (20) можно применить лемму Гроноулла [13], что приводит к неравенству:

$$\int_0^l(u^m(x,\tau)^2dx+a_0\int_0^\tau\int_0^l(u_x^m)^2dxdt\leqslant\varepsilon e^{c_2\tau}\int_0^\tau\int_0^l f^2dxdt, \tag{21}$$

которое выполняется для всех m и для всех $\tau\in[0,T]$, при этом правая его часть от m не зависит. Тогда для решения задачи N, которое есть слабый предел последовательности $\{u^m(x,t)\}$, справедливо неравенство

$$\int_0^l(u(x,\tau)^2dx+a_0\int_0^\tau\int_0^l u_x^2(x,t)dxdt\leqslant\varepsilon e^{c_2\tau}\int_0^\tau\int_0^l f^2(x,t)dxdt. \tag{22}$$

Из последнего неравенства имеем:

$$\int_0^l u^2dx\leqslant\varepsilon e^{c_2\tau}||f||^2_{L_2(Q_T)},$$

$$a_0\int_0^l\int_0^\tau u_x^2dxdt\leqslant\varepsilon e^{c_2\tau}||f||^2_{L_2(Q_T)}.$$

Интегрируя первое из них по $(0,T)$, извлекая квадратный корень, а затем складывая, получим

$$||u||_{W_2^{1,0}(Q_T)}\leqslant\sqrt{\varepsilon M}||f||_{L_2(Q_T)}, \tag{23}$$

где

$$M=\max\{\frac{e^{c_2T}}{a_0},\frac{e^{c_2T}-1}{c_2}\}.$$

Вернемся к обратной задаче. Для каждого n функция $u_n(x,t)$ является решением прямой задачи с правой частью $f(x,t)r_n(t)$, но тогда справедливо неравенство (23) и, учитывая, что $\max\limits_{\bar{Q}_T}|f(x,t)|\leqslant\sqrt{k}k$, получим

$$||u||_{W_2^{1,0}(Q_T)}\leqslant\sqrt{kM}\sqrt{\varepsilon}||r_n||_{L_2(0,T)}. \tag{24}$$

Из равенства (23) следует неравенство

$$r_n^2(t)=\frac{1}{E^2(t)}(\int_0^l u_{n-1}(x,t)dx)^2\leqslant E_0l\int_0^l u_{n-1}^2dx,$$

интегрируя которое получим

$$\int_0^T r_n^2(t)dt\leqslant E_0l\int_0^T\int_0^l u_{n-1}^2dxdt.$$

откуда следует неравенство

$$||r_n||_{L_2(Q_T)}\leqslant\sqrt{E_0l}||u_{n-1}||_{W_2^{1,0}(Q_T)}. \tag{25}$$

Из (24) и (25) следует:

$$||u_n||_{W_2^{1,0}(Q_T)}\leqslant\sqrt{kM}\sqrt{\varepsilon}\sqrt{E_0l}||u_{n-1}||_{W_2^{1,0}(Q_T)},$$

$$||r_n||_{L_2(0,T)}\leqslant\sqrt{kM}\sqrt{\varepsilon}\sqrt{E_0l}||r_{n-1}||_{L_2((0,T)}.$$

Обозначим

$$s=\sqrt{MkE_0l}.$$

Тогда
$$||u_n||_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leqslant s\sqrt{\varepsilon}||u_{n-1}||_{W_2^{1,0}(Q_T)}. \tag{26}$$

$$||r_n||_{L_2((0,T))} \leqslant s\sqrt{\varepsilon}||r_{n-1}||_{L_2(0,T)}. \tag{27}$$

Выберем ε так, чтобы $s\sqrt{\varepsilon} < 1$. Тогда (26) и (27) образуют бесконечно убывающие геометрические прогрессии, а значит, сходятся при $n \to \infty$. Из этого следует, что обе последовательности $\{u_n\}$ и $\{r_n\}$ сходятся по норме в соответствующих пространствах, и предел каждой последовательности единственный. Но из сильной сходимости (по норме) следует слабая сходимость. Переходя к пределу в (14) и (15), получаем, что предельные функции $u(x,t)$ и $r(t)$ образуют решение задачи R.

Покажем теперь, что некоторые дополнительные условия гарантируют принадлежность $u \in W_2^{1,1}Q_T, \quad r \in W_2^1(0,T)$.

Лемма 2. Условия теоремы 1 гарантируют принадлежность решения задачи R пространству $W_2^{1,1}(Q_T)$.

Доказательство. Так как каждое приближенное решение $u_n(x,t)$ задачи R определяется через решение прямой задачи N, то достаточно показать, что решение прямой задачи принадлежит $W_2^{1,1}(Q_T)$. Умножим каждое из равенств (16) на $c'_{im}(t)$, просуммируем по i от 1 до m, а затем проинтегрируем по $t \in (0,\tau)$. Получим

$$\int_0^\tau\int_0^l [(u_t^m)^2 + au_x^m u_{xt}^m + cu^m u_t^m]dxdt-$$
$$-\int_0^\tau u_t^m(0,t)[\alpha_1(t)u_t^m(0,t) + \beta_1(t)u_t^m(l,t) + \int_0^l H_1(x,t)u^m(x,t)dx]dt+$$
$$+\int_0^\tau u_t^m(l,t)[\alpha_2(t)u^m(0,t) + \beta_2(t)u^m(l,t+)\int_0^l H_2(x,t)u^m(x,t)dx]dt =$$
$$= \int_0^\tau\int_0^l f(x,t)u_t^m(x,t)dxdt. \tag{28}$$

Преобразуем (28), интегрируя некоторые из слагаемых.

1) $\displaystyle\int_0^\tau\int_0^l au_x^m u_{xt}^m dxdt = -\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l a_t(u_x^m)^2dxdt + \frac{1}{2}\int_0^l a(u_x^m(x,\tau)^2dx;$

2) $\displaystyle-\int_0^\tau \alpha_1(t)u_t^m(0,t)u^m(0,t)dt = \frac{1}{2}\int_0^\tau \alpha'(t)(u^m(0,t))^2dt - \frac{1}{2}\alpha_1(\tau)(u^m(0,\tau))^2;$

3) $\displaystyle\int_0^\tau \alpha_2(t)u^m(0,t)u_t^m(l,t)dt = -\int_0^\tau \alpha_2(t)u_t^m(0,t)u^m(l,t)dt -$
$$-\int_0^\tau \alpha_2' u^m(0,t)u^m(l,t)dt + \alpha_2(\tau)u^m(0,\tau)u^m(l,\tau);$$

4) $\displaystyle\int_0^\tau \beta_2(t)u_t^m(l,t)u^m(l,t)dt = -\frac{1}{2}\int_0^\tau \beta_2'(t)(u^m(l,t))^2dt + \frac{1}{2}\beta_2(\tau)(u^m(l,\tau))^2;$

5) $\displaystyle-\int_0^\tau u_t^m(0,t)\int_0^l H_1(x,t)u^m(x,t)dxdt = \int_0^\tau u^m(0,t)\int_0^l H_1(x,t)u_t^m(x,t)dxdt+$
$$+\int_0^\tau u^m(0,t)\int_0^l H_{1t}(x,t)u^m(x,t)dxdt - u^m(0,\tau)\int_0^l H_1(x,\tau)u^m(x,\tau)dx;$$

6) $\displaystyle-\int_0^\tau u_t^m(l,t)\int_0^l H_2(x,t)u^m(x,t)dxdt = \int_0^\tau u^m(l,t)\int_0^l H_2(x,t)u_t^m(x,t)dxdt+$
$$+\int_0^\tau u^m(l,t)\int_0^l H_{2t}(x,t)u^m(x,t)dxdt - u^m(l,\tau)\int_0^l H_2(x,\tau)u^m(x,\tau)dx.$$

Подставим полученные выражения в (28), учтя условие $\alpha_2(t) + \beta_1(t) = 0$.

$$\int_0^\tau\int_0^l [(u_t^m)^2 + \frac{1}{2}\int_0^l a(u_x^m(x,\tau)^2dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l a_t(u_x^m)^2dxdt - \int_0^\tau\int_0^l cu^m u_t^m dxdt-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^\tau \alpha_1'(t)(u^m(0,t))^2dt + \frac{1}{2}\int_0^\tau \beta_2'(t)(u^m(l,t))^2dt + \int_0^{tau} \alpha_2'(t)u^m(0,t)u^m(l,t)dt+$$

$$+\frac{1}{2}\alpha_1(\tau)(u^m(0,\tau))^2-\alpha_2(\tau)u^m(0,\tau)u^m(l,\tau)-\frac{1}{2}\beta_2(\tau)(u^m(l,\tau))^2-$$
$$-\int_0^\tau u^m(0,t)\int_0^l H_1(x,t)u_t^m(x,t)dxdt-\int_0^\tau u^m(0,t)\int_0^l H_{1t}(x,t)u^m(x,t)dxdt+$$
$$+u^m(0,\tau)\int_0^l H_1(x,\tau)u^m(x,\tau)dx+\int_0^\tau u^m(l,t)\int_0^l H_2(x,t)u_t^m(x,t)dxdt-$$
$$-\int_0^\tau u^m(l,t)\int_0^l H_{2t}(x,t)u^m(x,t)dxdt+u^m(l,\tau)\int_0^l H_2(x,\tau)u^m(x,\tau)dx+$$
$$+\int_0^\tau\int_0^l f(x,t)u_t^m(x,t)dxdt. \tag{29}$$

Оценим правую часть равенства (29), учитывая условие теоремы $\alpha_1(t)\xi^2-2\alpha_2(t)\xi\eta-\beta_2(t)\eta^2\leqslant 0$ и применяя неравенства Коши, Коши с ε, Коши — Буняковского:

$$\Big|\int_0^\tau\int_0^l cu^m u_t^m dxdt\Big|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\int_0^\tau\int_0^l(u_t^m)^2+\frac{c_0^2}{2\varepsilon}\int_0^\tau\int_0^l(u^m)^2dxdt;$$
$$\Big|\int_0^\tau u^m(0,t)\int_0^l H_1u_t^m dxdt\Big|\leqslant\frac{h_0}{2}\varepsilon\int_0^\tau\int_0^l(u_t^m)^2dxdt+\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^\tau(u^m(0,t))^2dt;$$
$$\Big|\int_0^\tau u^m(l,t)\int_0^l H_2u_t^m dxdt\Big|\leqslant\frac{h_0}{2}\varepsilon\int_0^\tau\int_0^l(u_t^m)^2dxdt+\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^\tau(u^m(l,t))^2dt;$$
$$\Big|\int_0^\tau\int_0^l f(x,t)u_t^m(x,t)dxdt\Big|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\int_0^\tau\int_0^l(u_t^m)^2dxdt+\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^\tau\int_0^l f^2(x,t)dxdt.$$

Слагаемые, содержащие следы решения на $x=0$ и на $x=l$, оценим с помощью неравенств

$$u^2(\xi_i,t)\leqslant 2l\int_0^l u_x^2dx+\frac{2}{l}\int_0^l u^2dx,\quad \xi_0=0,\ \xi_1=l$$

и получим

$$\int_0^\tau(u^m(0,t))^2dt\leqslant 2l\int_0^\tau\int_0^l(u_x^m(x,t))^2dxdt+\frac{2}{l}\int_0^\tau\int_0^l(u^m(x,t))^2dxdt,$$
$$\int_0^\tau(u^m(l,t))^2dt\leqslant 2l\int_0^\tau\int_0^l(u_x^m(x,t))^2dxdt+\frac{2}{l}\int_0^\tau\int_0^l(u^m(x,t))^2dxdt.$$

Выберем ε так, чтобы $\nu=1-(h_0+\frac{3}{2})\varepsilon>0$. Теперь из (29) следует неравенство

$$\nu\int_0^\tau\int_0^l(u_t^m)^2dxdt+\frac{1}{2}\int_0^l a(u_x^m(x,\tau)^2dx\leqslant$$
$$\leqslant\mu\int_0^\tau\int_0^l[(u^m(x,t))^2+(u_x^m(x,t))^2]dxdt+\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^\tau\int_0^l f^2(x,t)dxdt, \tag{30}$$

где $\mu=\max\{\frac{l+4}{l\varepsilon},\max\limits_{\bar Q_T}|a_t|\}$. Первое слагаемое правой части (30) ограничено в силу (23), а второе — в силу непрерывности функции $f(x,t)$ в $\bar Q_T$, поэтому из неравенства (30) следует существование $u_t^m\in L_2(Q_T)$.

Оценка (30) вместе с оценкой (23) позволяет выполнить предельный переход при $m\to\infty$ и заключить, что искомое решение задачи N действительно имеет производную $u_t\in L_2(Q_T)$.

Так как кажлое очередное приближение к решению задачи R, которое ищется из соотношений (14), находится как решение задачи N, то существует первая производная по t и у решения задачи R.

Лемма 2 доказана.

Далее, из неравенств (25) и (27), рассуждая так же, как и выше, убеждаемся, что существует $r'\in$ $\in L_2(0,T)$

Доказательство Теоремы 1

Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что для $U(x,t)=\frac{u(x,t)}{r(t)}$, $p(t)=-\frac{r'(t)}{r(t)}$ выполняются все пункты определения 1.

В (12) возьмем $v(x,t)=\Phi(t)V(x)$, где $V(x)-$ произвольный элемент из $W_2^1(0,l)$, $\Phi(t)-$ произвольный элемент из $L_2(0,T)$, $\Phi(T)=0$. Тогда (12) в силу леммы 2 может быть записано следующим образом:

$$\int_0^T\Phi(t)\int_0^l[u_tV(x)+a(x,t)u_xV'(x)+c(x,t)uV(x)]dxdt+$$

$$+\int_0^T \Phi(t)V(l)[\alpha_2 u(0,t)+\beta_2 u(l,t)+\int_0^l H_2(x,t)u(x,t)dx]dt-$$
$$-\int_0^T \Phi(t)V(0)[\alpha_1 u(0,t)+\beta_1 u(l,t)+\int_0^l H_1(x,t)u(x,t)dx]dt=$$
$$=\int_0^T \Phi(t)r(t)\int_0^l f(x,t)V(x)dxdt. \tag{31}$$

Так как $\Phi(t)$ выбрана достаточно произвольно, то из (31) следует, что для почти всех $t \in [0,T]$ выполняется тождество

$$\int_0^l [u_t V(x)+a(x,t)u_x V'(x)+c(x,t)uV(x)]dx+$$
$$+V(l)[\alpha_2 u(0,t)+\beta_2 u(l,t)+\int_0^l H_2(x,t)u(x,t)dx]-$$
$$-V(0)[\alpha_1 u(0,t)+\beta_1 u(l,t)+\int_0^l H_1(x,t)u(x,t)dx]=$$
$$=r(t)\int_0^l f(x,t)V(x)dxdt. \tag{32}$$

Подставим в (32) $u(x,t)=U(x,t)r(t)$ и учтем, что $(U(x,t)r(t))_t = U_t(x,t)r(t)-U(x,t)r(t)p(t)$ в силу (10). Заметим, что $r(t)\neq 0 \quad \forall t\in[0,T]$. Поэтому сократив последнее равенство на $r(t)$, умножив на $\Phi(t)$ и проинтегрировав по $t\in[0,T]$, получим (11). Из (13) после подстановки в него $u(x,t)=U(x,t)r(t)$ следует и выполнение второго равенства определения 1 решения задачи K.

Теорема 1 доказана.

Выводы

Таким образом, в работе исследована разрешимость коэффициентной обратной задачи с нелокальными краевыми условиями и интегральным условием переопределения для одномерного параболического уравнения. Были получены априорные оценки. С помощью полученных оценок и результатов о разрешимости прямой нелокальной задачи для изучаемого уравнения обосновано существование единственного решения поставленной задачи.

Литература

[1] Прилепко А.И., Орловский Д.Г. Об определении параметра эволюционного уравнения и обратных задач математической физики. II // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21, № 4. С. 694–701. URL: https://www.mathnet.ru/rus/de5501.

[2] Cannon J.R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations // Inverse Problems. 1988. Vol. 4. Number 1. P. 35–45. DOI: http://doi.org/10.1088/0266-5611/4/1/006.

[3] Cannon J.R., Lin Y. Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation // J. Austral. Math. Soc. Ser. 1991. B 33. P. 149–163. DOI: DOI: http://doi.org/10.1017/S0334270000006962.

[4] Иванчов Н.И. Некоторые обратные задачи для уравнения теплопроводности с нелокальными краевыми условиями // Украинский математический журнал. 1993. Т. 45, № 8. С. 1066–1071. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/154453.

[5] Стеклов В.А. Задача об охлаждении неоднородного твердого тела // Сообщения Харьковского математического общества. Сер. 2. 1897. Т. 5. С. 136–181. URL: https://www.mathnet.ru/rus/khmo222; http://dspace.univer.kharkov.ua/handle/123456789/13963.

[6] Денисов А.М Введение в теорию обратных задач. Москва: Изд-во Московского университета. 1994. 208 с. URL: http://tka4.org/materials/study/7%20sem/From%20Marcus/[7sem]/Obratnye%20Zadachi%20%5BBaev%20A.V.%5D/Book%20%5BDenisov%20A.M.%20Good%20Scan%5D%20-%20Введение%20в%20теорию%20обратных%20задач.pdf.

[7] Камынин В.Л. Обратная задача одновременного определения двух зависящих от пространственной переменной младших коэффициентов в параболическом уравнении // Матем. заметки. 2019. Т. 106, № 2. С. 248–261.DOI: http://doi.org/10.4213/mzm12164.

[8] Камынин В.Л. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального переопределения // Матем. заметки. 2013. Т. 94, № 2. С. 207–217. DOI: http://doi.org/10.4213/mzm9370.

[9] Камынин В.Л. Об обратной задаче одновременного определения двух зависящих от времени младших коэффициентов в недивергентном параболическом уравнении на плоскости // Матем. заметки. 2020. Т. 107, № 1. С. 74–86. DOI: http://doi.org/10.4213/mzm12406.

[10] Кожанов А.И. О разрешимости обратной задачи нахождения коэффициента теплопроводности // Сибирский математический журнал. 2005. Т. 46, № 5. С. 1053–1071. URL: https://www.mathnet.ru/rus/smj1021.

[11] Кожанов А.И. Обратные задачи восстановления правой части специального вида в параболическом уравнении // Математические заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 4. С. 31–45. URL: https://www.mathnet.ru/rus/svfu37; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29959200. EDN: https://www.elibrary.ru/zfpnlf.

[12] Бейлин А.Б., Богатов А.В., Пулькина Л.С. Задача с нелокальными условиями для одномерного параболического уравнения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 2. С. 380–395. DOI: http://doi.org/10.14498/vsgtu1904.

[13] Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. Москва: Изд-во иностранной литературы, 1961. URL: https://libcats.org/book/507115.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-7-17

Submited: 15.09.2022
Revised: 17.10.2022
Accepted: 05.12.2022

A.V. Bogatov
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: andrebogato@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5797-1930
L.S. Pulkina
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: louise@samdiff.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7947-6121

ON SOLVABILITY OF THE INVERSE PROBLEM FOR THE ONE-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION WITH UNKNOWN TIME-DEPENDENT COEFFICIENT UNDER INTEGRAL OBSERVATION

ABSTRACT

In this article, we study the inverse problem of determination of time-dependent coefficient in the parabolic equation. We prove existence and uniqueness theorem for the solution of the inverse problem with nonlocal boundary conditions and integral observation. The proof is based on a priori estimates obtained in this article and the results on solvability of corresponding direct problem for the equarion under consideration.

Key words: inverse problem; time-dependent unknown coefficient; integral observation; nonlocal boundary conditions.

Citation. Bogatov A.V., Pulkina L.S. On solvability of the inverse problem for the one-dimensional parabolic equation with unknown time-dependent coefficient under integral observation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 7–17. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-7-17. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Andrey V. Bogatov — postgraduate student of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Ludmila S. Pulkina — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

[1] Prilepko A.I., Orlovskii D.G. Determination of the parameter of an evolution equation and inverse problems of mathematical physics. II. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1985, vol. 21, no. 4, pp. 694–701. Available at: https://www.mathnet.ru/rus/de5501. (In Russ.)

[2] Cannon J.R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations. *Inverse Problems*, 1988, vol. 4, number 1, pp. 35–45. DOI: DOI: http://doi.org/10.1088/0266-5611/4/1/006.

[3] Cannon J.R., Lin Y. Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, 33 (1991), pp. 149–163. DOI: https://doi.org/10.1017/S0334270000006962.

[4] Ivanchov N.I. Inverse problems for the heat-conduction equation with nonlocal boundary conditions. *Ukrainian Mathematical Journal*, 1993, vol. 45, issue 8, pp. 1066–1071. Available at: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/154453. (In Russ.)

[5] Steklofff W. The problem of cooling a heterogeneous solid. *Communications de la Socie?te? mathe?matique de Kharkow. 2-e?e se?rie*, 1897, vol. 5, pp. 136–181. Available at: https://www.mathnet.ru/rus/khmo222; http://dspace.univer.kharkov.ua/handle/123456789/13963. (In Russ.)

[6] Denisov A.M. Introduction to inverse problem theory. Moscow: Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, 1994, 208 p. Available at: http://tka4.org/materials/study/7%20sem/From%20Marcus/[7sem]/Obratnye%20Zadachi%20%5BBaev%20A.V.%5D/Book%20%5BDenisov%20A.M.%20Good%20Scan%5D%20-%20Введение%20в%20теорию%20обратных%20задач.pdf. (In Russ.)

[7] Kamynin V.L. The Inverse Problem of Simultaneous Determination of the Two Lower Space-Dependent Coefficients in a Parabolic Equation. *Mathematical Notes*, 2019, vol. 106, issue 2, pp. 235–247. DOI: http://doi.org/10.1134/S0001434619070277. (In English; original in Russian).

[8] Kamynin V.L. The inverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equations with integral observation. *Mathematical Notes*, 2013, vol. 94, issue 2, pp. 205–213. DOI: http://doi.org/10.1134/S0001434613070201. (In English; original in Russian).

[9] Kamynin V.L. The Inverse Problem of Simultaneous Determination of the Two Time-Dependent Lower Coefficients in a Non-Divergent Parabolic Equation in the Plane. *Mathematical Notes*, 2020, vol. 107, issue 1, pp. 93–104. DOI: http://doi.org/10.1134/S0001434620010095. (In English; original in Russian)

[10] Kozhanov A.I. Solvability of the Inverse Problem of Finding Thermal Conductivity. *Siberian Mathematical Journal*, 2005, vol. 46, issue 5, pp. 841–856. DOI: http://doi.org/10.1007/s11202-005-0082-2. (In English; original in Russian).

[11] Kozhanov A.I. Inverse problems of recovering the right-hand side of a special kind of parabolic equations. *Mathematical notes of NEFU*, 2016, vol. 23, no. 4, pp. 31–45. Available at: https://www.mathnet.ru/rus/svfu37; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29959200. EDN: https://www.elibrary.ru/zfpnlf. (In Russ.)

[12] Beylin A.B., Bogatov A.V., Pulkina L.S. A problem with nonlocal conditions for a one-dimensional parabolic equation. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2022, vol. 26, no. 2, pp. 380–395. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1904. (In Russ.)

[13] Gording L. Cauchy's problem for hyperbolic equations. Moscow: Izdatel'stvo inostrannoi literatury, 1961. Available at: https://libcats.org/book/507115. (In Russ.)