Научная статья
DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-23-31

УДК 517.982.22

Дата: поступления статьи: 30.08.2022
после рецензирования: 05.10.2022
принятия статьи: 14.11.2022

***С.И. Страхов***
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: www.stepan121@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2905-9124

# КАК РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ПОДПРОСТРАНСТВАМИ В МЕТРИКЕ СФЕРИЧЕСКОГО РАСТВОРА ВЛИЯЕТ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКУЮ СТРУКТУРУ СИММЕТРИЧНОГО ПРОСТРАНСТВА[1]

**АННОТАЦИЯ**
Найдена связь между метрикой сферического раствора на пространстве всех подпространств симметричного пространства и некоторой числовой характеристикой подпространства. Известно, что, например, в $L_1$ эта характеристика принимает лишь два значения (т. е. это бинарное пространство), а в $L_2$ бесконечно много значений. С помощью найденной связи обобщены необходимые условия бинарности симметричного пространства.

**Ключевые слова:** симметричное пространство; пространство Орлича; сферический раствор между подпространствами; дизъюнктные функции; независимые функции; сильно вложенное подпространство.

**Цитирование.** Страхов С.И. Как расстояние между подпространствами в метрике сферического раствора влияет на геометрическую структуру симметричного пространства // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2022. Т. 28, № 1–2. С. 23–31. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-23-31.

**Информация о конфликте интересов:** автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.


*Степан Игоревич Страхов* — ассистент кафедры функционального анализа и теории функций, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

## Введение

В статье мы изучаем геометрическую структуру симметричных пространств (с.п.), рассматривая следующую числовую характеристику. Пусть $X$ — с.п., $H \subset X$ — его подпространство и

$$\eta_X(H) = \lim_{\tau \to 0} \sup_{x \in H, \|x\|=1} \sup_{e \subset [0,1], \mu(e) \leqslant \tau} \|x\chi_e\|_X. \tag{1}$$

Подпространства с.п. разделяют на два противоположных класса: *сильно вложенные*, т. е. такие, в которых сходимость по норме эквивалентна сходимости по мере, и подпространства, содержащие последовательности почти дизъюнктных функций (все определения см. в следующем параграфе). Следующие три простых факта дают некоторое понимание о значениях $\eta_X$:

1) если $H \subset X$ содержит почти дизъюнктную последовательность, то $\eta_X(H) = 1$;

[1]Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-878).

2) если $\eta_X(H) < 1$, то $H$ — сильно вложенное подпространство;

3) $\eta_X(H) = 0$, если и только если функции единичного шара $B_H$ имеют равностепенно непрерывные нормы, т. е.

$$\lim_{\tau \to 0} \sup_{e \subset [0,1]: \mu(e) \leqslant \tau} \sup_{x \in B_H} \|x\chi_e\|_X = 0.$$

Обратные импликации к пунктам 1) и 2) не всегда имеют место, более подробно см. [1].

Мы называем с.п. $X$ бинарным, если $\eta_X$ принимает лишь два значения 0 и 1. В статье [2] показано, что при $p \in [1,2)$ пространства Лебега $L_p$ бинарны, а при $p > 2$ характеристика (1) принимает бесконечно много значений в $L_p$. Этот результат интересно сравнить с тем фактом, что геометрическая структура пространства $L_p$ в случае $p \in [1,2)$ сложнее, чем при $p \geqslant 2$. Также стоит отметить, что бинарность $L_p$ при $p \in [1,2)$ в других терминах и с помощью иной техники доказана в [3, теорема 13].

Более того, в [2] были даны достаточные условия небинарности с.п.: если в с.п. функции Радемахера эквивалентны стандартному базису $l_2$ и существует нормированная дизъюнктная последовательность $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которой выполняется неравенство

$$\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i\|_X \leqslant \|(a_i)\|_{l_2}, \tag{2}$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots$, то с.п. $X$ небинарно. Мы обобщим эти достаточные условия: каждому с.п. можно поставить в соответствие два множества пространств последовательностей: первое из них связано с подпространствами, содержащими последовательности почти дизъюнктных функций, а второе с подпространствами, единичный шар которых имеет равностепенно непрерывные нормы. Если эти множества пересекаются, то с.п. небинарно.

При доказательстве этого результата мы использовали связь характеристики (1) с так называемой метрикой раствора на пространстве всех подпространств с.п. $X$. Для подпространства $H \subset X$ значение $\eta_X(H)$ сверху и снизу оценивается через расстояния в этой метрике до множества подпространств с крайними значениями рассматриваемой характеристики (см. неравенство (4)).

## 1. Предварительные сведения

Банахово пространство $X$ измеримых на $[0,1]$ функций называется *симметричным* или *перестановочно-инвариантным*, если

1) оно идеально, т. е. из $|x(t)| \leqslant |y(t)|$ для п.в. $t \in [0,1]$, измеримости $x$ и $y \in X$ следует: $x \in X$ и $\|x\|_X \leqslant \|y\|_X$;

2) из *равноизмеримости* функций $x$ и $y$, т. е. равенства

$$\mu(\{t \in [0,1] : |y(t)| > u\}) = \mu(\{t \in [0,1] : |x(t)| > u\}), \ \ \forall u > 0,$$

где $\mu(e)$ — мера Лебега множества $e \subset \mathbb{R}$, и $y \in X$ вытекает $x \in X$ и $\|x\|_X = \|y\|_X$.

В частности, любая измеримая на $[0,1]$ функция $x(t)$ равноизмерима со своей невозрастающей непрерывной слева *перестановкой*

$$x^*(t) := \inf\{u \geqslant 0 \ : \ \mu(\{s \in [0,1] : |x(s)| > u\}) < t\}, \ \ 0 < t \leqslant 1.$$

Хорошо известно, что всякое с.п. является промежуточным между $L_\infty$ и $L_1$, т.е. $L_\infty \subset X \subset L_1$.

Стандартный пример с.п. — пространство Лебега $L_p$, $p \in [1, \infty]$. Естественным обобщением $L_p$ служат так называемые пространства Орлича. Функция $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ называется функцией Орлича, если она строго возрастает, непрерывна, $\lim_{t\to\infty} F(t) = \infty$, $F(0) = 0$ и $F(1) = 1$. Пространство Орлича $L_F$ состоит из всех измеримых на $[0,1]$ функций $x = x(t)$ таких, что норма Люксембурга

$$||x||_{L_F} = \inf\left\{u > 0 : \int_0^1 F\left(\frac{|x(t)|}{u}\right) dt \leqslant 1\right\}$$

конечна. Аналогично вводится понятие пространств Орлича последовательностей $l_F$. Последовательность вещественных чисел $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in l_F$ тогда и только тогда, когда

$$||(a_n)||_{l_F} \ = \ \inf\left\{u > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{|a_n|}{u}\right) \ \leqslant 1\right\} < \infty.$$

В работе мы будем рассматривать лишь сепарабельные с.п. Пространство Орлича $L_F$ сепарабельно тогда и только тогда, когда $F \in \Delta_2^{\infty}$, т. е. существует $t_0 > 0$ такое, что для всех $t > t_0$ имеет место неравенство $F(2t) \leqslant KF(t)$, для некоторой константы $K > 0$.

Ещё одним классическим примером с.п. служат пространства Лоренца. Пусть $\varphi(t)$ — положительная непрерывная возрастающая вогнутая функция на $[0,1]$ такая, что $\varphi(0)=0$. Пространство Лоренца $\Lambda_p(\varphi)$ состоит из всех измеримых на $[0,1]$ функций $x=x(t)$ таких, что норма

$$\|x\|_{\Lambda_p(\varphi)} = \left(\int\limits_0^1 \big(x^*(t)\big)^p d\varphi(t)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Для функции Орлича $F$ определим следующие подмножества пространства $C[0,1]$:

$$E^\infty_{F,A} = \overline{\Big\{G(x) = \frac{F(xy)}{F(y)} \ : y > A > 0\Big\}}, \quad C^\infty_{F,A} = \overline{convE^\infty_{F,A}},$$

$$E^\infty_F = \bigcap_{A>0} E^\infty_{F,A}, \quad C^\infty_F = \bigcap_{A>0} C^\infty_{F,A},$$

где замыкание берётся в $C[0,1]$. Как легко видеть, множество $C^\infty_F$ состоит из выпуклых возрастающих функций на $[0,1]$.

С помощью этих множеств изучают геометрическую структуру подпространств пространства $L_F$, порождённых последовательностью дизъюнктных функций, а именно: в сепарабельном пространстве $L_F$ существует последовательность дизъюнктных функций $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, которая эквивалентна каноническому базису пространства Орлича последовательностей $l_G$, если и только если $G \in C^\infty_F$ (см. [4, предложение 4]).

Если $F(t)=t^p$ (случай, когда пространство Орлича совпадает с пространством Лебега $L_p$), то $E^\infty_{F,A} = E^\infty_F = C^\infty_{F,A} = C^\infty_F = \{t^p\}$. Более того, для произвольной функции Орлича $F$ множество $C^\infty_F$ всегда содержит некоторую степенную функцию. Точнее, степенная функция $t^p \in C^\infty_F$, если и только если $p \in [\alpha^\infty_F, \beta^\infty_F]$, где $\alpha^\infty_F$ и $\beta^\infty_F$ — индексы Орлича — Матушевской, определяемые следующим образом:

$$\alpha^\infty_F = \sup\big\{p : \sup_{x,y\geqslant 1} \frac{F(x)y^p}{F(xy)} < \infty\big\}, \qquad \beta^\infty_F = \inf\big\{p : \inf_{x,y\geqslant 1} \frac{F(x)y^p}{F(xy)} > 0\big\}.$$

**Определение 1.** Пусть $X$ — с.п. Последовательность $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset X$, $\|g_n\|_X = 1$, называется *почти дизъюнктной*, если $\|g_n - f_n\|_X \to 0$ при $n \to \infty$ для некоторой дизъюнктной последовательности $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X$.

Примером сильно вложенного подпространства служит замкнутая линейная оболочка функций Радемахера $[r_n]$. Напомним, что для $n \in \mathbb{N}$ функции Радемахера задаются как

$$r_n(t) = sign\sin(2^n\pi t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Очевидно, что $|r_n(t)| \leqslant 1$, $n=1,2,\ldots$, $t\in[0,1]$ и, следовательно, каждое с.п. $X$ содержит все функции Радемахера. Из неравенства Хинчина (см., например, [5]) легко вывести, что $[r_n]$ сильно вложенное подпространство, например, во всех $L_p$, $p\in[1,\infty)$.

Пусть $X$ — с.п. и $\mathfrak{R}$ — множество всех замкнутых подпространств из $X$. Как показано в работе [6], $\mathfrak{R}$ — полное метрическое пространство с метрикой

$$\widetilde{\Theta}(H,E) = \max\Big\{\sup_{h\in S_H}\rho(h,S_E), \sup_{f\in S_E}\rho(f,S_H)\Big\},$$

где $H, E$ — подпространства из $X$, $S_H = \{x\in H : \|x\|_X = 1\}$, а $\rho$ — стандартное расстояние от элемента до множества в нормированном пространстве. Если $H$ или $E$ равно $\{0\}$, то положим $\widetilde{\Theta}(H,E) = 2$. Введённую метрику называют сферическим раствором. На $\mathfrak{R}$ ещё рассматривают и обычный раствор между подпространствами:

$$\Theta(H,E) = \max\Big\{\sup_{h\in S_H}\rho(h,E), \sup_{f\in S_E}\rho(f,H)\Big\},$$

который не всегда является метрикой на $\mathfrak{R}$, но он более удобен в вычислениях, а главное имеют место неравенства:

$$\frac{\widetilde{\Theta}(H,E)}{2} \leqslant \Theta(H,E) \leqslant \widetilde{\Theta}(H,E). \tag{3}$$

## 2. Основные результаты

Следующий результат говорит о том, что характеристика $\eta_X$ является непрерывной функцией на $(\mathfrak{R}, \widetilde{\Theta})$.

**Теорема 1.** Пусть $X$ — с.п., $H$ и $E$ — подпространства из $X$. Тогда

$$\Big|\eta_X(H) - \eta_X(E)\Big| \leqslant \widetilde{\Theta}(H, E).$$

**Доказательство.** Пусть $\eta_X(H) = \alpha$, $\eta_X(E) = \beta$. Из формулы (1) следует, что существуют последовательности $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \in S_H$ и $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$, $\mu(e_n) \to 0$ такие, что

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \|h_n \chi_{e_n}\|.$$

По определению сферического раствора имеем

$$\sup_{h \in S_H} \rho(h, S_E) \leqslant \widetilde{\Theta}(H, E),$$

откуда для всех $n = 1, 2, \ldots$

$$\rho(h_n, S_E) \leqslant \widetilde{\Theta}(H, E).$$

В силу определения инфимума для произвольного $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S_E$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется

$$\|h_n - f_n\| \leqslant \rho(h_n, S_E) + \varepsilon \leqslant \widetilde{\Theta}(H, E) + \varepsilon.$$

Тогда, применяя неравенство треугольника, идеальность нормы и последнее неравенство, получим

$$\begin{aligned}
\alpha &= \lim_{n\to\infty} \|h_n \chi_{e_n}\| = \lim_{n\to\infty} \|h_n \chi_{e_n} + f_n \chi_{e_n} - f_n \chi_{e_n}\| \leqslant \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} \|f_n \chi_{e_n}\| + \lim_{n\to\infty} \|\big(h_n - f_n\big)\chi_{e_n}\| \leqslant \\
&\leqslant \eta_X(E) + \lim \|h_n - f_n\| \leqslant \beta + \widetilde{\Theta}(H, E) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Аналогично можно получить оценку для $\beta:$

$$\beta \leqslant \alpha + \widetilde{\Theta}(H, E) + \varepsilon,$$

т. е. для всякого $\varepsilon > 0$

$$|\alpha - \beta| \leqslant \widetilde{\Theta}(H, E) + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon$ получаем утверждение теоремы.

**Следствие 1.** Пусть $X$ — с.п. и $E, H, K$ — подпространства из $X$. Тогда

$$\eta_X(K) - \widetilde{\Theta}(K, H) \leqslant \eta_X(H) \leqslant \eta_X(E) + \widetilde{\Theta}(H, E).$$

В частности, если $E_1$ — подпространство, содержащее почти дизъюнктную последовательность (т. е. $\eta_X(E_1) = 1$), а $E_0$ — подпространство, функции единичного шара которого имеют равностепенно непрерывные нормы (т. е. $\eta_X(E_0) = 0$), то для произвольного подпространства $H \subset X$

$$1 - \widetilde{\Theta}(H, E_1) \leqslant \eta_X(H) \leqslant \widetilde{\Theta}(H, E_0). \tag{4}$$

В [7] показано, что $\eta_X(E) = 0$, если $E$ — конечномерное подпространство сепарабельного с.п. $X$. Отсюда может возникнуть идея о том, что с помощью конечномерных подпространств, применяя правую часть неравенства (4), можно получать верхнюю оценку для $\eta_X(H)$ в случае бесконечномерного подпространства $H$. Но это невозможно, так как метрика сферического раствора между подпространствами различных размерностей больше либо равна 1 (см. [8, с. 87]).

Следующая теорема обобщает результат из работы [2], давая более общие достаточные условия небинарности с.п. Мы немного упростили формулировку, а именно теорема остаётся верной, если вместо пространств последовательностей $l_G$ и $l_F$ взять банаховы пространства последовательностей с базисами, удовлетворяющими условиям теоремы.

**Теорема 2.** Пусть $G$ и $F$ — функции Орлича такие, что $l_G \subset l_F$ и $C\|x\|_{l_G} \geqslant \|x\|_{l_F}$ для всех $x \in l_G$. Предположим, что в с.п. $X$ существуют базисные последовательности $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $\eta_X([g_n]) = 0$, $\|g_n\| = 1$, $supp\ g_n \subset [0, \frac{1}{2}]$, n = 1,2, ..., и существует $A > 0$ такое, что для всех $\beta_n \in \mathbb{R}$ выполняется:

$$A\|(\beta_n)\|_{l_G} \leqslant \|\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n g_n\|_X.$$

2) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность дизъюнктных функций, $\|f_n\| = 1$, $supp\ f_n \subset [\frac{1}{2}, 1]$, n = 1,2, ..., и существует $D > 0$ такое, что для всех $\beta_n \in \mathbb{R}$ выполняется:

$$\|\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n f_n\|_X \leqslant D\|(\beta_n)\|_{l_F}.$$

Тогда $X$— небинарное пространство.

**Доказательство.**

Пусть $\lambda\in(0,\infty)$. Построим подпространство $H_\lambda\subset X$ такое, что

$$\frac{\lambda}{1+\lambda}\leqslant \eta_X(H_\lambda)\leqslant 2\lambda\frac{DC}{A}. \tag{5}$$

Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательности из условия теоремы. Рассмотрим функции $h_n=g_n+$ $+\lambda f_n$, $n=1,2,\ldots$ и обозначим

$$H_\lambda := [h_n].$$

Так как функции $f_n$, $n=1,2,\ldots$, попарно дизъюнктны, то

$$\eta_X(H_\lambda)\geqslant \lim_{n\to\infty}\frac{\|h_n\chi_{supp f_n}\|}{\|h_n\|}\geqslant \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda\|f_n\|}{\|g_n\|+\lambda\|f_n\|}=\frac{\lambda}{1+\lambda}.$$

По теореме 1 и неравенству (3) получим верхнюю оценку через раствор:

$$\eta_X(H_\lambda)\leqslant 2\Theta(H_\lambda,[g_n]). \tag{6}$$

Для того чтобы оценить сверху $\Theta(H_\lambda,[g_n])$, рассмотрим сначала

$$\sup_{h\in H_\lambda,\|h\|=1}\rho(h,[g_n]).$$

Пусть $h\in S_{H_\lambda}$, т. е. для некоторых $\beta_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2\ldots$

$$h:=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i(g_i+\lambda f_i)$$

и $\|h\|=1$. Тогда из условия теоремы и идеальности нормы получим

$$1=\|\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i(g_i+\lambda f_i)\|\geqslant\|\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i g_i\|\geqslant A\|(\beta_i)\|_{l_G}.$$

В частности, отсюда следует, что функция $\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i g_i$ принадлежит $[g_n]$. Тогда из последней оценки вытекает:

$$\begin{aligned}\sup_{h\in H_\lambda,\|h\|=1}\rho(h,[g_n]) &\leqslant \sup_{h\in H_\lambda,\|h\|=1}\|\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i(g_i+\lambda f_i)-\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i g_i\|=\\ &=\sup_{h\in H_\lambda,\|h\|=1}\|\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i f_i\|\leqslant \sup_{h\in H_\lambda,\|h\|=1}\lambda D\|(\beta_i)\|_{l_F}\leqslant\\ &\leqslant \sup_{h\in H_\lambda,\|h\|=1}\lambda DC\|(\beta_i)\|_{l_G}\leqslant\lambda\frac{DC}{A}.\end{aligned}$$

Теперь оценим сверху

$$\sup_{g\in[g_n],\|g\|=1}\rho(g,H_\lambda).$$

Пусть

$$g:=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i g_i,$$

для некоторых $\beta_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2,\ldots$ и $\|g\|=1$. Заметим, что последовательность коэффициентов $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ $\in l_G$ и, значит, функция $\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i(g_i+\lambda f_i)$ принадлежит пространству $H_\lambda$ (напомним, что по условию $l_G\subset l_F$). Более того,

$$1=\|\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i g_i\|\geqslant A\|(\beta_i)\|_{l_G}\geqslant\frac{A}{C}\|(\beta_i)\|_{l_F}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sup_{g\in[g_n],\|g\|=1}\rho(g,H_\lambda) &\leqslant \sup_{g\in[g_n],\|g\|=1}\|\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i g_i-\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i(g_i+\lambda f_i)\|=\\ &= \sup_{g\in[g_n],\|g\|=1}\|\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i f_i\|\leqslant\\ &\leqslant \sup_{g\in[g_n],\|g\|=1}\lambda D\|(\beta_i)\|_{l_F}\leqslant\lambda\frac{DC}{A}.\end{aligned}$$

Из полученных оценок имеем следующее неравенство:

$$\Theta(H_\lambda,[g_n])=max\Big(\sup_{h\in H_\lambda,\|h\|=1}\rho(h,[g_n]),\sup_{g\in[g_n],\|g\|=1}\rho(g,H_\lambda)\Big)\leqslant\lambda\frac{DC}{A},$$

откуда, в силу (6), следует справедливость правого неравенства в (5). Выбирая нужным образом число $\lambda_0$, получим подпространство $H_{\lambda_0}$ такое, что

$$0<\eta_X(H_{\lambda_0})<1.$$

Таким образом, $X$ — небинарное пространство.

Схема доказательства приведённого результата основана на идее из [2]. Там роль последовательности $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ играет система Радемахера, "перенесённая" на $[0,\ \frac{1}{2}]$, которая при неограничительных условиях эквивалентна каноническому базису пространства $l_2$ (см. [5]). Кроме того, требовалось наличие в с.п. нормированной последовательности дизъюнктных функций $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ с условием (2). Отметим, что результат из [2] применим к пространствам Лебега $L_p$ и Лоренца $\Lambda_p(\varphi)$, при $2\leqslant p<\infty$, пространствам Орлича $L_F$ с верхним индексом Орлича — Матушевской $\beta_F^{\infty}\geqslant 2$.

В той же работе [2] была доказана бинарность пространства Лебега и Лоренца при $p\in[1,2)$. Для пространств Орлича случай $\beta_F^{\infty}<2$ оставался невыясненным. Только что доказанная теорема позволяет получить результат об отсутствии бинарности в некоторых пространствах Орлича с верхним индексом $\beta_F^{\infty}<2$. Следующий пример дан С.В. Асташкиным.

**Пример 1.** Пусть $F(t)=t^p\log^{-\frac{3}{2}}(et), t\geqslant 1$, где $p\in(1,2)$. Легко понять, что $t^p\in E_F^{\infty}$, и, значит, в $L_F$ существует последовательность дизъюнктных функций $\{f_n^{'}\}_{n=1}^{\infty}$, эквивалентная каноническому базису пространства $l_p$ [4, предложение 4].

Заметим, что функция $t^{-\frac{1}{p}}\in L_F$, так как

$$\int\limits_0^1 F(t^{-\frac{1}{p}})dt=\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{u\log^{\frac{3}{2}}(eu)}du<\infty.$$

Пусть $\{g_n^{'}\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых функций, равноизмеримых с $t^{-\frac{1}{p}}$. Тогда по теореме 3.8 из [9] она эквивалентна каноническому базису пространства $l_p$ во всяком с.п. $X$ таком, что $L_F\subset X$. В частности, отсюда следует, что подпространство $[g_n^{'}]$ сильно вложено в $L_F$. Теперь в качестве последовательностей $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ в теореме 2 можно взять следующие:

$$f_n(t)=f_n^{'}(2t-1)\chi_{[\frac{1}{2},1]}(t),\quad 0<t\leqslant 1,$$

$$g_n(t)=g_n^{'}(2t)\chi_{[0,\frac{1}{2}]}(t),\quad 0<t\leqslant 1.$$

В итоге, применяя теорему 2, получаем, что $L_F$ небинарно.

Результаты о бинарности некоторых пространств Орлича содержатся в [1; 10]. В работе [10] доказано, что, например, полумультипликативные функции Орлича с индексами $1<\alpha_F^{\infty}\leqslant\beta_F^{\infty}<2$ порождают бинарные пространства Орлича; в работе [1] показано, что если $\alpha_F^{\infty}=\beta_F^{\infty}=1$ и в $L_F$ выполняется аналог критерия Данфорда — Петтиса о слабой компактности, то $L_F$ бинарно.

В связи с неравенством (4) возникает вопрос: насколько хорошо значение характеристики $\eta_X(H)$ можно приблизить с помощью растворов. Более точно: если $X$ — небинарное с.п. с $\eta$-нормальной структурой, то имеют ли место следующие равенства:

$$\eta_X(H)=2\inf_{E_0\subset X}\Theta(H,E_0), \tag{7}$$

$$\eta_X(H) = 1 - 2 \inf_{E_1 \subset X} \Theta(H, E_1),$$

где $H$ — подпространство из $X$, $E_0$ — подпространство, у которого функции шара имеют равностепенно непрерывные нормы, а $E_1$ — подпространство, содержащее последовательность дизъюнктных функций.

Нетрудно показать, что такие равенства не всегда имеют место. Действительно, равенство (7) не выполняется для любого подпространства $H \subset L_2$, с $\eta_{L_2}(H) \in (0,1)$. Согласно результатам из работы [11] раствор и сферический раствор для любых подпространств $H$ и $E$ из $L_2$ связаны соотношением

$$\widetilde{\Theta}(H,E) = \sqrt{2\big(1 - \sqrt{1 - \Theta^2(H,E)}\big)}.$$

Пусть в $L_2$ существует подпространство $H$, для которого выполняется равенство (7), т. е. имеет место равенство

$$\alpha := \eta_X(H) = 2\Theta(H, E_0)$$

(общий случай, когда инфимум может не достигаться, рассматривается аналогично). Тогда в силу неравенства (4)

$$\alpha \leqslant \widetilde{\Theta}(H, E_0) = \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}})},$$

откуда

$$3 \leqslant \alpha^2,$$

что невозможно.

Отметим, что в $L_2$ раствор связан с оценками норм ортогональных проекторов на подпространства. А именно по теореме 1 из [12] выполняется следующее равенство:

$$\Theta(H,E) = \|P_H - P_E\|,$$

где $P_H$ и $P_E$ — ортогональные проекторы на подпространства $H$ и $E$ соответственно. Отсюда теорема 1 в случае $X = L_2$ принимает следующий вид (см. неравенство (3)):

**Теорема 3.** Пусть $H$ и $E$ — подпространства из $L_2$, а $P_H$ и $P_E$ — ортогональные проекторы на эти подпространства соответственно. Тогда

$$|\eta_{L_2}(H) - \eta_{L_2}(E)| \leqslant 2\|P_H - P_E\|.$$

В заключение применим технику, связанную с характеристикой (1), для доказательства рефлексивности сильно вложенных подпространств.

**Предложение 1.** Пусть $X$ — с.п. Если подпространство $H \subset X$ сильно вложено, то $H$ рефлексивно.

**Доказательство.** Предположим противное, пусть $H$ — нерефлексивное подпространство. Так как по условию $H$ сильно вложено, то на $H$ сходимость в $X$ и $L_1$-норме эквивалентны. Поэтому $H$ изоморфно подпространству из $L_1$ (более точно, тождественный оператор $I : (H, \|\cdot\|_X) \to (H, \|\cdot\|_{L_1})$ будет изоморфизмом). Заметим, что $(H, \|\cdot\|_{L_1})$ — сильно вложенное подпространство в $L_1$. Свойство рефлексивности пространства инвариантно относительно изоморфизма, и, значит, $H$ — нерефлексивное подпространство в $L_1$.

Как уже говорилось, $L_1$ бинарно, откуда для подпространства $H$ возможны лишь два варианта: $\eta_{L_1}(H) = 0$ или $\eta_{L_1}(H) = 1$. Предположим, что $\eta_{L_1}(H) = 0$. Тогда, по лемме 2 из [13] функции единичного шара подпространства $H$ имеют равностепенно непрерывные нормы в $L_1$, следовательно, по теореме Данфорда — Петтиса этот шар — относительно слабо компактное подмножество в $L_1$. Отсюда $H$ — рефлексивное подпространство $L_1$, что противоречит предположению.

Пусть теперь $\eta_{L_1}(H) = 1$. По [7, теорема II.2] для $L_1$ это условие эквивалентно тому, что $H$ не содержится в так называемом множестве Кадеца — Пелчинского

$$M_{L_1,\varepsilon} = \{x \in L_1 : \mu(t : |x(t)| \geqslant \varepsilon \|x\|_{L_1}) \geqslant \varepsilon\}$$

для всякого $\varepsilon > 0$. Отсюда по теореме Кадеца — Пелчинского (см. [14, теорема 4.1]) $H$ содержит почти дизъюнктную последовательность, что противоречит сильной вложенности $H$ в $L_1$.

## Литература

[1] Страхов С.И. Об одной характеристике сильно вложенных подпространств в симметричных пространствах // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27, № 2. С. 25–32. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-2-25-32. EDN: https://www.elibrary.ru/syswca

[2] Новиков С.Я., Семенов Е.М., Токарев Е.В. Структура подпространств пространств $\Lambda_p(\phi)$ // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247, № 3. С. 552–554. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dan&paperid=42865&option_lang=rus.

[3] Rosenthal H.P. On subspaces of $L_p$ // Annals of Mathematics. 1973. Vol. 97, № 2. P. 344–373. DOI: http://doi.org/10.2307/1970850.

[4] Lindenstrauss J., Tzafriri L. On Orlicz sequence spaces. III // Israel Journal of Mathematics. 1971. Vol. 10. No. 3, pp. 368–389. DOI: http://doi.org/10.1007/BF02764715.

[5] Асташкин С.В. Система Радемахера в функциональных пространствах. Москва: Физматлит, 2017. 549 с. URL: https://fireras.su/biblio/?p=16653.

[6] Berkson E. Some metrics on the subspaces of a Banach space // Pacific Journal of Mathematics. 1963. Vol. 13, № 1. P. 7–22. DOI: http://doi.org/10.2140/PJM.1963.13.7.

[7] Новиков С.Я. Геометрические свойства симметричных пространств: дис. ... канд. физ.-матем. наук. Воронеж, 1980.

[8] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов // УМН. 1957. Т. 12, Вып. 2 (74). С. 43–118. URL: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=rm&paperid=7581&option_lang=rus.

[9] Astashkin S.V. On symmetric spaces containing isomorphic copies of Orlicz sequence spaces // Commentationes Mathematicae. 2016. Vol. 56, № 1. P. 29–44. DOI: DOI: http://doi.org/10.14708/CM.V56I1.1113.

[10] Astashkin S.V. The structure of subspaces in Orlicz spaces between $L_1$ and $L_2$. 2022. DOI: http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.2208.07215.

[11] Nakamoto R. The spherical gap of operators // Linear Algebra and Its Applications. 1997. Vol. 251, P. 89–95. DOI: https://doi.org/10.1016/0024-3795(95)00697-4.

[12] Ostrovskii M.I. Topologies on the set of all subspaces of a Banach space and related questions of Banach space geometry // Quaestiones Mathematicae. 1994. Vol. 17, Issue 3. P. 259–319. URL: http://doi.org/10.1080/16073606.1994.9631766.

[13] Асташкин С.В., Страхов С.И. О симметричных пространствах со сходимостью по мере на рефлексивных подпространствах // Известия высших учебных заведений. Сер.: Математика. 2018. № 8. С. 3–11. URL: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=ivm&paperid=9381&option_lang=rus; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35097504. EDN: https://www.elibrary.ru/xqlfbz.

[14] Figiel T., Johnson W.B. Tzafriri L. On Banach lattices and spaces having local unconditional structure, with applications to Lorentz function spaces // Journal of Approximation Theory. 1975. Vol. 13, Issue 4. P. 395–412. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/0021-9045(75)90023-4.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-23-31

Submited: 30.08.2022
Revised: 05.10.2022
Accepted: 14.11.2022

***S.I. Strakhov***
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: www.stepan121@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2905-9124

# HOW THE DISTANCE BETWEEN SUBSPACES IN THE METRIC OF A SPHERICAL OPENING AFFECTS THE GEOMETRIC STRUCTURE OF A SYMMETRIC SPACE[2]

**ABSTRACT**

A relationship is found between the metric of a spherical opening on the space of all subspaces of a symmetric space and some numerical characteristic of the subspace. It is known that, for example, in $L_1$ this characteristic takes only two values (i.e. this is a binary space), while in $L_2$ there are infinitely many values. Using the connection found, the necessary conditions for the binarity of a symmetric space were generalized.

[2]The work was completed as a part of the implementation of the development program of the Scientific and Educational Mathematical Center the Volga Federal District, agreement no. 075-02-2022-878.

**Key words:** symmetric space; Orlicz space; spherical opening between subspaces; disjoint functions; independent functions; strongly embedded subspace.

**Citation.** Strakhov S.I. How the distance between subspaces in the metric of a spherical opening affects the geometric structure of a symmetric space. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 1–2, pp. 23–31. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-23-31. (In Russ.)

**Information about the conflict of interests:** author and reviewers declare no conflict of interests.


*Stepan I. Strakhov* — assistant of the Department of Functional Analysis and Function Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

# References

[1] Strakhov S.I. On a characteristic of strongly embedded subspaces in symmetric spaces. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 25–32. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-2-25-32. EDN: https://www.elibrary.ru/syswca. (In Russ.)

[2] Novikov S.Ya., Semenov E.M., Tokarev E.V. The structure of subspaces of the space $\Lambda_p(\phi)$. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1979, vol. 20, pp. 760–761. Available at: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dan&paperid=42865&option_lang=rus (English; Russian original).

[3] Rosenthal H.P. On subspaces of $L_p$. *Annals of Mathematics*, 2nd Ser., 1973, vol. 97, № 2, pp. 344–373. DOI: http://doi.org/10.2307/1970850.

[4] Lindenstrauss J., Tzafriri L. On Orlicz sequence spaces. III. *Israel Journal of Mathematics*, 1971, vol. 10, no. 3, pp. 368–389. DOI: http://doi.org/10.1007/BF02764715.

[5] Astashkin S.V. The Rademacher system in function spaces. Moscow: Fizmatlit, 2017, 549 p. Available at: https://fireras.su/biblio/?p=16653. (In Russ.)

[6] Berkson E. Some metrics on the subspaces of a Banach space. *Pacific Journal of Mathematics*, 1963, vol. 13, no. 1, pp. 7–22. DOI: http://doi.org/10.2140/PJM.1963.13.7.

[7] Novikov S.Ya. Geometric properties of symmetric spaces: Candidate's of Physical and Mathematical Sciences thesis. Voronezh, 1980. (In Russ.)

[8] Gokhberg I.Ts., Krein M.G. Fundamental aspects of defect numbers, root numbers and indexes of linear operators. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1957, vol. 12, issue 2 (74), pp. 43–118. Available at: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=rm&paperid=7581&option_lang=rus. (In Russ.)

[9] Astashkin S.V. On symmetric spaces containing isomorphic copies of Orlicz sequence spaces. *Commentationes Mathematicae*, 2016, vol. 56, no. 1, pp. 29–44. DOI: http://doi.org/10.14708/CM.V56I1.1113.

[10] Astashkin S.V. The structure of subspaces in Orlicz spaces between $L_1$ and $L_2$, 2022. DOI: http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.2208.07215.

[11] Nakamoto R. The spherical gap of operators. *Linear Algebra and Its Applications*, 1997, vol. 251, pp. 89–95. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795(95)00697-4.

[12] Ostrovskii M.I. Topologies on the set of all subspaces of a Banach space and related questions of Banach space geometry. *Quaestiones Mathematicae*, 1994, vol. 17, issue 3, pp. 259–319. DOI: http://doi.org/10.1080/16073606.1994.9631766.

[13] Astashkin S.V.,Strakhov S.I. On Symmetric Spaces With Convergence in Measure on Reflexive Subspaces. *Russian Mathematics*, 2018, vol. 62, no. 8, pp. 1–8. DOI: http://doi.org/10.3103/S1066369X18080017. EDN: https://www.elibrary.ru/vcdwts. English; Russian original.

[14] Figiel T., Johnson W.B., Tzafriri L. On Banach lattices and spaces having local unconditional structure, with applications to Lorentz function spaces. *Journal of Approximation Theory*, vol. 13, issue 4, April 1975, pp. 395–412. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/0021-9045(75)90023-4.