МАТЕМАТИКА

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-7-17 УДК 517.95

Краевые задачи для разрывно-нагруженных параболических уравнений

Кармоков*[1] *М.М.*, *Нахушева*[1] *Ф.М.*, *Геккиева*[2] *С.Х.

[1] *Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х.М. Бербекова, г. Нальчик, Российская Федерация; mkarmokov@yandex.ru (М.М.); fatima-nakhusheva@mail.ru (Ф.М.);*
[2] *Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, г. Нальчик, Российская Федерация; gekkieva_s@mail.ru (С.Х.);*

Поступила: 11.09.2024
Рассмотрена: 18.10.2024
Принята: 25.11.2024

Научная статья

Аннотация. В статье рассматриваются краевые задачи для разрывно-нагруженного параболического уравнения с оператором дробного интегродифференцирования Римана – Лиувилля с переменными коэффициентами. Доказана однозначная разрешимость задачи Коши – Дирихле для разрывно-нагруженного параболического уравнения дробного порядка. В работе также исследуются вопросы существования и единственности решения первой краевой задачи для разрывно-нагруженного уравнения параболического типа. Методом функции Грина, используя свойства фундаментального решения соответствующего однородного уравнения, а также предполагая, что коэффициенты уравнения ограничены, непрерывны и удовлетворяют условию Гельдера, оставаясь неотрицательными, показано, что решение задачи сводится к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Ключевые слова: краевые задачи; параболические уравнения; задача Коши – Дирихле; оператор дробного интегродифференцирования; первая краевая задача; функция Грина; нагруженное уравнение; регулярное решение.

Введение

Как известно, исследование математических моделей физико-биологических фрактальных процессов и связанных с ними задач, таких как задачи прогноза и регулирования уровня грунтовых вод, содержания влаги и соли в почвогрунтах на мелиорируемой территории и др., приводит к качественно новому классу дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, получивших название нагруженных уравнений. В связи с этим исследование этих уравнений представляет большой как теоретический, так и практический интерес.

В монографии А.М. Нахушева [1] приведена подробная библиография по нагруженным уравнениям, в том числе по различным применениям нагруженных уравнений, как методу исследования задач математической биологии, математической физики, математического моделирования нелокальных процессов и явлений, механики сплошных сред с памятью.

Данная работа посвящена исследованию краевых задач для разрывно-нагруженных параболических уравнений с дробной производной.

В полосе $H = \{(x,t): \; x \in \mathbb{R}, \; 0 < t < T\}$ евклидовой плоскости независимых переменных x и t рассмотрим разрывно-нагруженное уравнение

$$Lu = \sum_{j=1}^{n_k} a_j^k(x,t)\, D_{0t}^{\alpha_j^k} K_j^k(x,t)\, u\left(x_j^k, t\right), \quad T_k < t \leqslant T_{k+1}, \tag{1}$$

где

$$k = 0,1,\ldots,N, \quad 0 = T_0 < T_1 < \ldots < T_N = T,$$
$$\alpha_{n_k}^k < \alpha_{n_{k-1}}^k < \ldots < \alpha_1^k = \alpha_k, \quad 0 < x_1^k < x_2^k < \ldots < x_{n_k}^k < l,$$
$$Lu = a(x,t)\, u_{xx} + b(x,t)\, u_x + c(x,t)\, u - u_t,$$

$D_{0t}^{\alpha_j}$ — оператор дробного интегродифференцирования порядка α_j [2].

Уравнение (1) относится к классу уравнений, предложенных в [3]. Работы [4; 5] посвящены локальным и нелокальным краевым задачам для нагруженных параболических уравнений. Нелокальные краевые задачи для линейных параболических уравнений рассматривались также в работах [6; 7]. В работе [8] методом функции Грина исследована смешанная краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности. Краевые задачи для уравнений в частных производных дробного порядка, включая диффузионно-волновые уравнения, рассмотрены в монографии [9]. В исследовании [10] получены решения краевых задач для нагруженного диффузионно-волнового уравнения с дробной производной. Среди более поздних отметим работу [11], в которой доказана однозначная разрешимость в пространстве Соболева нелокальной задачи с интегральными условиями для параболического уравнения, а также работы [12; 13], посвященные исследованию разрешимости нелинейных обратных задач для параболических уравнений, в том числе вырождающихся. Численному решению первой краевой задачи для нагруженного уравнения теплопроводности с переменными коэфициентами посвящены работы [14; 15].

1. Основные результаты

1.1. Задача Коши – Дирихле

Пусть $a\left(x,t\right) \geqslant \mu > 0$, коэффициенты a, b, c, a_j^k, K_j^k в области H ограничены, непрерывны; a, b, c удовлетворяют условиям Гельдера по переменной x, а $a\left(x,t\right)$ и по переменной t. Пусть далее

$$u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Решением задачи (1), (2) будем называть функцию $u(x,t)$, непрерывную и ограниченную в H, удовлетворяющую уравнению (1) и условию (2).

Теорема 1.1. Пусть $\varphi\left(x\right)$ — непрерывная и ограниченная во всем пространстве $\mathbb{R}$ функция и $\alpha^k < \dfrac{1}{2}$. Тогда в слое H существует единственное решение задачи Коши–Дирихле для уравнения (1) с начальным условием (2).

Доказательство. Не нарушая общности, рассмотрим задачу для $N = 2$. Введем обозначения:

$$H_1 = \left\{(x,t): \ x \in \mathbb{R}, \ 0 < t < T_1\right\},$$

$$H_2 = \left\{(x,t): \ x \in \mathbb{R}, \ T_1 < t < T\right\}.$$

Известно [16], что фундаментальное решение $Z(x,t;\xi,\tau)$ уравнения $Lu = 0$ имеет вид

$$Z(x,t;\xi,\tau) = W(x,t;\xi,\tau) +$$

$$+ \int\limits_{\tau}^{t} d\tau_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} W(x,t;\xi_1,\tau_1)\Phi(\xi_1,\tau_1;\xi,\tau)d\xi_1,$$

где

$$W(x,t;\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)a(\xi,\tau)}} e^{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a(\xi,\tau)(t-\tau)}}$$

— фундаментальное решение, а $\Phi(x,t;\xi,\tau)$ однозначно определяется из интегрального уравнения

$$\Phi(x,t;\xi,\tau) = L_{x,t}\left[W(x,t;\xi,\tau)\right] +$$

$$+ \int\limits_{\tau}^{t} d\tau_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} L_{x,t}\left[W\left(x,t;\xi_1,\tau_1\right)\right] \Phi\left(\xi_1,\tau_1;\xi,\tau\right) d\xi_1.$$

Здесь

$$L_{x,t}\left[W\left(x,t;\xi_1,\tau_1\right)\right]=\left[a(x,t)-a(\xi,\tau)\right]\frac{\partial^2}{\partial x^2}+W(x,t;\xi,\tau)+$$

$$+b(x,t)\frac{\partial}{\partial x}W(x,t;\xi,\tau)+c(x,t)W(x,t;\xi,\tau).$$

Пусть существует решение $u(x,t)$ задачи (1), (2), непрерывное, ограниченное и имеющее дробные производные порядка $\alpha^k<1/2$. Пусть далее $f_i^k(t)=u\left(x_i^k,t\right)$, $i=1,2,\ldots,n_k$, $k=0,1$. Будем искать решение задачи (1), (2) сначала в H_1.

Принимая во внимание свойства фундаментального решения $Z(x,t;\xi,\tau)$ уравнения $Lu=0$, нетрудно заметить, что функция $u(x,t)$ связана с $f_i^0(t)$ $(i=1,2,\ldots,n_0)$ и начальной функцией $\varphi(x)$ следующим образом:

$$u(x,t)=-\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}Z\left(x,t;\xi,\tau\right)\sum_{i=1}^{n_0}a_i^0\left(\xi,\tau\right)D_{0\tau}^{\alpha_i^0}K_i^0\left(\xi,\tau\right)f_i\left(\tau\right)d\xi+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}Z\left(x,t;\xi,0\right)\varphi\left(\xi\right)d\xi. \tag{3}$$

Введем новую функцию $Z_0\left(x,t;\xi,\tau\right)$, определенную формулой

$$Z_0\left(x,t;\xi,\tau\right)=(t-\tau)^{1/2}Z\left(x,t;\xi,\tau\right).$$

Так как

$$\left|Z\left(x,t;\xi,\tau\right)\right|<c_1\left(t-\tau\right)^{-1/2}e^{-\dfrac{\mu_1(x-\xi)^2}{(t-\tau)}},$$

где c_1 и μ_1 — положительные постоянные, то $Z_0\left(x,t;\xi,\tau\right)$ — непрерывная функция.

Рассмотрим интеграл

$$J=\int\limits_0^t\left(t-\tau\right)^{-1/2}Z_j^0\left(x,t;\xi,\tau\right)D_{0\tau}^{\alpha_j^0}K_j^0\left(\xi,\tau\right)f_j^0\left(\tau\right)d\tau,$$

где

$$Z_j^0\left(x,t;\xi,\tau\right)=a_j^0(\xi,\tau)Z_0\left(x,t;\xi,\tau\right)$$

и по повторяющемуся индексу $j=1,2,\ldots,n_0$ подразумевается суммирование.

При $\alpha_j^0<0$

$$J=\frac{1}{\Gamma\left(-\alpha_j^0\right)}\int\limits_0^t f_j^0\left(\tau_1\right)K_j^0\left(\xi,\tau_1\right)\left(\tau-\tau_1\right)^{-\alpha_j^0-1}d\tau_1\int\limits_t^\tau Z_j^0\left(x,t;\xi,\tau\right)\left(t-\tau_1\right)^{-1/2}d\tau.$$

Введем новую переменную y:

$$\tau=\tau_1+\left(t-\tau_1\right)y.$$

Тогда

$$d\tau=\left(t-\tau_1\right)dy,\quad y=\frac{\tau-\tau_1}{t-\tau_1},\quad 1-y=\frac{t-\tau}{t-\tau_1}.$$

Учитывая последние соотношения при $\alpha_j^0<0$, имеем

$$J=\frac{1}{\Gamma\left(-\alpha_j^0\right)}\int\limits_0^t K_j^0\left(\xi,\tau_1\right)f_j\left(\tau_1\right)\left(t-\tau_1\right)^{-\alpha_j^0-1/2}d\tau_1\times$$

$$\times \int_0^1 Z_i^0 \left[(x,t;\xi,\tau_1 + (t-\tau_1)\,y) \right] y^{-1-\alpha_j^0} (1-y)^{-1/2}\, dy.$$

Точно так же при $0 < \alpha_j^0 < \frac{1}{2}$

$$J = -\frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha_j\right)} \int_0^t K_j^0 (\xi,\tau_1)\, f_j(\tau_1)\, d\tau_1 \frac{d}{d\tau_1} (t-\tau_1)^{1/2-\alpha_j^0}\, d\tau_1 \times$$

$$\times \int_0^1 Z_i^0 \left[(x,t;\xi,\tau_1 + (t-\tau_1)\,y) \right] y^{-\alpha_j^0} (1-y)^{-1/2}\, dy.$$

Введем обозначения

$$F^0(x,t) = -\int_{-\infty}^{\infty} Z(x,t;\xi,0)\, \varphi(\xi)\,,$$

$$N_j^0(x,t,\tau) = -\frac{1}{\Gamma\left(-\alpha_j^0\right)} \int_0^t K_j^0(\xi,\tau_1)\, d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \times$$

$$\times \int_0^1 Z\left[(x,t;\xi,\tau_1 + (t-\tau_1)\,y) \right] y^{-1-\alpha_j^0} (1-y)^{-1/2}\, dy \quad \text{при } \alpha_j^0 < 0$$

и

$$N_j^0(x,t,\tau) = \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha_j\right)} \int_0^t K_j^0(\xi,\tau_1)\, d\tau_1 \frac{d}{d\tau_1} (t-\tau_1)^{1/2-\alpha_j^0} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \times$$

$$\times \int_0^1 Z_j\left[(x,t;\xi,\tau_1 + (t-\tau_1)\,y) \right] y^{-\alpha_j^0} (1-y)^{-1/2}\, dy \quad \text{при } \alpha_j^0 > 0.$$

Пользуясь этими обозначениями, перепишем (3) в виде

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{N_j^0(x,t,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha_j^0+1/2}} f_j^0(\tau)\, d\tau + F^0(x,t)\,. \tag{4}$$

Из (4) при $x = x_i^0$, $i = 1,2,\ldots,n_0$ имеем

$$f_i^0(t) = \int_0^t \frac{N_j^0(x_i,t,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha_j^0+1/2}} f_j^0(\tau)\, d\tau + F^0\left(x_i^0,t\right), \tag{5}$$

где по индексу i подразумевается суммирование от 1 до n_0.

При $\alpha^0 < \frac{1}{2}$ система (5) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода, стало быть, она обусловленно и однозначно разрешима.

Таким образом, единственное решение задачи (1), (2) в H_1 задается формулой (4), где $f_1^0, f_2^0, \ldots, f_{n_0}^0$ – решения системы (5). Это решение непрерывно и ограничено.

Учитывая, что $u(x,T_1)$ также непрерывна и ограничена во всем пространстве $\mathbb{R}$, в слое H_2 имеем следующую связь $u(x,t)$ с $f_j^1(t)$ $(j = 1,2,\ldots,n_1)$ и $u(x,T_1)$:

$$u(x,t) = -\int_{T_1}^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} Z(x,t;\xi,\tau) \sum_{j=1}^{n_1} d_j^1(\xi,\tau)\, D_{0\tau}^{\alpha_j^1}(\xi,\tau)\, f_j^1(t)\, d\xi +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty} Z\left(x,t;\xi,T_1\right)u\left(\xi,T_1\right)d\xi. \tag{6}$$

Единственное ограниченное решение $u\left(x,t\right)$ в слое H_2 задачи (1), (2) определяется соотношением (6), где $f_j^1\left(t\right)$ находятся из системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода вида

$$f_i^1\left(t\right)=\int\limits_{T_1}^{t}\frac{N_j^1\left(x_i,t,\tau\right)}{\left(t-\tau\right)^{\alpha_j^1+1/2}}f_i^1\left(\tau\right)d\tau+F^1\left(x_1,t\right),$$

где $N_j^1\left(x,t,\tau\right)$ и $F^1\left(x_1,t\right)$ — непрерывные функции, определяемые так же, как в слое H_1. Теорема доказана.

1.2. Первая краевая задача

Рассмотрим теперь для уравнения (1) в области $D=\left\{(x,t):\,0<x<l,\,0<t<T\right\}$ первую краевую задачу

$$\begin{aligned}&u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right)\quad \text{при } x\in I,\\ &u\left(x,t\right)\big|_{\Gamma}=0,\end{aligned} \tag{7}$$

где $I=(0,l)$, $\Gamma=\left\{x=0,\,0<t\leqslant T\right\}\cup\left\{x=l,\,0<t\leqslant T\right\}$.

Решением первой краевой задачи (1)–(7) будем называть функцию $u\left(x,t\right)$, непрерывную в D, регулярную в $D_i=\left\{(x,t):\,0<x<l,\,T_{i-1}<t<T_i\right\}$, $(i=1,2,\ldots,N)$, удовлетворяющую условиям (7):

Пусть:

I) коэффициенты $a\left(x,t\right)$, $b\left(x,t\right)$, $c\left(x,t\right)$ в $\overline{D}$ удовлетворяют неравенствам:

$$a\left(x,t\right)\geq\lambda_0>0,$$

$$\left|a\left(x',t\right)-a\left(x,t\right)\right|\leq A\left|x'-x\right|^{\lambda},$$

$$\left|b\left(x',t\right)-b\left(x,t\right)\right|\leq A\left|x'-x\right|^{\lambda},$$

$$\left|c\left(x',t\right)-c\left(x,t\right)\right|\leq A\left|x'-x\right|^{\lambda},$$

$$\left|a\left(x,t'\right)-a\left(x,t\right)\right|\leq A\left|t'-t\right|^{\lambda},$$

где A, λ_0 и λ — некоторые положительные постоянные.

II) $a_j^k\left(x,t\right)$, $j=1,2,\ldots,n_k$, $k=0,1,\ldots,N$ непрерывны в $\overline{D}$ по совокупности переменных x, t и удовлетворяют по условию Гельдера, а $K_j^k\left(x,t\right)$ непрерывны в $\overline{D}$.

III) $\varphi\left(x\right)$ непрерывна и ограничена на I.

IV) $\alpha^k<1/2$.

Теорема 1.2. Задача (1), (7) при предположениях I–IV однозначно разрешима.

Доказательство. Рассмотрим задачу для $N=2$.

Известно [17], что функцией Грина краевой задачи (7) для уравнения $Lu=0$ называется функция $G\left(x,t;\xi,\tau\right)$, которая определенна и непрерывна по всем аргументам при $(x,\xi)\in(0,l)$, $0<\tau<t<T_1$ и имеет вид

$$G\left(x,t;\xi,\tau\right)=Z\left(x,t;\xi,\tau\right)-\Psi\left(x,t;\xi,\tau\right),$$

где $\Psi\left(x,t;\xi,\tau\right)$ обладает следующими свойствами:

а) $L_{x,t}\left[\Psi\left(x,t;\xi,\tau\right)\right]=0$ для $x,\xi\in I,\ 0\leq\tau<t\leq T_1$;

б) $\Psi\left(x,t;\xi,\tau\right)=Z\left(x,t;\xi,\tau\right)$ для $\xi\in D,\ (x,t)\in\Gamma,\ 0\leq\tau<t\leq T_1$;

в) $\lim\limits_{t\to\tau+0}\Psi\left(x,t;\xi,\tau\right)=0$ для $(x,\xi)\in I$.

Для функции $G(x,t;\xi,\tau)$ имеет место оценка [17]:

$$|G(x,t;\xi,\tau)| < C_2(t-\tau)^{-1/2}e^{-\mu_2\frac{(x-\xi)}{(t-\tau)}}, \tag{8}$$

где μ_2, C_2 — некоторые положительные постоянные.

Пусть существует решение $u(x,t)$ задачи (1), (2), непрерывное в D_1 и имеющее дробную производную порядка $\alpha < 1/2$.

Пусть далее

$$g_i^k(t) = u\left(x_i^k, t\right), \quad i = 1,2,\ldots,n_k, \quad k = 0,1.$$

Будем искать решение задачи (1), (2) сначала в D_1.

Как известно [17], решение первой краевой задачи (7) для уравнения

$$Lu = f(x,t)$$

в $\overline{D}_1$ имеет вид

$$u(x,t) = -\int_0^t d\tau \int_0^l G(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)d\xi + \int_0^l G(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)d\xi.$$

Следовательно, при наших предположениях, функция $u(x,t)$ связана с $g_i^0(t)$, $i = 1,2,\ldots,n_0$ и начальной функцией $\varphi(x,t)$ следующим образом:

$$u(x,t) = -\int_0^t d\tau \int_0^l G(x,t;\xi,\tau) \sum_{j=1}^{n_0} a_j^0(\xi,\tau) D_{0\tau}^{\alpha_j^0} K_j^0(\xi,\tau) u(x_j^0,\tau)d\xi +$$

$$+\int_0^l \varphi(\xi) G(x,t;\xi,\tau)\, d\xi. \tag{9}$$

Введем новую функцию $G_0(x,t;\xi,\tau)$:

$$G_0(x,t;\xi,\tau) = (t-\tau)^{1/2} G(x,t;\xi,\tau).$$

Из (8) имеем

$$|G_0(x,t;\xi,\tau)| < C_2 e^{-\frac{\mu_2(x-\xi)^2}{t-\tau}}.$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} G_i^0(x,t;\xi,\tau)\, D_{0\tau}^{\alpha_j^0} K_j^0(\xi,\tau) g_j^0(\tau)d\tau,$$

где

$$G_j^0(x,t;\xi,\tau) = a_j^0(\xi,\tau) G_0(x,t;\xi,\tau),$$

а по повторяюшемуся индексу $j = 1,2,\ldots$ подразумевается суммирование.

При $\alpha_j^0 < 0$ имеем

$$I = \frac{1}{\Gamma\left(-\alpha_j^0\right)} \int_0^t K_j^0(\xi,\tau_1) g_j^0(\tau_1)(t-\tau_1)^{-\alpha_j^0-\frac{1}{2}} d\tau_1 \times$$

$$\times \int_0^1 G_i^0\left[(x,t;\xi,\tau_1+(t-\tau_1)\,y)\right] y^{-1-\alpha_j^0}(1-y)^{-1/2}dy,$$

а при $0 < \alpha_j^0 < \frac{1}{2}$

$$I = \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha_j^0\right)} \int\limits_0^t K_j^0\left(\xi, \tau_1\right) g_i(\tau_1) d\tau_1 \frac{d}{d\tau_1}\left(t-\tau_1\right)^{1/2-\alpha_j^0} \times$$

$$\times \int\limits_0^1 G_i^0\left[\left(x, t; \xi, \tau_1 + \left(t-\tau_1\right) y\right)\right] y^{-1-\alpha_j^0}(1-y)^{-1/2} dy.$$

Введем обозначения:

$$F^0(x,t) = \int\limits_0^l \varphi(\xi) G\left(x, t; \xi, 0\right) d\xi,$$

$$N_j^0(x,t,\tau) = -\frac{1}{\Gamma\left(-\alpha_j^0\right)} \int\limits_0^t K_j^0\left(\xi, \tau_1\right) d\tau_1 \times$$

$$\times \int\limits_0^l d\xi \int\limits_0^1 G_j^0\left[\left(x, t; \xi, \tau_1 + \left(t-\tau_1\right) y\right)\right] y^{-1-\alpha_j^0}(1-y)^{-1/2} dy \quad \text{при } \alpha_j < 0$$

и

$$N_j^0(x,t,\tau) = \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha_j^0\right)} \int\limits_0^t K_j^0\left(\xi, \tau_1\right) d\tau_1 \left(t-\tau_1\right)^{\frac{1}{2}-\alpha_j^0} \times$$

$$\times \int\limits_0^l d\xi \int\limits_0^1 G_i\left[\left(x, t; \xi, \tau_1 + \left(t-\tau_1\right) y\right)\right] y^{-\alpha_j^0}(1-y)^{-1/2} dy.$$

С учетом этих обозначений (9) принимает вид

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \frac{N_j(x,t,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha_j^0+1/2}} g_j^0(\tau) d\tau + F^0(x,t). \tag{10}$$

Из (10) при $x = x_i^0$ $i = 1, 2, \ldots, n_0$ имеем

$$g_i^0(t) = \int\limits_0^t \frac{N_j(x_i,t,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha_j^0+1/2}} g_j^0(\tau) d\tau + F^0(x_i^0,t). \tag{11}$$

При $\alpha^0 < \frac{1}{2}$ система (11) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода, ядра которых имеют слабую особенность. Стало быть, она безусловно и однозначно разрешима.

Таким образом, единственное решение задачи (1), (7) в области D_1 задается формулой (10), где $g_1^0, g_2^0, \ldots, g_{n_0}^0$ — решение системы (11). Это решение непрерывно и регулярно. Учитывая, что $u\left(x, T_1\right)$ также непрерывна и ограничена на I, в D_2 имеем следующую связь:

$$u(x,t) = -\int\limits_{-T_1}^t d\tau \int\limits_0^l G\left(x, t; \xi, \tau\right) \sum_{i=1}^{n_1} a_j^1(\xi,\tau) D_{0\tau}^{\alpha_j^1}(\xi,\tau) \times$$

$$\times f_i^1(\tau) d\xi + \int\limits_0^l G\left(x, t; \xi, T_1\right) u\left(\xi, T_1\right) d\xi, \quad t > T_1. \tag{12}$$

Единственное решение $u(x,t)$ в области D_2 задачи (1), (7) определяется соотношением (12), где $g_i^1(t)$ находятся из системы интегральных уравнений

$$f_i^1(t) = \int\limits_0^t \frac{N_j(x_i,t,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha_j^0+1/2}} f_j^1(\tau)d\tau + F^1(x_i,t),$$

где $N_i^1\,(x_i,t,\tau)$ и $F^1\,(x_i,t)$ — непрерывные функции, определяемые так же, как области D_1.

Заключение

Таким образом, в данной работе доказана однозначная разрешимость задачи Коши–Дирихле, исследованы вопросы существования и единственности решения первой краевой задачи для разрывно-нагруженного параболического уравнения дробного порядка.

Полученные результаты важны для развития теории краевых задач для уравнений в частных производных дробного порядка, в том числе нагруженных уравнений параболического типа, а также математического моделирования различных процессов и систем с распределенными параметрами, имеющих фрактальную пространственно-временную структуру.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Цитирование. Кармоков М.М., Нахушева Ф.М., Геккиева С.Х. Краевые задачи для разрывно-нагруженных параболических уравнений // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 4. С. 7–17. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-7-17.

Мухамед Мацевич Кармоков (mkarmokov@yandex.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х.М. Бербекова, 360004, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

Фатима Мухамедовна Нахушева (fatima-nakhusheva@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х.М. Бербекова, 360004, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

Сакинат Хасановна Геккиева (gekkieva_s@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела вычислительных методов, Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а.

Литература

[1] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. Москва: Наука, 2012. 232 с. URL: https://djvu.online/file/GKTM9Py0MW2jl; https://elibrary.ru/item.asp?id=20886619. EDN: https://elibrary.ru/rpbpqz.

[2] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. Москва: Высшая школа, 1995. 301 с. URL: https://djvu.online/file/vpPGn035lVZDw; https://elibrary.ru/item.asp?id=17961016. EDN: https://elibrary.ru/pdbbnb.

[3] Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 103–108. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=17962290. EDN: https://elibrary.ru/pdbujb.

[4] Кармоков М.М. Локальные и нелокальные краевые задачи для разрывно-нагруженных параболических уравнений: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Нальчик, 1991. 87 с.

[5] Кармоков М.М., Нахушева Ф.М., Абрегов М.Х. Краевая задача для нагруженного параболического уравнения дробного порядка // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2024. № 1 (117). С. 69–77. DOI: https://doi.org/10.35330/1991-6639-2024-26-1-69-77. EDN: https://elibrary.ru/mpqwls.

[6] Кожанов А.И. Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений // Сибирский журнал индустриальной математики. 2004. Т. 7, № 1 (17). С. 51–60. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=9484458. EDN: https://elibrary.ru/hzogql.

[7] Кожанов А.И. О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2004. № 30. С. 63–69. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=8819437. EDN: https://elibrary.ru/hkzxbd.

[8] Дикинов Х.Ж., Керефов А.А., Нахушев А.М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 177–179. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=17873091. EDN: https://elibrary.ru/pbdavt.

[9] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. Москва: Наука, 2005. 199 с. URL: https://libcats.org/book/729565.

[10] Геккиева С.Х. Смешанные краевые задачи для нагруженного диффузионно-волнового уравнения // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. 2016. № 6 (227). Вып. 42. С. 32–35. URL: http://dspace.bsuedu.ru/handle/123456789/59383.

[11] Бейлин А.Б., Богатов А.В., Пулькина Л.С. Задача с нелокальными условиями для одномерного параболического уравнения // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2022. Т. 26, № 2. С. 380–395. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1904. EDN: https://www.elibrary.ru/USPHOK.

[12] Кожанов А.И., Ашурова Г.Р. Параболические уравнения с вырождением и неизвестным коэффициентом // Математические заметки СВФУ. 2024. Т. 31, № 1. С. 56–69. DOI: https://doi.org/10.25587/2411-9326-2024-1-56-69. EDN: https://elibrary.ru/ndfvwu.

[13] Богатов А.В., Пулькина Л.С. Разрешимость обратной коэффициентной задачи с интегральным переопределением для одномерного параболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2022. Т. 28, № 3–4. С. 7–17. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-7-17.

[14] Нахушева Ф.М., Лафишева М.М., Кармоков М.М., Джанкулаева М.А. Численный метод решения краевой задачи для параболического уравнения с дробной производной по времени с сосредоточенной теплоемкостью // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2018. № 5 (85). С. 34–43. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=36394362. EDN: https://elibrary.ru/vlmusb.

[15] Бештоков М.Х., Водахова В.А., Исакова М.М. Приближенное решение первой краевой задачи для нагруженного уравнения теплопроводности // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2023. Т. 26, № 4. С. 5–17. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.4.1. EDN: https://elibrary.ru/cosaev.

[16] Pogorzelski W. Etude de la solution fondamentale de l'equation parabolique // Ricerche di Matematica. 1956. Vol. 5. P. 25–57. URL: https://zbmath.org/0072.10301.

[17] Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи математических наук. 1962. Т. 17, № 3 (105). С. 31–46. URL: https://www.mathnet.ru/rus/rm6495.

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-7-17

Boundary value problems for discontinuously loaded parabolic equations

Karmokov*[1] *M.M.*, *Nakhusheva*[1] *F.M.*, *Gekkieva*[2] *S.Kh.

[1] *Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Nalchik, Russian Federation; mkarmokov@yandex.ru (M.M.); fatima-nakhusheva@mail.ru (F.M.);*
[2] *Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS, Nalchik, Russian Federation; gekkieva_s@mail.ru (S.Kh.);*

Received: *11.09.2024*
Revised: *18.10.2024*
Accepted: *25.11.2024*

Scientific article

Abstract. The article deals with boundary value problems for a discontinuously loaded parabolic equation with a Riemann – Liouville fractional integro-differentiation operator with variable coefficients. The unambiguous solvability of the Cauchy – Dirichlet problem for a discontinuously loaded parabolic equation of fractional order is proved. The paper also examines the existence and uniqueness of the solution of the first boundary value problem for a discontinuously loaded parabolic equation. Using the method of the Green function, using the properties of the fundamental solution of the corresponding homogeneous equation, as well as assuming that the coefficients of the equation are bounded, continuous and satisfy the Helder condition, while remaining non-negative, it is shown that the solution of the problem is reduced to a system of Volterra integral equations of the second kind.

Key words: boundary value problems; parabolic equations; Cauchy – Dirichlet problem; fractional integro differentiation operator; first boundary value problem; Green's function; loaded equation; regular solution.

Information about the conflict of interests: the authors and reviewers declared no conflicts of interest.

Citation. Karmokov M.M., Nakhusheva F.M., Gekkieva S.Kh. Boundary value problems for discontinuously loaded parabolic equations. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 7–17. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-7-17. (In Russ.)

Mukhamed M. Karmokov (mkarmokov@yandex.ru) – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, 173, Chernyshevskogo Street, Nalchik, 360004, Russian Federation.
Fatima M. Nakhusheva (fatima-nakhusheva@mail.ru) – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, 173, Chernyshevskogo Street, Nalchik, 360004, Russian Federation.
Sakinat Kh. Gekkieva (gekkieva_s@mail.ru) – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, leading researcher of the Department of Computational Methods, Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS, 89a, Shortanova Street, Nalchik, 360000, Russian Federation.

References

[1] Nakhushev A.M. Loaded equations and their application. Moscow: Nauka, 2012, 232 p. Available at: https://djvu.online/file/GKTM9Py0MW2jl; https://elibrary.ru/item.asp?id=20886619. EDN: https://elibrary.ru/rpbpqz. (In Russ.)

[2] Nakhushev A.M. Equations of mathematical biology. Moscow: Vysshaya shkola, 1995, 301 p. Available at: https://djvu.online/file/vpPGn035lVZDw; https://elibrary.ru/item.asp?id=17961016. EDN: https://elibrary.ru/pdbbnb. (In Russ.)

[3] Nakhushev A.M. The Darboux problem for a certain degenerate second order loaded integrodifferential equation. *Differential equations*], 1976, vol. 12, no. 1, pp. 103–108. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=17962290. EDN: https://elibrary.ru/pdbujb. (In Russ.)

[4] Karmokov M.M. Local and non-local boundary value problems for discontinuously loaded parabolic equations: Candidate's of Physical and Mathematical Sciences thesis. Nalchik, 1991, 87 p. (In Russ.)

[5] Karmokov M.M., Nakhusheva F.M., Abregov M.Kh. Boundary value problem for loaded parabolic equations of fractional order. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS*, 2024, no. 1 (117), pp. 69–77. DOI: https://doi.org/10.35330/1991-6639-2024-26-1-69-77. EDN: https://elibrary.ru/mpqwls. (In Russ.)

[6] Kozhanov A.I. Time-non-local boundary value problem for linear parabolic equations. *Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki = Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2004. vol. 7, no. 1 (17), pp. 51–60. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=9484458. EDN: https://elibrary.ru/hzogql. (In Russ.)

[7] Kozhanov A.I. On the solvability of a boundary-value problem with a non-local boundary condition for linear parabolic equations. *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2004, no. 30, pp. 63–69. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=8819437. EDN: https://elibrary.ru/hkzxbd. (In Russ.)

[8] Dikinov Kh.Zh., Kerefov A.A., Nakhushev A.M. On a boundary value problem for the loaded equation of thermal conductivity. *Differential Equations*, 1976, vol. 12, no. 1, pp. 177–179. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=17873091. EDN: https://elibrary.ru/pbdavt. (In Russ.)

[9] Pskhu A.V. Partial differential equations of fractional order. Moscow: Nauka, 2005, 199 p. Available at: https://libcats.org/book/729565. (In Russ.)

[10] Gekkieva S.Kh. Mixed boundary value problems for the loaded diffusion-wave equation. *Research Bulletin of Belgorod State University. Mathematics. Physics*, 2016, no. 6 (227), issue 42, pp. 32–35. Available at: http://dspace.bsuedu.ru/handle/123456789/59383. (In Russ.)

[11] Beylin A.B., Bogatov A.V., Pulkina L.S. A problem with nonlocal conditions for a one-dimensional parabolic equation. *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2022, vol. 26, no. 2, pp. 380–395. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1904. EDN: https://www.elibrary.ru/USPHOK. (In Russ.)

[12] Kozhanov A.I., Ashurova G.R. Parabolic equations with degeneracy and unknown coefficient. *Mathematical Notes of NEFU*, 2024, vol. 31, no. 1, pp. 56–69. DOI: https://doi.org/10.25587/2411-9326-2024-1-56-69. EDN: https://elibrary.ru/ndfvwu. (In Russ.)

[13] Bogatov A.V., Pulkina L.S. On solvability of the inverse problem for the one-dimensional parabolic equation with unknown time-dependent coefficient under integral observation. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 7–17. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-7-17. (In Russ.)

[14] Nakhusheva F.M., Lafisheva M.M., Karmokov M.M., Dzhankulaeva M.A. Numerical method for solving the local problem for a parabolic equation with a fractive derivative in time with a mediated heat capacity. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS*, 2018, no. 5 (85), pp. 34–43. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=36394362. EDN: https://elibrary.ru/vlmusb. (In Russ.)

[15] Beshtokov M.Kh., Vodakhova V.A., Isakova M.M. Approximate solution of the first boundary value problem for the loaded heat conduction equation. *Matematicheskaya fizika i komp'yuternoe modelirovanie* [*Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2023, vol. 26, no. 4, pp. 5–17. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.4.1. EDN: https://elibrary.ru/cosaev. (In Russ.)

[16] Pogorzelski W. Etude de la solution fondamentale de l'equation parabolique. *Ricerche di Matematica*, 1956, vol. 5, pp. 25–57. Available at: https://zbmath.org/0072.10301

[17] Il'in A.M., Kalashnikov A.S., Oleinik O.A. Linear equations of the second order of parabolic type. *Russian Mathematical Surveys*, 1962, vol. 17, issue 3, pp. 31–46. DOI: https://doi.org/10.1070/RM1962v017n03ABEH004115. (In English; original in Russ.)