



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-12-19

УДК 517.928

Дата: поступления статьи: 11.02.2024  
после рецензирования: 14.03.2024  
принятия статьи: 15.05.2024

*Е.С. Долгова*

Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация  
E-mail: dolgova.es@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-7924-1356>

## АСИМПТОТИКА КРИТИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ГОРЕНИЯ

### АННОТАЦИЯ

Работа посвящена решению задачи о критических условиях для автокаталитической модели горения с учетом расхода реагента и окислителя. Анализ математической модели данного процесса методами геометрической теории сингулярных возмущений показал, что существуют два основных типа режимов горения: режим медленного горения и режим теплового взрыва. Промежуточным между ними является критический режим. В статье получено условие протекания критического режима в виде асимптотического представления соответствующего значения параметра системы, отражающего теплоотвод из реакционной фазы.

**Ключевые слова:** математическое моделирование; динамические системы; сингулярные возмущения; инвариантные многообразия; устойчивость; асимптотические методы; горение; критические явления; траектории-утки.

**Цитирование.** Долгова Е.С. Асимптотика критических условий в одной модели горения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 2. С. 12–19. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-12-19>.

**Информация о конфликте интересов:** автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Долгова Е.С., 2024

*Елизавета Сергеевна Долгова* — аспирант кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

## Введение

В биологии, химии, механике и многих других областях встречается немало прикладных задач, характерной чертой которых является одновременное протекание сильно отличающихся по скорости процессов. Такие задачи описываются сингулярно возмущенными системами. Большой интерес представляет исследование критических явлений, при которых качественно меняется характер поведения траекторий системы. В горении так называемый критический режим разделяет режим медленного выгорания и режим теплового взрыва [1–5]. Его важная особенность заключается в том, что температура в реакторе достигает больших значений, чем при режиме медленного горения, но при этом реакция протекает со скоростью значительно меньшей, чем при режиме теплового взрыва.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим модель горения газовой смеси с учетом расхода реагента и окислителя. В безразмерной форме модель принимает вид [6; 7]:

$$\begin{cases} \gamma \frac{d\theta}{d\tau} = \phi(\eta, \xi) \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) - \alpha(\theta - \theta_{amb}), \\ \frac{d\eta}{d\tau} = -\phi(\eta, \xi) \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right), \\ \frac{d\xi}{d\tau} = -\lambda\phi(\eta, \xi) \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right). \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь  $\eta$ ,  $\xi$  и  $\theta$  — безразмерные концентрации реагента и окислителя и безразмерная температура, соответственно;  $\theta_{amb}$  — безразмерная температура окружающей среды;  $\alpha$  — параметр, характеризующий теплоотвод из реакционной фазы. Параметр  $\lambda$  — отношение стехиометрических коэффициентов и начальных концентраций реагента и окислителя. Случай  $\lambda < 1$  отвечает обедненной горючей смеси, и завершение процесса горения связано с полным выгоранием горючего. Если  $\lambda > 1$ , то смесь является богатой, процесс горения завершится после полного расхода окислителя. В случае стехиометрической смеси ( $\lambda = 1$ ) горючее и окислитель заканчиваются одновременно.  $\phi(\eta, \xi)$  — кинетическая функция для безразмерных переменных, которая в случае автокаталитической реакции по реагенту и окислителю принимает вид

$$\phi(\eta, \xi) = \eta^{a_1} (1 + \eta_0 - \eta)^{a_2} \xi^{b_1} (1 + \xi_0 - \xi)^{b_2},$$

где  $a_1, a_2, b_1, b_2$  — константы, определяющие порядок реакции [8]. Порядки реакций могут быть любые, в том числе дробные.

Начальные условия для (1.1) имеют вид

$$\theta(0) = 0, \eta(0) = 1, \xi(0) = 1. \quad (1.2)$$

Первый интеграл системы (1.1)

$$\xi - 1 = \lambda(\eta - 1)$$

позволяет свести рассмотрение (1.1)–(1.2) к задаче

$$\begin{cases} \gamma \frac{d\theta}{d\tau} = \psi(\eta) \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) - \alpha(\theta - \theta_{amb}) = g(\theta, \eta), \\ \frac{d\eta}{d\tau} = -\psi(\eta) \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) = f(\theta, \eta), \end{cases} \quad (1.3)$$

где  $\psi(\eta) = \eta^{a_1} (1 + \eta_0 - \eta)^{a_2} (\lambda(\eta - 1) + 1)^{b_1} (\xi_0 - \lambda(\eta - 1))^{b_2}$ , с начальными условиями:

$$\theta(0) = 0, \eta(0) = 1. \quad (1.4)$$

$\gamma$  и  $\beta$  — малые параметры,  $\theta_{amb}$  положительна, когда начальная температура газовой смеси ниже температуры окружающей среды, в ином случае отрицательна.

Анализ поведения траекторий системы проводится на основе геометрической теории сингулярных возмущений и метода инвариантных многообразий [5; 9]. Такой подход позволяет определить существенные особенности динамики решений дифференциальной системы, даже не решая ее, опираясь на анализ так называемого вырожденного (алгебраического) уравнения. Далее, применяя асимптотические разложения для инвариантных многообразий, этот подход позволяет найти условия возникновения различных критических явлений. В задачах горения такой подход применялся, например, в работах [1–5; 10; 11].

В данной статье рассмотрен случай  $a_1 = b_1 = b_2 = 1$  и  $a_2 = 2$  для стехиометрической смеси ( $\lambda = 1$ ), а именно функция  $\psi(\eta)$  в системе (1.3)–(1.4) для рассматриваемого случая имеет вид  $\psi(\eta) = \eta^2 (1 + \eta_0 - \eta)^2 (\xi_0 - \eta + 1)$ .

## 2. Основные результаты

### 2.1. Медленная кривая

Уравнение

$$\gamma \frac{d\theta}{d\tau} = \psi(\eta) \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) - \alpha(\theta - \theta_{amb})$$

определяет быструю подсистему системы (1.3)–(1.4). Положив в нем  $\gamma = 0$ , получим

$$\psi(\eta) \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) - \alpha(\theta - \theta_{amb}) = 0.$$

Полученное уравнение определяет так называемую медленную кривую [5] системы (1.3)–(1.4), которая является эффективным средством для описания поведения ее траекторий. Фазовая точка системы (1.3)–(1.4) вблизи медленной кривой имеет скорость порядка единицы при  $\gamma \rightarrow 0$ , а вдали от медленной кривой температура  $\theta$  меняется со скоростью порядка  $O\left(\frac{1}{\gamma}\right)$ . В  $\gamma$ -окрестности медленной кривой существует медленное инвариантное многообразие системы, которое определяется как инвариантное множество медленных движений [9]. Медленная кривая состоит из устойчивых (для них выполняется неравенство  $\partial g/\partial \theta < 0$ ) и неустойчивых ( $\partial g/\partial \theta > 0$ ) участков, разделенных точкой срыва. Устойчивые и неустойчивые части медленной кривой представляют собой нулевое приближение ( $\gamma = 0$ ) устойчивых (или притягивающих) и неустойчивых (или отталкивающих) медленных инвариантных многообразий системы (1.3)–(1.4) соответственно.

В рассматриваемом случае точка срыва:  $\theta^* = 1 + \theta_{amb} + 2(1 + \theta_{amb})\beta + O(\beta^2)$ . Участок медленной кривой, для которого  $\theta < \theta^*$  является устойчивым и притягивает траектории системы, а участок, где  $\theta > \theta^*$ , наоборот, их отталкивает.

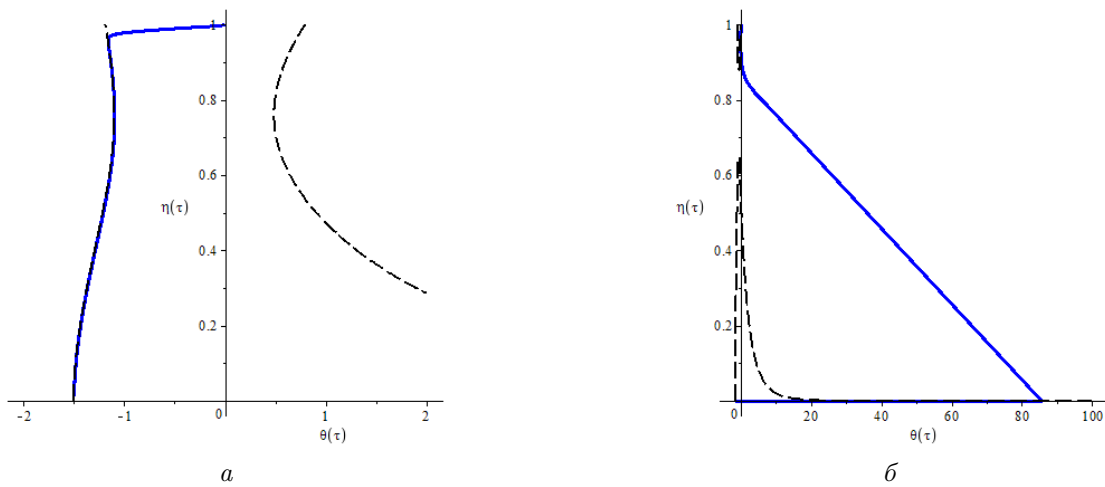


Рис. 2.1. Медленная кривая (пунктирная линия) и траектория (сплошная линия) системы (1.3)–(1.4), построенные при следующих значениях параметров:  $\gamma = 0,01$ ;  $\beta = 0,01$ ;  $\eta_0 = 0,9$ ;  $\xi_0 = 0,9$ ;  $\theta_{amb} = -1,5$ ;  $a - \alpha = 0,7$ ;  $b - \alpha = 0,5$

Fig. 2.1. Slow curve (dotted line) and trajectory (solid line) of the system (1.3)–(1.4), constructed with the following parameter values:  $\gamma = 0,01$ ;  $\beta = 0,01$ ;  $\eta_0 = 0,9$ ;  $\xi_0 = 0,9$ ;  $\theta_{amb} = -1,5$ ;  $a - \alpha = 0,7$ ;  $b - \alpha = 0,5$

На рисунке 2.1 изображены медленная кривая и траектории системы (1.3)–(1.4). В случае, представленном на рисунке 2.1, а, траектория, начавшаяся в точке  $\eta = 1; \theta = 0$ , притягивается к устойчивой части медленной кривой и идет в ее  $\gamma$ -окрестности до  $\eta = 0; \theta = \theta_{amb}$ , причем безразмерная температура не будет превышать значения  $\theta^*$ . Такая траектория соответствует режиму медленного горения.

В случае, представленном на рисунке 2.1, б, траектория находится в области влияния неустойчивого участка медленной кривой и, оттолкнувшись от него, стремится вправо, достигая высоких значений температуры. Это режим теплового взрыва.

Кроме перечисленных возможен третий вариант, в котором медленная кривая имеет точку самопересечения, а траектория системы движется сначала вдоль устойчивого участка медленной кривой, затем, пройдя точку самопересечения (точку срыва), продолжает свое движение вдоль ее неустойчивого участка. Последний сценарий отвечает критическому режиму, а такие траектории носят название траекторий-уток [5; 9; 12–14]. В следующем параграфе найдено условие протекания данного режима.

## 2.2. Критические условия

Критический режим моделируется так называемым управляющим параметром, в данном случае — параметром, характеризующим теплоотвод из реакционной фазы. Критическое значение параметра  $\alpha$  находится при построении траекторий-уток, а именно так, чтобы позволить склеить устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия. Для начала найдем координаты точки срыва. Она удовлетворяет следующей системе:

$$\begin{cases} g(\theta, \eta) = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0. \end{cases}$$

Подставив  $g(\theta, \eta)$ , получим

$$\begin{cases} \psi(\eta) \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) - \alpha(\theta - \theta_{amb}) = 0, \\ \psi(\eta) \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) (1 + \beta\theta)^{-2} - \alpha = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Система (2.1) сводится к уравнению

$$\alpha [(\theta - \theta_{amb}) - (1 + \beta\theta)^2] = 0.$$

Случай, когда параметр  $\alpha = 0$  не рассматривается, поэтому приравняем к нулю выражение для  $\theta$ . Получим уравнение

$$\beta^2\theta^2 + (2\beta - 1)\theta + 1 + \theta_{amb} = 0,$$

которое является квадратным относительно  $\theta$ . Здесь и далее функции, зависящие от  $\beta$ , будем представлять в виде ряда Маклорена по малому параметру  $\beta$  и оставлять лишь первое приближение (поскольку  $\beta$  — малый параметр и более высокий порядок приближения будет незначительно отличаться от первого). Тогда значение  $\theta$  в точке срыва будет

$$\theta^* = 1 + \theta_{amb} + 2(1 + \theta_{amb})\beta + O(\beta^2).$$

Концентрацию топлива и критическое значение параметра, характеризующего теплоотвод, будем искать в виде асимптотических рядов по степеням  $\gamma$ :

$$\eta(\theta, \gamma) = h_0(\theta) + \gamma h_1(\theta) + O(\gamma^2), \quad (2.2)$$

$$\alpha^*(\gamma) = \alpha_0 + \gamma\alpha_1 + O(\gamma^2). \quad (2.3)$$

Подставляя разложения (2.2)–(2.3) в уравнение инвариантности [9]

$$(h'_0(\theta) + \gamma h'_1(\theta) + O(\gamma^2))g(\theta, \eta) = \gamma f(\theta, \eta) \quad (2.4)$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, найдем коэффициенты разложения в (2.2).

Полагая  $\gamma = 0$  (рассматривая коэффициенты при  $\gamma^0$ ), получим уравнение медленной кривой

$$F(h_0, \theta) = \psi(h_0) \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) - \alpha(\theta - \theta_{amb}) = 0. \quad (2.5)$$

В случае автокаталитической реакции при критическом режиме точка срыва совпадает с точкой самопересечения медленной кривой, поэтому будем искать  $h_0(\theta^*)$  и  $\alpha_0$  такими, чтобы выполнялось условие самопересечения медленной кривой, т. е.

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial h_0} = [2h_0(1 + \eta_0 - h_0)^2(\xi_0 - h_0 + 1) - 2h_0^2(1 + \eta_0 - h_0)(\xi_0 - h_0 + 1) - h_0^2(1 + \eta_0 - h_0)^2] \times \\ \times \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} = h_0^2(1 + \eta_0 - h_0)^2(\xi_0 - h_0 + 1) \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) (1 + \beta\theta)^{-2} - \alpha = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Из первого уравнения системы (2.6) найдем  $h_0(\theta^*)$ :

$$h_0(1 + \eta_0 - h_0)[5h_0^2 - h_0(4\xi_0 + 3\eta_0 + 7) + 2\xi_0 + 2\eta_0\xi_0 + 2\eta_0 + 2] = 0,$$

откуда получим четыре значения:

$$h_{0,1}(\theta^*) = 0, h_{0,2}(\theta^*) = 1 + \eta_0, h_{0,3}(\theta^*) = \frac{4\xi_0 + 3\eta_0 + 7 + \sqrt{16\xi_0^2 + 9\eta_0^2 - 16\xi_0\eta_0 + 16\xi_0 + 2\eta_0 + 9}}{10},$$

$$h_{0,4}(\theta^*) = \frac{4\xi_0 + 3\eta_0 + 7 - \sqrt{16\xi_0^2 + 9\eta_0^2 - 16\xi_0\eta_0 + 16\xi_0 + 2\eta_0 + 9}}{10}.$$

$h_{0,1}(\theta^*)$ ,  $h_{0,2}(\theta^*)$ ,  $h_{0,3}(\theta^*)$  выходят за рамки интересующей области, поэтому

$$h_0(\theta^*) = \frac{4\xi_0 + 3\eta_0 + 7 - \sqrt{16\xi_0^2 + 9\eta_0^2 - 16\xi_0\eta_0 + 16\xi_0 + 2\eta_0 + 9}}{10}.$$

Из уравнения медленной кривой (2.5) найдем значение  $\alpha_0$  — нулевого приближения параметра  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 10^{-5} (4\xi_0 + 3\eta_0 + 7 - K)^2 (-4\xi_0 + 7\eta_0 + 3 + K)^2 \times \\ &\times (6\xi_0 - 3\eta_0 + 3 + K) e^{1+\theta_{amb}} (1 - (\theta_{amb} + 1)^2\beta + O(\beta^2)), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $K = \sqrt{16\xi_0^2 + 9\eta_0^2 - 16\xi_0\eta_0 + 16\xi_0 + 2\eta_0 + 9}$ .

Теперь выпишем из уравнения инвариантности (2.4) равенство коэффициентов при первой степени малого параметра  $\gamma$ :

$$(h'_0 + \gamma h'_1 + O(\gamma^2)) [(h_0 + \gamma h_1 + O(\gamma^2))^2 (1 + \eta_0 - h_0 - \gamma h_1 - O(\gamma^2))^2 (\xi_0 - h_0 - \gamma h_1 - O(\gamma^2) + 1) \times \\ \times \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right) - (\alpha_0 + \gamma\alpha_1 + O(\gamma^2))(\theta - \theta_{amb})] = -\gamma(h_0 + \gamma h_1 + O(\gamma^2))^2 (1 + \eta_0 - h_0 - \gamma h_1 - O(\gamma^2))^2 \times \\ \times (\xi_0 - h_0 - \gamma h_1 - O(\gamma^2) + 1) \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right).$$

С учетом уравнения медленной кривой (2.5) получим

$$h'_0 [2h_1 h_0 (1 + \eta_0 - h_0)^2 (\xi_0 - h_0 + 1) + 2h_0^2 (1 + \eta_0 - h_0) (-h_1) (\xi_0 - h_0 + 1) + h_0^2 (1 + \eta_0 - h_0)^2 (-h_1)] \times \\ \times \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right) - h'_0 \alpha_1 (\theta - \theta_{amb}) = -h_0^2 (1 + \eta_0 - h_0)^2 (\xi_0 - h_0 + 1) \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right).$$

Отсюда получим формулу для  $h_1(\theta)$ :

$$h_1(\theta) = \frac{h'_0 \alpha_1 (\theta - \theta_{amb}) - h_0^2 (1 + \eta_0 - h_0)^2 (\xi_0 - h_0 + 1) \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right)}{h'_0 [2h_0 (1 + \eta_0 - h_0)^2 (\xi_0 - h_0 + 1) - 2h_0^2 (1 + \eta_0 - h_0) (\xi_0 - h_0 + 1) - h_0^2 (1 + \eta_0 - h_0)^2] \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right)}.$$

Заметим, что знаменатель полученной дроби обращается в 0 в точке срыва. С целью обеспечения непрерывности  $\eta(\theta, \gamma)$  потребуем, чтобы в этой точке числитель также обращался в 0. Тогда мы можем выразить коэффициент  $\alpha_1$  в (2.3):

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_0}{h'_0(\theta^*)}. \quad (2.8)$$

Чтобы посчитать  $h'_0(\theta^*)$ , найдем из уравнения медленной кривой вторую производную по  $\theta$ :

$$\frac{d^2 F}{d\theta^2} = F_{h_0 h_0} (h'_0)^2 + F_{h_0} h''_0 + 2F_{h_0 \theta} h'_0 + F_{\theta\theta} = F_{h_0 h_0} (h'_0)^2 + 2F_{h_0 \theta} h'_0 + F_{\theta\theta} = 0.$$

Из этого следует:

$$h'_0(\theta) = \frac{-F_{h_0 \theta} \pm \sqrt{F_{h_0 \theta}^2 - F_{h_0 h_0} F_{\theta\theta}}}{F_{h_0 h_0}}.$$

Посчитаем необходимые производные:

$$F_{h_0 \theta} = [2h_0 (1 + \eta_0 - h_0)^2 (\xi_0 - h_0 + 1) - 2h_0^2 (1 + \eta_0 - h_0)^2 (\xi_0 - h_0 + 1) - h_0^2 (1 + \eta_0 - h_0)^2 (\xi_0 - h_0 + 1)] \times \\ \times \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right) (1 + \beta\theta)^{-2},$$

$$F_{\theta\theta} = h_0^2 (1 + \eta_0 - h_0)^2 (\xi_0 - h_0 + 1) \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right) [(1 + \beta\theta)^{-4} - 2\beta(1 + \beta\theta)^{-3}],$$

$$F_{h_0 h_0} = [4(1 + \eta_0 - h_0)[h_0^2 - h_0(1 + \eta_0 - h_0) - 2h_0(\xi_0 - h_0 + 1)] + 2(\xi_0 - h_0 + 1)[(1 + \eta_0 - h_0)^2 + 2h_0^2] \times \\ \times \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right).$$

С учетом (2.5) и (2.6) значения производных в точке срыва будут иметь вид

$$F_{h_0 \theta}(\theta^*) = 0,$$

$$F_{\theta\theta}(\theta^*) = \alpha_0 [(1 + \beta\theta)^{-2} - 2\beta(1 + \beta\theta)^{-1}] \Big|_{\theta=\theta^*},$$

$$F_{h_0 h_0}(\theta^*) = \frac{-8h_0(1 + \eta_0 - h_0)(\xi_0 - h_0 + 1)^2 - 3h_0^2(1 + \eta_0 - h_0)^2}{2(\xi_0 - h_0 + 1)} \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right) \Big|_{\theta=\theta^*}.$$

Приняв во внимание тот факт, что  $\eta$  — убывающая функция, подставим  $h'_0(\theta^*)$  в (2.8):

$$\alpha_1 = -\alpha_0 \sqrt{\frac{-F_{h_0 h_0}(\theta^*)}{F_{\theta\theta}(\theta^*)}} = -\sqrt{\frac{\alpha_0 h_0 (1 + \eta_0 - h_0) [8(\xi_0 - h_0 + 1)^2 + 3h_0(1 + \eta_0 - h_0)] \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right) (1 + \beta\theta)^2}{2(\xi_0 - h_0 + 1)(1 - 2\beta(1 + \beta\theta))}} \Big|_{\theta=\theta^*}.$$

Подставим в это выражение  $\theta = \theta^*$ :

$$\alpha_1 = -\sqrt{\frac{\alpha_0(4\xi_0 + 3\eta_0 + 7 - K)(-4\xi_0 + 7\eta_0 + 3 + K)[8(6\xi_0 - 3\eta_0 + 3 + K)^2 + 3(4\xi_0 + 3\eta_0 + 7 - K)(-4\xi_0 + 7\eta_0 + 3 + K)]}{2 \cdot 10^3(6\xi_0 - 3\eta_0 + 3 + K)}} \times \\ \times e^{1 + \theta_{amb}} \left(1 + \left[3 - \frac{(\theta_{amb} - 1)^2}{2}\right] \beta + O(\beta^2)\right). \quad (2.9)$$

Итак, найдено критическое значение параметра  $\alpha$  в первом приближении:

$$\alpha^*(\gamma) = \alpha_0 + \gamma\alpha_1 + O(\gamma^2),$$

где  $\alpha_0$  определено выражением (2.7), а  $\alpha_1$  — выражением (2.9). На рисунке 2.2 представлены медленная кривая, соответствующая критическому режиму, и траектория-утка системы.

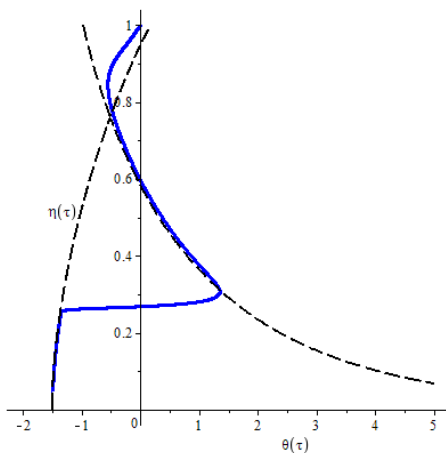


Рис. 2.2. Медленная кривая (пунктирная линия) и траектория (сплошная линия) системы (1.3)–(1.4), построенные при следующих значениях параметров:  $\gamma = 0,01$ ;  $\beta = 0,01$ ;  $\eta_0 = 0,9$ ;  $\xi_0 = 0,9$ ;  $\theta_{amb} = -1,5$ ;  $\alpha = 0,50796334626$ .

Fig. 2.2. The slow curve (dotted line) and trajectory (solid line) of the system (1.3)–(1.4), constructed with the following parameter values:  $\gamma = 0,01$ ;  $\beta = 0,01$ ;  $\eta_0 = 0,9$ ;  $\xi_0 = 0,9$ ;  $\theta_{amb} = -1,5$ ;  $\alpha = 0,50796334626$ .

Если сравнить с графиками, представленными на рисунке 2.1, то можно заметить, что при критическом режиме температура  $\theta$  принимает гораздо большие значения, чем при режиме медленного горения, однако рост температуры происходит медленно, с контролируемой скоростью по сравнению с мгновенным ростом в режиме теплового взрыва. Этот факт имеет важное прикладное значение.

## Выводы

Рассмотрена сравнительно новая модель автокаталитической реакции горения с учетом расхода реагента и окислителя. Найдено асимптотическое разложение значения параметра, отвечающего за теплоотвод из реакционной фазы, при котором в системе наблюдается критический режим. Такой режим интересен тем, что значение температуры газа может быть сравнительно высоким, но при этом сам процесс горения останется безопасным и не приведет к взрыву.

## Литература

- [1] Gorelov G.N., Sobolev V.A. Mathematical modeling of critical phenomena in thermal explosion theory // Combustion and Flame. 1991. Vol. 87, issue 2. P. 203–210. DOI: [https://doi.org/10.1016/0010-2180\(91\)90170-G](https://doi.org/10.1016/0010-2180(91)90170-G).
- [2] Gorelov G.N., Sobolev V.A. Duck-trajectories in a thermal explosion problem // Applied Mathematics Letters. 1992. Vol. 5, issue 6. P. 3–6. DOI: [https://doi.org/10.1016/0893-9659\(92\)90002-Q](https://doi.org/10.1016/0893-9659(92)90002-Q).
- [3] Соболев В.А., Щепакина Е.А. Самовоспламенение запыленных сред // Физ. горения и взрыва. 1993. Т. 29, № 3. С. 133–136. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30074820>. EDN: <https://www.elibrary.ru/zidhul>.
- [4] Соболев В.А., Щепакина Е.А. Траектории-утки в одной задаче теории горения // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 9. С. 1175–1184. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=38243989>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ztnjpf>.
- [5] Соболев В.А., Щепакина Е.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. Москва: ФИЗМАЛИТ, 2010. 320 с. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21326259>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ryrtfh>.
- [6] Shchepakina E. Unstable invariant manifolds in a control problem of the combustion process of a gas mixture // 2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). Moscow, Russian Federation: IEEE, 2022. P. 1–4. DOI: <http://doi.org/10.1109/STAB54858.2022.9807573>.

- [7] Sobolev V., Shchepakina E. Critical conditions of a thermal explosion in the case of autocatalytic combustion with account reagent and oxidant consumption // 2023 16th International Conference Management of large-scale system development (MLSD). Moscow, Russian Federation: IEEE, 2023. P. 1–4, DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/MLSD58227.2023.10304029>.
- [8] Эмануэль Н.М., Кнорре Д.Г. Курс химической кинетики. Москва: Высшая школа, 1984. 463 с. URL: <https://studizba.com/files/show/djvu/2958-1-n-m-emanuel-d-g-knorre-kurs.html>.
- [9] Shchepakina E., Sobolev V., Mortell V. Singular Perturbations. Introduction to System order Reduction Methods with Applications // Springer Lecture Notes in Mathematics. 2014. Vol. 2114. P. 212. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-09570-7>.
- [10] Shchepakina E. Black swans and canards in self-ignition problem // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2003. Vol. 4, Issue 1. Pp. 45–50. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1468-1218\(02\)00012-3](https://doi.org/10.1016/S1468-1218(02)00012-3).
- [11] Shchepakina E., Sobolev V. Black swans and canards in laser and combustion models // Singular perturbations and hysteresis (Eds. M.P. Mortell, R.E. O'Malley, A. Pokrovskii, V.A. Sobolev). Philadelphia: SIAM, 2005. P. 207–255. DOI: <http://dx.doi.org/10.1137/1.9780898717860.ch8>.
- [12] Benoit E., Callot J.L., Diener F., Diener M. Chasse au canard // Collectanea Mathematica. 1981. Vol. 31–32. P. 37–119. URL: [https://www.researchgate.net/publication/265548510\\_Chasse\\_au\\_canard](https://www.researchgate.net/publication/265548510_Chasse_au_canard).
- [13] Shchepakina E., Sobolev V. Integral manifolds, canards and black swans // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 2001. Vol. 44, issue 7. P. 897–908. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0362-546X\(99\)00312-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0362-546X(99)00312-0).
- [14] Shchepakina E., Sobolev V. Invariant surfaces of variable stability // Journal of Physics: Conference Series. 2016. Vol. 727, № 1. P. 012016. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/727/1/012016>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-12-19

Submitted: 11.02.2024

Revised: 14.03.2024

Accepted: 15.05.2024

*E.S. Dolgova*

Samara National Research University, Samara, Russian Federation  
E-mail: [dolgova.es@ssau.ru](mailto:dolgova.es@ssau.ru). ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-7924-1356>

## ASYMPTOTICS OF CRITICAL CONDITIONS IN ONE COMBUSTION MODEL

### ABSTRACT

The work is devoted to solving the problem of critical conditions for an autocatalytic combustion model, taking into account the consumption of reagent and oxidizer. By use the methods of geometric theory of singular perturbations, the analysis of the mathematical model of this process show that there are two main types of combustion modes: the slow combustion mode and the thermal explosion mode. The critical mode is intermediate between them. In the paper, the condition of the critical regime is obtained in the form of an asymptotic representation of the corresponding value of the system parameter reflecting the heat loss from the reaction phase.

**Key words:** mathematical modeling; dynamic systems; singular perturbations; invariant manifolds; stability; asymptotic methods; combustion; critical phenomena; canards.

**Citation.** Dolgova E.S. Asymptotics of critical conditions in one combustion model. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 12–19. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-12-19>. (In Russ.)

**Information about the conflict of interests:** author and reviewers declare no conflict of interests.

© Dolgova E.S., 2024

*Elizaveta S. Dolgova* — post-graduate student of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

## References

- [1] Gorelov G.N., Sobolev V.A. Mathematical modeling of critical phenomena in thermal explosion theory. *Combustion and Flame*, 1991, vol. 87, issue 2, pp. 203–210. DOI: [https://doi.org/10.1016/0010-2180\(91\)90170-G](https://doi.org/10.1016/0010-2180(91)90170-G).
- [2] Gorelov G.N., Sobolev V.A. Duck-trajectories in a thermal explosion problem. *Applied Mathematics Letters*, 1992, vol. 5, issue 6, pp. 3–6. DOI: [https://doi.org/10.1016/0893-9659\(92\)90002-Q](https://doi.org/10.1016/0893-9659(92)90002-Q).
- [3] Sobolev V.A., Shchepakina E.A. Self-ignition of dusty media. *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 1993, vol. 29, issue 3, pp. 378–381. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00797664>. (In Russ.)
- [4] Sobolev V.A., Shchepakina E.A. Duck-trajectories in a problem of combustion theory. *Differential equations*, 1996, vol. 32, no. 9, pp. 1177–1186. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13231308>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ldobkp>. (In English; original in Russian)
- [5] Sobolev V.A., Shchepakina E.A. Model reduction and critical phenomena in macrokinetics. Moscow: FIZMATLIT, 2010, 320 p. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21326259>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ryrtfh>. (In Russ.)
- [6] Shchepakina E. Unstable invariant manifolds in a control problem of the combustion process of a gas mixture. In: *2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference)*. Moscow, Russian Federation: IEEE, 2022, pp. 1–4. DOI: <http://doi.org/10.1109/STAB54858.2022.9807573>.
- [7] Sobolev V., Shchepakina E. Critical conditions of a thermal explosion in the case of autocatalytic combustion with account reagent and oxidant consumption. In: *2023 16th International Conference Management of large-scale system development (MLSD)*. Moscow, Russian Federation: IEEE, 2023, pp. 1–4. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/MLSD58227.2023.10304029>.
- [8] Emanuel N.M., Knorre D.G. Course of chemical kinetics. Moscow: Vysshaya shkola, 1984, 463 p. Available at: <https://studizba.com/files/show/djvu/2958-1-n-m-emanuel-d-g-knorre-kurs.html>. (In Russ.)
- [9] Shchepakina E., Sobolev V., Mortell V. Singular Perturbations. Introduction to System order Reduction Methods with Applications. *Springer Lecture Notes in Mathematics*, 2014, vol. 2114, 212 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-09570-7>.
- [10] Shchepakina E. Black swans and canards in self-ignition problem. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2003, vol. 4, issue 1, pp. 45–50. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1468-1218\(02\)00012-3](https://doi.org/10.1016/S1468-1218(02)00012-3).
- [11] Shchepakina E., Sobolev V. Black swans and canards in laser and combustion models. In: *Singular perturbations and hysteresis (Eds. M.P. Mortell, R.E. O'Malley, A. Pokrovskii, V.A. Sobolev)*. Philadelphia: SIAM, 2005, pp. 207–255. DOI: <http://dx.doi.org/10.1137/1.9780898717860.ch8>.
- [12] Benoit E., Callot J. L., Diener F., Diener M. Chasse au canard. *Collectanea Mathematica*, 1981, vol. 31–32, pp. 37–119. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/265548510\\_Chasse\\_au\\_canard](https://www.researchgate.net/publication/265548510_Chasse_au_canard).
- [13] Shchepakina E., Sobolev V. Integral manifolds, canards and black swans. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 2001, vol. 44, issue 7, pp. 897–908. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0362-546X\(99\)00312-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0362-546X(99)00312-0).
- [14] Shchepakina E., Sobolev V. Invariant surfaces of variable stability. *Journal of Physics: Conference Series*, 2016, vol. 727, p. 012016. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/727/1/012016>.