МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-7-22

УДК 517.987

Дата: поступления статьи: 03.05.2022
после рецензирования: 14.06.2022
принятия статьи: 14.11.2022

М.Г. Свистула
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: marinasvistula@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2444-5605
Т.А. Срибная
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: sribnayata@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1197-5650

СВОЙСТВА МЕР НА "УСТОЙЧИВЫХ" БУЛЕВЫХ АЛГЕБРАХ

АННОТАЦИЯ

Изучаются свойства конечно-аддитивных мер со значениями в топологической абелевой группе и определенных на широком классе булевых алгебр, содержащем алгебры с SIP и алгебры Γ_ν (при определенных условиях на ν). Найдены достаточные условия для равномерной строгой непрерывности последовательностей таких мер. Новизна — в отсутствии требования равномерной исчерпываемости и в "ряде теорем" даже исчерпываемости мер. Даны приложения к слабой сходимости мер.

Ключевые слова: булева алгебра; топологическая абелева группа; строго непрерывная мера; исчерпывающая мера; равномерная исчерпываемость семейства мер; равномерная ограниченность семейства мер; слабая сходимость мер.

Цитирование. Свистула М.Г., Срибная Т.А. Свойства мер на "устойчивых" булевых алгебрах // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2022. Т. 28, № 1–2. С. 7–22. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-7-22.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Марина Геннадьевна Свистула — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и теории функций, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Татьяна Аркадьевна Срибная — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и теории функций, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Для конечно-аддитивных мер аналогом неатомичности выступает строгая непрерывность. Известен ряд интересных результатов в различных направлениях для конечно-аддитивных мер, обладающих одновременно строгой непрерывностью и исчерпываемостью, см., например, [1–4]. Легко заметить, что строго непрерывная конечно-аддитивная мера $\mu : \mathcal{A} \to G$, где $\mathcal{A}$ — булева алгебра и G — топологическая абелева группа с квазинормой, является ограниченной. Если при этом G является, например, банаховым пространством, не содержащим c_o, то μ необходимо будет исчерпывающей [5, гл. I, § 4, теорема 2]. Следующий пример показывает, что также существуют строго непрерывные конечно-аддитивные меры без свойства исчерпываемости.

Пример 1. Пусть $\mathcal{A}$ — σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств $[0;+\infty)$, λ — мера Лебега, $A_n = [n-1;n)$, $n \in \mathbb{N}$. Определим конечно-аддитивную меру $\mu : \mathcal{A} \to l_\infty$, полагая $\mu(E) = \{\lambda(E \cap A_n)\}_n$, $E \in \mathcal{A}$. Очевидно, $\{A_n\}_n$ — дизъюнктная последовательность в $\mathcal{A}$ с $||\mu(A_n)|| = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Значит, μ не является исчерпывающей. Вместе с тем μ строго непрерывна. Действительно, разобьем A_n на k дизъюнктных промежутков $\{A_{ni}\}_{i=1}^k$ длины $1/k$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $E_i = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{ni}$, $i \in \overline{1;k}$. Очевидно, $\bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i = [0;+\infty)$ и $\tilde{\mu}[\mathcal{A}](E_i) = 1/k$, $i \in \overline{1;k}$.

В данной статье нас прежде всего интересуют условия, при которых последовательность конечно-аддитивных мер будет равномерно строго непрерывной. При этом, в отличие от работы [2], мы стремимся отказаться от требования равномерной исчерпываемости последовательности мер и даже от исчерпываемости самих мер (см. раздел 2), что оправдано примерами 1 и 2. Вместе с тем пришлось наложить дополнительные условия на алгебры, выступающие в качестве областей определения мер. Это привело нас к понятию $\mathcal{ERD}$-устойчивых алгебр (см. определение 2). "Устойчивые" алгебры представляют собой широкий класс, который содержит, например, алгебры с SIP[1] и алгебры Γ_ν (при определенных условиях на ν). Рассмотрение "устойчивых" алгебр оказалось продуктивным не только в связи с равномерной строгой непрерывностью мер, но и в связи с равномерной ограниченностью мер (см. раздел 6).

1. Основные определения и предварительные сведения

Далее всюду $\mathcal{A}$ — булева алгебра с единицей e и нулем o. Семейство элементов $\{a_t\}_{t \in T} \subset \mathcal{A}$ называем дизъюнктным, если $a_i \wedge a_j = o$ при $i \neq j$.

Определение 1. Последовательность $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_n\}_n$, где $\mathcal{E}_n = \{e_i^n\}_{i=1}^{k_n} \subset \mathcal{A}$ и $\bigvee\limits_{i=1}^{k_n} e_i^n = e$, будем называть системой в $\mathcal{A}$.

Определение 2. Пусть $\mathcal{E}$ — некоторая система в $\mathcal{A}$, пусть $\mathcal{R}$ и $\mathcal{D}$ — некоторые классы элементов $\mathcal{A}$. Алгебру $\mathcal{A}$ назовем $\mathcal{ERD}$-устойчивой при выполнении следующего условия: если $\{b_n\}_n$ такая дизъюнктная последовательность в $\mathcal{R}$, что если для любого n существует $e_i^n \in \mathcal{E}_n$ такое что $b_k \leqslant e_i^n$ при всех $k \geqslant n$, то для любого бесконечного множества $M \subset \mathbb{N}$ существуют элемент $d \in \mathcal{D}$ и бесконечное множество $P \subset M$, для которых $b_k \leqslant d$ при всех $k \in P$ и $b_k \wedge d = o$ для всех $k \in \mathbb{N} \setminus P$.

Алгебру $\mathcal{A}$, обладающую SIP [6], можно рассматривать как $\mathcal{ERD}$-устойчивую, где $\mathcal{R} = \mathcal{D} = \mathcal{A}$ и $\mathcal{E}_n = \{e\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Далее будем рассматривать функции, определенные на $\mathcal{A}$, со значениями в топологической абелевой группе G; буквами V, U, W обозначаем симметричные окрестности нуля в G; полагаем $nU = \underbrace{U + \ldots + U}_{n}$.

Функцию $\mu : \mathcal{A} \to G$ называем:

– конечно-аддитивной мерой, если $\mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b)$ для любой пары дизъюнктных элементов a и b из $\mathcal{A}$;

– счетно-аддитивной мерой, если $\mu(\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} a_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(a_n)$ для любой дизьюнктной последовательности $\{a_n\}_n$ из $\mathcal{A}$ с $\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathcal{A}$.

Всюду в дальнейшем считаем все рассматриваемые функции из $\mathcal{A}$ в G как минимум конечно-аддитивными мерами.

Определение 3. Пусть $\mu : \mathcal{A} \to G$ и $\mathcal{F}$ — некоторый класс элементов $\mathcal{A}$, содержащий o. Для элемента $a \in \mathcal{A}$ полагаем

$$\tilde{\mu}[\mathcal{F}](a) = \{\mu(b) : a \geqslant b \in \mathcal{F}\}.$$

Если G — таг с квазинормой $|\cdot|$, то полагаем

$$\tilde{\mu}[\mathcal{F}](a) = \sup\{|\mu(b)| : a \geqslant b \in \mathcal{F}\}.$$

Под квазинормой понимаем функционал $|\cdot| : G \to [0;+\infty)$, где $|O_G| = 0$, $|-x| = |x|$ и $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ для любых $x, y \in G$.

Определение 4. Пусть $\mathcal{R}$ и $\mathcal{D}$ — некоторые классы элементов $\mathcal{A}$, причем $o \ni \mathcal{R} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{A}$. Функцию $\mu : \mathcal{A} \to G$ назовем $\mathcal{RD}$-монотонной, если для любой окрестности U существует такая окрестность $W \subset U$, что если $r \in \mathcal{R}$ и $\tilde{\mu}[\mathcal{R}](r) \subset W$, то $\tilde{\mu}[\mathcal{D}](r) \subset U$.

Ясно, что это свойство выполняется, если $\mathcal{R} = \mathcal{D}$ или, например, если μ неотрицательная и монотонная на $\mathcal{D}$.

[1]Subsequential Interpolation Property

Определение 5. Пусть $\mathcal{R}$ — некоторый класс элементов $\mathcal{A}$, содержащий o. Семейство $\{\mu_t\}_{t\in T}$, $\mu_t : \mathcal{A} \to G$ называем равномерно строго $\mathcal{R}$-непрерывным на элементе $r \in \mathcal{R}$, если для любой окрестности U существует дизъюнктный набор $\{r_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{R}$ с $\bigvee\limits_{i=1}^n r_i = r$ и $\tilde{\mu}_t[\mathcal{R}](r_i) \subset U$ для всех $i \in \overline{1;n}$ и $t \in T$.

Если приведенное условие выполняется для любого элемента $r \in \mathcal{R}$[2], то семейство $\{\mu_t\}_{t\in T}$ называем равномерно строго $\mathcal{R}$-непрерывным. Если речь идет об одной функции, то в определениях опускаем слово "равномерно". Заметим, что выражение "μ строго $\mathcal{A}$-непрерывна" означает то же, что и часто используемое в литературе "μ строго непрерывна"[3].

Очевидно, что если G — хаусдорфова таг и $\mu : \mathcal{A} \to G$ строго $\mathcal{A}$-непрерывна, то μ неатомическая (т. е. для любого $a \in \mathcal{A}$ с $\mu(a) \neq 0$ существует элемент $b \in \mathcal{A}$ такой что $b \leqslant a$ и $0 \neq \mu(b) \neq \mu(a)$). Если же $\mathcal{A}$ — σ-алгебра и μ — счетно-аддитивная мера со свойством (C) (т. е. любое дизъюнктное семейство элементов ненулевой меры не более чем счетно, например, когда G — линейное нормированное пространство), то верно и обратное утверждение [7, предложение 2].

Всюду в дальнейшем X — хаусдорфово топологическое пространство, $\tau(X)$ и $\mathcal{C}(X)$ — классы его открытых и замкнутых подмножеств, $\mathcal{B}(X)$ — борелевская σ-алгебра X (можем опускать обозначение пространства, если это не вызывает недоразумений). Напомним, что $\mu : \mathcal{B} \to G$ называется регулярной, если для любого множества $E \in \mathcal{B}$ и любой окрестности U в G существует такое $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset E$ и $\tilde{\mu}[\mathcal{B}](E \setminus C) \subset U$. Если C можно выбрать компактным, то μ называют радоновой. Говорят, что μ диффузная, если $\mu(\{x\}) = 0$ для всех $x \in X$. Нетрудно показать, что для счетно-аддитивной меры $\mu : \mathcal{B} \to G$, регулярной, если X со счетной базой, или радоновой в общем случае, условия диффузности, неатомичности и строгой $\mathcal{B}$-непрерывности эквивалентны (при условии, что таг G хаусдорфова).

Говорим, что последовательность $\{\mu_n\}_n$, $\mu_n : \mathcal{D} \to G$, поточечно фундаментальна (поточечно сходится) на классе $\mathcal{D}$, если для любого элемента $a \in \mathcal{D}$ последовательность $\{\mu_n(a)\}_n$ фундаментальна (соответственно, сходится) в G.

Семейство $\{\mu_t\}_{t\in T}$, $\mu_t : \mathcal{A} \to G$ называют равномерно исчерпывающим (равномерно непрерывным сверху в нуле) на $\mathcal{A}$, если для любой дизъюнктной последовательности $\{a_n\}_n \subset \mathcal{A}$ (для любой $\{a_n\}_n \subset \mathcal{A}$ с $a_n \searrow o$) имеем: для любой окрестности U найдется k такое, что $\mu_t(a_n) \in U$ для всех $n > k$ и $t \in T$. В случае одной функции в этих определениях опускаем слово "равномерно".

Далее ограниченные множества будем рассматривать только в таг с квазинормой и понимать под ограниченностью ограниченность по квазинорме.

Семейство $\{\mu_t\}_{t\in T}$, $\mu_t : \mathcal{A} \to G$, называем поточечно ограниченным на $\mathcal{A}$, если для любого $a \in \mathcal{A}$ множество $\{\mu_t(a) : t \in T\}$ ограничено; называем равномерно ограниченным на $\mathcal{A}$, если множество $\{\mu_t(a) : a \in \mathcal{A}, t \in T\}$ ограничено.

Приведем некоторые известные факты[4] (напомним, что всюду как минимум $\mu : \mathcal{A} \to G$ — конечно-аддитивная мера, $\mathcal{A}$ — булева алгебра, G — таг и, если речь идет об ограниченности, то с квазинормой).

(R1) Если $\mu : \mathcal{A} \to G$ исчерпывающая, то она ограниченная. Для $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ верно и обратное утверждение.

(R2) Непрерывная сверху в нуле $\mu : \mathcal{A} \to G$ счетно-аддитивна.

(R3) Если $\mu : \mathcal{A} \to G$ — счетно-аддитивная мера, то она непрерывна сверху в нуле, если при этом $\mathcal{A}$ — σ-алгебра, то μ будет также исчерпывающей.

(R4) Пусть $\mu_t : \mathcal{A} \to G$ исчерпывающие и $\mathcal{A}$ — σ-алгебра; тогда если семейство $\{\mu_t\}_{t\in T}$ поточечно ограничено, то оно равномерно ограничено.

(R5) Пусть семейство $\{\mu_t\}_{t\in T}$, $\mu_t : \mathcal{A} \to G$, равномерно исчерпывающее. Тогда для любых дизъюнктной последовательности $\{a_n\}_n \subset \mathcal{A}$ и окрестности U существует такое n_0, что для любого k имеем $\tilde{\mu}_t[\mathcal{A}](\bigvee\limits_{n=n_0}^{n_0+k} a_n) \subset U$ сразу для всех $t \in T$. Если к тому же μ_t непрерывны сверху в нуле, то для любой последовательности $\{a_n\}_n \subset \mathcal{A}$ с $a_n \searrow o$ имеем $\tilde{\mu}_t[\mathcal{A}](a_n) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно относительно $t \in T$.

(R6) Пусть $\mu_n : \mathcal{A} \to G$ исчерпывающие и $\mathcal{A}$ — σ-алгебра; тогда если последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно фундаментальна, то она равномерно исчерпывающая. Если к тому же μ_n непрерывны сверху в нуле, то (в силу (R5)) последовательность $\{\mu_n\}_n$ равномерно непрерывна сверху в нуле.

---

[2]Если $\mathcal{R}$ — алгебра, то для этого, очевидно, достаточно выполнения приведенного условия на элементе e.

[3]В [2] такую функцию также называли обладающей свойством Сакса.

[4](R2) и (R3) очевидны, доказательства (R1), (R4) и (R6) можно найти, например, в [8, гл. 1, § 8; гл. 2, § 5, теорема 1], (R5) и (R7) см. в [9, гл. 4, теоремы 3.1 и 2.2]. Поскольку топология в таг порождается семейством квазинорм, результаты, приведенные в этих работах для таг с квазинормой, легко перенести на случай произвольной таг (см. [8, гл. 2, §6]); на булеву алгебру с алгебры множеств эти результаты также легко перенести либо фактически повторяя доказательства, либо используя теорему Стоуна о реализации булевой алгебры. Существует много обобщений приведенных результатов, здесь даны только необходимые нам для ссылок.

(R7) Пусть семейство $\{\mu_t\}_{t\in T}$, $\mu_t : \mathcal{A} \to G$, сконденсировано на алгебре $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ (то есть для любых элемента $a \in \mathcal{A}$, окрестности U и набора $\{\mu_{t_i}\}_{i=1}^n$ существует элемент $r \in \mathcal{R}$ такой, что $\tilde{\mu}_{t_i}[\mathcal{A}](a \triangle r) \subset U$ для всех $i \in \overline{1;n}$). Тогда из равномерной исчерпываемости семейства $\{\mu_t\}_{t\in T}$ на $\mathcal{R}$ следует его равномерная исчерпываемость на $\mathcal{A}$.

2. Основные результаты о равномерной строгой непрерывности мер

Теорема 1. Пусть $\mu_n : \mathcal{A} \to G$ — конечно-аддитивные меры, $n \in \mathbb{N}$. Пусть алгебра $\mathcal{A}$ является $\mathcal{ERD}$-устойчивой и выполняются следующие условия: (а) $\mathcal{R}$ — некоторая подалгебра $\mathcal{A}$ и $\mathcal{R} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{A}$; (б) если $r \in \mathcal{R}$ и $d \in \mathcal{D}$, то $r \wedge d \in \mathcal{D}$[5]; (в) $\mathcal{E}$ — некоторая система в $\mathcal{R}$. Далее, пусть каждая μ_n строго $\mathcal{R}$-непрерывна и $\mathcal{RD}$-монотонна.

Тогда если последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно фундаментальна на $\mathcal{D}$, то она равномерно строго $\mathcal{R}$-непрерывна.

Доказательство. Зафиксируем некоторую окрестность U в G. Положим $V = 5U$. В процессе доказательства будем использовать следующее рабочее определение: элемент $r \in \mathcal{R}$ обладает свойством $(*)$, если для любого дизъюнктного набора $\{r_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{R}$ с $\bigvee\limits_{i=1}^{n} r_i = r$ найдутся такие μ_n и r_i, что $\tilde{\mu}_n[\mathcal{R}](r_i) \not\subset V$.

Легко заметить, что если $r \in \mathcal{R}$ обладает свойством $(*)$, то в любом наборе $\{p_i\}_{i=1}^k \subset \mathcal{R}$ с $\bigvee\limits_{i=1}^{k} p_i = r$ найдется элемент p_i, тоже обладающий этим свойством.

Предположим, что элемент e обладает свойством $(*)$. Тогда некоторый элемент семейства $\{e_i^1 \wedge e_j^2,\ i \in \overline{1;k_1},\ j \in \overline{1;k_2}\}$ тоже обладает этим свойством. Обозначим его a_1. Заметим, что $a_1 \in \mathcal{R}$, и в каждом из наборов $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ найдутся элементы, мажорирующие a_1.

Поскольку a_1 обладает свойством $(*)$, то существуют функция μ_{n_1} и элемент $c \in \mathcal{R}$ такие, что $c \leqslant a_1$ и $\mu_{n_1}(c) \notin 4U$. Положим $\nu_1 = \mu_{n_1}$.

$\triangledown$ Так как функция ν_1 является $\mathcal{RD}$-монотонной, то найдется такая окрестность $W \subset U$, что если $b \in \mathcal{R}$ и $\tilde{\nu}_1[\mathcal{R}](b) \subset W$, то $\tilde{\nu}_1[\mathcal{D}](b) \subset U$.

Поскольку функция ν_1 строго $\mathcal{R}$-непрерывна, то существует дизъюнктный набор $\{r_1, \ldots, r_k, r_{k+1}, \ldots, r_n\} \subset \mathcal{R}$ такой, что $\bigvee\limits_{i=1}^{k} r_i = c$, $\bigvee\limits_{i=k+1}^{n} r_i = a_1 \setminus c$ и $\tilde{\nu}_1[\mathcal{R}](r_i) \subset W$ для всех $i \in \overline{1;n}$.

Так как a_1 обладает свойством $(*)$, то в указанном наборе найдется элемент r_l, тоже обладающий этим свойством. Обозначим его q. Очевидно, $\tilde{\nu}_1[\mathcal{D}](q) \subset U$. Если оказалось, что $q \leqslant c$, то полагаем $b_1 = c \setminus q$; если же $q \leqslant a_1 \setminus c$, то полагаем $b_1 = c$. В любом случае $\nu_1(b_1) \notin 3U$ и q обладает свойством $(*)$.

Очевидно, среди элементов семейства $\{q \wedge e_i^3 \wedge e_j^4,\ i \in \overline{1;k_3},\ j \in \overline{1;k_4}\}$ найдется элемент, обладающий свойством $(*)$. Обозначим его a_2. $\triangle$

Итак, имеем следующее:

$a_1, a_2, b_1 \in \mathcal{R}$, $a_1 \geqslant a_2$, $b_1 \leqslant a_1 \setminus a_2$, элемент a_1 мажорируется некоторым элементом из $\mathcal{E}_1$ и некоторым элементом из $\mathcal{E}_2$, элемент a_2 мажорируется некоторым элементом из $\mathcal{E}_3$ и некоторым элементом из $\mathcal{E}_4$;

$\nu_1 = \mu_{n_1}, \quad \nu_1(b_1) \notin 3U, \quad \tilde{\nu}_1[\mathcal{D}](a_2) \subset U$;

элемент a_2 обладает свойством $(*)$.

Рассмотрим a_2 вместо a_1 и т. д. Допустим, что на m-м шаге получили элементы $a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, b_1, \ldots, b_m \in \mathcal{R}$ и функции $\nu_1 = \mu_{n_1}$, $\nu_i = \mu_{n_i} - \mu_{n_i'}$, где $i \in \overline{2;m}$, $n_1 < n_2' < n_2 < \ldots < n_m' < n_m$ такие, что:

– для всех $i \in \overline{1;m}$ справедливы неравенства

(C1) $a_i \geqslant a_{i+1}, \qquad b_i \leqslant a_i \setminus a_{i+1}$;

– для всех $i \in \overline{1;m+1}$

(C2) a_i мажорируется некоторым элементом из $\mathcal{E}_{2i-1}$ и некоторым элементом из $\mathcal{E}_{2i}$;

– для всех $i \in \overline{2;m}$ выполняется

(C3) $\nu_i(\bigvee_{j\in J} b_j) \in U$, где $J \subset \overline{1;i-1}$;

– для всех $i \in \overline{1;m}$ выполняется

(C4) $\nu_i(b_i) \notin 3U$;

– для всех $i \in \overline{1;m}$ справедливо включение

(C5) $\tilde{\nu}_i[\mathcal{D}](a_{i+1}) \subset U$;

(C6) элемент a_{m+1} обладает свойством $(*)$.

[5] Отсюда будет следовать, что если $r \in \mathcal{R}$ и $d \in \mathcal{D}$, то $d \setminus r \in \mathcal{D}$.

Сделаем $(m+1)$-й шаг. В силу поточечной фундаментальности последовательности $\{\mu_n\}_n$ на $\mathcal{D}$ (тем более на $\mathcal{R}$), существует такой номер $n'_{m+1} > n_m$, что если $p > n'_{m+1}$ и $J \subset \overline{1;m}$, то

$$(\mu_p - \mu_{n'_{m+1}})(\bigvee_{j\in J} b_j) \in U.$$

Теперь докажем, что найдутся номер $n_{m+1} > n'_{m+1}$ и элемент $c \in \mathcal{R}$ такие, что $c \leqslant a_{m+1}$ и

$$(\mu_{n_{m+1}} - \mu_{n'_{m+1}})(c) \notin 4U.$$

Из определения 5 очевидно, что конечное семейство строго $\mathcal{R}$-непрерывных функций будет равномерно строго $\mathcal{R}$-непрерывным. Значит, существует дизъюнктный набор $\{r_1, \ldots, r_k\} \subset \mathcal{R}$ с $\bigvee\limits_{i=1}^{k} r_i = a_{m+1}$ и $\tilde{\mu}_j[\mathcal{R}](r_i) \subset U$ для всех $i \in \overline{1;k}$ и $j \in \overline{1;n_{m+1}}$. Предположим, что не существует искомых номера n_{m+1} и элемента c. Тогда если $p > n'_{m+1}$, $a \in \mathcal{R}$ и $a \leqslant r_i$, где $i \in \overline{1;k}$, то

$$\mu_p(a) = (\mu_p - \mu_{n'_{m+1}})(a) + \mu_{n'_{m+1}}(a) \in 4U + U = V.$$

Получили противоречие тому, что элемент a_{m+1} обладает свойством $(*)$.

Положим $\nu_{m+1} = \mu_{n_{m+1}} - \mu_{n'_{m+1}}$. Итак, $\nu_{m+1}(c) \notin 4U$.

Теперь дословно повторим текст, окруженный знаками $\bigtriangledown$ и $\bigtriangleup$, заменяя соответственно a_1, ν_1, b_1, e_i^3, e_j^4, k_3, k_4, a_2 на a_{m+1}, ν_{m+1}, b_{m+1}, e_i^{2m+1}, e_j^{2m+2}, k_{2m+1}, k_{2m+2}, a_{m+2}.

Продолжив процесс до бесконечности, получим убывающую последовательность $\{a_i\}_i$ и дизъюнктную последовательность $\{b_i\}_i$ в $\mathcal{R}$, а также последовательность функций $\{\nu_i\}_i$ такие, что выполняются условия (C1)–(C5) и $\nu_1 = \mu_{n_1}$, $\nu_i = \mu_{n_i} - \mu_{n'_i}$, где $i \in \overline{2;\infty}$ и $n_1 < n'_2 < n_2 < \ldots < n'_i < n_i < \ldots$.

$\bigtriangledown\bigtriangledown$ Положим $h_i = (a_i \setminus a_{i+1}) \setminus b_i$, $i \in \overline{1;\infty}$. Рассмотрим дизъюнктную последовательность $(b_1, h_1, \ldots, b_i, h_i, \ldots)$ в $\mathcal{R}$. Все ее элементы, начиная с n-го по счету, мажорируются некоторым элементом из $\mathcal{E}_n$.

По определению 2 найдутся элемент $d \in \mathcal{D}$ и подпоследовательность $\{b_{i_p}\}_{p=1}^{\infty}$ такие, что $b_{i_p} \leqslant d$ для всех $p \in \mathbb{N}$, $d \wedge b_j = o$ для $j \in \mathbb{N}$ и $j \neq i_p$, $d \wedge h_i = o$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Положим $z = d \wedge a_1$. Очевидно, $z \in \mathcal{D}$, $z \leqslant a_1$ и z обладает всеми указанными выше свойствами элемента d.

Положим $x_k = \bigvee\limits_{p=1}^{k-1} b_{i_p}$, $y_k = z \setminus (\bigvee\limits_{p=1}^{k} b_{i_p})$, $k \in \overline{2;\infty}$. Заметим, что $x_k \in \mathcal{A}$ и $y_k \in \mathcal{D}$. Имеем $z = x_k \vee b_{i_k} \vee y_k$. Тогда

$$\nu_{i_k}(z) = \nu_{i_k}(x_k) + \nu_{i_k}(b_{i_k}) + \nu_{i_k}(y_k). \tag{2.1}$$

Далее, $y_k \leqslant a_1$ и y_k дизъюнктен со всеми b_1, h_1, …, b_{i_k}, h_{i_k}. Тогда $y_k \leqslant a_{i_k+1}$. В силу условия (C5) получаем $\nu_{i_k}(y_k) \in U$. $\bigtriangleup\bigtriangleup$

В силу условия (C3) имеем $\nu_{i_k}(x_k) \in U$. Теперь, используя условие (C4) и равенство (2.1), получаем $\nu_{i_k}(z) \notin U$ для всех $k \in \overline{2;\infty}$, что противоречит поточечной фундаментальности последовательности $\{\mu_n\}_n$ на $\mathcal{D}$.

Значит, элемент e не обладает свойством $(*)$. В силу произвольности окрестности U последовательность $\{\mu_n\}_n$ равномерно строго $\mathcal{R}$-непрерывна на элементе e. Теорема доказана.

Полагая $\mathcal{R} = \mathcal{D} = \mathcal{A}$ и $\mathcal{E}_n = \{e\}$, $n \in \mathbb{N}$, из теоремы 1 сразу получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\mu_n : \mathcal{A} \to G$ — конечно-аддитивные меры, каждая из которых строго $\mathcal{A}$-непрерывна, $n \in \mathbb{N}$. Пусть алгебра $\mathcal{A}$ обладает SIP (например, σ-алгебра). Тогда если последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно фундаментальна на $\mathcal{A}$, то она равномерно строго $\mathcal{A}$-непрерывна. Если к тому же $\{\mu_n\}_n$ поточечно сходится на $\mathcal{A}$ к функции μ, то μ будет конечно-аддитивной строго $\mathcal{A}$-непрерывной мерой.

Рассматриваемая далее алгебра множеств Γ_ν изучается подробно в разделе 3.

Теорема 3. Пусть $\mu_n : \Gamma_\nu \to G$ — конечно-аддитивные меры, каждая из которых строго Γ_ν-непрерывна, $n \in \mathbb{N}$. Здесь $\nu : \mathcal{B}(X) \to [0;+\infty)$ — регулярная строго $\mathcal{B}$-непрерывная конечно-аддитивная мера, X — нормальное пространство (например, ν — мера Лебега на прямоугольнике $X = [0;1]^k$, $k \in \mathbb{N}$, и Γ_ν — алгебра борелевских измеримых по Жордану подмножеств X). Тогда если последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно фундаментальна на Γ_ν, то она равномерно строго Γ_ν-непрерывна. Если к тому же $\{\mu_n\}_n$ поточечно сходится на Γ_ν к μ, то μ будет конечно-аддитивной строго Γ_ν-непрерывной мерой.

Доказательство. По теореме 5 алгебра Γ_ν удовлетворяет условию (4) из раздела 3. Остается применить теорему 1.

Для конечного набора $\mathcal{H} = \{E_i\}_{i=1}^{n}$ подмножеств некоторого метрического пространства через $diam\mathcal{H}$ обозначим наименьший из диаметров множеств E_i (диаметр пустого множества считаем равным 0).

Теорема 4. Пусть X — метрическое пространство, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{A}$ — некоторые алгебры его подмножеств, $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$; пусть $\mathcal{R}$ содержит некоторую систему $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_n\}_n$ с $diam\mathcal{E}_n \to 0$ при $n \to \infty$ (например, как в теореме 9, $X = [0;1]^k$ с евклидовой метрикой, $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{R}$ — алгебра конечных объединений прямоугольников из $\mathcal{B}$). Пусть $\mu_n : \mathcal{A} \to G$ — счетно-аддитивные меры, каждая из которых строго $\mathcal{R}$-непрерывна, $n \in \mathbb{N}$. Далее, пусть последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно фундаментальна на классе $\mathcal{D}$, где

$$\mathcal{D} = \{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n : \quad E_n \in \mathcal{R}, \quad diam \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i \to 0, \quad n \to \infty\}.$$

Тогда последовательность $\{\mu_n\}_n$ равномерно строго $\mathcal{R}$-непрерывна.

Доказательство. Очевидно, условие (б) теоремы 1 выполнено.

Пусть $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_n\}_n$ — система в $\mathcal{R}$, о которой говорится в условии теоремы 4, и $\mathcal{E}_n = \{E_i^n\}_{i=1}^{k_n}$. Далее, пусть $\{F_n\}_n \subset \mathcal{R}$ и для любого n существует такое $E_i^n \in \mathcal{E}_n$, что $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} F_k \subset E_i^n$. Тогда $diam \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} F_k \leqslant$ $\leqslant diam E_i^n \leqslant diam\mathcal{E}_n \to 0$, $n \to \infty$. Очевидно, $\bigcup\limits_{n \in J} F_n \in \mathcal{D}$ для любого $J \subset \mathbb{N}$. Согласно определению 2 алгебра $\mathcal{A}$ является $\mathcal{ERD}$-устойчивой.

Покажем, что любая счетно-аддитивная мера $\mu : \mathcal{A} \to G$ будет $\mathcal{RD}$-монотонной. Пусть $2W \subset U$, где W и U — окрестности в G. Далее, пусть $E \in \mathcal{R}$, $\tilde{\mu}[\mathcal{R}](E) \subset W$ и $E \supset D \in \mathcal{D}$. Представим $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R_n$, где $\{R_n\}_n$ — дизъюнктная последовательность в $\mathcal{R}$. В силу (R3) найдется k такое, что $\mu(\bigcup\limits_{n=k+1}^{\infty} R_n) \in W$. Имеем $\mu(D) = \mu(\bigcup\limits_{n=1}^{k} R_n) + \mu(\bigcup\limits_{n=k+1}^{\infty} R_n) \in 2W \subset U$. Итак, $\tilde{\mu}[\mathcal{D}](E) \subset U$. Значит, каждая μ_n является $\mathcal{RD}$-монотонной. Применим теорему 1.

Замечание 1. Теорема 4 будет верна, если вместо счетно-аддитивных мер со значениями в G рассматривать неотрицательные конечно-аддитивные меры. В этом случае доказательство остается прежним, за исключением доказательства $\mathcal{RD}$-монотонности μ_n: она будет следовать из монотонности μ_n на $\mathcal{A}$.

3. Некоторые свойства мер на алгебре Γ_ν

Всюду в дальнейшем предполагаем, что $\nu : \mathcal{B}(X) \to [0;+\infty)$ является как минимум конечно-аддитивной мерой. Мы будем использовать такие ее очевидные свойства, как монотонность, конечная полуаддитивность (т. е. $\nu(E \cup F) \leqslant \nu(E) + \nu(F)$ для любых $E, F \in \mathcal{B}$), исчерпываемость на $\mathcal{B}$ и свойство (C).

Определим

$$\Gamma_\nu = \{E \in \mathcal{B} : \quad \nu(\partial E) = 0\},$$

где ∂E — граница E, т. е. $\partial E = \overline{E} \setminus E^\circ$, где $\overline{E}$ — замыкание и E° — внутренность E.

Предложение 1. Γ_ν является подалгеброй $\mathcal{B}$, обладающей свойством (P): если $E_n, F_n \in \Gamma_\nu$, $\lim_n \nu(F_n) = 0$, $\bigcup\limits_{i=n}^{\infty} E_i \subset F_n$ при $n \in \mathbb{N}$, то $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_{n_m} \in \Gamma_\nu$ для любой подпоследовательности $\{E_{n_m}\}_m$.

Если, кроме того, X — нормальное пространство, то алгебра Γ_ν обладает также свойством (S): если $C \in \mathcal{C}$, $Q \in \tau$, $C \subset Q$, то существуют множества $Q_0 \in \tau \cap \Gamma_\nu$ и $C_0 \in \mathcal{C} \cap \Gamma_\nu$ такие, что $C \subset Q_0 \subset C_0 \subset Q$. Отсюда, в частности, следует, что Γ_ν содержит базу топологии $\tau(X)$[6].

Доказательство. Напомним, что для любых множеств E и F в X выполняется $\partial E = \partial(X \setminus E)$ и $\partial(E \cup F) \subset \partial E \cup \partial F$. Теперь, используя монотонность и конечную полуаддитивность ν, легко показать, что Γ_ν является алгеброй.

Положим $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Имеем $\overline{E} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{E}_i \bigcup \overline{(\bigcup\limits_{i=n+1}^{\infty} E_i)} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{E}_i \bigcup \overline{F}_{n+1}$ и $E^\circ \supset \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i^\circ$. Поэтому $\partial E \subset (\bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{E}_i \bigcup \overline{F}_{n+1}) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i^\circ \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \partial E_i \bigcup \overline{F}_{n+1}$. Тогда $\nu(\partial E) \leqslant \nu(\overline{F}_{n+1}) = \nu(F_{n+1}) \to 0$, $n \to \infty$. Значит, $\nu(\partial E) = 0$ и $E \in \Gamma_\nu$. Доказанное применимо к любой подпоследовательности $\{E_{n_m}\}_m$. Свойство (P) доказано.

По лемме Урысона в нормальном пространстве существует непрерывная функция $f : X \to [0;1]$ такая, что $f(x) = 0$ при $x \in C$ и $f(x) = 1$ при $x \in X \setminus Q$. Очевидно, $\{f^{-1}(\alpha) : \alpha \in (0;1)\}$ — дизъюнктное семейство замкнутых множеств. Тогда множество таких $\alpha \in (0;1)$, для которых $\nu(f^{-1}(\alpha)) \neq 0$, не более чем счетное. Значит, существует $\alpha_0 \in (0;1)$ такое, что $\nu(f^{-1}(\alpha_0)) = 0$.

[6] Доказательство этого утверждения в случае счетно-аддитивной меры и вполне регулярного пространства содержится, например, в [10, предложение 8.2.7]

Положим $Q_0 = f^{-1}([0;\alpha_0))$ и $C_0 = \overline{Q}_0$. Ясно, что $Q_0 \in \tau$, $C_0 \in \mathcal{C}$, $C \subset Q_0 \subset C_0 \subset f^{-1}([0;\alpha_0]) \subset Q$. Далее, $\partial C_0 \subset \partial Q_0 \subset f^{-1}(\alpha_0)$. Теперь очевидно, что $Q_0, C_0 \in \Gamma_\nu$. Свойство (S) доказано.

Предложение 2. Пусть $\nu : \mathcal{B}(X) \to [0;+\infty)$ — счетно-аддитивная мера. Пусть $\{E_n\}_n$ — дизъюнктная последовательность в Γ_ν с $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \Gamma_\nu$.

Тогда если $E_n \supset P_n \in \Gamma_\nu$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n \in \Gamma_\nu$.

Доказательство. Положим $F_i = \bigcup\limits_{n=i}^{\infty} E_n$, $i \in \mathbb{N}$. Имеем $\Gamma_\nu \ni F_i \searrow \emptyset$. В силу (R3) $\lim_i \nu(F_i) = 0$. Остается использовать свойство (P).

Предложение 3. Пусть X — нормальное пространство и $\mu : \mathcal{B}(X) \to G$ — конечно-аддитивная регулярная мера. Тогда следующие условия эквивалентны:
(β) μ строго $\mathcal{B}$-непрерывна;
(γ) μ строго Γ_ν-непрерывна

Доказательство. $(\beta) \Longrightarrow (\gamma)$ Пусть V и W — окрестности в G и $2V \subset W$. Так как μ строго $\mathcal{B}$-непрерывна, то существует дизъюнктный набор $\{B_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{B}$ с $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = X$ и $\tilde{\mu}[\mathcal{B}](B_i) \subset V$, $i \in \overline{1;n}$. Найдем окрестность U в G такую, что $nU \subset V$. Из конечной аддитивности и регулярности μ сразу следует существование множеств $C_i \in \mathcal{C}$ и $Q_i \in \tau$ таких, что $C_i \subset B_i \subset Q_i$ и $\tilde{\mu}[\mathcal{B}](Q_i \setminus C_I) \subset U$, $i \in \overline{1;n}$. Далее, в силу свойства (S) найдутся такие $E_i \in \Gamma_\nu$, что $C_i \subset E_i \subset Q_i$, $i \in \overline{1;n}$. Положим $E_0 = X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$. Очевидно, $E_i \in \Gamma_\nu$ при $i \in \overline{0;n}$, $\bigcup\limits_{i=0}^{n} E_i = X$, $\tilde{\mu}[\Gamma_\nu](E_i) \subset \tilde{\mu}[\mathcal{B}](E_i) \subset V + U \subset W$ при $i \in \overline{1;n}$ и $\tilde{\mu}[\Gamma_\nu](E_0) \subset \tilde{\mu}[\mathcal{B}](E_0) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \tilde{\mu}[\mathcal{B}](U_i \setminus C_i) \subset nU \subset W$. Без ограничения общности можно считать, что $E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

$(\gamma) \Longrightarrow (\beta)$ Пусть V и W — окрестности в G и $3V \subset W$. Существует дизъюнктный набор $\{E_i\}_{i=1}^m \subset \Gamma_\nu$ с $\bigcup\limits_{i=1}^{m} E_i = X$ и $\tilde{\mu}[\Gamma_\nu](E_i) \subset V$, $i \in \overline{1;m}$.

Зафиксируем $i \in \overline{1;m}$. Пусть $\mathcal{B} \ni B \subset E_i$. Так как μ регулярна, то существуют $C \in \mathcal{C}$ и $Q \in \tau$ такие, что $C \subset B \subset Q$ и $\tilde{\mu}[\mathcal{B}](Q \setminus C) \subset V$. В силу свойства (S) найдется $E \in \Gamma_\nu$ такое, что $C \subset E \subset Q$. Положим $F = E \cap E_i$. Очевидно, $\Gamma_\nu \ni F \subset E_i$ и $C \subset F \subset Q$. Получаем $\mu(B) = \mu(C) + \mu(B \setminus C) = \mu(F) - \mu(F \setminus C) + + \mu(B \setminus C) \in 3V \subset W$. Итак, $\tilde{\mu}[\mathcal{B}](E_i) \subset W$, $i \in \overline{1;m}$.

Предложение доказано.

Теперь мы установим взаимосвязь между следующими условиями:
(1) ν является диффузной;
(2) ν строго $\mathcal{B}$-непрерывна;
(3) ν строго Γ_ν-непрерывна;
(4) существует такая система $\mathcal{E} \subset \Gamma_\nu$, что алгебра Γ_ν будет $\mathcal{E}\Gamma_\nu\Gamma_\nu$-устойчивой.

Теорема 5. Пусть X — нормальное пространство и $\nu : \mathcal{B}(X) \to [0;+\infty)$ — конечно-аддитивная регулярная мера.

Тогда справедливы импликации $(1) \Longleftarrow (2) \Longleftrightarrow (3) \Longrightarrow (4)$.

Доказательство. Импликация $(2) \Longrightarrow (1)$ очевидна; $(2) \Longleftrightarrow (3)$ следует из предложения 3, если $\mu = \nu$. Докажем, что $(3) \Longrightarrow (4)$.

По условию (3) найдется набор $\mathcal{E}_n = \{E_i^n\}_{i=1}^{k_n} \subset \Gamma_\nu$ с $\bigcup\limits_{i=1}^{k_n} E_i^n = X$ и $\nu(E_i^n) < 1/n$, $i \in \overline{1;k_n}$. Очевидно, $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_n\}_n$ — система в Γ_ν. Далее, пусть $\{B_n\}_n$ такая дизъюнктная последовательность в Γ_ν, что для любого n существует $E_i^n \in \mathcal{E}_n$ такое, что $B_k \subset E_i^n$ при всех $k \geqslant n$. По свойству (P) для любой подпоследовательности $\{B_{n_m}\}_m$ имеем $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_{n_m} \in \Gamma_\nu$. Очевидно, алгебра Γ_ν является $\mathcal{E}\Gamma_\nu\Gamma_\nu$-устойчивой.

Теорема 6. Пусть X — сепарабельное метрическое пространство и $\nu : \mathcal{B}(X) \to [0;+\infty)$ — счетно-аддитивная мера.

Тогда справедливы импликации $(1) \Longleftrightarrow (2) \Longleftrightarrow (3) \Longrightarrow (4)$.

Если, кроме того, X не имеет изолированных точек, то условия (1)–(4) эквивалентны.

Доказательство. Сначала заметим, что ν будет регулярной как борелевская мера на метрическом пространстве (например, см. [10, теорема 7.1.7]) и X — нормальное пространство. Поэтому в силу теоремы 5 достаточно доказать, что $(1) \Longrightarrow (2)$ и, для доказательства второго утверждения, $(4) \Longrightarrow (1)$.

Импликация $(1) \Longrightarrow (2)$ известна, для полноты изложения докажем ее. Пусть последовательность $\{Q_n\}_n$ — база топологии τ. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как ν диффузная и регулярная, то для любой точки $x \in X$ найдется $Q_n \ni x$ с $\nu(Q_n) < \varepsilon$. Без ограничения общности можно считать, что $\nu(Q_n) < \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$.

Положим $E_1 = Q_1$, $E_n = Q_n \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} Q_i$ для $n \in \overline{2;\infty}$. Очевидно, $\{E_n\}_n$ — дизъюнктная последовательность из $\mathcal{B}$. В силу счетной аддитивности ν существует такое m, что $\nu(\bigcup\limits_{n=m}^{\infty} E_n) < \varepsilon$. Очевидно, условие (2) выполняется.

Пусть теперь X не имеет изолированных точек. Докажем (4) $\Longrightarrow$ (1). Зафиксируем $x \in X$. Так как Γ_ν содержит базу топологии τ, то легко построить $\{V_n\}_n$ — базу окрестностей точки x такую, что $V_n \in \Gamma_\nu$ и $V_n \supset V_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку точка x не является изолированной, то без ограничения общности можно считать, что $V_n \setminus V_{n+1} \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\mathcal{E}$ — это та система, о которой говорится в условии (4), $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_n\}_n$, где $\mathcal{E}_n = \{E_i^n\}_{i=1}^{k_n} \subset \Gamma_\nu$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{k_n} E_i^n = X$. Если x принадлежит границе одного из множеств E_i^n, то, очевидно, $\nu(\{x\}) = 0$. Иначе для любого $n \in \mathbb{N}$ точка x попадает во внутренность некоторого множества из набора $\mathcal{E}_n$. Тогда легко выделить подпоследовательность $\{V_{m_n}\}_n$ такую, что V_{m_n} накрывается некоторым множеством из $\mathcal{E}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Можно считать, что это сама последовательность $\{V_n\}_n$. Положим $B_n = V_n \setminus V_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Итак, $\{B_n\}_n$ — дизъюнктная последовательность из Γ_ν, такая что для любого n существует $E_i^n \in \mathcal{E}_n$, для которого $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} B_k \subset E_i^n$. Рассмотрим ее подпоследовательность $\{B_{2n}\}_n$. Из условия (4) и определения 2 следует, что существуют множество $D \in \Gamma_\nu$ и подпоследовательность $\{B_{2n_k}\}_k$ такие, что $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{2n_k} \subset D$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_{2n+1} \subset X \setminus D$. Очевидно, $x \in \partial D$. Значит, $\nu(\{x\}) = 0$. Теорема доказана.

Лемма 1. Пусть X — нормальное пространство, $\{\mu_t\}_{t\in T}$ — семейство регулярных конечно-аддитивных мер, где $\mu_t : \mathcal{B}(X) \to G$. Тогда если семейство $\{\mu_t\}_{t\in T}$ равномерно строго Γ_ν-непрерывно, то для любой окрестности W в G существует дизъюнктный набор $\{E_i\}_{i=1}^k \subset \Gamma_\nu$ с $\bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i = X$ и $\tilde{\mu}_t[\mathcal{B}](E_i) \subset W$, $i \in \overline{1;k}$, $t \in T$; следовательно, $\{\mu_t\}_{t\in T}$ равномерно строго $\mathcal{B}$-непрерывно.

Доказательство. Пусть V и W — окрестности в G и $3V \subset W$. Существует дизъюнктный набор $\{E_i\}_{i=1}^k \subset \Gamma_\nu$ с $\bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i = X$ и $\tilde{\mu}_t[\Gamma_\nu](E_i) \subset V$, $i \in \overline{1;k}$, $t \in T$. Зафиксируем $i \in \overline{1;k}$ и μ_t. Пусть $\mathcal{B} \ni B \subset E_i$. Повторим рассуждения из доказательства импликации $(\gamma) \Longrightarrow (\beta)$ предложения 3, заменяя μ на μ_t. Получим, что $\tilde{\mu}_t[\mathcal{B}](E_i) \subset W$, $i \in \overline{1;k}$, $t \in T$.

Теорема 7. Пусть X — нормальное пространство, $\mu_n : \mathcal{B}(X) \to G$ — регулярные конечно-аддитивные меры, каждая из которых строго $\mathcal{B}$-непрерывна, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\nu : \mathcal{B}(X) \to [0;+\infty)$ — регулярная строго $\mathcal{B}$-непрерывная конечно-аддитивная мера. Тогда если последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно фундаментальна на Γ_ν, то она равномерно строго Γ_ν-непрерывна и равномерно строго $\mathcal{B}$-непрерывна.

Доказательство. В силу предложения 3 каждая μ_n строго Γ_ν-непрерывна. Тогда по теореме 2 последовательность $\{\mu_n\}_n$ равномерно строго Γ_ν-непрерывна и по лемме 1 равномерно строго $\mathcal{B}$-непрерывна.

Хотя в следующих трех предложениях не рассматривается свойство строгой непрерывности мер, они делают картину более полной.

Предложение 4. Пусть $\mu_n : \Gamma_\nu \to G$ — исчерпывающие конечно-аддитивные меры, $n \in \mathbb{N}$, где $\nu : \mathcal{B}(X) \to [0;+\infty)$ — счетно-аддитивная мера. Пусть последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно фундаментальна на Γ_ν. Далее, пусть $\{E_k\}_k$ — дизъюнктная последовательность в Γ_ν с $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k \in \Gamma_\nu$. Тогда для любой окрестности W в G существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что для любых l и n из $\mathbb{N}$ выполняется

$$\tilde{\mu}_n[\Gamma_\nu](\bigcup_{k=m+1}^{m+l} E_k) \subset W. \tag{3.1}$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют окрестность W в G, возрастающая последовательность $\{k_m\}_m \subset \mathbb{N}$, дизъюнктная последовательность $\{P_m\}_m \subset \Gamma_\nu$ и подпоследовательность $\{\mu_{n_m}\}_m$ с $P_m \subset \bigcup\limits_{k=k_m+1}^{k_{m+1}} E_k$ и $\mu_{n_m}(P_m) \notin W$, $m \in \mathbb{N}$. Так как множества $\bigcup\limits_{k=k_m+1}^{k_{m+1}} E_k$, $m \in \mathbb{N}$, и их объединение принадлежат Γ_ν, то в силу предложения 3 имеем $\bigcup\limits_{k\in J} P_k \in \Gamma_\nu$, где $J \subset \mathbb{N}$. Применим (R6), когда $\mathcal{A}$ — это σ-алгебра $\{\bigcup\limits_{k\in J} P_k : J \subset \mathbb{N}\}$. Получим $\lim_m \mu_n(P_m) = 0$ равномерно относительно $n \in \mathbb{N}$. Это противоречит тому, что $\mu_{n_m}(P_m) \notin W$, $m \in \mathbb{N}$. Предложение доказано.

Заметим, что если к условиям предложения 4 добавить поточечную сходимость последовательности $\{\mu_n\}_n$ на Γ_ν к некоторой функции μ, то μ будет конечно-аддитивной мерой, удовлетворяющей соотношению (3.1).

Предложение 5. Пусть $\mu_n : \Gamma_\nu \to G$ — счетно-аддитивные меры[7], $n \in \mathbb{N}$, где $\nu : \mathcal{B}(X) \to [0; +\infty)$ — счетно-аддитивная мера. Пусть последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно фундаментальна на Γ_ν (или поточечно сходится на Γ_ν к некоторой функции μ). Далее, пусть $\{F_k\}_k \subset \Gamma_\nu$ и $F_k \searrow \varnothing$ при $k \to \infty$. Тогда $\tilde{\mu}_n[\Gamma_\nu](F_k) \to 0$ при $k \to \infty$ равномерно относительно $n \in \mathbb{N}$ (соответственно, $\tilde{\mu}[\Gamma_\nu](F_k) \to 0$ при $k \to \infty$ и μ будет счетно-аддитивной мерой).

Доказательство. Положим $E_k = F_k \setminus F_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Получим дизъюнктную последовательность $\{E_k\}_k \subset \Gamma_\nu$ с $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = F_1 \in \Gamma_\nu$. Легко доказать соотношение (3.1). Для этого повторим рассуждения из предложения 4 (заметим, что на σ-алгебре $\mathcal{A}$ каждая μ_n будет исчерпывающей согласно (R3)). Пусть найдено m, как в предложении 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\Gamma_\nu \ni E \subset F_{m+1}$. Так как μ_n непрерывна сверху на пустом множестве, то $\lim_k \mu_n(E \cap F_k) = 0$. Поэтому существует $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\mu_n(E \cap F_{k_0}) \in W$. Получаем $\mu_n(E) = \mu_n(E \cap (F_{m+1} \setminus F_{k_0})) + \mu_n(E \cap F_{k_0}) \in 2W$. Отсюда следует доказываемое утверждение. Что касается μ, то она, очевидно, конечно-аддитивна и непрерывна сверху на пустом множестве и, значит, счетно-аддитивна в силу (R2).

Замечание 2. Из предложения 5 легко следует, что если $\{\mu_n\}_n$, ν, μ, как в условии, и $\{E_k\}_k$ — дизъюнктная последовательность в Γ_ν с $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k \in \Gamma_\nu$, то для $\{\mu_n\}_n$ и μ выполняется соотношение (3.1).

Вернемся к ситуации, когда $\mu_n : \mathcal{B}(X) \to G$, $n \in \mathbb{N}$. Что будет, если последовательность $\{\mu_n\}_n$ все-таки является равномерно исчерпывающей на Γ_ν?

Далее мы установим связь между следующими условиями:
(I) $\{\mu_n\}_n$ равномерно исчерпывающая на Γ_ν;
(II)$\{\mu_n\}_n$ равномерно регулярна, то есть для любых множества $E \in \mathcal{B}$ и окрестности W в G существует такое $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset E$ и $\tilde{\mu}_n[\mathcal{B}](E \setminus C) \subset W$, $n \in \mathbb{N}$;
(III) для любых множества $E \in \mathcal{B}$ и окрестности W в G существует такое $F \in \Gamma_\nu$, что $\tilde{\mu}_n[\mathcal{B}](E \triangle F) \subset W$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
(IV)$\{\mu_n\}_n$ равномерно исчерпывающая на $\mathcal{B}$;
(V)$\{\mu_n\}_n$ равномерно непрерывна сверху на пустом множестве на $\mathcal{B}$.

Предложение 6. Пусть X — нормальное пространство, $\mu_n : \mathcal{B}(X) \to G$ — регулярные исчерпывающие конечно-аддитивные меры, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\nu : \mathcal{B}(X) \to [0; +\infty)$ — конечно-аддитивная мера.
(i) Тогда справедливы импликации $(III) \Longleftarrow (II) \Longleftarrow (IV) \Longleftrightarrow (I)$.
(ii) Если последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно фундаментальна на Γ_ν, то условия (I)–(IV) эквивалентны между собой и эквивалентны условию:

(VI) $\{\mu_n\}_n$ поточечно фундаментальна на $\mathcal{B}$.

(iii) Если μ_n к тому же счетно-аддитивны, то в пунктах (i) и (ii) добавляется эквиваленция $(IV) \Longleftrightarrow (V)$.

Доказательство.

(i) Импликация $(I) \Longleftarrow (IV)$ очевидна.

Докажем $(I) \Longrightarrow (IV)$. В силу (R7) для этого достаточно доказать сконденсированность последовательности $\{\mu_n\}_n$ на Γ_ν. Из регулярности всех μ_n следует, что для любых множества $E \in \mathcal{B}$, конечного набора $\{\mu_n\}_{n=1}^k$ и окрестности W в G существуют множества $C \in \mathcal{C}$ и $Q \in \tau$ такие, что $C \subset E \subset Q$ и $\tilde{\mu}_n[\mathcal{B}](Q \setminus C) \subset W$ для всех $n \in \overline{1;k}$. В силу свойства (S) (см. предложение 1) найдется $F \in \Gamma_\nu$ такое, что $C \subset F \subset Q$. Так как $E \triangle F \subset Q \setminus C$, то $\tilde{\mu}_n[\mathcal{B}](E \triangle F) \subset W$ для всех $n \in \overline{1;k}$ и, значит, есть сконденсированность.

Импликация $(IV) \Longrightarrow (II)$ известна, приведем доказательство. Предположим противное. Тогда существуют окрестность W в G и множество $E \in \mathcal{B}$ такие, что для любого $C \in \mathcal{C}$, где $C \subset E$, существует мера μ_n, для которой $\tilde{\mu}_n[\mathcal{B}](E \setminus C) \not\subset 2W$. Положим $C_1 = \varnothing$ и рассмотрим множество $E \setminus C_1$. Найдутся μ_{n_1} и $B \in \mathcal{B}$ такие, что $B \subset E \setminus C_1$ и $\mu_{n_1}(B) \notin 2W$. Так как μ_{n_1} регулярна, то найдется $A_1 \in \mathcal{C}$ такое, что $A_1 \subset B$ и $\mu_{n_1}(B \setminus A_1) \in W$. Поскольку $\mu_{n_1}(B) = \mu_{n_1}(A_1) + \mu_{n_1}(B \setminus A_1)$, то $\mu_{n_1}(A_1) \notin W$. Положим $C_2 = C_1 \cup A_1$. Очевидно, $\mathcal{C} \ni C_2 \subset E$. Рассмотрим $E \setminus C_2$ вместо $E \setminus C_1$ и т. д. Продолжив процесс до бесконечности, получим дизъюнктную последовательность $\{A_k\}_k \subset \mathcal{C}$ и последовательность $\{\mu_{n_k}\}_k$ такие, что $\mu_{n_k}(A_k) \notin W$, $k \in \mathbb{N}$, что противоречит условию (IV).

Импликация $(II) \Longrightarrow (III)$ очевидна, если использовать свойство (S).

(ii) Пусть теперь последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно фундаментальна на Γ_ν. Тогда легко доказывается импликация $(III) \Longrightarrow (VI)$. Действительно, для множества $E \in \mathcal{B}$ и окрестности нуля W в G найдем $F \in \Gamma_\nu$ согласно условию (III). Имеем $\mu_n(E) = \mu_n(E \setminus F) + \mu_n(F) - \mu_n(F \setminus E) \in \mu_n(F) + 2W$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\mu_n(E) - \mu_k(E) \in \mu_n(F) - \mu_k(F) + 4W$ для всех $n, k \in \mathbb{N}$. Очевидно, из фундаментальности последовательности $\{\mu_n(F)\}_n$ следует фундаментальность $\{\mu_n(E)\}_n$.

Импликация $(VI) \Longrightarrow (IV)$ следует из (R6).

[7]Напомним, что счетно-аддитивная мера на алгебре не обязана быть исчерпывающей, но является непрерывной сверху на пустом множестве(см. (R3) из раздела 1).

Пункт (iii) следует из (R5) и (R6). Предложение доказано.

Замечание 3. Очевидно, что доказательство первого утверждения предложения 6 остается верным для семейства функций $\{\mu_t\}_{t\in T}$ (а не только для последовательности).

4. Приложения к слабой сходимости мер

В данном параграфе X — совершенно нормальное пространство и под мерой будем понимать только счетно-аддитивную меру. Сразу заметим, что меры со значениями в $\mathbb{R}$ и определенные на $\mathcal{B}(X)$ будут регулярными [10, следствие 7.1.9]. Говорят, что последовательность $\{\mu_n\}_n$ слабо сходится к μ, если для любой непрерывной ограниченной функции $f : X \to \mathbb{R}$ выполняется $\lim_n \int_X f(x)d\mu_n = \int_X f(x)d\mu$.

Как известно, для неотрицательных мер слабая сходимость эквивалентна поточечной сходимости $\{\mu_n\}_n$ к μ на Γ_μ (см., например, [10, теорема 8.2.8]). Поэтому в силу пункта (ii) предложения 6 всякий раз, когда последовательность неотрицательных мер $\{\mu_n\}_n$ слабо сходится к μ и при этом нет ее поточечной сходимости на $\mathcal{B}(X)$, мы имеем пример последовательности мер, которая сходится поточечно на алгебре Γ_μ и при этом не является равномерно исчерпывающей на Γ_μ. Если к тому же X — сепарабельное метрическое пространство и μ диффузная, то найдется такая система $\mathcal{E}$ в Γ_μ, что алгебра Γ_μ будет $\mathcal{E}\Gamma_\mu\Gamma_\mu$-устойчивой (см. теорему 6); если, кроме того, все μ_n диффузные, то последовательность $\{\mu_n\}_n$ будет равномерно строго Γ_μ-непрерывной. Приведем конкретный пример.

Пример 2. Разобьем отрезок $[0;1]$ на 2^{2n} равных частей, $n \in \mathbb{N}$. Положим $p_n(x) = 2^n$ для $x \in [k/2^n; k/2^n + 1/2^{2n}]$, где $k \in \overline{0; 2^n - 1}$, и $p_n(x) = 0$ для остальных $x \in [0;1]$. Рассмотрим функции $F_n(x) = \int\limits_0^x p_n(t)dt$, $x \in [0;1]$. Справедлива оценка $k/2^n \leqslant F_n(x) \leqslant (k+1)/2^n$, если $k/2^n \leqslant x \leqslant (k+1)/2^n$. Отсюда $|F_n(x) - x| \leqslant 1/2^n$ для всех $x \in [0;1]$. Значит, $\lim_n F_n(x) = x = F(x)$, $x \in [0;1]$. Пусть $\mu_n, \mu : \mathcal{B}([0;1]) \to [0;1]$ — вероятностные меры, задаваемые функциями распределения F_n и F. Очевидно, μ — это мера Лебега. Далее, μ_n и μ диффузные, так как F_n и F непрерывны; $\{\mu_n\}_n$ слабо сходится к μ, так как $F_n(x)$ сходится к $F(x)$ для всех $x \in [0;1]$ [11, гл. III, § 1, теорема 2]. Значит, $\{\mu_n\}_n$ поточечно сходится к μ на алгебре Γ_μ, которая, как отмечалось выше, является $\mathcal{E}\Gamma_\mu\Gamma_\mu$-устойчивой (можно напрямую показать, используя предложение 2, что в качестве $\mathcal{E}$ подойдет, например, $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_n\}_{n=1}^\infty$, где $\mathcal{E}_n = \{[(i-1)/n; i/n]\}_{i=1}^n$). Тогда $\{\mu_n\}_n$ равномерно строго Γ_μ-непрерывна. При этом $\{\mu_n\}_n$ не является равномерно исчерпывающей на Γ_μ, так как нет ее поточечной сходимости на $\mathcal{B}([0;1])$ к μ. Действительно, положим $E_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} [k/2^n; k/2^n + 1/2^{2n}]$. Имеем $\mu_n(E_n) = 1$ и $\mu(E_n) = 1/2^n$. Возьмем $E = \bigcup\limits_{n=1}^\infty E_{2n}$. Очевидно, $E \in \mathcal{B}([0;1])$, $\mu_{2n}(E) = 1$ и $\mu(E) \leqslant \sum\limits_{n=1}^\infty \mu(E_{2n}) = \sum\limits_{n=1}^\infty 1/2^{2n} = 1/3$. Итак, $\lim_n \mu_n(E) \neq \mu(E)$.

Вернемся к общей ситуации и предположим, что все μ_n диффузные и $\{\mu_n\}_n$ слабо сходится к μ. Допустим, что μ диффузная, будет ли тогда $\{\mu_n\}_n$ равномерно строго $\mathcal{B}$-непрерывной? Если X — сепарабельное метрическое пространство и меры неотрицательные, то ответ утвердительный (выше показано, что $\{\mu_n\}_n$ будет равномерно строго Γ_μ-непрерывной и, следовательно, по лемме 1 равномерно строго $\mathcal{B}$-непрерывной). Здесь важную роль играет тот факт, что для неотрицательных мер из слабой сходимости следует поточечная сходимость на Γ_μ. Для мер со значениями в $\mathbb{R}$ мы не имеем такой теоремы и не знаем ответа на этот вопрос; можем лишь утверждать, что если X — полное сепарабельное метрическое пространство, то существует подпоследовательность $\{\mu_{n_i}\}_i$, которая равномерно строго $\mathcal{B}$-непрерывна (это легко доказать, раскладывая μ_n по Жордану и используя критерий Прохорова).

Как показывает следующий простой пример, равномерная строгая $\mathcal{B}$-непрерывность $\{\mu_n\}_n$ не гарантирует диффузность μ.

Пример 3. Положим $p_n(x) = 2^n$ для $x \in [1 - 1/2^n; 1]$ и $p_n(x) = 0$ для остальных $x \in [0;1]$, $n \in \overline{0;\infty}$. Функции распределения $F_n(x) = \int\limits_0^x p_n(t)dt$ непрерывны и $\lim_n F_n(x) = F(x)$, где $F(x) = 0$ для $x \in [0;1)$ и $F(1) = 1$. Отсюда ясно, что диффузные меры μ_n, задаваемые F_n, сходятся слабо к мере Дирака $\mu_{\{1\}}$. Возьмем $k \in \mathbb{N}$. Разобьем отрезки $[1 - 1/2^n; 1 - 1/2^{n+1}]$, $n \in \overline{0;\infty}$, на k равных частей. Объединение i-тых частей этих разбиений обозначим E_i, $i \in \overline{1;k}$. Имеем $\mu_n(E_i) = \int_{E_i} p_n(t)dt = 1/k$. Очевидно, $\{\mu_n\}_n$ равномерно строго $\mathcal{B}$-непрерывна.

Теоремы 8 и 9 дают достаточные условия того, чтобы последовательность диффузных мер слабо сходилась к диффузной мере. При их доказательстве используем критерий А.Д. Александрова в редакции [10, теорема 8.1.9], из которого следует, что если X — совершенно нормальное пространство, $\mu_n, \mu : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}$ — меры, то

1) $\{\mu_n\}_n$ фундаментальна в слабой топологии в точности тогда, когда она равномерно ограничена и для любых $\varepsilon > 0$ и множеств $C \in \mathcal{C}$ и $Q \in \tau$ с $C \subset Q$ найдется такое m, что для всех $n, k > m$

$$\inf\{|\mu_n(A) - \mu_k(A)| : A \in \tau,\ C \subset A \subset Q\} < \varepsilon; \tag{4.1}$$

2) $\{\mu_n\}_n$ слабо сходится к μ в точности тогда, когда она равномерно ограничена и для любых множеств $C \in \mathcal{C}$ и $Q \in \tau$ с $C \subset Q$

$$\lim_{n\to\infty} \inf\{|\mu_n(A) - \mu(A)| : A \in \tau,\ C \subset A \subset Q\} = 0. \tag{4.2}$$

Теорема 8. Пусть X — совершенно нормальное пространство, $\mu_n : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}$ — меры, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\nu : \mathcal{B}(X) \to [0; +\infty)$ — строго $\mathcal{B}$-непрерывная мера. Пусть последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно сходится на Γ_ν.

Тогда $\{\mu_n\}_n$ слабо сходится к некоторой мере $\mu : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}$, для которой $\mu(E) = \lim_n \mu_n(E)$ при всех $E \in \Gamma_\nu$.

Если, кроме того, все μ_n строго $\mathcal{B}$-непрерывны, то $\{\mu_n\}_n$ будет равномерно строго Γ_ν-непрерывна (следовательно, равномерно строго $\mathcal{B}$-непрерывна) и μ будет строго Γ_ν-непрерывна (следовательно, строго $\mathcal{B}$-непрерывна).

Доказательство. Положим $\varphi(E) = \lim_n \mu_n(E)$, $E \in \Gamma_\nu$. В силу предложения 5 φ будет мерой на Γ_ν. По теореме 13 последовательность $\{\mu_n\}_n$ равномерно ограничена на Γ_ν. Тогда φ ограниченная и, будучи скалярной, единственным образом продолжается с алгебры Γ_ν на порожденную σ-алгебру $\sigma(\Gamma_\nu)$, которая в нашем случае совпадает с $\mathcal{B}(X)$.[8] Обозначим это продолжение через μ.

Далее, пусть $C \in \mathcal{C}$, $Q \in \tau$ и $C \subset Q$. В силу свойства (S) существует множество $E \in \tau \cap \Gamma_\nu$ такое, что $C \subset E \subset Q$. Очевидно,

$$\inf\{|\mu_n(A) - \mu(A)| : A \in \tau,\ C \subset A \subset Q\} \leqslant |\mu_n(E) - \mu(E)|.$$

Так как $|\mu_n(E) - \mu(E)| \to 0$ при $n \to \infty$, то выполняется условие (4.1). Значит, последовательность $\{\mu_n\}_n$ слабо сходится к μ. Первое утверждение доказано.

Последнее утверждение теоремы сразу следует из теоремы 7.

Теорема 9. Пусть $X = [0; 1]^k$ с евклидовой метрикой, $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}$ — класс всех прямоугольников вида $\langle a_1; b_1\rangle \times \ldots \times \langle a_k; b_k\rangle$ в X и $\mathcal{D} = \{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n : E_n \in \mathcal{P}, diam \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} E_i \to 0, n \to \infty\}$. Пусть $\mu_n : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}$ — диффузные меры, $n \in \mathbb{N}$. Тогда если $\{\mu_n\}_n$ поточечно сходится на классе $\mathcal{D}$, то

1) для любого $\varepsilon > 0$ существует дизъюнктный набор $\{P_i\}_{i=1}^m \subset \mathcal{P}$ с $\bigcup\limits_{i=1}^{m} P_i = X$ и $\tilde{\mu}_n[\mathcal{B}](P_i) < \varepsilon$, $i \in \overline{1; m}$, $n \in \mathbb{N}$; следовательно, $\{\mu_n\}_n$ равномерно строго $\mathcal{B}$-непрерывна;

2)$\{\mu_n\}_n$ слабо сходится к некоторой диффузной мере μ.

Доказательство. Пункт 1 докажем с помощью теоремы 4. Пусть $\mathcal{R}$ — алгебра всех конечных объединений прямоугольников (можно считать их попарно диъюнктными) из $\mathcal{P}$. Очевидно, определяя $\mathcal{D}$, можно брать $E_n \in \mathcal{R}$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует набор $\mathcal{E}_n = \{E_i^n\}_{i=1}^{k_n} \subset \mathcal{P}$ с $\bigcup\limits_{i=1}^{k_n} E_i^n = X$ и $diam\mathcal{E}_n \leqslant 1/n$. Таким образом, $\mathcal{R}$ содержит систему $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_n\}_n$ с $diam\mathcal{E}_n \to 0$, $n \to \infty$.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Из регулярности и диффузности μ_n следует, что для любых $\varepsilon > 0$ и точки $x \in X$ существует $P \in \mathcal{P} \cap \tau(X)$ такой, что $x \in P$ и $\tilde{\mu}_n[\mathcal{B}](P) < \varepsilon$. Используя компактность X, легко убедиться, что μ_n строго $\mathcal{R}$-непрерывна. По теореме 4 $\{\mu_n\}_n$ равномерно строго $\mathcal{R}$-непрерывна. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует дизъюнктный набор $\{P_i\}_{i=1}^m \subset \mathcal{P}$ с $\bigcup\limits_{i=1}^{m} P_i = X$ и $\tilde{\mu}_n[\mathcal{R}](P_i) < \varepsilon$. Покажем, что $\tilde{\mu}_n[\mathcal{B}](P_i) < \varepsilon$. Для этого повторим доказательство импликации $(\gamma) \Longrightarrow (\beta)$ предложения 3, заменив μ, E_i, Γ_μ на μ_n, P_i, $\mathcal{R}$. Вместо свойства (S) используем то, что в силу компактности C найдется $E \in \mathcal{R}$[9] такое, что $C \subset E \subset Q$.

Пункт 2. Из равномерной строгой $\mathcal{B}$-непрерывности $\{\mu_n\}_n$ следует ее равномерная ограниченность. Применив разложение Жордана $\mu_n = \mu_n^+ - \mu_n^-$ [12, гл. III, пункт 3.1], получим равномерно ограниченные последовательности неотрицательных диффузных мер $\{\mu^+{}_n\}_n$ и $\{\mu^-{}_n\}_n$. По критерию Прохорова [10, теорема 8.6.2] найдется возрастающая последовательность номеров $\{n_i\}_i$ такая, что подпоследовательности $\{\mu^+{}_{n_i}\}_i$ и $\{\mu^-{}_{n_i}\}_i$ сходятся к некоторым неотрицательным мерам φ и ψ. Очевидно, $\{\mu_{n_i}\}_i$ слабо сходится к $\mu = \varphi - \psi$. Теперь для доказательства слабой сходимости $\{\mu_n\}_n$ к μ достаточно доказать фундаментальность $\{\mu_n\}_n$ в слабой топологии. Как уже отмечалось, если $C \in \mathcal{C}$, $Q \in \tau$ и $C \subset Q$, то существует $E \in \mathcal{R} \cap \tau(X)$ такое, что $C \subset E \subset Q$. Отсюда и поточечной фундаментальности $\{\mu_n\}_n$ на $\mathcal{R}$ следует выполнение условия (4.1). Значит, $\{\mu_n\}_n$ слабо сходится к μ.

[8]Очевидно, всегда $\sigma(\Gamma_\nu) \subset \mathcal{B}(X)$. Если же X — совершенно нормальное пространство, то любое множество Q из τ представимо в виде $Q = \cup_{n=1}^{\infty} C_n$, где $C_n \in \mathcal{C}$. Используя свойство (S) из предложения 1, получаем $Q = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, где $E_n \in \Gamma_\nu$. Отсюда легко следует, что $\sigma(\Gamma_\nu) = \mathcal{B}(X)$.

[9]Множество E можно выбрать из $\mathcal{R} \cap \tau(X)$, это уточнение мы используем ниже.

Осталось доказать диффузность μ. Опять применим теорему 4, изменив рассматриваемые классы множеств по сравнению с пунктом 1. Положим $\nu = \varphi + \psi$. Рассмотрим алгебру $\mathcal{R}^* = \mathcal{R} \cap \Gamma_\nu$ и $\mathcal{D}^* = \{ \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n : E_n \in \mathcal{R}^*, diam \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} E_i \to 0, n \to \infty\}$.

Далее понадобится следующий известный факт: пусть $x \in Q \in \tau(X)$; тогда существует $P \in \mathcal{P} \cap \tau(X)$ такое, что $x \in P \subset Q$ и $\nu(\partial P) = 0$. Действительно, можно построить континуум прямоугольников из $\mathcal{P} \cap \tau(X)$, содержащих точку x и содержащихся в Q, с попарно дизъюнктными границами. Множество таких границ с ненулевой мерой ν не более, чем счетное. Значит, существует искомый прямоугольник P. Используя доказанное утверждение, легко построить набор $\mathcal{E}_n^* = \{E_i^n\}_{i=1}^{k_n} \subset \mathcal{P}$ с $\bigcup\limits_{i=1}^{k_n} E_i^n = X$, где $E_i^n \in \mathcal{P} \cap \Gamma_\nu$ и $diam\mathcal{E}_n \leqslant 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $\mathcal{R}^*$ содержит систему $\mathcal{E}^* = \{\mathcal{E}_n^*\}_n$ с $diam\mathcal{E}_n^* \to 0$, $n \to \infty$.

Рассмотрим последовательность $\{\mu^+{}_{n_i}\}_i$. Легко показать, что каждая $\mu^+{}_{n_i}$ строго $\mathcal{R}^*$-непрерывна. Далее, очевидно, для $E \in \mathcal{R}^*$ имеем $\varphi(\partial E) = 0$. Так как $\{\mu^+{}_{n_i}\}_i$ сходится слабо к φ, то она сходится к φ поточечно на $\mathcal{R}^*$. Выполнены все условия теоремы 2. Значит, $\{\mu^+{}_{n_i}\}_i$ равномерно строго $\mathcal{R}^*$-непрерывна и для любого $\varepsilon > 0$ существует дизъюнктный набор $\{E_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{R}^*$ такой, что $\bigcup\limits_{j=1}^{m} E_j = X$ и $\mu_{n_i}(E_j) < \varepsilon$, $j \in \overline{1;m}$, $i \in \mathbb{N}$. Отсюда в силу поточечной сходимости $\{\mu^+{}_{n_i}\}_i$ на $\mathcal{R}^*$ к φ имеем $\varphi(E_j) < \varepsilon$, $j \in \overline{1;m}$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ φ диффузная. Аналогично, ψ диффузная. Значит, μ тоже диффузная.

5. Об ослаблении условия строгой непрерывности меры

Следующее условие является более слабым, чем строгая $\mathcal{A}$-непрерывность.

Определение 6. Функцию $\mu : \mathcal{A} \to G$ (здесь по-прежнему $\mathcal{A}$ — булева алгебра) называем слабо $\mathcal{A}$-непрерывной, если для любого элемента $a \in \mathcal{A}$ и любой окрестности U в G существует дизъюнктный набор $\{a_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$ с $\bigvee\limits_{i=1}^{n} a_i = a$ и $\mu(a_i) \in U$, $i \in \overline{1;n}$.

Для конечно-аддитивной $\mu : \mathcal{A} \to [0; +\infty)$ в силу ее монотонности условия строгой и слабой $\mathcal{A}$-непрерывности эквивалентны. В более общем случае справедлива

Теорема 10. Пусть $\{\mu_t\}_{t\in T}$, где $\mu_t : \mathcal{A} \to G$, — некоторое семейство слабо $\mathcal{A}$-непрерывных конечно-аддитивных мер. Тогда если семейство $\{\mu_t\}_{t\in T}$ равномерно исчерпывающее, то оно равномерно строго $\mathcal{A}$-непрерывное.

Доказательство. Пусть U — окрестность в G и $V = 2U$. Как и при доказательстве теоремы 1, будем говорить, что элемент $r \in \mathcal{A}$ обладает свойством $(*)$, если для любого дизъюнктного набора $\{r_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$ с $\bigvee\limits_{i=1}^{n} r_i = r$ найдутся такие μ_t и r_i, что $\tilde{\mu}_t[\mathcal{A}](r_i) \not\subset V$.

Предположим, что элемент e обладает свойством $(*)$. Положим $a_1 = e$. Существуют функция μ_{t_1} и элемент $c \in \mathcal{A}$ такие, что $c \leqslant a_1$ и $\mu_{t_1}(c) \notin V$. В силу слабой $\mathcal{A}$-непрерывности μ_{t_1} есть дизъюнктный набор $\{r_1, \ldots, r_k, r_{k+1}, \ldots, r_n\} \subset \mathcal{A}$ с $\bigvee\limits_{i=1}^{k} r_i = c$, $\bigvee\limits_{i=k+1}^{n} r_i = a_1 \setminus c$ и $\mu_{t_1}(r_i) \in U$, $i \in \overline{1;n}$. Так как a_1 обладает свойством $(*)$, то в этом наборе найдется элемент r_l, также обладающий свойством $(*)$. Обозначим его q. Очевидно, $\mu_{t_1}(q) \in U$. Если оказалось, что $q \leqslant c$, то полагаем $b_1 = c \setminus q$; если же $q \leqslant a_1 \setminus c$, то полагаем $b_1 = c$. Получаем, что $\mu_{t_1}(b_1) \notin U$, $b_1 \wedge q = 0$ и q обладает свойством $(*)$.

Положим $a_2 = q$. Рассмотрим a_2 вместо a_1. Повторим описанную выше процедуру. Продолжив процесс до бесконечности, получим дизъюнктную последовательность $\{b_i\}_i \subset \mathcal{A}$ и последовательность $\{\mu_{t_i}\}_i$ такие, что $\mu_{t_i}(b_i) \notin U$, это противоречит равномерной исчерпываемости семейства $\{\mu_t\}_{t\in T}$. Значит, элемент e не обладает свойством $(*)$. Теорема доказана.

Из теоремы 10 сразу следует

Предложение 7. Исчерпывающая слабо $\mathcal{A}$-непрерывная конечно-аддитивная мера $\mu : \mathcal{A} \to G$ будет строго $\mathcal{A}$-непрерывной.

Замечание 4. Теорема 1 остается справедливой, если условие "каждая μ_n строго $\mathcal{R}$-непрерывна" заменить на "каждая μ_n слабо $\mathcal{R}$-непрерывна и исчерпывается на $\mathcal{R}$"; если в теореме 2 от каждой μ_n требовать исчерпываемость и слабую $\mathcal{A}$-непрерывность, то теорема остается верной и, кроме того, последовательность $\{\mu_n\}_n$ будет равномерно исчерпывающей, следовательно, к свойствам функции μ добавится еще исчерпываемость и т. д. Нетрудно также показать, что предложение 3 останется верным, если в (β) и (γ) слово "строго" заменить на "слабо".

Теперь рассмотрим конечно-аддитивные меры со значениями в банаховом пространстве Z. Согласно теореме Дистеля — Файреса [5, гл. I, § 4, теорема 2], если существует ограниченная конечно-аддитивная мера $\mu : \mathcal{A} \to Z$ на алгебре $\mathcal{A}$, которая не является исчерпывающей, то Z содержит подпространство топологически изоморфное c_0; если $\mathcal{A}$ — это σ-алгебра, то при выполнении тех же условий Z содержит подпространство топологически изоморфное l_∞. Отсюда и из предложения 7 сразу следует

Предложение 8. Пусть $\mu : \mathcal{A} \to Z$ — ограниченная слабо $\mathcal{A}$-непрерывная конечно-аддитивная мера, где $\mathcal{A}$ — это алгебра и Z не содержит c_0. Тогда μ строго $\mathcal{A}$-непрерывна.

Вместе с тем справедливо

Предложение 9. Пусть $\mu : \mathcal{A} \to c_0$ — ограниченная слабо $\mathcal{A}$-непрерывная конечно-аддитивная мера, пусть алгебра $\mathcal{A}$ является $\mathcal{EAA}$-устойчивой, где $\mathcal{E}$ — некоторая система в $\mathcal{A}$. Тогда μ строго $\mathcal{A}$-непрерывна.

Доказательство. Пусть $\{\mu_n\}_n$ — последовательность проекций μ. Очевидно, каждая $\mu_n : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ — ограниченная слабо $\mathcal{A}$-непрерывная конечно-аддитивная мера; как скалярная ограниченная она будет исчерпывающей и, по предложению 7, строго $\mathcal{A}$-непрерывной. Далее, $\{\mu_n\}_n$ поточечно сходится на $\mathcal{A}$. Применим теорему 1, когда $\mathcal{R} = \mathcal{D} = \mathcal{A}$. Получим, что $\{\mu_n\}_n$ равномерно строго $\mathcal{A}$-непрерывна и, следовательно, μ строго $\mathcal{A}$-непрерывна.

Из теоремы Дистеля — Файреса и предложения 7 также следует

Предложение 10. Пусть $\mu : \mathcal{A} \to Z$ — ограниченная слабо $\mathcal{A}$-непрерывная конечно-аддитивная мера, где $\mathcal{A}$ — это σ-алгебра и Z не содержит l_∞. Тогда μ строго $\mathcal{A}$-непрерывна.

Мы не знаем, будет ли справедливо предложение 10, если требовать, чтобы алгебра $\mathcal{A}$ была $\mathcal{EAA}$-устойчивой, а не обязательно σ-алгеброй. Однако, например, на Γ_ν при определенных условиях этот результат распространяется, а именно справедливо

Предложение 11. Пусть $\mu : \Gamma_\nu \to Z$ — ограниченная слабо $\mathcal{A}$-непрерывная конечно-аддитивная мера. Здесь $\nu : \mathcal{B}(X) \to [0; +\infty)$ — регулярная слабо (= строго) $\mathcal{B}$-непрерывная конечно-аддитивная мера, X — нормальное пространство. Далее, пусть Z не содержит l_∞. Тогда μ строго $\mathcal{A}$-непрерывна.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что множество $F \in \Gamma_\nu$ обладает свойством $(*)$, если для любого дизъюнктного набора $\{F_i\}_{i=1}^n \subset \Gamma_\nu$ с $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i = F$ найдется такое F_i, что $\tilde{\mu}[\Gamma_\nu](F_i) \geqslant \varepsilon$.

Построим систему $\mathcal{E}$ как в доказательстве импликации (3) $\Longrightarrow$ (4) теоремы 5. Предположим, что множество X обладает свойством $(*)$. Положим $A_1 = X$. Без ограничения общности можно считать, что A_1 включено в некоторое $E_i^1 \in \mathcal{E}_1$. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 10, когда $\mu_{t_1} = \mu$, $U = \{z \in Z : ||z|| < \varepsilon,\ e = X$ и $a_1 = A_1$, найдем множества B_1 и A_2 из Γ_ν, такие что $B_1, A_2 \subset A_1$, $B_1 \cap A_2 =$ и A_2 обладает свойством $(*)$. Без ограничения общности можно считать, что A_2 включено в некоторое $E_i^2 \in \mathcal{E}_2$ Рассмотрим A_2 вместо A_1 и т. д. Продолжив процесс до бесконечности, получим дизъюнктную последовательность $\{B_k\}_k \subset \Gamma_\nu$ с $||\mu(B_k)|| \geqslant \varepsilon$ и $\bigcup\limits_{k \in J} B_k \in \Gamma_\nu$ для $J \subset \mathbb{N}$ (см. доказательство теоремы 5). С другой стороны, по теореме Дистеля — Файреса на σ-алгебре $\Sigma = \{\bigcup\limits_{k \in J} B_k \in \Gamma_\nu : J \subset \mathbb{N}\}$ функция μ является исчерпывающей. Полученное противоречие говорит о том, что предположение было неверно.

6. О равномерной ограниченности мер

В данном параграфе G — таг с квазинормой $|\cdot|$.

Лемма 2. Пусть алгебра $\mathcal{A}$ является $\mathcal{EAA}$-устойчивой, где $\mathcal{E}$ — некоторая система в $\mathcal{A}$. Пусть $\{b_n\}_n$ такая дизъюнктная последовательность в $\mathcal{A}$, что для любого n существует $e_i^n \in \mathcal{E}_n$ такое, что $b_k \leqslant e_i^n$ при всех $k \geqslant n$. Тогда существует дизъюнктная последовательность $\{a_m\}_m \subset \mathcal{A}$ такая, что все множества $J_m = \{n : b_n \leqslant a_m\}$ бесконечные, $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Представим $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} M_m$, где все M_m бесконечные и попарно дизъюнктные. По определению 2 для каждого M_m существуют элемент $d_m \in \mathcal{A}$ и бесконечное множество $P_m \subset M_m$, для которых $b_k \leqslant d_m$ при всех $k \in P_m$ и $b_k \wedge d_m = 0$ при всех $k \in \mathbb{N} \setminus P_m$. Преобразуем получившуюся последовательность $\{d_m\}_m$ в $\{a_m\}_m$, полагая $a_1 = d_1$, $a_m = d_m \setminus (\bigvee\limits_{i=1}^{m-1} d_i)$, $m \in \overline{2;\infty}$. Очевидно, $\{a_m\}_m$ искомая.

Теорема 11. Пусть алгебра $\mathcal{A}$ является $\mathcal{EAA}$-устойчивой, где $\mathcal{E}$ — некоторая система в $\mathcal{A}$. Пусть $\mu_n : \mathcal{A} \to G$ — исчерпывающие конечно-аддитивные меры, $n \in \mathbb{N}$. Тогда если последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно ограничена на $\mathcal{A}$, то она равномерно ограничена на $\mathcal{A}$.

Доказательство. Далее обозначаем $\mathcal{L}_a = \{b \in \mathcal{A} : b \leqslant a\}$, $a \in \mathcal{A}$. Говорим, что элемент $a \in \mathcal{A}$ обладает свойством $(\diamond)$, если $\{\mu_n\}_n$ не является равномерно ограниченной на $\mathcal{L}_a$.

Часть 1. Сначала докажем, что если элемент $a \in \mathcal{A}$ обладает свойством $(\diamond)$, то существует дизъюнктная последовательность $\{a_m\}_m \subset \mathcal{L}_a$ такая, что каждый элемент a_m обладает свойством $(\diamond)$. Действительно, в этом случае можно построить последовательность $\{b_n\}_n \subset \mathcal{L}_a$, удовлетворяющую условиям леммы 2, и последовательность $\{\nu_n\}_n \subset \{\mu_n\}_n$ такие, что $|\nu_n(b_n)| > n$, $n \in \mathbb{N}$ (см. часть 2). Далее найдем последовательность $\{a_m\}_m$ согласно лемме 2; можно считать все $a_m \leqslant a$. Очевидно, $\{a_m\}_m$ искомая.

Часть 2. Предположим, что элемент e обладает свойством $(\diamond)$. Тогда некоторый элемент семейства $\{e_i^1 \wedge e_j^2,\ i \in \overline{1;k_1},\ j \in \overline{1;k_2}\}$ тоже обладает этим свойством. Обозначим его a_1. В силу поточечной ограниченности $\{\mu_n\}_n$ существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\sup_n |\mu_n(a_1)| < k$. Так как a_1 обладает свойством $(\diamond)$, то существуют $c \in \mathcal{L}_{a_1}$ и $\nu_1 \in \{\mu_n\}_n$ такие, что $|\nu_1(c)| > (k+1)$. Тогда, очевидно, $|\nu_1(c)| > 1$, $|\nu_1(e \setminus c)| > 1$ и хотя бы один из элементов c и $e \setminus c$ обладает свойством $(\diamond)$. Обозначим этот элемент q, а другой b_1. В силу части 1 существует дизъюнктная последовательность $\{q_m\}_m \subset \mathcal{L}_q$, где каждый элемент обладает свойством $(\diamond)$. Так как ν_1 исчерпывающая, то найдется q_l с $\tilde{\nu}_1[\mathcal{A}](q_l) < 1$. Очевидно, среди элементов семейства $\{q_l \wedge e_i^3 \wedge e_j^4,\ i \in \overline{1;k_3},\ j \in \overline{1;k_4}\}$ найдется элемент, обладающий свойством $(\diamond)$. Обозначим его a_2. Рассмотрим a_2 вместо a_1 и так далее.

Допустим, что на m-м шаге получили элементы $a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, b_1, \ldots, b_m$ в $\mathcal{A}$ и функции $\nu_1, \ldots, \nu_m \in \{\mu_n\}_n$ такие, что:

– для всех $i \in \overline{1;m}$ справедливы неравенства

(B1) $a_i \geqslant a_{i+1}, \qquad b_i \leqslant a_i \setminus a_{i+1};$

– для всех $i \in \overline{1;m+1}$

(B2) a_i мажорируется некоторым элементом из $\mathcal{E}_{2i-1}$ и некоторым элементом из $\mathcal{E}_{2i}$;

– для всех $i \in \overline{1;m}$ выполняется

(B3) $|\nu_i(\bigvee_{j\in J} b_j \bigvee b_i)| > i$ для любого $J \subset \overline{1;i-1}$;

– для всех $i \in \overline{1;m}$ справедливо неравенство

(B4) $\tilde{\nu}_i[\mathcal{A}](a_{i+1}) < 1$;

(B5) элемент a_{m+1} обладает свойством $(\diamond)$.

Сделаем $(m+1)$-й шаг. В силу поточечной ограниченности $\{\mu_n\}_n$ найдется $k \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sup\{|\mu_n(\bigvee_{j\in J} b_j)|,\ \ |\mu_n(a_{m+1})|,\ \ n \in \mathbb{N},\ \ J \subset \overline{1;m}\} > k. \tag{6.1}$$

Так как a_{m+1} обладает свойством $(\diamond)$, то существуют $c \in \mathcal{L}_{a_{m+1}}$ и $\nu_{m+1} \in \{\mu_n\}_n$ такие, что $|\nu_{m+1}(c)| > 2k + m + 1$. Очевидно, $|\nu_{m+1}(c)| > k+m+1$, $|\nu_{m+1}(a_{m+1} \setminus c)| > k+m+1$ и хотя бы один из элементов c и $a_{m+1} \setminus c$ обладает свойством $(\diamond)$. Обозначим этот элемент q, а другой b_{m+1}. Итак,

$$|\nu_{m+1}(b_{m+1})| > k + m + 1. \tag{6.2}$$

Из (6.1) и (6.2) получаем, что $|\nu_{m+1}(\bigvee_{j\in J} b_j \bigvee b_{m+1})| > (m+1)$, $J \subset \overline{1;m}$.

Подобно тому как это делалось на первом шаге, найдем обладающий свойством $(\diamond)$ элемент $q_l \leqslant q$ такой, что $\tilde{\nu}_{m+1}[\mathcal{A}](q_l) < 1$.

Среди элементов $\{q_l \wedge e_i^{2m+1} \wedge e_j^{2m+2},\ i \in \overline{1;k_{2m+1}},\ j \in \overline{1;k_{2m+2}}\}$ найдем обладающий свойством $(\diamond)$. Обозначим его a_{m+2}.

Продолжив процесс до бесконечности, получим убывающую последовательность $\{a_i\}_i$ и дизъюнктную последовательность $\{b_i\}_i$ в $\mathcal{A}$, а также последовательность $\{\nu_i\}_i \subset \{\mu_i\}_i$ такие, что выполняются условия (B1)–(B4).

Теперь дословно повторим текст доказательства теоремы 1, окруженный знаками $\bigtriangledown\bigtriangledown$ и $\bigtriangleup\bigtriangleup$, заменяя $\mathcal{R}$ и $\mathcal{D}$ на $\mathcal{A}$, условие (C5) на (B4) и равенство (2.1) на следующее равенство:

$$\nu_{i_k}(z) = \nu_{i_k}(x_k \vee b_{i_k}) + \nu_{i_k}(y_k). \tag{6.3}$$

Из условия (B3) и равенства (6.3) получаем, что $|\nu_{i_k}(z)| > (i_k - 1)$, $k \in \mathbb{N}$ (заметим, что последовательность $\{i_k\}_k$ возрастающая). Это противоречит поточечной ограниченности $\{\mu_n\}_n$. Значит, элемент e не обладает свойством $(\diamond)$.

Теорема 12. Пусть алгебра $\mathcal{A}$ является $\mathcal{EAA}$-устойчивой, где $\mathcal{E}$ — некоторая система в $\mathcal{A}$. Пусть $\mu_n : \mathcal{A} \to G$ — строго $\mathcal{A}$-непрерывные конечно-аддитивные меры, $n \in \mathbb{N}$. Тогда если последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно ограничена на $\mathcal{A}$, то она равномерно ограничена на $\mathcal{A}$.

Доказательство. Доказательство повторяет часть 2 теоремы 11, за исключением того, что q_l находится из условия строгой $\mathcal{A}$-непрерывности функции ν_{m+1} (а не исчерпываемости).

Замечание 3. Очевидно, теоремы 11 и 12 остаются верны, если последовательность $\{\mu_n\}_n$ заменить на семейство $\{\mu_t\}_{t\in T}$.

На основании теоремы 11 и замечания 5 можно, например, сформулировать следующую теорему, доказанную в [13, теорема 4.5] для алгебры $\mathcal{A}$ с SIP и обобщающую [14, предложение 3.3] в случае $\mathcal{A} = \Gamma_\nu$.

Теорема 13. Пусть алгебра $\mathcal{A}$ обладает SIP или $\mathcal{A} = \Gamma_\nu$, где $\nu : \mathcal{B}(X) \to [0;+\infty)$ — регулярная строго $\mathcal{B}$-непрерывная конечно-аддитивная мера, X — нормальное пространство. Пусть $\mu_t : \mathcal{A} \to G$ —

исчерпывающие конечно-аддитивные меры, $t \in T$. Тогда из поточечной ограниченности семейства $\{\mu_t\}_t$ на $\mathcal{A}$ следует его равномерная ограниченность.

Литература

[1] Bhaskara Rao M., Bhaskara Rao K.P.S. Charges on Boolean algebras and almost discrete spaces // Mathematika. 1973. V. 20. Issue 12. P. 214–223. DOI: http://dx.doi.org/10.1112/S0025579300004800

[2] Климкин В.М., Свистула М.Г. О поточечном пределе векторных зарядов, обладающих свойством Сакса // Математические заметки. 2003. Т. 74, № 3. С. 407–415. DOI: http://doi.org/10.4213/MZM274.

[3] Luschgy H., Solecki S. Strong continuity of invariant probability charges // Colloquium Mathematicum. 2004. Vol. 101. Issue 1. P. 135–142. DOI: http://dx.doi.org/10.4064/cm101-1-9.

[4] Cavaliere P., de Lucia P., Weber H. Approximation of finitely additive functions with values in topological groups // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen = Journal of analysis and its applications. 2013. Vol. 32, Issue 4. P. 477–495. DOI: http://dx.doi.org/10.4171/ZAA/1495.

[5] Diestel J., Jr. Uhl J. Vector measures. Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 15. Providence: American Mathematical Society, 1977. 319 p. Available at: https://www.ams.org/books/surv/015/surv015-endmatter.pdf.

[6] Freniche F.J. The Vitali-Hahn-Saks theorem for Boolean algebras with the subsequential interpolation property // Proceedings of the American Mathematical Society. 1984. Vol. 92, Issue 3. P. 362–366. DOI: http://doi.org/10.1090/S0002-9939-1984-0759653-1.

[7] Musial K. Absolute Continuity and the Range of Group Valued Measure // Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. Serie de sciences math., astr. et phys., 1973, vol. XXI, no. 2, pp. 105–113. URL: https://www.researchgate.net/profile/Kazimierz-Musial-2/publication/284178504_Absolute_Continuity_and_the_Range_of_Group_Yalued_Measure/links/564e305d08ae1ef9296c67ad/Absolute-Continuity-and-the-Range-of-Group-Yalued-Measure.pdf.

[8] Алексюк В.Н. Функции множеств. Ленинград: ЛГПИ, 1982. 78 с.

[9] Климкин В.М. Введение в теорию функций множества. Саратов: Изд-во Саратовского университета, Куйбышевский филиал, 1989, 210 с. URL: https://bookree.org/reader?file=583121&pg=1.

[10] Богачев В.И. Основы теории меры. Москва–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2003. Т. 2. 576 с. URL: https://bookree.org/reader?file=507098.

[11] Ширяев А.Н. Вероятность. Москва: Наука, 1980. 574 с. URL: https://bookree.org/reader?file=470836.

[12] Богачев В.И. Основы теории меры. Москва–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2003. Т. 1. 544 с. URL: https://bookree.org/reader?file=443457.

[13] Candeloro D. Alcuni teoremi di uniforme limitatezza // Rendiconti dell'Accademia Nazionale detta dei XL, 1985, vol. 9, pp. 249–260. Available at: https://www.researchgate.net/publication/237311429_Alcuni_teoremi_di_uniforme_limitatezza.

[14] Schachermayer W. On some classical measure-theoretic theorems for non-sigma-complete Boolean algebras. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 1983, 214, pp. 1–36. URL: https://eudml.org/doc/268517.

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-7-22

Submited: 03.05.2022
Revised: 14.06.2022
Accepted: 14.11.2022

M.G. Svistula
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: marinasvistula@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2444-5605
T.A. Sribnaya
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: sribnayata@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1197-5650

PROPERTIES OF MEASURES ON "STABLE" BOOLEAN ALGEBRAS

ABSTRACT
We study the properties of finitely additive measures with values in a topological abelian group and defined on a wide class of Boolean algebras, which covers algebras with SIP and algebras Γ_ν (if ν satisfies some conditions). We establish sufficient conditions for the sequences of such measures to be uniformly strongly

continuous. Novelty in this theme is that we do not require uniform exhaustivity and, in some theorems, even exhaustivity for measures. Applications to weak convergence of measures are presented.

Key words: boolean algebra; topological abelian group; strongly continuous measure; exhaustive measure; uniform exhaustibility of the family of measures; uniform boundedness of the family of measures; poor convergence of measures.

Citation. Svistula M.G., Sribnaya T.A. Properties of measures on "stable" boolean algebras. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 1–2, pp. 7–22. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-7-22. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Marina G. Svistula — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Functional Analysis and Function Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Tatyana A. Sribnaya — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Functional Analysis and Function Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

[1] Bhaskara Rao M., Bhaskara Rao K.P.S. Charges on Boolean algebras and almost discrete spaces. *Mathematika*, 1973, vol. 20, issue 02, pp. 214–223. DOI: http://dx.doi.org/10.1112/S0025579300004800.

[2] Klimkin V.M., Svistula M.G. On the Pointwise Limit of Vector Charges with the Saks Property. *Mathematical Notes*, 2003, vol. 74, issue 3, pp. 407–415. DOI: https://doi.org/10.4213/MZM274. (In Russ.)

[3] Luschgy H., Solecki S. Strong continuity of invariant probability charges. *Colloquium Mathematicum*, 2004, vol. 101, issue 1, pp. 135–142. DOI: http://dx.doi.org/10.4064/cm101-1-9.

[4] Cavaliere P., de Lucia P., Weber H. Approximation of finitely additive functions with values in topological groups. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen = Journal of analysis and its applications*, 2013, vol. 32, no. 4, pp. 477–495. DOI: http://dx.doi.org/10.4171/ZAA/1495.

[5] Diestel J., Jr. Uhl J. Vector measures. Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 15. Providence: American Mathematical Society, 1977, 319 p. Available at: https://www.ams.org/books/surv/015/surv015-endmatter.pdf.

[6] Freniche F.J. The Vitali-Hahn-Saks theorem for Boolean algebras with the Subsequential Interpolation Property. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1984, vol. 92, issue 3, pp. 362–366. DOI: http://doi.org/10.1090/S0002-9939-1984-0759653-1.

[7] Musial K. Absolute Continuity and the Range of Group Valued Measure. *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. Serie de sciences math., astr. et phys.*, 1973, vol. XXI, no. 2, pp. 105–113. Avaiilable at: https://www.researchgate.net/profile/Kazimierz-Musial-2/publication/284178504_Absolute_Continuity_and_the_Range_of_Group_Yalued_Measure/links/564e305d08ae1ef9296c67ad/Absolute-Continuity-and-the-Range-of-Group-Yalued-Measure.pdf.

[8] Aleksyuk V.N. Set functions. Leningrad: LGPI, 1982, 78 p. (In Russ.)

[9] Klimkin V.M. Introduction to the theory of set functions. Saratov: Izd-vo Saratovskogo universiteta, Kuibyshevskii filial, 1989, 210 p. Available at: https://bookree.org/reader?file=583121&pg=1. (In Russ.)

[10] Bogachev V.I. Fundamentals of measure theory. Moscow-Izhevsk: NITs "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika", 2003, vol. 2, 576 p. Available at: https://bookree.org/reader?file=507098. (In Russ.)

[11] Shiryaev A.N. Probability. Moscow: Nauka, 1980, 574 p. Available at: https://bookree.org/reader?file=470836. (In Russ.)

[12] Bogachev V.I. Fundamentals of measure theory. Moscow-Izhevsk: NITs "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika", 2003, vol. 1, 544 p. Available at: https://bookree.org/reader?file=443457. (In Russ.)

[13] Candeloro D. Alcuni teoremi di uniforme limitatezza. *Rendiconti dell'Accademia Nazionale detta dei XL*, 1985, vol. 9, pp. 249–260. Available at: https://www.researchgate.net/publication/237311429_Alcuni_teoremi_di_uniforme_limitatezza.

[14] Schachermayer W. On some classical measure-theoretic theorems for non-sigma-complete Boolean algebras. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 1983, 214, pp. 1–36. Available at: https://eudml.org/doc/268517.