



**САМАРСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

Самарский национальный
исследовательский университет
имени академика С.П. Королёва



ISSN 2541-7525

ВЕСТНИК

САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

**ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ
СЕРИЯ**

ТОМ 29 • №1 • 2023 ГОД

Подписной индекс 80307
ISSN 2541-7525

**ВЕСТНИК
САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ СЕРИЯ**

- *Математика*
- *Механика*
- *Математические
методы
в естественных
науках*
- *Физика*

ТОМ 29 • № 1 • 2023 ГОД

УЧРЕДИТЕЛЬ И ИЗДАТЕЛЬ ЖУРНАЛА

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»
(Самарский университет)

eLIBRARY.RU РИНЦ ВИНТИ ULRICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet
Все статьи по тематике международной базы данных zbMATH считаются включенными в Перечень ведущих научных журналов Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки РФ

Журнал издается с 1995 г. под названием «Вестник Самарского государственного университета», с 2016 г. —

«Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия»

2023 Т. 29 № 1

Главный редактор:

Е.В. Шахматов, член-корреспондент РАН, д-р тех. наук, проф., научный руководитель Самарского университета, главный научный сотрудник института акустики машин, зав. кафедрой автоматических систем энергетических установок (Самара, Самарский университет, РФ)

Заместители главного редактора:

А.Ф. Крутов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры общей и теоретической физики, зам. директора Межвузовского научно-исследовательского центра по теоретическому материаловедению (Самара, Самарский университет, РФ)

С.В. Асташкин, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой функционального анализа и теории функций (Самара, Самарский университет, РФ)

Л.В. Степанова, д-р физ.-мат. наук, доц., проф. кафедры математического моделирования в механике (Самара, Самарский университет, РФ)

Ответственный секретарь:

М.А. Лихобабенко, канд. физ.-мат. наук

Лит. редактирование, корректура

Т.И. Кузнецовой

Компьютерная верстка, макет

М.А. Лихобабенко

Выпускающий редактор

Т.А. Мурзинова

Информация на английском языке

М.С. Стрельникова

Издатель: Самарский университет

Адрес издателя:

443086, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, Московское шоссе, 34, корп. 22а, 312 б.

Центр периодических изданий Самарского университета

Адрес редакции: 443011, Российская

Федерация, Самарская обл., г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

Е-mail: nvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций, регистрационный номер серии ПИ № ФС 77-67328 от 05.10.2016

Подписной индекс в Объединенном

каталоге «Пресса России» 80307

ISSN 2541-7525

Авторские статьи не обязательно отражают мнение издателя.

0+

Цена свободная

Подписано в печать 26.06.2023. Дата выхода в свет 30.06.2023

Формат 60 × 84/8.

Бумага офсетная. Печать оперативная.

Печ. л. 13.

Тираж 200 экз. (первый завод — 30 экз.). Заказ №

Отпечатано в типографии Самарского университета

443086, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, Московское шоссе, 34.

www: <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Редакционная коллегия:

В.Э. Видельман, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой экспериментальной механики и конструкционного материаловедения, директор Центра экспериментальной механики (Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, РФ)

А.В. Горохов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры общей и теоретической физики (Самарский университет, Самара, РФ)

А.М. Зюзин, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой экспериментальной физики (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, РФ)

В.В. Иважник, д-р физ.-мат. наук, проф., декан физического факультета, зав. кафедрой оптики и спектроскопии (Самарский университет, Самара, РФ)

А.И. Кожанов, д-р физ.-мат. наук, проф., ведущий научный сотрудник лаборатории теории функций (Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, РФ)

М.А. Леган, д-р тех. наук, доц., проф. кафедры прочности летательных аппаратов (Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, РФ)

Константин Панкрашкин, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры математики (Университет Париж-юг 11, Орсе, Франция)

А.Н. Панов, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой алгебры и геометрии (Самарский университет, Самара, РФ)

А.В. Покоев, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой физики твердого тела и неравновесных систем (Самарский университет, Самара, РФ)

Давиде М. Прозертио, д-р химии, проф. кафедры химии (Миланский университет, Милан, Италия)

Л.С. Пулькина, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры дифференциальных уравнений и теории управления (Самарский университет, Самара, РФ)

С.Г. Пятков, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой высшей математики; ведущий научный сотрудник (Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, РФ; Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, РФ)

В.В. Ревин, д-р биол. наук, проф., декан факультета биотехнологии и биологии, зав. кафедрой биотехнологии, биоинженерии и биохимии (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, РФ)

В.А. Салеев, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры физики (Самарский университет, Самара, РФ)

В.А. Соболев, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой дифференциальных уравнений и теории управления, профессор кафедры кибернетики (Самарский университет, Самара, РФ)

П.А. Терехин, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры теории функций и стохастического анализа (Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, РФ)

А.И. Хромов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры прикладной математики и информатики (Комсомольский-на-Амуре государственный университет, Комсомольск-на-Амуре, РФ)

© Самарский университет, 2023

Subscription Index 80307
ISSN 2541-7525

**VESTNIK
OF SAMARA UNIVERSITY
NATURAL SCIENCE SERIES**

- *Mathematics*
- *Mechanics*
- *Mathematical
Methods
in Natural
Sciences*
- *Physics*

VOL. 29 • № 1 • 2023

JOURNAL FOUNDER AND PUBLISHER
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
«Samara National Research University»
(Samara University)

eLIBRARY.RU RSCI VINITI ULRICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet
All articles on the subject of an international database zbMATH seemed to be included in the list of leading scientific journals of the Higher Attestation Committee at the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

The journal is published since 1995 under the title Vestnik of Samara State University, since 2016 —
Vestnik of Samara University. Natural Science Series

Chief editor:

E.V. Shakhmatov, corresponding member of the RAS, Dr. of Science (Engineering), prof., scientific adviser of Samara National Research University, chief researcher of Machine Acoustics Institute, head of Department of Power Plant Automatic Systems (Samara, Samara National Research University, RF)

Deputy chief editors:

A.F. Krutov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., professor of Department of General and Theoretical Physics, deputy director of Samara Center for Theoretical Materials Science (Samara, Samara National Research University, RF)

S.V. Astashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Functional Analysis and Function Theory (Samara, Samara National Research University, RF)

L.V. Stepanova, Dr. of Phys.-Math. Sci., associate prof., prof. of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics (Samara, Samara National Research University, Russian Federation)

Executive editor:

M.A. Likhobabenko, Cand. of Phys.-Math. Sci.

Literary editing, proofreading

T.I. Kuznetsova

Computer makeup, dummy

M.A. Likhobabenko

Executive editor

T.A. Murzinova

Information in English

M.S. Strelnikov

Publisher: Samara National Research University

Address publisher:

312 b, building 22 a, 34, Moskovskoye shosse,
Samara, 443086, Samara region, Russian Federation.

Centre of Periodical Publications of Samara University

Address of editorial staff: 1, Akademika Pavlova Street, Samara,
443011, Samara region, Russian Federation.

E-mail: nsvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Certificate of registration of means of mass media ПИ № ФС 77-67328 dated 05.10.2016, issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media.

Subscription Index in the United catalog «Press of Russia» 80307

ISSN 2541-7525

Author's articles do not necessarily reflect the views of the publisher.

0+

Price free

Passed for printing 26.06.2023.

Format 60 × 84/8.

Litho paper. Instant print.

Print. sheets 13.

Circulation 200 copies (first printing – 30 copies).

Order №

Printed on the printing house of Samara University

34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Samara region, Russian Federation

www: <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Editorial board:

V.E. Videlman, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Experimental Mechanics and Engineering Materials Science, head of the Center of Experimental Mechanics (Perm National Research Polytechnic University, Perm, RF)

A.V. Gorokhov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of General and Theoretical Physics (Samara National Research University, Samara, RF)

A.M. Zyuzin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Experimental Physics (Ogarev Mordovia National University, Saransk, RF)

V.V. Ivakhnik, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., dean of the Faculty of Physics, head of the Department of Optics and Spectroscopy (Samara National Research University, Samara, RF)

A.I. Kozhanov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., leading research worker of the Laboratory of the Theory of Functions (Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian branch of the RAS, Novosibirsk, RF)

M.A. Legan, Dr. of Engineering Sci., associate prof., prof. of the Department of Strength of Flying Machines (Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, RF)

Konstantin Pankrashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. of the Department of Mathematics (University of Paris-Sud 11, Orsay, France)

A.N. Panov, Dr. of Phys.-Math. Sci., professor, head of the Department of Algebra and Geometry (Samara National Research University, Samara, RF)

A.V. Pokoev, Dr. of Phys.-Math. Sci., professor, head of the Department of Solid-State Physics and Nonequilibrium Systems (Samara National Research University, Samara, RF)

Davide M. Proserpio, Dr. of Chemistry, prof. of the Department of Chemistry (University of Milan, Milan, Italy)

L.S. Pulkina, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Differential Equations and Control Theory (Samara National University, Samara, RF)

S.G. Pyatkov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Higher Mathematics; leading research worker (Yugra State University, Khanty-Mansiysk, RF; Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian branch of the RAS, Novosibirsk, RF)

V.V. Revin, Dr. Degree in Biology, prof., dean of the Faculty of Biotechnology and Biology, head of the Department of Biotechnology, Bioengineering and Biochemistry (Ogarev Mordovia National Research University, Saransk, RF)

V.A. Saleev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Physics (Samara National Research University, Samara, RF)

V.A. Sobolev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Differential Equations and Control Theory, prof. of the Department of Engineering Cybernetics (Samara National Research University, Samara, RF)

P.A. Terekhin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Function Theory and Stochastic Analysis (Saratov State University, Saratov, RF)

A.I. Khromov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Applied Mathematics and Informatics (Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-on-Amur, RF)

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

- Киптенко А.В., Избяков И.М.** О разреженных приближениях решений линейной системы с ортогональной матрицей 7

Механика

- Степанова Л.В., Семенов Д.А., Анисимов Г.С.** Применение метода голографической интерферометрии для реконструкции ряда М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины 15
- Чаплий Д.В., Степанова Л.В., Белова О.Н.** Воздействие аккумуляции повреждений на асимптотическое поведение напряжений в окрестности вершины трещины 47

Математические методы в естественных науках

- Семенова И.В., Корнеева А.А.** Поле направленного низкочастотного акустического излучателя в пограничном слое атмосферы 64
- Федоров К.М., Ганопольский Р.М., Гильманов А.Я., Шевелёв А.П.** Процедура оптимизации технологии выравнивания профиля приемистости 74

Физика

- Багров А.Р., Башкиров Е.К.** Перепутывание в нелинейной трехкубитной модели Джейнса — Каммингса 89
- Требования к оформлению статей* 102

CONTENTS

Mathematics

- Kiptenko A.V., Izbiakov I.M.** On sparse approximations of solutions to linear systems with orthogonal matrices **7**

Mechanics

- Stepanova L.V., Semenov D.A., Anisimov G.S.** Application of holography method for the restoration of the Williams series near the crack tip **15**
Chapliy D.V., Stepanova L.V., Belova O.N. Effect of damage accumulation on the asymptotic behavior of stresses ahead the crack tip..... **47**

Mathematical Methods in Natural Sciences

- Semenova I.V., Korneeva A.A.** Field of a directional low-frequency acoustic emitter in the boundary layer of the atmosphere **64**
Fedorov K.M., Ganopolskiy R.M., Gilmanov A.Y., Shevelev A.P. Optimization procedure for conformance control **74**

Physics

- Bagrov A.R., Bashkirov E.K.** Entanglement in nonlinear three-qubits Jaynes — Cummings model **89**
Requirements to the design of articles **102**

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-1-7-14

УДК 51-74; 517.18

Дата: поступления статьи: 18.01.2023
после рецензирования: 28.02.2023
принятия статьи: 30.05.2023

А.В. Киптенко

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: kiptenkoandrei@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-3837-1013>

И.М. Избяков

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: iliya-izbyakov@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3358-966X>

О РАЗРЕЖЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ОРТОГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ¹

АННОТАЦИЯ

В данной статье рассмотрена модель получения разреженного представления вектора-сигнала в \mathbb{R}^k , основанная на системе линейных уравнений с ортогональной матрицей. Такое представление является минимизацией целевой функции, которая сочетает в себе отклонение от точного решения и выбранный функционал J . В качестве функционала выбраны евклидова норма, норма $\|\cdot\|_1$ и квазинорма $\|\cdot\|_0$. Евклидова норма не позволяет получить другие решения кроме точного, а две другие позволяют балансировкой невязки и параметра λ при функционале получать более разреженные решения. Построены графики зависимости между координатами оптимального вектора и параметром λ . Приведены примеры.

Ключевые слова: разреженные представления; целевая функция; минимизация целевой функции; нормы; псевдонормы; допустимый уровень погрешности.

Цитирование. Киптенко А.В., Избяков И.М. О разреженных приближениях решений линейной системы с ортогональной матрицей // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2023. Т. 29, № 1. С. 7–14. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-1-7-14>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Киптенко А.В., 2023

Киптенко Андрей Викторович — аспирант кафедры безопасности информационных систем, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

© Избяков И.М., 2023

Избяков Илья Михайлович — аспирант кафедры безопасности информационных систем, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

1. Предварительные сведения

В настоящее время активно разрабатывается новый метод сжатия информации, основанный на снижении размерности данных. Простейшая модель такого сжатия выглядит так.

¹Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-931).

Рассмотрим линейную систему уравнений с прямоугольной матрицей [1–3]

$$D_{n \times k} \alpha = x, k \geq n.$$

Например, для $k=3, n=2$ система принимает вид:

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Исходная информация моделируется вектором α , сжатая — вектором x меньшей размерности. Матрицу D принято называть словарем, а её столбцы — атомами.

Предполагая, что ранг матрицы D полный, система имеет бесконечное число решений. Для создания быстрых алгоритмов восстановления информации предпочтение отдается векторам, имеющим наибольшее количество нулевых координат. Такие решения называются разреженными. Тематика, связанная с разреженными представлениями, широко освещена в литературе, включая источники [1–10]. В общем виде можно сформулировать следующую задачу: найти такой функционал Q , минимизируя который можно было бы добиться единственности в выборе решения. Формально постановка задачи выглядит следующим образом: $\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha} Q(\alpha)$ и $D\alpha = x$. Традиционный выбор в качестве функционала Q евклидовой нормы позволяет найти единственное решение, которое, однако, не является разреженным [1]. Для поиска разреженных решений интересно рассмотреть нормы и псевдонормы, отличные от евклидовой.

В данной работе будут рассмотрены функционалы вида $Q(\alpha) = \begin{cases} \|\alpha\|_p^p & p = 1, 2 \\ \|\alpha\|_0 & p = 0 \end{cases}$.

Для $p = 0$ функционал $Q(\alpha)$ определяет количество ненулевых координат вектора α .

Для этого функционала формулируется задача минимизации (P_0) : $\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha} \|\alpha\|_0$ такая, что $D\alpha = x$.

Представляет интерес и такая постановка задачи. Допускается ϵ -отклонение от точного решения системы, но по-прежнему сохраняется требование получить разреженное решение [4]. Одна из возможных постановок такой задачи выглядит так: (P_p^ϵ) : $\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha} Q(\alpha)$, $p = 0, 1, 2$ такое, что $\|D\alpha - x\|_2 \leq \epsilon$.

2. Основные результаты

В данной работе в качестве словаря рассматривается вещественная ортогональная $k \times k$ -матрица D , и для такого словаря решаются задачи (P_p^ϵ) , $p = 0, 1, 2$. Для решения поставленных задач составляется целевая функция [1] с параметром $\lambda > 0$, с классическими нормами при $p = 1, p = 2$ и с псевдонормой при $p = 0$:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2} \|D\alpha - x\|_2^2 + \lambda Q(\alpha),$$

и задача сводится к нахождению вектора α , который минимизирует определенную таким образом функцию, $\alpha, x \in \mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$. $\lambda > 0$.

Используя ортогональность матрицы D , имеем:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{1}{2} \|D\alpha - x\|_2^2 + \lambda Q(\alpha) = \frac{1}{2} \|D\alpha - DD^T x\|_2^2 + \lambda Q(\alpha) = \\ &= \frac{1}{2} \|D(\alpha - \beta)\|_2^2 + \lambda Q(\alpha) = \frac{1}{2} \|(\alpha - \beta)\|_2^2 + \lambda Q(\alpha). \end{aligned}$$

В первом переходе использовалось свойство унитарности, $DD^T = I$. Второй осуществляется с использованием точного решения $\beta := D^T x$. Последний переход использует изометрию унитарного преобразования относительно евклидовой нормы.

Получившееся равенство можно записать следующим образом:

$$f(\alpha) = \sum_{j=1}^k \left[\frac{1}{2} (\alpha_j - \beta_j)^2 + \lambda Q(\alpha_j) \right].$$

Такая форма записи позволяет заменить задачу векторной оптимизации серией задач скалярной оптимизации.

3. Задача (P_0^ϵ)

В этой задаче оптимальные координаты принимают вид:

$$\alpha_j^{opt} = \arg \min_{\alpha_j} \left[\frac{1}{2}(\alpha_j - \beta_j)^2 + \lambda \right]$$

при $\alpha_j \neq 0$ и

$$\alpha_j^{opt} = \arg \min_{\alpha_j} \left[\frac{1}{2}\beta_j^2 \right]$$

при $\alpha_j = 0$.

Минимум первой функции достигается при $\alpha_j = \beta_j$ и равен λ ; а минимум второй достигается при $\alpha_j = 0$ и равен $\beta_j^2/2$.

Сравним найденные экстремумы для получения условий для α_j^{opt}

$$\frac{1}{2}\beta_j^2 \leq \lambda, \quad |\beta_j| \leq \sqrt{2\lambda}.$$

Соответственно

$$\alpha_j^{opt} = \begin{cases} 0; & |\beta_j| \leq \sqrt{2\lambda}, \\ \beta_j; & |\beta_j| > \sqrt{2\lambda}. \end{cases}$$

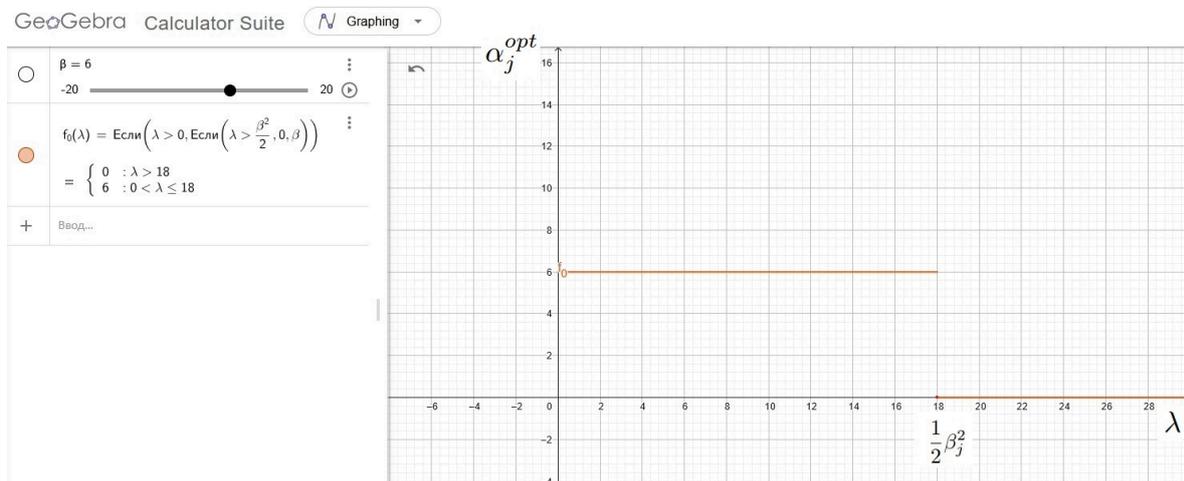


Рис. 1. График зависимости оптимальных координат α_j от параметра λ для ℓ_0 квазинормы
 Fig. 1. Graph of the dependence of the optimal coordinates α_j on the parameter λ for the ℓ_0 quasi-norm

Данный график (рис. 1) известен как жесткий порог. Для $|\beta| \leq \sqrt{2\lambda}$ оптимальным представлением будет $\alpha = 0$. Когда $|\beta| \geq \sqrt{2\lambda}$, оптимальное представление $\alpha = \beta$. Таким образом, варьируя невязку и параметр λ , можно сделать нулевыми те координаты точного решения β , которые удовлетворяют условию $|\beta| \leq \sqrt{2\lambda}$.

4. Задача (P_1^ϵ)

При рассмотрении нормы ℓ_1 функции $Q(\alpha_j) = |\alpha_j|$, используя целевую функцию $\frac{1}{2}(\alpha_j - \beta_j)^2 + \lambda Q$, можно получить оптимизационную задачу [4]

$$\alpha_j^{opt} = \arg \min_{\alpha_j} \left[\frac{1}{2}(\alpha_j - \beta_j)^2 + \lambda |\alpha_j| \right].$$

Находим значение α_j , при котором $F(\alpha_j) = \frac{1}{2}(\alpha_j - \beta_j)^2 + \lambda |\alpha_j|$ достигает минимума.

Для этого найдем критические точки, в которых $F'(\alpha_j) = 0$ или $F'(\alpha_j)$ не существует. Производная представлена следующим выражением:

$$F'(\alpha_j) = \alpha_j - \beta_j + \lambda \frac{\alpha_j}{|\alpha_j|}, \quad \alpha_j \neq 0.$$

F' разбивается на два случая

$$F'(\alpha_j) = \begin{cases} \alpha_j - \beta_j + \lambda & \alpha_j > 0, \\ \alpha_j - \beta_j - \lambda & \alpha_j < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим случай $\alpha_j > 0$

$$F'_1(\alpha_j) = \alpha_j - \beta_j + \lambda; \alpha_j > 0.$$

Приравниваем к нулю, получаем одну критическую точку

$$\alpha_j = \beta_j - \lambda.$$

Прделаем то же самое с $F'_2(\alpha_j) = \alpha_j - \beta_j - \lambda; \alpha_j < 0$. Приравниваем к нулю, получаем одну критическую точку

$$\alpha_j = \beta_j + \lambda.$$

Для доказательства того, что данные критические точки являются точками минимума, необходимо взять вторую производную и проверить найденные критические точки. $F''(\alpha_j) = 1 \Rightarrow \beta_j + \lambda$ и $\beta_j - \lambda$ — минимумы функции.

Далее, необходимо узнать, при каких условиях найденные минимумы меньше 0

$$\beta_j - \lambda < 0 \Rightarrow \beta_j < \lambda,$$

$$\beta_j + \lambda < 0 \Rightarrow \beta_j < -\lambda.$$

Проверяем оставшуюся критическую точку

$$\begin{cases} 0 < \beta_j + \lambda; \\ 0 < \beta_j - \lambda; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_j < -\lambda; \\ \beta_j < \lambda. \end{cases}$$

При сравнении $\beta_j + \lambda$ и $\beta_j - \lambda$ получаем, что $-\lambda < \lambda$ или $-\lambda > \lambda$. Так как $\lambda > 0$, можно прийти к выводу, что $\alpha_j^{opt} = \beta_j - \lambda$ используется при $\beta_j > \lambda > 0$, а $\alpha_j^{opt} = \beta_j + \lambda$ при $\beta_j < -\lambda < 0$.

Таким образом, решение задачи минимизации для ℓ_1 нормы можно записать в таком виде:

$$\alpha_j^{opt} = \begin{cases} \beta_j - \lambda; & \beta_j > \lambda, \\ 0; & |\beta_j| \leq \lambda, \\ \beta_j + \lambda; & \beta_j < -\lambda. \end{cases}$$

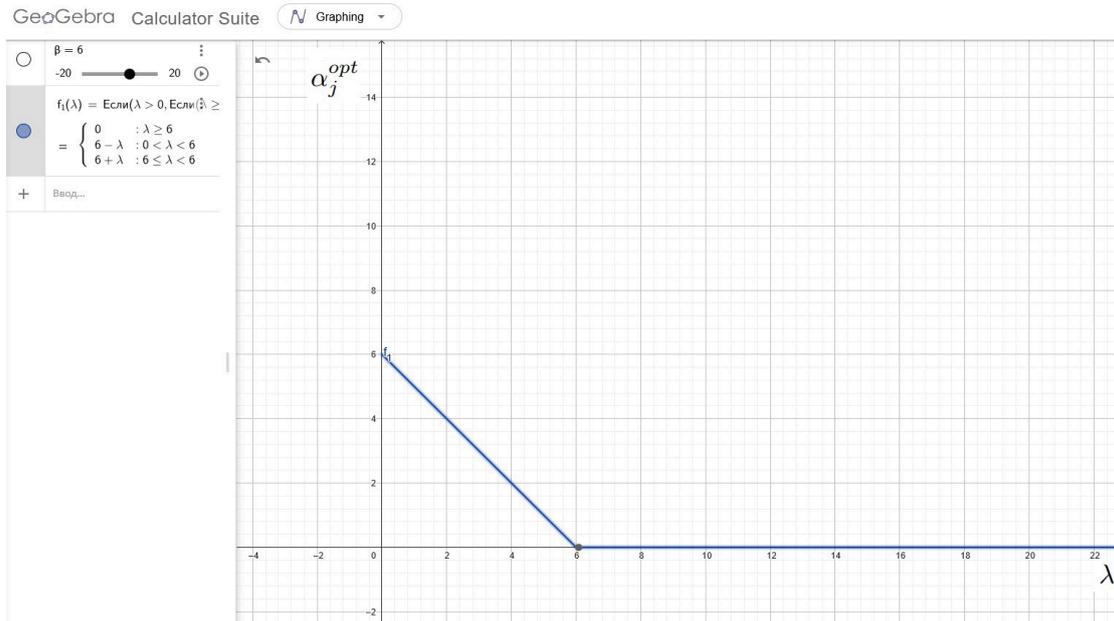


Рис. 2. График зависимости оптимальных координат α_j от параметра λ для ℓ_1 нормы
Fig. 2. Graph of the dependence of the optimal coordinates α_j on the parameter λ for the ℓ_1 norm

Таким образом, варьируя невязку и параметр λ , получаем возможность сделать нулевыми те координаты точного решения β , которые удовлетворяют условию $|\beta| \leq \lambda$ (рис. 2).

5. Задача (P_2^ϵ)

При рассмотрении нормы ℓ_2 функции Q , получаем $Q(\alpha_j) = |\alpha_j|^2$.

Таким образом, оптимизационная задача сводится к следующему виду:

$$\alpha_j^{opt} = \arg \min_{\alpha_j} \left[\frac{1}{2}(\alpha_j - \beta_j)^2 + \lambda |\alpha_j|^2 \right],$$

$F(\alpha_j) = \frac{1}{2}(\alpha_j - \beta_j)^2 + \lambda|\alpha_j|^2$, $F(\alpha_j) = \frac{1}{2}(\alpha_j - \beta_j)^2 + \lambda\alpha_j^2$. Находим значение α_j , при котором $F(\alpha_j)$ достигает минимума.

$$F'(\alpha_j) = \alpha_j - \beta_j + 2\lambda\alpha_j.$$

Приравниваем к нулю, получаем одну критическую точку

$$\alpha_j = \frac{\beta_j}{1 + 2\lambda}.$$

Данная точка является точкой минимума функции. Следовательно, $\alpha_j^{opt} = \frac{\beta_j}{1+2\lambda}$.

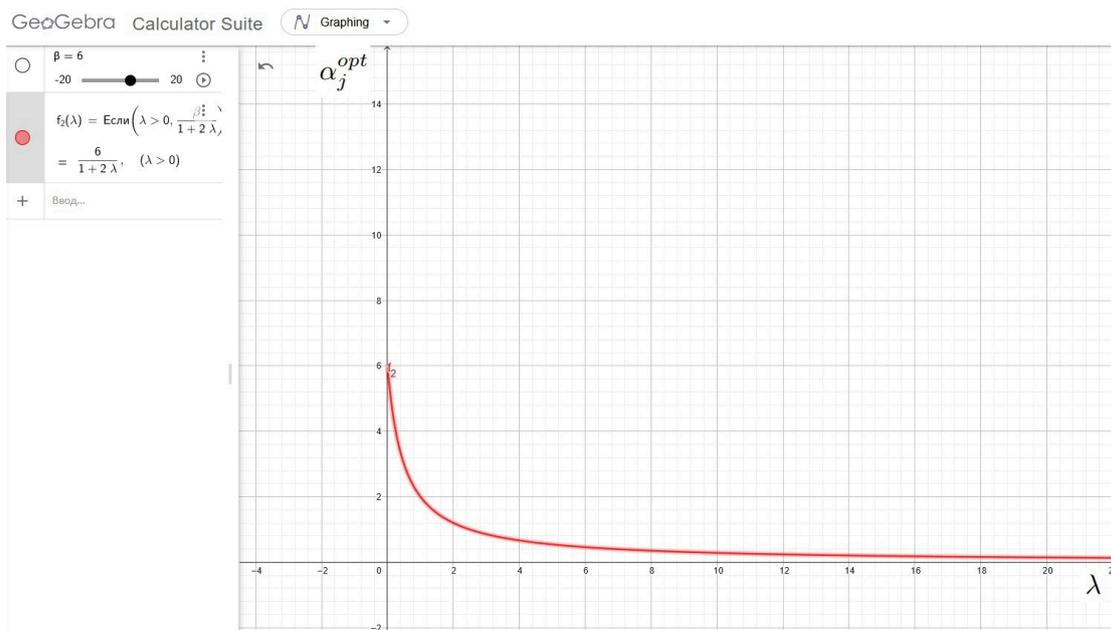


Рис. 3. График зависимости оптимальных координат α_j от параметра λ для ℓ_2 нормы
 Fig. 3. Graph of the dependence of the optimal coordinates α_j on the parameter λ for the ℓ_2 norm

Таким образом, получаем, что ℓ_2 норма не позволяет получить дополнительных нулевых координат (рис. 3).

6. Примеры нахождения разреженных решений

В качестве словаря возьмем единичную матрицу 4×4

$$D = D^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Возьмем $\lambda = 2$. Для ℓ_1 нормы оптимальным решением будет:

$$\alpha_j^{opt} = \begin{cases} \beta_j - \lambda; & \beta_j > \lambda, \\ 0; & |\beta_j| \leq \lambda, \\ \beta_j + \lambda; & \beta_j < -\lambda, \end{cases}$$

$$\alpha_j^{opt} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получили более разреженное решение для вектора x . Нетрудно заметить, что при использовании ℓ_1 нормы всегда можно получить более разреженное решение путем соответствующего выбора λ .

Также можно заметить, что при использовании ℓ_2 нормы и $\alpha_j^{opt} = \frac{\beta_j}{1+2\lambda}$ невозможно получить α_j , отличное от 0 при $\beta_j \neq 0$. Таким образом, норма ℓ_2 не может решить поставленную задачу.

Используя псевдонорму ℓ_0 , имеем

$$\alpha_j^{opt} = \begin{cases} 0; & |\beta_j| \leq \sqrt{2\lambda}, \\ \beta_j; & |\beta_j| > \sqrt{2\lambda} \end{cases}$$

и, изменяя параметр λ , можно получить любое количество нулевых координат приближенного решения.

В качестве словаря возьмем ортогональную матрицу 4×4

$$D = D^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Возьмем $\lambda = 2$. Для ℓ_1 нормы оптимальным решением будет:

$$\alpha_j^{opt} = \begin{cases} \beta_j - \lambda; & \beta_j > \lambda, \\ 0; & |\beta_j| \leq \lambda, \\ \beta_j + \lambda; & \beta_j < -\lambda, \end{cases}$$

$$\alpha_j^{opt} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, мы получили одну дополнительную нулевую координату.

Выводы

Выбор параметра λ позволяет регулировать количество нулевых координат в зависимости от выбранной невязки ϵ . При использовании ℓ_0 или ℓ_1 нормы всегда можно получить более разреженное решение путем соответствующего выбора λ .

Также можно заметить, что при использовании ℓ_2 нормы и $\alpha_j^{opt} = \frac{\beta_j}{1+2\lambda}$ невозможно получить α_j , отличное от 0, при $\beta_j \neq 0$. Таким образом, ℓ_2 норма не позволяет получить дополнительных нулевых координат в приближенном представлении точного решения.

Литература

- [1] Elad M. Sparse and Redundant Representations. From Theory to Applications in Signal and Image Processing. New York: Springer. 2010. 376 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7011-4>.
- [2] Novikov S.Ya. Processing of sparse signals and mutual coherence of "measurable" vectors // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41. № 4. Pp. 666–675. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080220040174>. EDN: <https://www.elibrary.ru/hrjatz>.
- [3] Natarajan B.K. Sparse approximate solutions to linear systems // SIAM Journal on Computing. 1995. Vol. 24. Issue 2. Pp. 227–234. DOI: <http://doi.org/10.1137/S0097539792240406>.
- [4] Donoho D.L., Elad M. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via ℓ_1 minimization // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 2003. Vol. 100. Issue 5. Pp. 2197–2202. DOI: <http://doi.org/10.1073/pnas.0437847100>.
- [5] Candes Emmanuel J. Compressive sampling // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. 2006. Vol. 3. Pp. 1433–1452. URL: <https://candes.su.domains/publications/downloads/CompressiveSampling.pdf>.
- [6] Candes Emmanuel J. Mathematics of sparsity (and a few other things). International Congress of Mathematicians. 2014. URL: <https://candes.su.domains/publications/downloads/ICM2014.pdf>.

- [7] Candes Emmanuel J., Romberg J.K., Tao T. Stable Signal Recovery from Incomplete and Inaccurate Measurements. Available online: arXiv:math/0503066.
- [8] Cohen R., Elad M., Milanfar P. Regularization by Denoising via Fixed-Point Projection (RED-PRO). Available online: arXiv:2008.00226v2.
- [9] Candes Emmanuel J., Plan Ya. Regularization by Denoising via Fixed-Point Projection (RED-PRO). Available online: arXiv:1011.3854v3.
- [10] Qu Q., Sun Ju, Wright J. Finding a sparse vector in a subspace: Linear sparsity using alternating directions. Available online: arXiv:1412.4659.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-1-7-14

Submitted: 18.01.2023

Revised: 28.02.2023

Accepted: 30.05.2023

A.V. Kiptenko

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: kiptenkoandrei@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-3837-1013>

I.M. Izbiakov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: iliya-izbyakov@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3358-966X>

ON SPARSE APPROXIMATIONS OF SOLUTIONS TO LINEAR SYSTEMS WITH ORTHOGONAL MATRICES²

ABSTRACT

This article discusses a model for obtaining a sparse representation of a signal vector in \mathbb{R}^k , based on a system of linear equations with an orthogonal matrix. Such a representation minimizes a target function that combines the deviation from the exact solution and a chosen functional J . The functionals chosen are the Euclidean norm, the norm $|\cdot|_1$, and the quasi-norm $|\cdot|_0$. The Euclidean norm only allows for the exact solution, while the other two allow for a balance between the residual and the parameter λ in the functional, resulting in sparser solutions. Graphs are plotted showing the dependence between the coordinates of the optimal vector and the parameter λ , and examples are provided.

Key words: sparse representations; objective function; minimization of the objective function; norms; pseudonorms; admissible error level.

Citation. Kiptenko A.V., Izbiakov I.M. On sparse approximations of solutions to linear systems with orthogonal matrices. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 7–14. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-1-7-14>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Kiptenko A.V., 2023

Andrei V. Kiptenko — post-graduate student of the Department of Information Security, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

© Izbiakov I.M., 2023

Iliya M. Izbiakov — post-graduate student of the Department of Information Security, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Elad M. Sparse and Redundant Representations. From Theory to Applications in Signal and Image Processing. New York: Springer, 2010, 376 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-1-4419-7011-4>.

²The work was carried out within the frameworks of realization of the program of development of Research and Educational Mathematical Center of the Volga Federal District (agreement № 075-02-2023-931).

- [2] Novikov S.Ya. Processing of sparse signals and mutual coherence of "measurable" vectors. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, vol. 41, no. 4, pp. 666–675. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1995080220040174>. EDN: <https://www.elibrary.ru/hrjatz>.
- [3] Natarajan B.K. Sparse approximate solutions to linear systems. *SIAM Journal on Computing*, 1995, vol. 24, issue 2, pp. 227–234. DOI: <http://doi.org/10.1137/S0097539792240406>.
- [4] Donoho D.L., Elad M. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via ℓ_1 minimization. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2003, vol. 100, issue 5, pp. 2197–2202. DOI: <http://doi.org/10.1073/pnas.0437847100>.
- [5] Candes Emmanuel J. Compressive sampling. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 2006, vol. 3, pp. 1433–1452. Available at: <https://candes.su.domains/publications/downloads/CompressiveSampling.pdf>.
- [6] Candes Emmanuel J. Mathematics of sparsity (and a few other things). International Congress of Mathematicians. 2014. Available at: <https://candes.su.domains/publications/downloads/ICM2014.pdf>.
- [7] Candes Emmanuel J., Romberg J.K., Tao T. Stable Signal Recovery from Incomplete and Inaccurate Measurements. Available online: [arXiv:math/0503066](https://arxiv.org/abs/math/0503066).
- [8] Cohen R., Elad M., Milanfar P. Regularization by Denoising via Fixed-Point Projection (RED-PRO). Available online: [arXiv:2008.00226v2](https://arxiv.org/abs/2008.00226v2).
- [9] Candes Emmanuel J., Plan Ya. Regularization by Denoising via Fixed-Point Projection (RED-PRO). Available online: [arXiv:1011.3854v3](https://arxiv.org/abs/1011.3854v3).
- [10] Qu Q., Sun Ju, Wright J. Finding a sparse vector in a subspace: Linear sparsity using alternating directions. Available online: [arXiv:1412.4659](https://arxiv.org/abs/1412.4659).

МЕХАНИКА MECHANICS



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-1-15-46

УДК 512.531; 519.7

Дата: поступления статьи: 15.03.2023
после рецензирования: 21.04.2023
принятия статьи: 30.05.2023

Л.В. Степанова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: stepanova.lv@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6744-2222>

Д.А. Семенов

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: denis@gde.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8620-5167>

Г.С. Анисимов

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: anisgennady@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2774-7158>

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ ДЛЯ РЕКОНСТРУКЦИИ РЯДА М. УИЛЬЯМСА ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ¹

АННОТАЦИЯ

В статье описывается и анализируется обработка результатов серии экспериментов, полученных с помощью интерференционно-оптического метода голографической интерферометрии (голографической фотоупругости), нацеленных на вычисление амплитудных коэффициентов ряда М. Уильямса, представляющего поля напряжений и перемещений, ассоциированных с вершиной острой трещины, для нескольких конфигураций образцов с трещинами. Основной задачей настоящего исследования является экспериментальное и численное (конечно-элементное) определение обобщенных коэффициентов ряда М. Уильямса, воспроизводящего поля напряжений и перемещений вблизи вершины острой трещины в изотропной линейно-упругой среде с учетом регулярных (неособых) слагаемых высокого порядка, учитываемых в многопараметрическом представлении Макса Уильямса. Показано, что метод голографической интерферометрии является удобным инструментом реконструкции поля напряжений вблизи кончика трещины, ибо в ходе эксперимента возможно получение двух семейств интерференционных картин: полос абсолютной разности хода при вертикальной и горизонтальной поляризации. Получены картины полос абсолютной разности хода (картины изодром) в пластине с центральной горизонтальной трещиной и наклонной под разными углами к горизонтали трещиной. Для каждого типа экспериментального образца выполнен расчет коэффициентов ряда Уильямса с учетом неособых слагаемых (в представлении М. Уильямса сохранились пятнадцать слагаемых). Предложена процедура линеаризации нелинейных алгебраических уравнений, следующих из соотношений оптомеханического закона Фавра. Полученная существенно переопределенная система линейных алгебраических уравнений решается итерационным методом и проводится оценка масштабных (амплитудных) коэффициентов ряда М. Уильямса. Выполнено сравнение экспериментально определенных значений ряда Уильямса с результатами конечно-элементного расчета напряженно-деформированного состояния, реализованного в пакете SIMULIA Abaqus. Установлено, что экспериментальные оценки и результаты конечно-элементного моделирования хорошо согласуются между собой.

Ключевые слова: голографическая интерферометрия; разложение М. Уильямса поля напряжений; амплитудные множители; закон Фавра; переопределенный метод; линии абсолютной разности хода, механика хрупкого разрушения.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РНФ (в рамках научного проекта № 21-11-00346).

Цитирование. Степанова Л.В., Семенов Д.А., Анисимов Г.С. Применение метода голографической интерферометрии для реконструкции ряда М. Уильямса у вершины трещины // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2023. Т. 29, № 1. С. 15–46. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-1-15-46>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Степанова Л.В., 2023

Степанова Лариса Валентиновна — доктор физико-математических наук, зав. кафедрой математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

© Семенов Д.А., 2023

Семенов Денис Анатольевич — кандидат физико-математических наук, магистрант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

© Анисимов Г.С., 2023

Анисимов Геннадий Сергеевич — аспирант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

В ходе анализа аварийных ситуаций, принятия новых конструкционных и технологических решений, разработки указаний для исправления дефектов в ответственных элементах конструкций необходимо иметь количественное представление о причинах, приводящих конструкцию к возникновению зон высокой концентрации напряжений [1; 2; 4]. Оценка напряженно-деформированного состояния в важных элементах конструкций, находящихся в существующих объективно эксплуатационных режимах и содержащих области концентрации напряжений, в общем случае вызывает затруднения. Вследствие сложности конструкционных форм и различного сопротивления материалов разрушению прибегают к широкому применению экспериментальных и численных методов и к их комбинации [4–14].

В настоящее время экспериментальные методы наблюдения и изучения полей у вершины трещины являются надежным и достоверным инструментом получения картины напряженно-деформированного состояния в конструкции. К наиболее современным и признанным методам относится метод корреляции цифровых изображений [15]. Тем не менее классические методы анализа механических полей, такие как метод цифровой фотоупругости, цифровой голографии и спекл-интерферометрии, остаются и ныне активно используемыми и авторитетными экспериментальными методами современной механики разрушения. Следует отметить, что поляризационно-оптические методы, такие как фотоупругость и голография, являясь традиционными экспериментальными техниками исследования полей напряжений, в последнее время переживают возрождение интереса к ним. Об этом свидетельствуют работы, появившиеся в самое последнее время и связанные с возможностью применения технологий искусственного интеллекта и машинного обучения [16–21]. Исследования, посвященные методам фотоупругости и голографической интерферометрии [14–21], указывают на возрождение интереса к классическим экспериментальным техникам поляризационно-оптических методов. Например, Индийский технологический институт Мадраса (ИТ Мадрас) внедрил в коммерческую эксплуатацию четыре новейших пакета программного обеспечения в области фотоупругого анализа и моделирования (The-Art Software for Photoelastic Analysis and Simulation). Программное обеспечение находит применение в различных областях, начиная от сельского хозяйства и заканчивая передвижением живых организмов, анализом напряжений или выявлением дефектов в 3D-электронике. Новые области применения фотоупругости включают такие области, как биомедицина и традиционный анализ напряжений, включающий сложные нагрузки и граничные условия, а также в аэрокосмической, гражданской, машиностроительной и обрабатывающей промышленности. Анализ фотоупругих напряжений претерпел значительные изменения с появлением цифровых компьютеров и технологий получения изображений. До сих пор не существовало всеобъемлющей программной платформы для внедрения подобных разработок в исследовательских лабораториях и отраслях промышленности, использующих этот метод. Это первое комплексное программное обеспечение для экспериментального анализа фотоупругих напряжений. Врачи, агрономы и биологи в настоящее время все чаще обращаются к использованию фотоупругости для решения своих проблем. Они могут достоверно обрабатывать записанные изображения с помощью программного обеспечения для получения важных выво-

дов из своих исследований. Техника фотоупругости все чаще используется в различных областях, таких как стоматология, разработка протезов – в целях снижения напряжений, возникающих при эндопротезировании коленного и тазобедренного суставов, разработка формы иглы для эпидуральной инъекции, улучшение обработки материалов, таких как прецизионное формование стекла (используется в камерах мобильных телефонов), напряжения в 3D электронных устройствах, помимо ряда классических механических и аэрокосмических применений, связанных с анализом напряжений в элементах конструкций.

Авторы статьи [18] отмечают, что с момента зарождения механики разрушения способность фотоупругих методов демонстрировать ясное отражение с помощью изохроматической картины поля напряжений определила направление математического моделирования – исследование поля напряжений вблизи вершины трещины посредством интерференционно-оптических методов. Оценка параметров разрушения, а именно КИН и Т-напряжения, имеет первостепенное значение для прогнозирования направлений роста трещины и оценки срока службы детали. Современный метод оценки параметров разрушения использует данные фотоупругой картины полос для оценки коэффициентов многопараметрического уравнения поля напряжений путем итеративной минимизации ошибки сходимости в нелинейном смысле наименьших квадратов. Это многоступенчатый, полуавтоматический подход. В [18] используются возможности сверточных нейронных сетей, которые хорошо подходят для распознавания сложных пространственных паттернов, для полной автоматизации оценки параметров разрушения с использованием изображения изохроматической картины полос в качестве входных данных. Сеть предварительно обучается на большом объеме моделируемого набора данных, который позже может быть точно настроен для меньшего экспериментального набора данных. Такой подход помогает обойти требования к большому экспериментально помеченному набору данных, который трудно получить.

В [14] применен подход оценки КИН и номинального напряжения для пластины с трещиноподобным (эллиптическим) дефектом, основанный на рассмотрении двух слагаемых в разложении точного решения для дефекта эллиптической формы. В качестве экспериментальной основы берутся интерференционные картины полос абсолютной разности хода, полученные на основе метода голографической интерферометрии. С помощью соотношений Фавра и приближенного разложения компонент напряжений для плоского случая определяются коэффициент интенсивности напряжений и номинальное напряжение. Новизна предложенного подхода обуславливается возможностью более аккуратного и достоверного представления составляющих тензора напряжений в непосредственной близости окрестности вершины трещиноподобного дефекта. Авторы подчеркивают, что предложенное представление позволяет учесть геометрическую форму дефекта и радиус закругления вершины. Они отмечают, что вычисленные в соответствии с предлагаемым методом значения тарировочной функции в выражении для теоретического определения КИН являются более высокими по сравнению с полученными оценками по ранее применявшимся методикам, что может указывать на недооценку значения КИН при использовании ранее предложенных формул. Помимо применения более точных формул для тензора напряжений предлагаемый уточненный подход предусматривает рассмотрение номинального напряжения и КИН как независимых параметров, что в полной мере соответствует использованию двучленного разложения механических параметров у вершины дефекта. Фактически авторы прибегают к рассмотрению двучленного разложения поля напряжений. Полный учет геометрии трещины и особенностей нагружения невозможен с аналитической точки зрения, однако предложенная процедура позволяет в некоторой степени компенсировать упрощения аналитических выражений для представления тензора напряжений. Авторы показывают, что полученные оценки хорошо согласуются с результатами натуральных экспериментов.

Метод голографической фотоупругости, основанный на соотношениях Фавра, связывающих оптические характеристики (порядки полос при вертикальной и горизонтальной поляризации) и механические величины (главные напряжения), позволяет получить два соотношения для главных напряжений, получаемых для вертикальной и горизонтальной поляризаций. Фавр построил интерферометр для измерения абсолютной величины отставания по фазе двух волн, поляризованных в двух направлениях. Следовательно, в рамках данного метода, в отличие от классической фотоупругости, не возникает затруднений, связанных с разделением главных напряжений. Как отмечается в [4], раздельное определение напряжений при фотоупругом моделировании задач о концентрации напряжений затрудняется высокими градиентами напряжений, затруднено определение поля изоклин. Указанных недостатков лишен метод голографической фотоупругости, основанный на анализе интерференционных картин абсолютной разности хода (АРХ).

Мотивация исследования обусловлена:

- 1) необходимостью аккуратной оценки напряженно-деформированного состояния вблизи острой трещины в линейно-упругой изотропной среде с помощью многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса с удержанием регулярных (неособых) слагаемых; апробация методов определения параметров разрушения – обобщенных коэффициентов интенсивности – для распространения методов на более сложные среды;

2) бурным развитием интерференционно-оптических методов механики и возможностями быстрой цифровой обработки всего ансамбля экспериментальной информации (получаемых интерференционных картин);

3) появившимися в последнее время возможностями разработки нейронных сетей для оценки полей напряжений и перемещений с использованием изображений цифровой фотоупругости, голографической интерферометрии, спекл-интерферометрии и метода корреляции цифровых изображений, необходимостью создания базы данных, основанной на экспериментальных картинах интерференционных полос, получаемых поляризационно-оптическими методами механики.

Главная задача настоящей статьи состоит в экспериментальном и численном нахождении коэффициентов разложения М. Уильямса полей перемещений и напряжений вблизи вершины трещины с помощью методов голографической интерферометрии и конечных элементов и сопоставление полученных оценок; анализ влияния высших приближений (регулярных, неособых слагаемых) на основе сравнения экспериментального и численного решений задачи для образцов идентичной геометрии и совокупности приложенной нагрузки. Для достижения поставленных целей в статье описаны использованная серия экспериментальных образцов, процедура тарировки, нацеленная на определение постоянных материала; анализ интерференционных картин, полученных для образца с центральной трещиной, экспериментальное определение обобщенных коэффициентов интенсивности напряжений (амплитудных коэффициентов регулярных слагаемых), процедура переопределенного метода, численные решения задач о нагружении пластины с горизонтальным и наклонным разрезом, найденные посредством метода конечных элементов, процедура реконструкции асимптотического ряда Макса Уильямса из результатов конечно-элементного решений. В силу указанных выше причин будем исходить из следующего:

1) метод голографической интерферометрии в механике разрушения еще не исчерпал своих возможностей;

2) современные перспективы построения искусственных интерференционных картин с помощью методов машинного обучения открывают для голографической фотоупругости новые преимущества в сравнении с другими поляризационно-оптическими методами;

3) сочетание и комбинация экспериментальных методов, позволяющих найти поля деформаций (метод корреляции цифровых изображений) и поля напряжений (методы голографической интерферометрии и цифровой фотоупругости) предоставляют исследователю новые возможности оценки картины механических полей в образце.

1. Техника эксперимента. Процедура тарировки. Определение оптических постоянных материала

Главные напряжения в исследуемой модели в рамках интерферометрического метода, основывающегося на картине линий АРХ, определяют с помощью соотношений Фавра [23]

$$N_1 = a\sigma_1 + b\sigma_2, \quad N_2 = a\sigma_2 + b\sigma_1 \quad (1.1)$$

по формулам

$$\sigma_1 = \frac{aN_1 - bN_2}{a^2 - b^2}, \quad \sigma_2 = \frac{aN_2 - bN_1}{a^2 - b^2}, \quad (1.2)$$

где a, b – оптические постоянные материала, устанавливаемые из калибровочных экспериментов, N_1, N_2 – номера полос в картинах АРХ. Для определения оптических постоянных материала был использован тарировочный диск, изготовленный из органического стекла. При моделировании принята гипотеза о линейной связи между напряжениями и интерференционными полосами. С целью нахождения постоянных материала был проведен цикл экспериментов с помощью метода голографической фотоупругости, выполненной для вертикальной и горизонтальной поляризации. Интерференционные картины полос абсолютной разности хода при вертикальной и горизонтальной поляризации приведены на рис. 1.1–1.4 соответственно. Примем, что полосы в диске нумеруются от внешнего края диска до его центра с изменением порядка полосы абсолютной разности хода от нуля до 4 (вдоль горизонтального диаметра диска). Показанные на рис. 1.1–1.4 изодромы использовались для определения значений постоянных материала.

На рис. 1.1, 1.2 показаны линии АРХ (изодромы) при вертикальной поляризации для нагрузок 245.16 Н, 490.33 Н, 735.5 Н, 980.66 Н и 1.471 КН соответственно.

На рис. 1.3, 1.4 показаны линии АРХ (изодромы) при горизонтальной поляризации для нагрузок 245.16 Н, 490.33 Н, 735.5 Н, 980.66 Н, 1.226 КН и 1.471 КН соответственно. Следует отметить, что при использовании голографической интерферометрии (фотоупругости) имеются особенности при нумерации интерференционных полос и в литературе указываются два способа нумерации полос изодром.

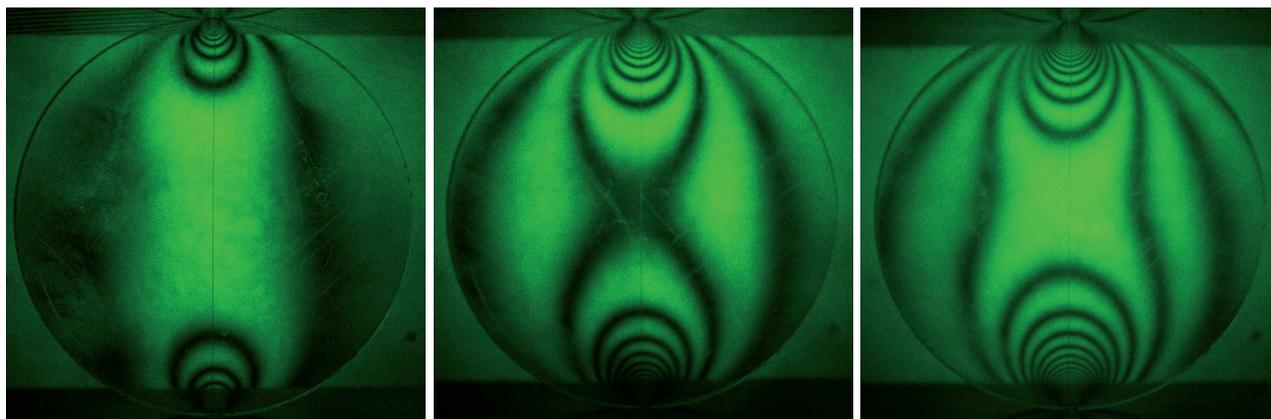


Рис. 1.1. Интерференционные картины полос в сжимаемом вдоль диаметра диске при действии сил 245.16 Н (слева), 490.33 Н (в центре) и 735.5 Н (справа) для вертикальной поляризации
 Fig. 1.1. Interference fringes in the diametrically compressed disk for 245.16 H (left), 490.33 H (center) and 735.5 H (right) at the vertical polarization

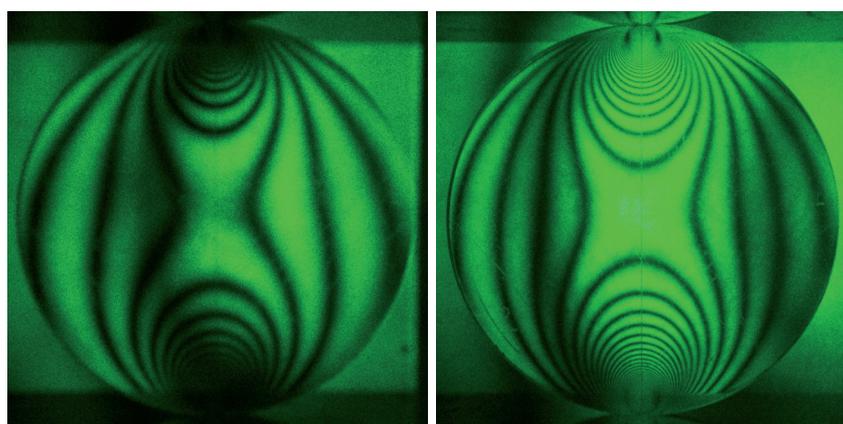


Рис. 1.2. Интерференционные картины полос в сжимаемом вдоль диаметра диске при действии сил 980.66 Н (слева) и 1.471 кН (справа) для горизонтальной поляризации
 Fig. 1.2. Interference fringes in the diametrically compressed disk for 980.66 H (left) and 1.471 kN (right) at the vertical polarization

Подробное изложение первого способа приведено в [4]. Согласно данному подходу, полосы в диаметральном сжимаемом диске имеют отрицательные порядки, оптические постоянные в этом случае – положительные (для одного из материалов значения приведены в [14]). В отличие от изохром в методе фотоупругости, номера которых имеют постоянный знак, знаки порядков изотроном устанавливаются по зонам, где по абсолютной величине преобладает одно из главных напряжений [24]. В зонах модели, где преобладает растяжение, порядок изотроном имеет отрицательное значение, а в зонах, где преобладает сжатие, порядок изотроном имеет положительное значение. Таким образом, во втором подходе полосы в сжатом диске имеют положительную нумерацию, а в более сложных моделях порядки полос могут чередоваться. Ниже используется второй подход, когда линии АРХ получают положительную нумерацию [24].

Полученные изображения (рис. 1.1–1.4) использовались для нахождения оптических констант материала. Коэффициенты закона Фавра a и b определялись из условия минимума среднеквадратичных отклонений экспериментальных полос и теоретических полос:

$$J = \min_{a,b} \sum_{i=1}^{n_1} (a\sigma_{1i} + b\sigma_{2i} - N_{1i})^2 + \min_{a,b} \sum_{i=1}^{n_2} (a\sigma_{2i} + b\sigma_{1i} - N_{2i})^2, \quad (1.3)$$

где n_1, n_2 – количество экспериментальных точек, выбранных на картинах с вертикальной и горизонтальной плоскостями поляризации соответственно, N_{1i}, N_{2i} – номера полос в интерферограммах с вертикальной и горизонтальной плоскостями поляризации, которым принадлежит i -я точка, σ_{1i}, σ_{2i} – значения главных напряжений в i -й экспериментальной точке. Значения оптических постоянных, определенных указанным методом, равны $a = -0.26138$ полос/МПа и $b = -0.18923$ полос/МПа.

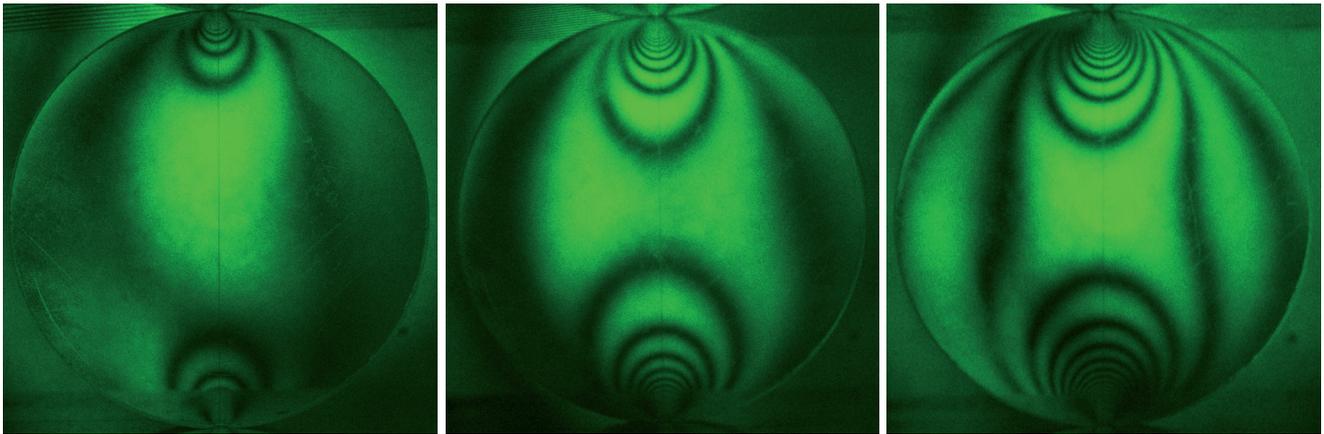


Рис. 1.3. Интерференционные картины полос в сжимаемом вдоль диаметра диске при действии сил 245.16 Н (слева), 490.33 Н (в центре) и 735.5 Н (справа) для горизонтальной поляризации
Fig. 1.3. Interference fringes in the diametrically compressed disk for 245.16 Н (left), 490.33 Н (center) and 735.5 Н (right) at the horizontal polarization

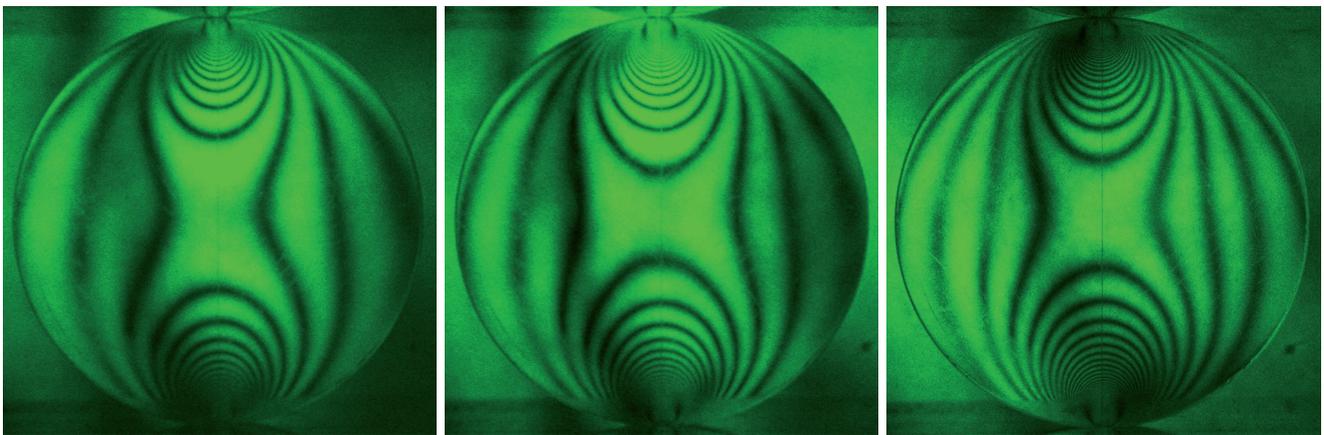


Рис. 1.4. Интерференционные картины полос в сжимаемом вдоль диаметра диске при действии сил 980.66 Н (слева) и 1.471 кН (справа) для горизонтальной поляризации
Fig. 1.4. Interference fringes in the diametrically compressed disk for 980.66 Н (left) and 1.471 кН (right) at the horizontal polarization

2. Разложение Уильямса. Определение обобщенных коэффициентов интенсивности напряжений

Асимптотические представления механических величин в окрестности вершины трещины восходят к работам М. Уильямса, который сформулировал один из принципиальных результатов механики разрушения упругих сред исключительной важности, нашедшим широкое применение в теоретических исследованиях и инженерных приложениях [1]. Уильямс предложил аппроксимацию полей напряжений и смещений в виде ряда. Он нашел, что для компонент тензора напряжений, ассоциированных с непосредственной окрестностью вершины острой трещины в изотропной линейно-упругой плоскости, справедливо:

$$\sigma_{il}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^m f_{m,il}^{(j)}(\theta) r^{j/2-1}, \quad (2.1)$$

где введены стандартные обозначения для зависимостей компонент тензора напряжений от полярного угла $f_{m,il}^{(j)}(\theta)$, которые определяются путем решения краевых задач о растяжении и поперечном сдвиге плоскости с разрезом [25–28]; r, θ — полярная система координат с полюсом в кончике дефекта; a_j^m — масштабные (амплитудные) коэффициенты, передающие решению информацию о геометрии тела с дефектом и характере приложенной нагрузки; верхний индекс m отражает способ нагружения и равен 1 для нагружения, отвечающего типу I, значение 2 — типу II.

Универсальные функции $f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$, отражающие зависимость напряжений от полярного угла θ , присутствующие в формулах в (2.1), определяются равенствами [25–29]

$$\begin{aligned} f_{1,11}^{(j)}(\theta) &= j [(2 + j/2 + (-1)^j) \cos(j/2 - 1)\theta - (j/2 - 1) \cos(j/2 - 3)\theta] / 2, \\ f_{1,22}^{(j)}(\theta) &= j [(2 - j/2 - (-1)^j) \cos(j/2 - 1)\theta + (j/2 - 1) \cos(j/2 - 3)\theta] / 2, \\ f_{1,12}^{(j)}(\theta) &= j [-(j/2 + (-1)^j) \sin(j/2 - 1)\theta + (j/2 - 1) \sin(j/2 - 3)\theta] / 2, \\ f_{2,11}^{(j)}(\theta) &= -j [(2 + j/2 - (-1)^j) \sin(j/2 - 1)\theta - (j/2 - 1) \sin(j/2 - 3)\theta] / 2, \\ f_{2,22}^{(j)}(\theta) &= -j [(2 - j/2 + (-1)^j) \sin(j/2 - 1)\theta + (j/2 - 1) \sin(j/2 - 3)\theta] / 2, \\ f_{2,12}^{(j)}(\theta) &= j [-(j/2 - (-1)^j) \cos(j/2 - 1)\theta + (j/2 - 1) \cos(j/2 - 3)\theta] / 2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Асимптотические ряды для компонент вектора смещений вблизи вершины трещины имеют вид:

$$u_i(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{j=1}^{\infty} a_j^m \frac{1}{2G} r^{j/2} g_{m,i}^{(j)}(\theta), \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} g_{1,1}^{(j)}(\theta) &= (\varkappa + j/2 + (-1)^j) \cos(j/2)\theta - (j/2) \cos(j/2 - 2)\theta, \\ g_{1,2}^{(j)}(\theta) &= (\varkappa - j/2 - (-1)^j) \sin(j/2)\theta + (j/2) \sin(j/2 - 2)\theta, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} g_{2,1}^{(j)}(\theta) &= -(\varkappa + j/2 - (-1)^j) \sin(j/2)\theta + (j/2) \sin(j/2 - 2)\theta, \\ g_{2,2}^{(j)}(\theta) &= (\varkappa - j/2 + (-1)^j) \cos(j/2)\theta + (j/2) \cos(j/2 - 2)\theta, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где G — модуль сдвига, константа \varkappa плоской задачи теории упругости вычисляется по формуле $\varkappa = 3 - 4\nu$ для случая плоского деформированного состояния, $\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ — для плоского напряженного состояния.

Геометрия образца с трещиной и величины сообщенных нагрузок не оказывают влияния ни на радиальное (описываемое степенной функцией), ни на универсальные угловые распределения составляющих напряженно-деформированного состояния перед вершиной трещины. Вся широкая разновидность граничных задач классической механики хрупкого разрушения для тел с трещиноподобными разрезами и различными совокупностями нагрузок находит свое отражение в коэффициентах асимптотического ряда М. Уильямса a_j^m . В полном формальном асимптотическом разложении М. Уильямса (2.1) в сумме отсекаются слагаемые, отвечающие отрицательным значениям индекса j , ($j \leq 0$) в силу конечности энергии упругой деформации внутри любого контура, охватывающего вершину дефекта. В практических инженерных приложениях в (2.1) длительное время сохранялось единственно первое слагаемое ($j = 1$) и первый амплитудный коэффициент приобрел название КИН $K_I = \sqrt{2\pi} a_1^1 f_{1,22}^{(1)}(0)$, $K_{II} = -\sqrt{2\pi} a_1^2 f_{2,12}^{(1)}(0)$. Впоследствии была принята гипотеза о рассмотрении первых двух слагаемых ряда (2.2) и второе слагаемое ряда получило название T -напряжения: $T = a_1^2 f_{1,11}^{(2)}(0)$.

В последние двадцать–двадцать пять лет у представителей различных ведущих мировых научных школ, занимающихся вопросами хрупкого разрушения, сформировалось устойчивое и твердое осознание обязательности сохранения в ряде Уильямса (2.1) нескольких (от трех до пятнадцати: точное число слагаемых зависит от расстояния от вершины и от требуемой точности) высших приближений — регулярных (неособых) слагаемых более высокого порядка малости в сравнении с первыми двумя слагаемыми ряда Уильямса [25]. Сложившееся понимание существенности порядка десяти — пятнадцати слагаемых в многопараметрическом ряде М. Уильямса оказывается особенно значимым при проведении экспериментальных исследований, нацеленных на получение механических полей у вершины трещины или надреза, ибо обработка интерференционных картин и ее реконструкция обуславливают рассмотрение многокомпонентных разложений и сохранения слагаемых высокого порядка малости. Обычно в процессе натурального эксперимента (в рамках любого интерференционно-оптического метода) ставится задача определения параметров механики хрупкого разрушения (КИН и T -напряжений) и наложения асимптотического решения задачи (2.1), (2.3) на полученные экспериментальным образом интерференционные картины. В ходе цифровой обработки картин изолиний извлекаются искомые механические величины — обобщенные коэффициенты интенсивности напряжений. При выделении точек из собрания экспериментальных изображений в рамках применения любого из поляризационно-оптических методов экспериментатор, очевидно, априори не может знать, на каком количестве слагаемых в асимптотическом представлении следует усекать ряд (в ходе эксперимента опытным путем, как правило, находится кольцо, окружающее вершину трещины, из которого собираются экспериментальные точки). В силу названной причины при проведении обработки всего ансамбля экспериментальной информации ошибки могут быть следствием недостаточного числа учитываемых членов ряда Уильямса, удерживаемых в аппроксимационном решении. Схожая проблема возникает при применении вычислительных подходов,

основанных на методе конечных элементов, который в последнее время стал неотъемлемой частью исследования. Если используется конечно-элементный анализ, параметры механики разрушения (обобщенные коэффициенты интенсивности напряжений) извлекаются из результатов конечно-элементных расчетов: из полученных распределений компонент перемещений и напряжений в узлах сетки. Концепция вычислительного подхода состоит в нахождении множителей (коэффициентов) аппроксимирующего ряда Уильямса из результатов построенного численного МКЭ-решения задачи для образца с угловым вырезом или трещиной посредством переопределенного метода. Вновь неточности и ошибки в анализе могут порождаться тем, что часто усеченный ряд рассматривается и анализируется без надлежащего теоретического анализа вклада регуляризируемых слагаемых ряда.

Поэтому многие исследователи, понимая, что количественная характеристика напряжений у вершины трещины имеет основополагающее значение в механике разрушения и потенциальное влияние членов более высокого порядка на рост и стабильность трещин, предлагают новые подходы, например, интегральный метод, основанный на сопряженных инвариантных интегралах, изучают сходимость рядов с увеличением расстояния до вершины трещины, сравнивают интегральный метод с современным методом подгонки и предоставляют результаты для членов более высокого порядка, варьируя длины трещин, приложенные внешние силы и геометрические размеры для широко используемых образцов, находящихся под действием распределенной нагрузки и сосредоточенных сил [31].

Таким образом, члены более высокого порядка асимптотического поля вершины трещины уточняют механическое описание поведения тел с трещинами. Они могут играть ключевую роль в хрупких материалах (таких как керамика, горные породы или композиты на цементной основе), где протяженность зоны вокруг вершины трещины с нелинейным поведением материала очень велика по сравнению с типичными размерами конструкции. Оценка членов более высокого порядка производится экспериментально и(или) численно. В настоящей работе предложена процедура, использующая голографический метод и метод конечных элементов и приводящая к надежной оценке выбранного числа старших членов.

3. Детали экспериментального исследования

В экспериментальной части работы были испытаны четыре типа образца с трещиной: с центральной горизонтальной трещиной и наклонной трещиной с тремя различными углами наклона α : 60° , 45° и 30° к вертикали. Геометрия образцов показана на рис. 3.1. Для всех образцов $a = 1$ см, $w = 2.5$ см. На рис. 3.2–3.8 показаны экспериментальные картины абсолютной разности хода (АРХ) для вертикаль-

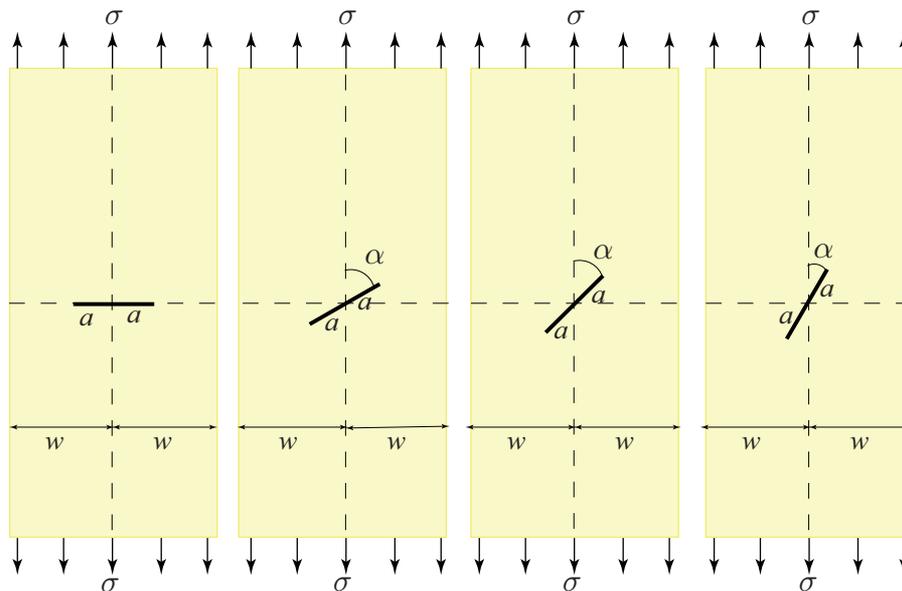


Рис. 3.1. Геометрия экспериментальных образцов

Fig. 3.1. Geometry of experimental specimens

ной и горизонтальной поляризации в пластине с центральной сквозной трещиной. Эксперимент проводился на универсальном голографическом столе с оптической схемой, включающей источник света, оптические элементы для направления и формирования световых пучков и пресса для нагружения объекта. Картины АРХ регистрировались методом двух экспозиций по схеме голограмм сфокусированных

изображений. Изодромы (АРХ) наблюдаются только при применении двойной экспозиции, то есть при записи суперпозиции нагруженного и ненагруженного состояний. Полученные картины АРХ использовались для вычисления обобщенных КИН. Центральная задача состояла в вычислении коэффициентов слагаемых более высокого порядка малости в сравнении с первыми двумя традиционно сохраняемыми в разложениях полей напряжений, перемещений и деформаций. В эксперименте были получены следующие интерференционные картины.

На рис. 3.2 приведены линии абсолютной разности хода в пластине с горизонтальной трещиной для нагрузок 50 Н, 100 Н и 150 Н при вертикальной и для 50 Н при горизонтальной поляризации.

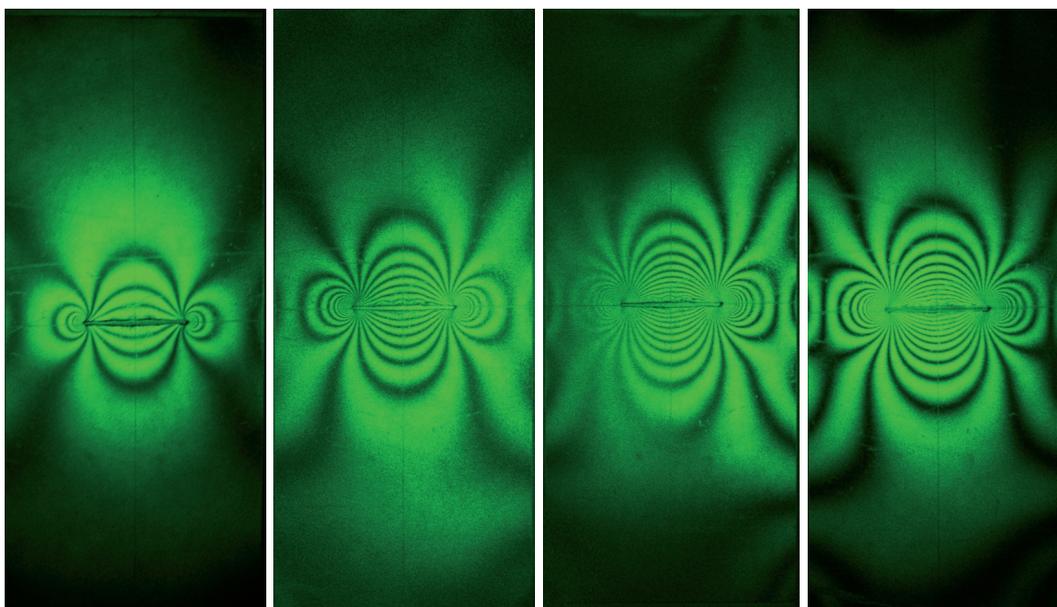


Рис. 3.2. Картины линий абсолютной разности хода в пластине с горизонтальным разрезом для 50 Н, 100 Н и 150 Н при вертикальной поляризации и для 50 Н при горизонтальной поляризации

Fig. 3.2. Interference patterns of absolute retardation fringes obtained by the holography method in the plate weakened by the horizontal crack for 50 Н, 100 Н and 150 Н at vertical polarization and for 50 Н at the horizontal polarization

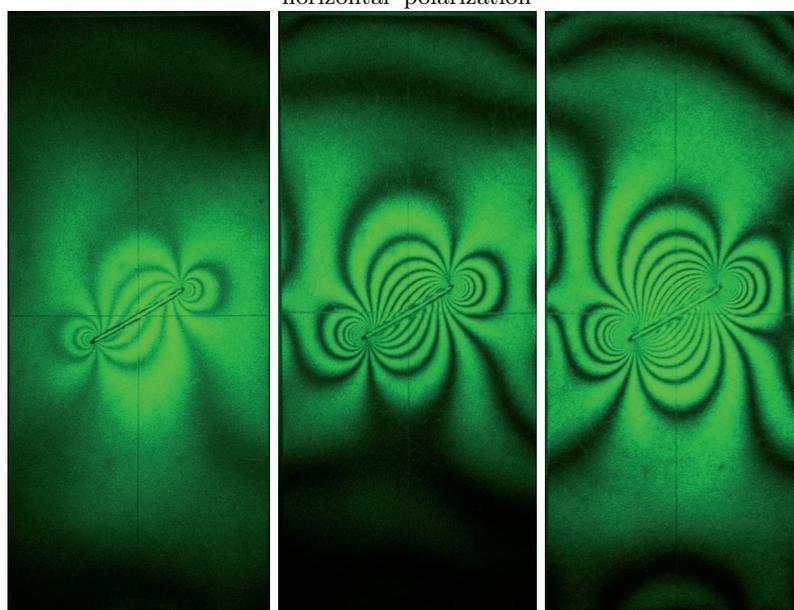


Рис. 3.3. Картины линий абсолютной разности хода для 50 Н, 100 Н и 150 Н при вертикальной поляризации в пластине с наклонной трещиной под углом 60° к вертикали

Fig. 3.3. Interference patterns of absolute retardation fringes using holography for 50 Н, 100 Н and 150 Н at vertical polarization for the plate weakened by the inclined crack at 60°

На рис. 3.3 приведены линии абсолютной разности хода в пластине с наклонной под углом 60° трещиной к вертикали при вертикальной поляризации для нагрузок 50 Н, 100 Н и 150 Н.

На рис. 3.4 приведены линии абсолютной разности хода в пластине с наклонной под углом 60° трещиной к вертикали при горизонтальной поляризации для нагрузок 50 Н, 100 Н и 150 Н.

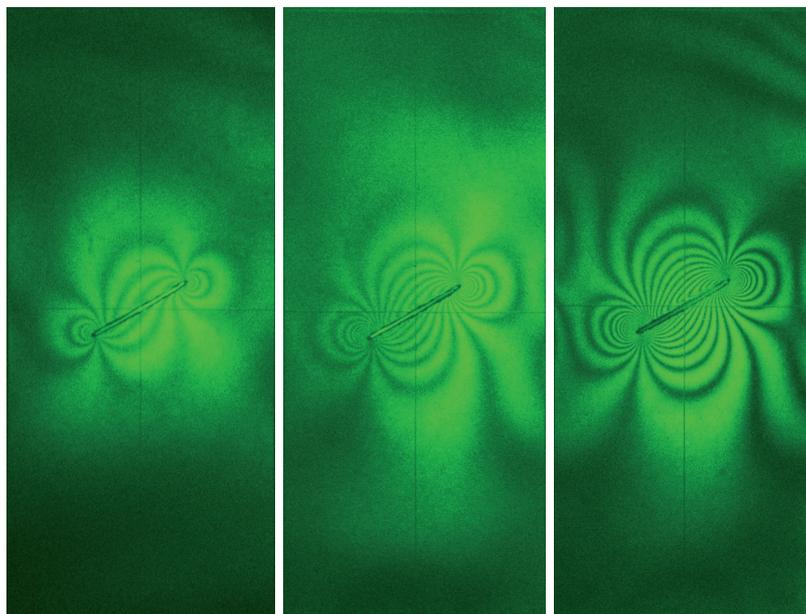


Рис. 3.4. Картины линий абсолютной разности хода для 50 Н, 100 Н и 150 Н при вертикальной поляризации в пластине с наклонной трещиной под углом 60° к вертикали

Fig. 3.4. Interference patterns of absolute retardation fringes using holography for 50 Н, 100 Н and 150 Н at the horizontal polarization for the plate weakened by the inclined crack at 60°

На рис. 3.5 приведены линии абсолютной разности хода в пластине с наклонной под углом 45° трещиной к вертикали при вертикальной поляризации для нагрузок $-100H$ и $100H$.

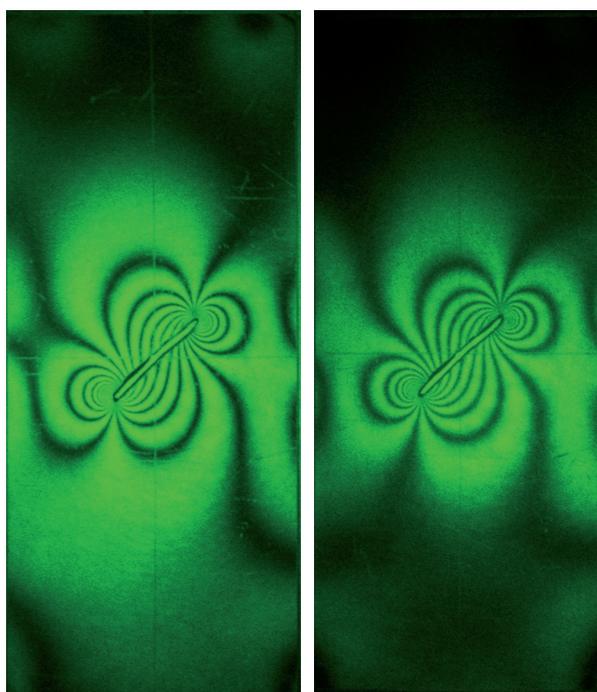


Рис. 3.5. Картины линий абсолютной разности хода для $-100H$ и $100H$ при вертикальной поляризации в пластине с наклонной под углом 45° трещиной к вертикали

Fig. 3.5. Interference patterns of absolute retardation fringes using holography for $-100H$ and $100H$ at the horizontal polarization for the plate weakened by the inclined crack at 45°

В данном случае знак минус в -100 Н означает, что в эксперименте снималась нагрузка, равная 100 Н. На рис. 3.6 приведены линии абсолютной разности хода в пластине с наклонной под углом 45° трещиной к вертикали при горизонтальной поляризации для нагрузок -50 Н, -100 Н, 50 Н и 100 Н.

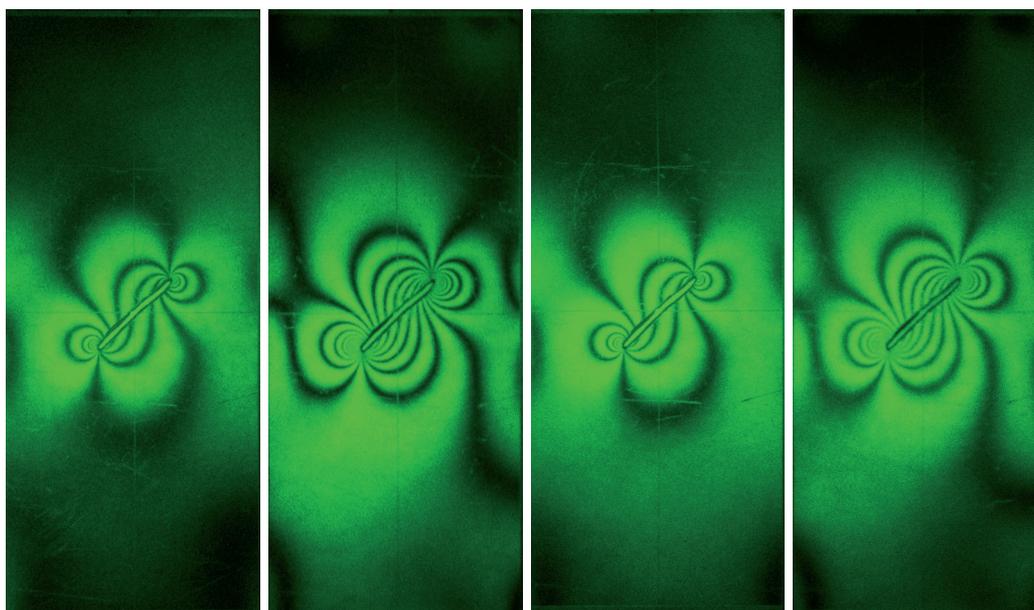


Рис. 3.6. Картины линий абсолютной разности хода для 50 Н, 100 Н и 150 Н при вертикальной поляризации и для 50 Н при горизонтальной поляризации

Fig. 3.6. Interference patterns of absolute retardation fringes using holography for -50 Н, -100 Н, 50 Н and 100 Н at the horizontal polarization for the plate weakened by the inclined crack at 45°

На рис. 3.7 приведены линии абсолютной разности хода в пластине с наклонной под углом 30° трещиной к вертикали при вертикальной поляризации для нагрузок -150 Н, -100 Н, 50 Н и 150 Н.

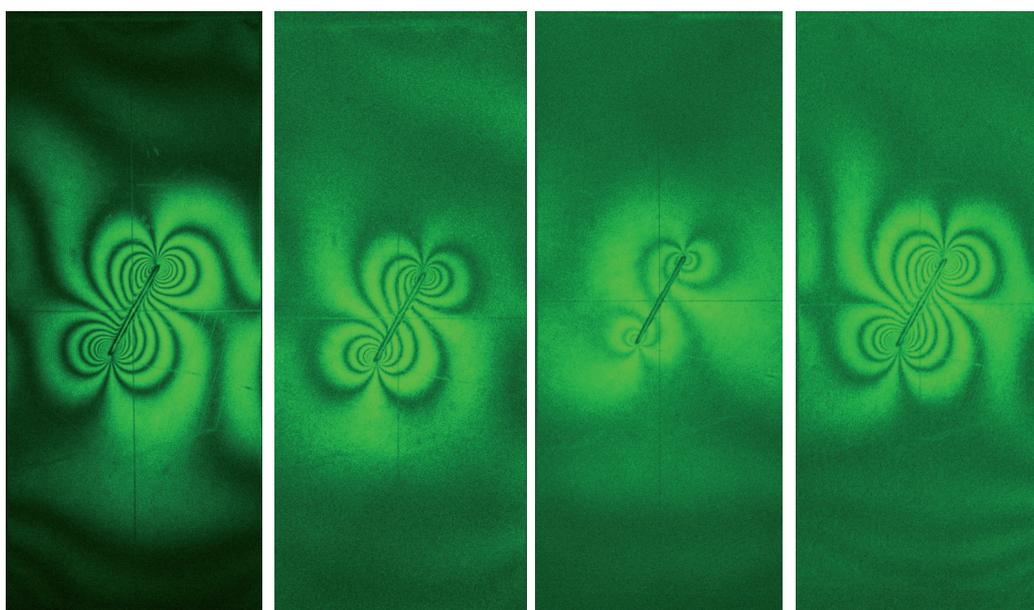


Рис. 3.7. Картины линий абсолютной разности хода для 50 Н, 100 Н и 150 Н при вертикальной поляризации в пластине с наклонной под углом 30° трещиной к вертикали

Fig. 3.7. Interference patterns of absolute retardation fringes using holography for -150 Н, -100 Н, 50 Н and 150 Н at the vertical polarization for the plate weakened by the inclined crack at 30°

На рис. 3.8 приведены линии абсолютной разности хода в пластине с наклонной под углом 30° трещиной к вертикали при горизонтальной поляризации для нагрузок 50 Н, 100 Н и 150 Н.

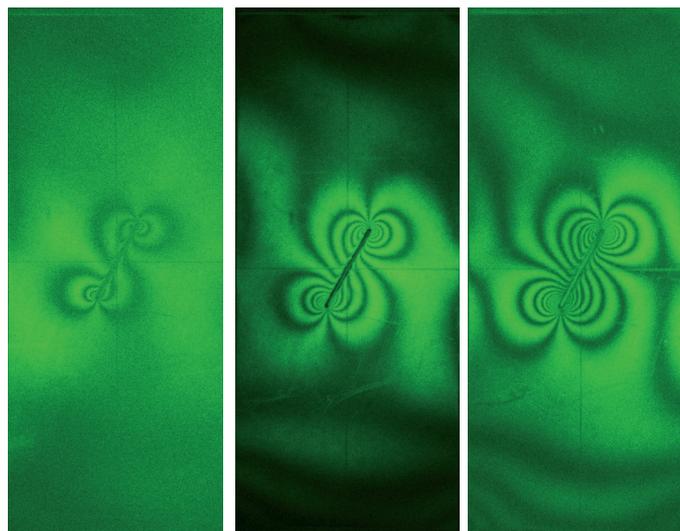


Рис. 3.8. Картины линий абсолютной разности хода для 50 Н, 100 Н и 150 Н при горизонтальной поляризации в пластине с наклонной под углом 30° трещиной к вертикали
Fig. 3.8. Interference patterns of absolute retardation fringes using holography for 50 H, 100 H and 150 H at the horizontal polarization for the plate weakened by the inclined crack at 30°

4. Цифровая обработка изображений

В настоящее время отсутствует необходимость ручной обработки полученных интерференционных картин, поскольку развитие компьютерных технологий позволило проводить обработку картин автоматически. Можно перечислить несколько приложений, осуществляющих обработку экспериментальных результатов, обретаемых с помощью интерференционно-оптических методов. Fringe XP — это простая в использовании программа для анализа границ для любителя. С его помощью можно загружать интерферограммы, вводить и редактировать граничные точки, а также анализировать работу оптической системы. Он обладает возможностью автоматической трассировки и может усреднить несколько наборов коэффициентов Цернике по результатам отдельных анализов интерферограмм. Можно выделить такие программы, как Quick Fringe, OpenFringe Interferogram mirror analysis, AtmosFRINGE. Последняя программа — это мощное программное обеспечение для анализа интерферограмм, используемое для извлечения количественных измерений волнового фронта из лазерной интерферограммы.

Для автоматического определения точек, принадлежащих изодроме, с наименьшей освещенностью было разработано программное обеспечение, позволяющие сохранить в текстовом файле номер полосы и координаты точки. Результаты работы данной программы представлены на рис. 4.1, 4.2.

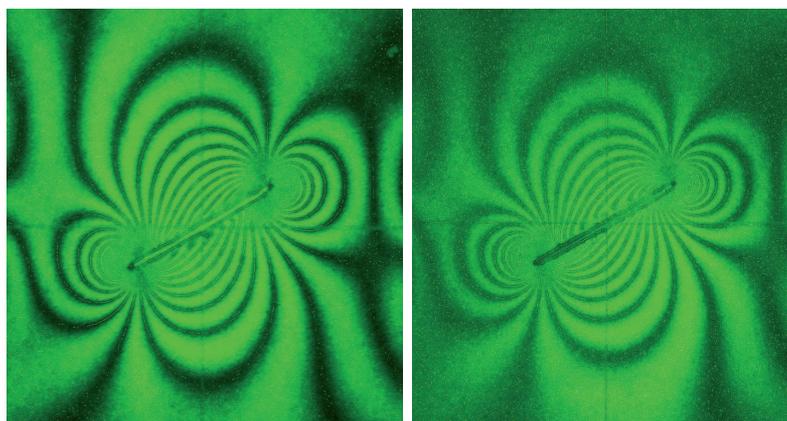


Рис. 4.1. Результаты цифровой обработки картин линий абсолютной разности хода: картин линий абсолютной разности хода в пластине с трещиной под углом 45° при вертикальной поляризации для нагрузок -100 Н и 100 Н

Fig. 4.1. Digital image processing of the interference patterns of absolute retardation fringes in the plate weakened by the inclined crack at 45° for the vertical polarization for loadings -100 H and 100 H

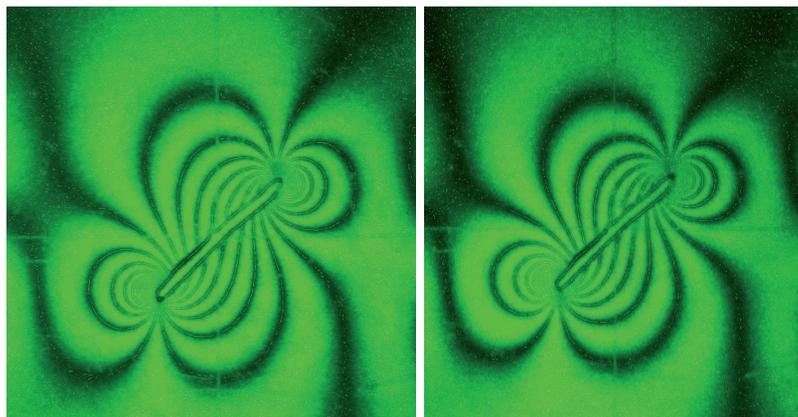


Рис. 4.2. Результаты цифровой обработки картин линий абсолютной разности хода: картин линий абсолютной разности хода в пластине с трещиной под углом 45° при горизонтальной поляризации (нагружение -100 Н и 100 Н)

Fig. 4.2. Digital image processing of the interference patterns of absolute retardation fringes in the plate weakened by the inclined crack at 45° for the horizontal polarization for loading -100 Н and 100 Н

5. Техника переопределенного метода

При использовании метода голографической фотоупругости имеются два уравнения, связывающих механические (главные напряжения) и оптические величины (номера изодром, оптические материальные константы):

$$N_1 = a \left[(\sigma_{11} + \sigma_{22})/2 + (1/2)\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \right] + b \left[(\sigma_{11} + \sigma_{22})/2 - (1/2)\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \right], \quad (5.1)$$

$$N_2 = a \left[(\sigma_{11} + \sigma_{22})/2 - (1/2)\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \right] + b \left[(\sigma_{11} + \sigma_{22})/2 + (1/2)\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \right] \quad (5.2)$$

или

$$N_1 = (a + b)(\sigma_{11} + \sigma_{22})/2 + (1/2)(a - b)\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}, \quad (5.3)$$

$$N_2 = (a + b)(\sigma_{11} + \sigma_{22})/2 - (1/2)(a - b)\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}. \quad (5.4)$$

Систему уравнений (5.4) можно представить в более компактной форме

$$\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} = N_1/d - (c/d)(\sigma_{11} - \sigma_{22}), \quad (5.5)$$

$$\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} = (c/d)(\sigma_{11} - \sigma_{22}) - N_2/d, \quad (5.6)$$

$$c = (a + b)/2, \quad d = (a - b)/2.$$

Из интерференционных картин изодром, полученных при горизонтальной и вертикальной поляризациях, можно выбрать M_1 и M_2 экспериментальных точек, принадлежащих изодромам. Поэтому в общем случае может быть сформулирована система $M_1 + M_2$ нелинейных алгебраических уравнений (АУ) относительно обобщенных коэффициентов a_k^1 и a_k^2 :

$$g_{1m_1} = g_{1m_1}(a_1^1, a_2^1, \dots, a_K^1, a_1^2, \dots, a_L^2) = (\sigma_{11} - \sigma_{22})_{m_1}^2 + 4(\sigma_{12}^2)_{m_1} - [N_1/d - (c/d)(\sigma_{11} - \sigma_{22})]_{m_1}^2, \quad (5.7)$$

$$g_{2m_2} = g_{2m_2}(a_1^1, a_2^1, \dots, a_K^1, a_1^2, \dots, a_L^2) = (\sigma_{11} - \sigma_{22})_{m_2}^2 + 4(\sigma_{12}^2)_{m_2} - [(c/d)(\sigma_{11} - \sigma_{22}) - N_2/d]_{m_2}^2. \quad (5.8)$$

Далее в соответствии с техникой переопределенного метода введенные в рассмотрение функции раскладываются в ряд Тейлора в окрестности выбранного нулевого приближения масштабных множителей a_{k0}^1, a_{k0}^2 и сохраняются линейные относительно разностей $\Delta a_k^1 = (a_k^1)_{i+1} - (a_k^1)_i$ и $\Delta a_k^2 = (a_k^2)_{i+1} - (a_k^2)_i$ поправки к значениям масштабных множителей, полученные на $i + 1$ итерации:

$$(g_{lm})_{i+1} = (g_{lm})_i + \sum_{k=1}^K \frac{\partial g_{lm}}{\partial a_k^1} \Delta a_k^1 + \sum_{k=1}^L \frac{\partial g_{lm}}{\partial a_k^2} \Delta a_k^2, \quad l = 1, 2, m = 1..M_1 + M_2, \quad (5.9)$$

где частные производные могут быть легко вычислены по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{1m}}{\partial a_k^1} &= 2(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_k^1} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial a_k^1} \right) + 8\sigma_{12} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial a_k^1} + \\ &+ 2 [N_1/d - (c/d)(\sigma_{11} + \sigma_{22})] (c/d) \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_k^1} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial a_k^1} \right), \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{2m}}{\partial a_k^1} &= 2(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_k^1} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial a_k^1} \right) + 8\sigma_{12} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial a_k^1} - \\ &- 2 [(c/d)(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - N_2/d] (c/d) \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_k^1} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial a_k^1} \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{1m}}{\partial a_k^2} &= 2(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_k^2} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial a_k^2} \right) + 8\sigma_{12} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial a_k^2} + \\ &+ 2 [N_1/d - (c/d)(\sigma_{11} + \sigma_{22})] (c/d) \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_k^2} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial a_k^2} \right), \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{2m}}{\partial a_k^2} &= 2(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_k^2} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial a_k^2} \right) + 8\sigma_{12} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial a_k^2} - \\ &- 2 [(c/d)(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - N_2/d] (c/d) \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_k^2} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial a_k^2} \right). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Нулевым приближением для обобщенных коэффициентов ряда Уильямса служило точное аналитическое решение для деформирования бесконечной упругой плоскости с центральным разрезом [29]. Описанная итерационная процедура позволяет получить решение существенно переопределенной системы уравнений. Сначала данная схема была апробирована на примере результатов интерференционно-оптических экспериментов для пластины с центральной горизонтальной трещиной. Выход из итерационной процедуры осуществляется при выполнении условия

$$\Delta a_k^1 = (a_k^1)_{i+1} - (a_k^1)_i \leq \varepsilon \quad \Delta a_k^2 = (a_k^2)_{i+1} - (a_k^2)_i \leq \varepsilon, \quad (5.14)$$

где ε – наперед заданная точность. В проведенных расчетах полагалось, что $\varepsilon = 10^{-6}$. Показано, что для получения решения достаточно 8-10 итераций. Результаты вычислений сведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Амплитудные множители ряда М. Уильямса для пластины с горизонтальной трещиной, вычисленные с помощью метода голографической интерферометрии

Table 5.1

Amplitude factors of the M. Williams series for a plate with a horizontal crack calculated using the holographic interferometry method

Масштабный множитель a_m^k	Значение
a_1^1	2795.870 КПа см ^{1/2}
a_2^1	-1013.880 КПа
a_3^1	703.010 КПа /см ^{1/2}
a_5^1	-86.440 КПа/см ^{3/2}
a_7^1	16.000 КПа/см ^{5/2}
a_9^1	-10.140 КПа/см ^{7/2}
a_{11}^1	1.800 КПа/см ^{9/2}
a_{13}^1	-0.460 КПа/см ^{11/2}
a_{15}^1	0.088 КПа /см ^{13/2}

Результаты вычислений для трещины, составляющей угол 60° с вертикалью, сведены в в табл. 5.2.

Результаты работы итерационной процедуры представлены в табл. 5.3, в которой приведены полученные обобщенные коэффициенты ряда Уильямса для пластины с центральной наклонной под углом 45° трещиной.

Таблица 5.2

Амплитудные множители ряда М. Уильямса для пластины с трещиной, составляющей угол 60° с вертикальной осью, вычисленные с помощью метода голографической фотоупругости

Table 5.2

Amplitude factors of the M. Williams series for a plate with a crack making an angle of 60° with the vertical axis, calculated using the holographic photoelasticity method

Масштабный множитель	Значение	Масштабный множитель	Значение
a_1^1	2137.62КПа см ^{1/2}	a_1^2	-1135.34КПа см ^{1/2}
a_2^1	-548.81КПа	a_2^2	0
a_3^1	496.17КПа/см ^{1/2}	a_3^2	-305.15КПа/см ^{1/2}
a_4^1	13.820КПа/см ¹	a_4^2	197.49КПа/см ¹
a_5^1	-97.05КПа см ^{-3/2}	a_5^2	21.23КПа/см ^{3/2}
a_6^1	13.11КПа/см ²	a_6^2	6.61КПа/см ²
a_7^1	7.85КПа/см ^{5/2}	a_7^2	-7.82КПа/см ^{5/2}
a_8^1	-1.03КПа/см ³	a_8^2	-4.18КПа/см ³
a_9^1	-4.57КПа/см ^{7/2}	a_9^2	-0.59КПа/см ^{7/2}
a_{10}^1	3.25КПа/см ⁴	a_{10}^2	-0.10КПа/см ⁴
a_{11}^1	2.07КПа/см ^{9/2}	a_{11}^2	0.04КПа/см ^{9/2}
a_{12}^1	-5.67КПа/см ⁵	a_{12}^2	0.05КПа/см ⁵
a_{13}^1	0.99КПа/см ^{11/2}	a_{13}^2	0.01КПа/см ^{11/2}
a_{14}^1	0.74КПа/см ⁶	a_{14}^2	0.27КПа/см ⁶
a_{15}^1	-3.62КПа/см ^{13/2}	a_{15}^2	-0.01КПа/см ^{13/2}

Таблица 5.3

Амплитудные множители поля напряжений для пластины с трещиной, составляющей угол 45° с вертикальной осью, вычисленные с помощью метода голографической интерферометрии

Table 5.3

Stress field amplitude factors for a plate with a crack making an angle of 45° with the vertical axis, calculated using the holographic interferometry method

Масштабный множитель	Значение	Масштабный множитель	Значение
a_1^1	1445.747КПа см ^{1/2}	a_1^2	-1335.40КПа см ^{1/2}
a_2^1	-75.819КПа	a_2^2	0
a_3^1	314.38КПа/см ^{1/2}	a_3^2	-341.55КПа/см ^{1/2}
a_4^1	2.60КПа/см ¹	a_4^2	-2.26КПа/см ¹
a_5^1	-78.50КПа/см ^{3/2}	a_5^2	40.38КПа/см ^{3/2}
a_6^1	12.28КПа/см ²	a_6^2	-9.0КПа/см ²
a_7^1	8.43КПа/см ^{5/2}	a_7^2	-6.11КПа/см ^{5/2}
a_8^1	-4.72КПа/см ³	a_8^2	-2.75КПа/см ³
a_9^1	0.368КПа/см ^{7/2}	a_9^2	0.20КПа/см ^{7/2}
a_{10}^1	2.79КПа/см ⁴	a_{10}^2	-0.30КПа/см ⁴
a_{11}^1	0.69КПа/см ^{9/2}	a_{11}^2	-0.29КПа/см ^{9/2}
a_{12}^1	-6.40КПа/см ⁵	a_{12}^2	3.5КПа/см ⁵
a_{13}^1	2.8КПа/см ^{11/2}	a_{13}^2	-0.09КПа/см ^{11/2}
a_{14}^1	1.6КПа/см ⁶	a_{14}^2	-0.078КПа/см ⁶
a_{15}^1	-0.017КПа/см ^{13/2}	a_{15}^2	0.011КПа/см ^{13/2}

Результаты вычислений, проведенных с помощью переопределенного метода, для пластины, ослабленной трещиной, наклоненной под углом 30° к вертикальной оси, сведены в табл. 5.4.

Таблица 5.4

Амплитудные множители ряда Макса Уильямса, описывающего поле напряжений у вершины наклонной под углом 30° к вертикали трещины, вычисленные с помощью метода голографической интерферометрии

Table 5.4

Amplitude factors of the Max Williams series describing the stress field at the crack tip inclined at an angle of 30° to the crack vertical, calculated using the holographic interferometry method

Масштабные множители	Значение	Масштабные множители	Значение
a_1^1	731.70КПа см ^{1/2}	a_1^2	-1174.92КПа см ^{1/2}
a_2^1	405.16КПа	a_2^2	0
a_3^1	149.96КПа/см ^{1/2}	a_3^2	-285.77КПа/см ^{1/2}
a_4^1	20.08КПа/см ¹	a_4^2	-17.66КПа/см ¹
a_5^1	-42.10КПа/см ^{3/2}	a_5^2	43.11КПа/см ^{3/2}
a_6^1	4.56КПа/см ²	a_6^2	-8.43КПа/см ²
a_7^1	7.57КПа/см ^{5/2}	a_7^2	-6.71КПа/см ^{5/2}
a_8^1	-3.35КПа/см ³	a_8^2	-0.35КПа/см ³
a_9^1	0.62КПа/см ^{7/2}	a_9^2	0.13КПа/см ^{7/2}
a_{10}^1	0.34КПа/см ⁴	a_{10}^2	-0.18КПа/см ⁴
a_{11}^1	0.13КПа/см ^{9/2}	a_{11}^2	-0.17КПа/см ^{9/2}
a_{12}^1	-0.48КПа/см ⁵	a_{12}^2	0.16КПа см ⁵
a_{13}^1	-0.17КПа/см ^{11/2}	a_{13}^2	0.09КПа/см ^{11/2}
a_{14}^1	0.84КПа/см ⁶	a_{14}^2	-0.18КПа/см ⁶
a_{15}^1	0.11КПа/см ^{13/2}	a_{15}^2	0.10КПа/см ^{13/2}

6. Конечно-элементное имитационное моделирование нагружения пластины с центральной трещиной

Наряду с методом голографической интерферометрии для повышения точности и надежности измерений и их обработки была проведена последовательность конечно-элементных расчетов, направленных на восстановление множителей ряда М. Уильямса из численных значений полей вблизи острого трещины. Для восстановления поля напряжений был использован переопределенный метод, описанный в целой серии работ [24; 31; 32] и ставший широко используемым и высоконадежным алгоритмом вычисления амплитудных множителей разложения М. Уильямса.

Конечно-элементный анализ был проведен в многоцелевом расчетном комплексе SIMULIA Abaqus. В ходе моделирования были построены конечно-элементные модели пластины с горизонтальной и наклонной под разными углами к вертикальной оси трещинами. Были использованы геометрические размеры образцов, идентичные ранее испытанным в рамках натурального эксперимента (рис. 3.1). Острая трещина создавалась методом Contour integral с введением сингулярных конечных элементов (эффекты затупления трещины не рассматривались). Окружности, охватывающие вершину трещины, разбивались на 72 сектора. Число конечных элементов менялось от 15 950 до 24 980. На рис. 6.1 слева приведено типичное разбиение окрестности дефекта, содержащее сингулярные конечные элементы. На рис. 6.1 справа запечатлено типичное распределение интенсивности касательных напряжений в пластине с центральной горизонтальной трещиной с геометрическими параметрами, полностью соответствующими эксперименту, проведенному посредством метода голографической интерферометрии.

На рис. 6.2 приведены результаты конечно-элементного моделирования для пластины с наклонной под углом 60° к вертикали. На рис. 6.2 слева изображено типичное конечно-элементное разбиение области, охватывающей вершину наклонной трещиной. На рис. 6.2 справа приведена полученная картина интенсивности касательных напряжений в пластине, ослабленной наклонной под углом 60° трещиной.

Расчет масштабных множителей a_k^m осуществлялся переопределенным методом, для реализации которого выбирались точки (узлы сетки) и полученные значения напряжений в узловых точках. Ранее было показано [35], что расчет, основанный на имеющихся компонентах тензора напряжений, приводит к значениям масштабных множителей, совпадающим с точными аналитическими значениями для тех конфигураций тел с трещинами, для которых возможно построить точные решения.

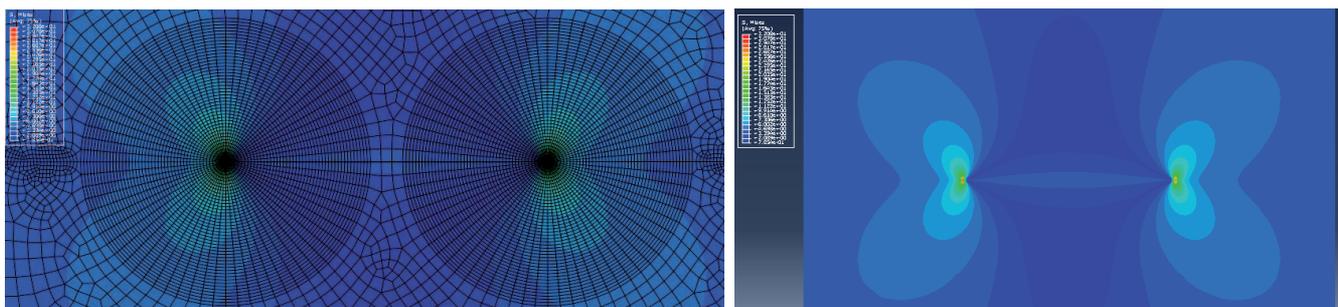


Рис. 6.1. Типичная сетка, включающая сингулярные конечные элементы, вводимая в окрестности вершины трещины, и полученное в ходе конечно-элементного анализа распределение напряжений

Fig. 6.1. Mesh patterns of the specimens tested: typical mesh including singular elements and surrounding the crack tip and the von Mises distribution in the cracked plate obtained by FEA (finite element analysis)

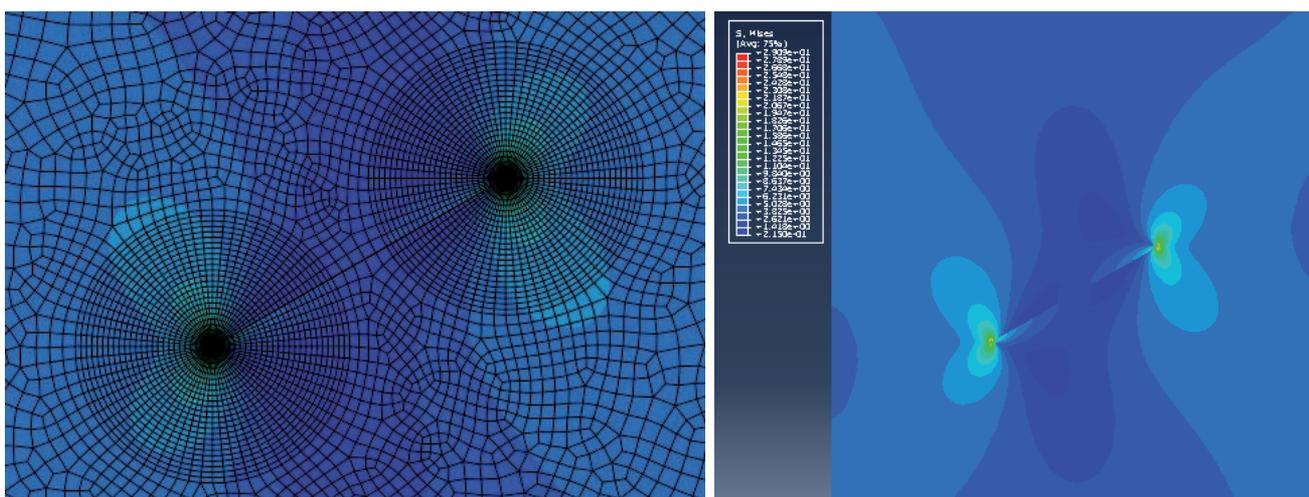


Рис. 6.2. Типичная сетка, включающая сингулярные конечные элементы, вводимая в окрестности вершины наклонной трещины, и полученное в ходе конечно-элементного анализа распределение напряжений

у вершины наклонной трещины

Fig. 6.2. Typical mesh including singular elements and surrounding the crack tip and the von Mises distribution in the cracked plate obtained by FEA

Точки выбирались из концентрических окружностей, охватывающих вершину трещины (рис. 6.3). Вдоль каждой окружности имеется возможность выбрать 73 точки, в каждой из которых известны значения компонент тензора напряжений. Для плоской модели использовались значения компонент σ_{11} , σ_{12} и σ_{11} . Таким образом, каждый путь приводит к 219 АУ относительно масштабных множителей.

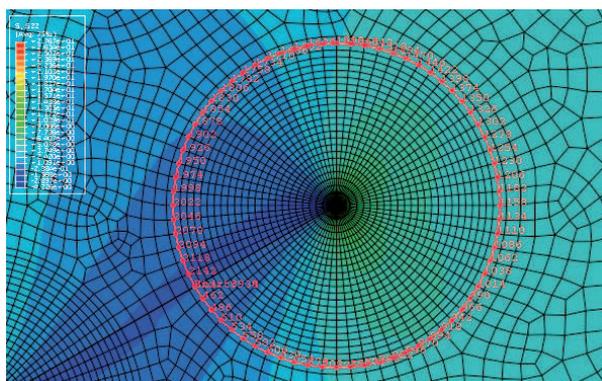


Рис. 6.3. Путь, охватывающий вершину трещины

Fig. 6.3. The path surrounding the crack tip

Решение Уильямса (2.2) для напряжений может быть представлено в матричной форме

$$\Sigma = CA, \tag{6.1}$$

где Σ — вектор-строка, содержащая значения компонент тензора напряжений, полученные в результате решения задачи методом конечных элементов, C — матрица, включающая угловые и радиальные распределения напряжений, диктуемые решением Уильямса, A — вектор-столбец из неизвестных обобщенных коэффициентов. Сформулированная система линейных АУ содержит, в общем случае, существенно больше уравнений, чем число неизвестных, и, следовательно, является переопределенной. Можно получить решение сформулированной переопределенной системы в замкнутой форме

$$A = (C^T C)^{-1} C^T \Sigma, \tag{6.2}$$

где C^T — транспонированная к C матрица, $(C^T C)^{-1}$ — псевдообратная матрица к C .

Альтернативным подходом вычисления обобщенных коэффициентов является введение в рассмотрение целевой функции

$$J = (1/2)(\Sigma - CA)(\Sigma - CA)^T. \tag{6.3}$$

В этом случае задача сводится к отысканию минимума квадратичной функции (6.2) коэффициентов. В настоящем исследовании реализованы оба подхода.

Результаты вычислений для пластины с горизонтальной трещиной сведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Амплитудные множители ряда М. Уильямса для пластины с горизонтальной трещиной, вычисленные с помощью конечно-элементного анализа

Table 6.1

Amplitude factors of the M. Williams series for a plate with a horizontal crack calculated using finite element analysis

Масштабные множители	Значение
a_1^1	2795.877 $K^{1/2}$
a_2^1	-1013.885 КПа
a_3^1	704.824 КПа/см ^{1/2}
a_5^1	-86.702 КПа/см ^{3/2}
a_7^1	16.065 КПа/см ^{5/2}
a_9^1	-10.196 КПа/см ^{7/2}
a_{11}^1	0.183 КПа/см ^{9/2}
a_{13}^1	-0.473 КПа/см ^{11/2}
a_{15}^1	0.913 КПа/см ^{13/2}

На рис. 6.4 слева показаны кривые, отражающие зависимость от полярного угла θ компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ на расстоянии 8.82 мм от острия трещины, полученные посредством асимптотического разложения М. Уильямса, в котором сохранено различное количество слагаемых. Кривые показаны различными цветами, синими точками показано угловое распределение напряжений, построенное с помощью конечно-элементного анализа. На рис. 6.4 справа показано конечно-элементное решение и одиннадцатичленное асимптотическое представление поля напряжений σ_{11} . Из рисунков видно, что угловые распределения напряжений, построенные с помощью n -параметрического разложения, где $n \leq 10$, визуально разнятся от численного решения, найденного методом конечных элементов. Из рис. 6.4 справа явствует, что одиннадцатичленное разложение полностью восстанавливает численное распределение компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$, полученное методом конечных элементов и процедурой переопределенного метода. Таким образом, на расстоянии 8.82 мм от вершины трещины для визуального совпадения угловых распределений требуется сохранение одиннадцати слагаемых ряда.

Родственную картину можно видеть для оставшихся компонент тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ и $\sigma_{22}(r, \theta)$. На рис. 6.5 показаны θ -зависимости компоненты $\sigma_{12}(r, \theta)$ от угла на расстоянии 8.82 мм от вершины трещины, образованные с помощью многочленных разложений М. Уильямса поля напряжений, ассоциированного с вершиной трещины. Из рис. 6.5 очевидно, что главного члена асимптотического разложения для целостного представления поля напряжений недостаточно. Следует прибегать к удержанию слагаемых более высокого порядка. В случае касательного напряжения 6.5 двучленное разложение совпадает с одночленным разложением, поэтому необходимо рассматривать трехчленное разложение и

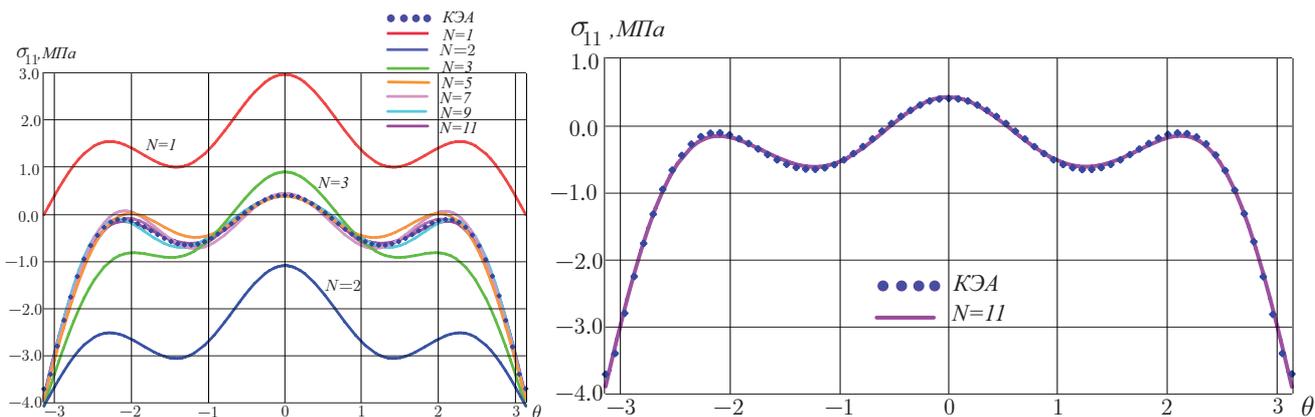


Рис. 6.4. Зависимости компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ от полярного угла θ , выстроенные с помощью асимптотического представления Уильямса, содержащего различное количество слагаемых (слева), и сравнение конечно-элементного решения с одиннадцатичленным асимптотическим разложением Уильямса (справа)

Fig. 6.4. θ -dependences of the stress component $\sigma_{11}(r, \theta)$ obtained by different number of terms in the asymptotic expansion (left) and the comparison of the eleven-term asymptotic Williams series expansion and the finite element solution (right)

разложения, содержащие слагаемые более высоких порядков по сравнению с главным. Анализ полученных кривых показывает, что на расстоянии 8.82 мм только одиннадцатичленное разложение полностью восстанавливает численное решение.

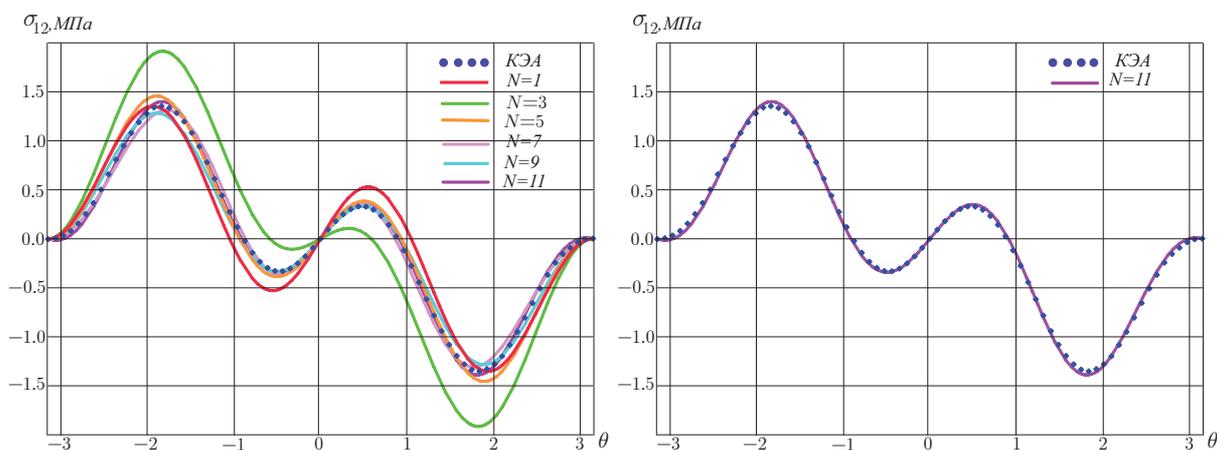


Рис. 6.5. Зависимости от полярного угла θ компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$, полученные с помощью асимптотического представления Уильямса, содержащего различное количество слагаемых (слева), и сравнение конечно-элементного решения с одиннадцатичленным асимптотическим разложением Уильямса (справа)

Fig. 6.5. Circumferential dependence of the stress tensor component $\sigma_{12}(r, \theta)$ obtained by different number of terms in the asymptotic expansion (left) and the comparison of the eleven-term asymptotic Williams series expansion and the finite element solution (right)

На рис. 6.6 приведены зависимости компоненты $\sigma_{22}(r, \theta)$ от угла на расстоянии 8.82 мм от острия трещины, выстроенные на основании мультипараметрических разложений М. Уильямса поля напряжений, ассоциированного с вершиной трещины. Рисунок 6.6 четко демонстрирует, что одно-, трех- и пятичленные разложения не совпадают с конечно-элементным решением, тогда как сохранение высших приближений приводит к совпадению аналитического и численного представлений компоненты тензора напряжений.

Результаты вычислений для трещины, составляющей угол 60° с вертикалью, сведены в табл. 6.2.

На рис. 6.7 слева продемонстрированы θ -распределения компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ на расстоянии 7.14 мм от устья трещины, полученные посредством асимптотического разложения М. Уильямса, в котором сохранено различное количество слагаемых. Сплошными линиями показаны угло-

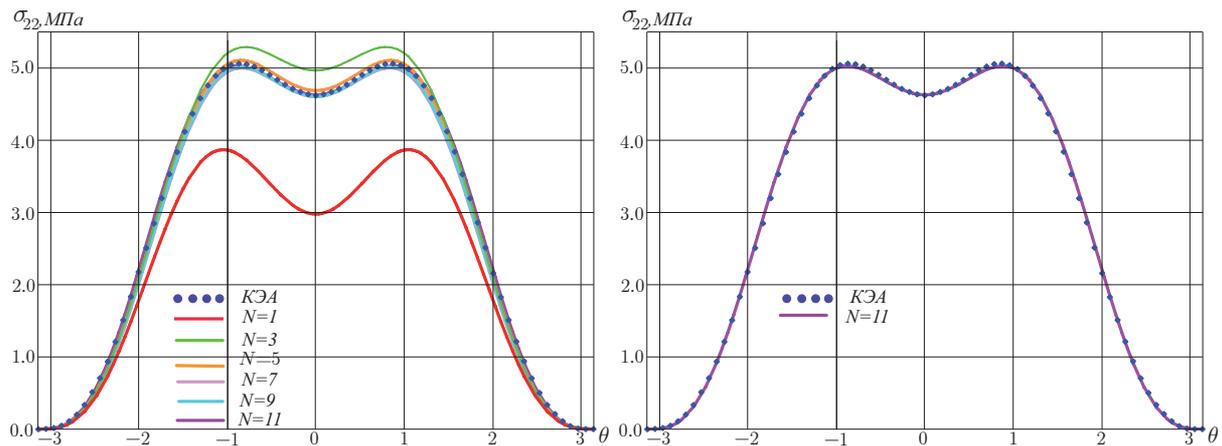


Рис. 6.6. Зависимости от полярного угла θ компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \theta)$, полученные с помощью асимптотического представления Уильямса, содержащего различное количество слагаемых (слева), и сравнение конечно-элементного решения с одиннадцатичленным асимптотическим разложением Уильямса (справа)

Fig. 6.6. Circumferential dependence of the stress tensor component $\sigma_{22}(r, \theta)$ obtained by different number of terms in the asymptotic expansion (left) and the comparison of the eleven-term asymptotic Williams series expansion and the finite element solution (right)

Таблица 6.2

Амплитудные множители ряда М. Уильямса для пластины с трещиной, составляющей угол 60° с вертикальной осью, вычисленные с помощью конечно-элементного анализа

Table 6.2

Amplitude factors of the M. Williams series for a plate with a crack making an angle of 60° with the vertical axis, calculated using finite element analysis

Масштабные множители	Значение	Масштабные множители	Значение
a_1^1	2137.625 КПа $\text{см}^{1/2}$	a_1^2	-1135.347 КПа/ $\text{см}^{1/2}$
a_2^1	-548.811 КПа	a_2^2	0
a_3^1	497.166 КПа/ $\text{см}^{1/2}$	a_3^2	-306.076 КПа/ $\text{см}^{1/2}$
a_4^1	13.870 КПа/ см^1	a_4^2	198.25 КПа/ см^1
a_5^1	-97.50 КПа/ $\text{см}^{3/2}$	a_5^2	21.343 КПа/ $\text{см}^{3/2}$
a_6^1	13.282 КПа/ см^2	a_6^2	0.663 КПа/ см^2
a_7^1	7.903 КПа/ $\text{см}^{5/2}$	a_7^2	-7.876 КПа/ $\text{см}^{5/2}$
a_8^1	-0.001031 КПа/ см^3	a_8^2	-4.223 КПа/ см^3
a_9^1	-4.625 КПа/ $\text{см}^{7/2}$	a_9^2	-0.607 КПа/ $\text{см}^{7/2}$
a_{10}^1	3.295 КПа/ см^4	a_{10}^2	-0.111 КПа/ см^4
a_{11}^1	2.105 КПа/ $\text{см}^{9/2}$	a_{11}^2	0.045 КПа/ $\text{см}^{9/2}$
a_{12}^1	-5.788 КПа/ см^5	a_{12}^2	0.050 КПа/ см^5
a_{13}^1	1.014 КПа/ $\text{см}^{11/2}$	a_{13}^2	0.018 КПа/ $\text{см}^{11/2}$
a_{14}^1	7.660 КПа/ см^6	a_{14}^2	0.279 КПа/ см^6
a_{15}^1	-3.712 КПа/ $\text{см}^{13/2}$	a_{15}^2	-0.0158 МПа/ $\text{см}^{13/2}$

вые распределения напряжений, построенные с удержанием различного числа слагаемых в разложении Уильямса, точками показано угловое распределение, построенное с помощью конечно-элементного решения. На рис. 6.7 справа показано конечно-элементное решение и одиннадцатичленное асимптотическое представление поля напряжений σ_{11} . Из рисунков видно, что угловые распределения напряжений, построенные с помощью n -параметрического разложения, где $n \leq 10$, визуально не соответствуют конечно-элементному расчету. Из рис. 6.7 справа явствует, что одиннадцатичленное разложение полностью восстанавливает численное распределение компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$, полученное методом конечных элементов и процедурой переопределенного метода. Следовательно, на расстоянии 7.14 мм

от вершины трещины для визуального совпадения угловых распределений требуется сохранение одиннадцати слагаемых ряда.

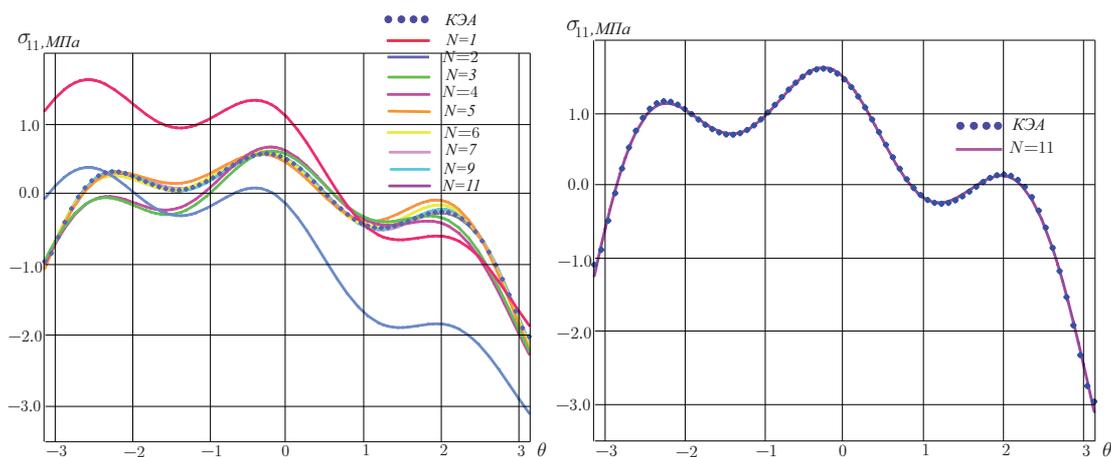


Рис. 6.7. Зависимости от полярного угла θ компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$, полученные с помощью асимптотического представления Уильямса, содержащего различное количество слагаемых (слева), и сравнение конечно-элементного решения с одиннадцатичленным асимптотическим разложением Уильямса (справа)

Fig. 6.7. Circumferential dependence of the stress tensor component $\sigma_{11}(r, \theta)$ obtained by different number of terms in the asymptotic expansion (left) and the comparison of the eleven-term asymptotic Williams series expansion and the finite element solution (right)

Схожая картина может наблюдаться для компонент тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ и $\sigma_{22}(r, \theta)$. На рис. 6.8 приведены зависимости компоненты $\sigma_{12}(r, \theta)$ от угла на расстоянии 7.14 мм от кончика трещины, выстроенные с помощью многочленных разложений М. Уильямса поля напряжений, ассоциированного с вершиной трещины. Из рис. 6.8 очевидно, что главного члена асимптотического разложения для целостного представления поля напряжений недостаточно. Следует прибегать к удержанию слагаемых более высокого порядка. В случае касательного напряжения 6.8 двучленное разложение совпадает с одночленным разложением, поэтому необходимо рассматривать трехчленное разложение и разложения, содержащие слагаемые более высоких порядков по сравнению с главным. Анализ полученных кривых показывает, что только одиннадцатичленное разложение полностью восстанавливает численное решение.

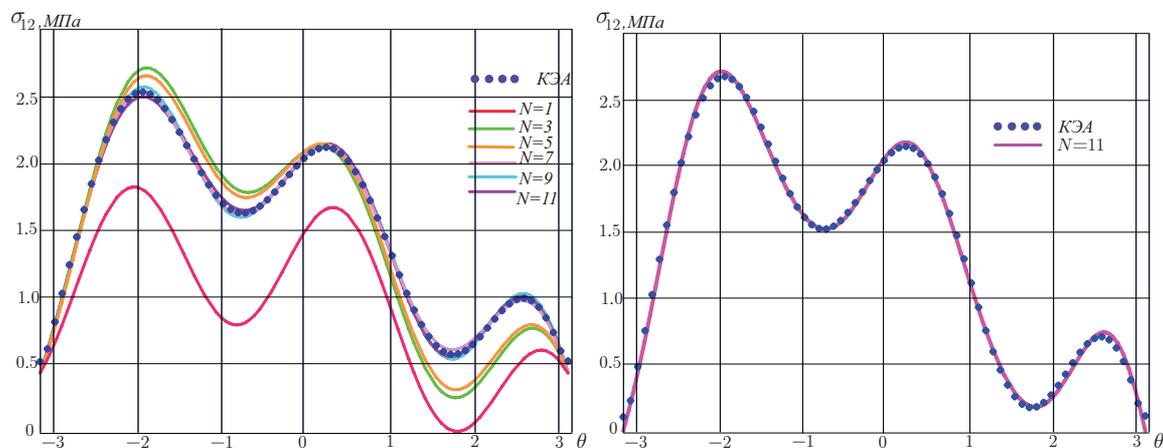


Рис. 6.8. Зависимости от полярного угла θ компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$, полученные с помощью асимптотического представления Уильямса, содержащего различное количество слагаемых (слева), и сравнение конечно-элементного решения с одиннадцатичленным асимптотическим разложением Уильямса (справа)

Fig. 6.8. Circumferential dependence of the stress tensor component $\sigma_{12}(r, \theta)$ obtained by different number of terms in the asymptotic expansion (left) and the comparison of the eleven-term asymptotic Williams series expansion and the finite element solution (right)

Рисунок 6.9 показывает зависимости компоненты $\sigma_{22}(r, \theta)$ от угла на расстоянии 7.14 мм от кончика трещины, выстроенные при помощи многопараметрических разложений М. Уильямса поля напряжений, ассоциированного с вершиной трещины. Рисунок 6.9 четко демонстрирует, что одно-, трех- и пятичленные разложения не совпадают с конечно-элементным решением, тогда как сохранение высших приближений приводит к совпадению аналитического и численного представлений компоненты тензора напряжений.

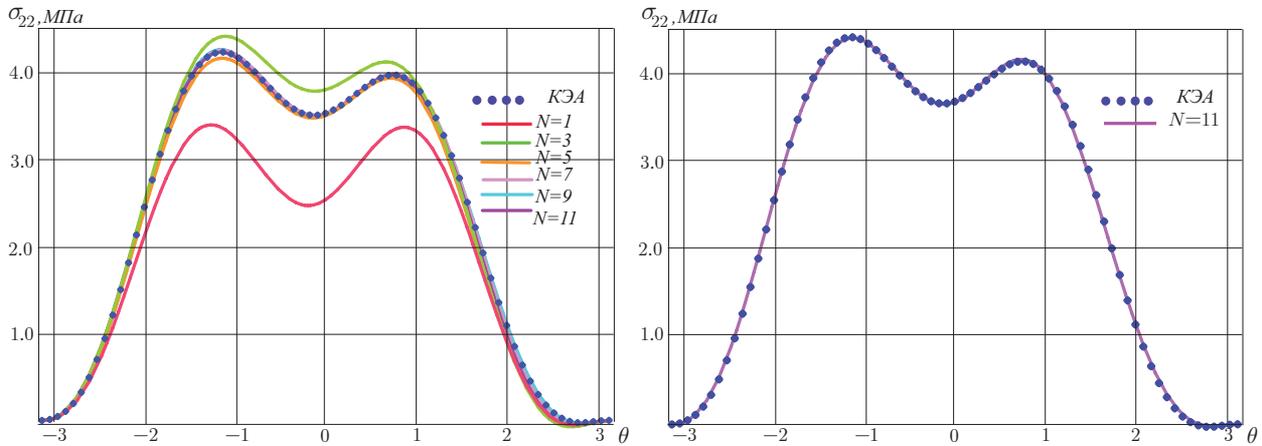


Рис. 6.9. Зависимости от полярного угла θ компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \theta)$, полученные с помощью асимптотического представления Уильямса, содержащего различное количество слагаемых (слева), и сравнение конечно-элементного решения с одиннадцатичленным асимптотическим разложением Уильямса (справа)

Fig. 6.9. Circumferential dependence of the stress tensor component $\sigma_{22}(r, \theta)$ obtained by different number of terms in the asymptotic expansion (left) and the comparison of the eleven-term asymptotic Williams series expansion and the finite element solution (right)

Результаты вычислений, проведенных с помощью переопределенного метода, для пластины, ослабленной трещиной, наклоненной под углом 45° к вертикальной оси, сведены в табл. 6.3.

Таблица 6.3

Амплитудные множители поля напряжений для пластины с трещиной, составляющей угол 45° с вертикальной осью, вычисленные с помощью конечно-элементного анализа

Table 6.3

Amplitude factors of the stress field for a plate with a crack making an angle of 45° with the vertical axis, calculated using finite element analysis

Масштабные множители	Значение	Масштабные множители	Значение
a_1^1	1447.47 КПа см ^{1/2}	a_1^2	-1335.401 КПа см ^{1/2}
a_2^1	-75.819 КПа	a_2^2	0
a_3^1	315.327 КПа/см ^{1/2}	a_3^2	-342.582 КПа/см ^{1/2}
a_4^1	26.187 КПа/см ¹	a_4^2	-2.278 КПа/см ¹
a_5^1	-78.937 КПа/см ^{3/2}	a_5^2	40.587 КПа/см ^{3/2}
a_6^1	12.369 КПа/см ²	a_6^2	-9.142 КПа/см ²
a_7^1	8.512 КПа/см ^{5/2}	a_7^2	-6.173 КПа/см ^{5/2}
a_8^1	-4.774 КПа/см ³	a_8^2	-2.789 КПа/см ³
a_9^1	0.374 КПа/см ^{7/2}	a_9^2	0.211 КПа/см ^{7/2}
a_{10}^1	2.836 КПа/см ⁴	a_{10}^2	-0.307 КПа/см ⁴
a_{11}^1	0.710 КПа/см ^{9/2}	a_{11}^2	-0.299 КПа/см ^{9/2}
a_{12}^1	-6.536 КПа/см ⁵	a_{12}^2	0.367 КПа/см ⁵
a_{13}^1	0.289 КПа/см ^{11/2}	a_{13}^2	-0.093 КПа/см ^{11/2}
a_{14}^1	0.174 КПа/см ⁶	a_{14}^2	-0.081 КПа/см ⁶
a_{15}^1	-0.018 КПа/см ^{13/2}	a_{15}^2	0.012 КПа/см ^{13/2}

На рис. 6.10 слева показаны угловые распределения составляющей тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ на расстоянии 6.48 мм от вершины трещины, полученные посредством асимптотического разложения М. Уильямса, в котором сохранено различное количество слагаемых. Сплошными линиями изображено приближенное решение с сохранением различного числа слагаемых, точками показано угловое распределение напряжений, построенное с помощью конечно-элементного анализа. На рис. 6.7 справа показано конечно-элементное решение и одиннадцатичленное асимптотическое представление поля напряжений σ_{11} . Из рисунков видно, что угловые распределения напряжений, построенные с помощью n -параметрического разложения, где $n \leq 10$, визуальны имеют отличия от конечно-элементного расчета. Из рис. 6.7 справа явствует, что одиннадцатичленное разложение полностью восстанавливает численное распределение компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$, полученное методом конечных элементов и процедурой переопределенного метода. Таким образом, на расстоянии 6.48 мм от вершины трещины для визуального совпадения угловых распределений требуется сохранение одиннадцати слагаемых ряда.

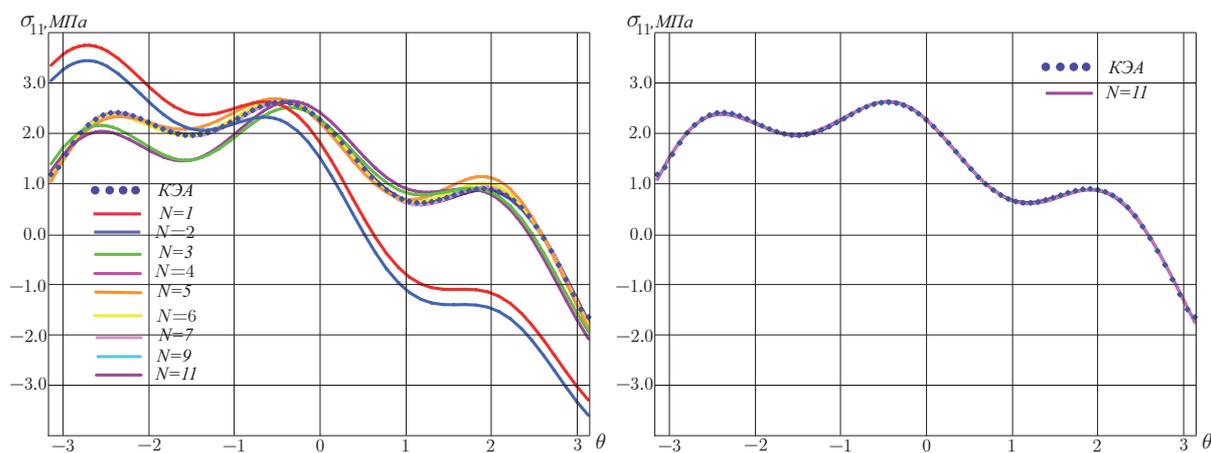


Рис. 6.10. Зависимости от полярного угла θ компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$, полученные с помощью асимптотического представления Уильямса, содержащего различное количество слагаемых (слева), и сравнение конечно-элементного решения с одиннадцатичленным асимптотическим разложением Уильямса (справа)

Fig. 6.10. Circumferential dependence of the stress tensor component $\sigma_{11}(r, \theta)$ obtained by different number of terms in the asymptotic expansion (left) and the comparison of the eleven-term asymptotic Williams series expansion and the finite element solution (right)

Подобную картину можно наблюдать для компонент тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ и $\sigma_{22}(r, \theta)$. Зависимости компоненты $\sigma_{12}(r, \theta)$ от угла на расстоянии 6.48 мм от острия трещины, выстроенные при помощи многочленных разложений М. Уильямса поля напряжений, ассоциированного с вершиной трещины, приведены на рис. 6.11, из которого очевидно, что главного члена асимптотического разложения для целостного представления поля напряжений недостаточно. Следует прибегать к удержанию слагаемых более высокого порядка. В случае касательного напряжения (рис. 6.11) двучленное разложение совпадает с одночленным разложением, поэтому необходимо рассматривать трехчленное разложение и разложения, содержащие слагаемые более высоких порядков по сравнению с главным. Анализ полученных кривых показывает, что только одиннадцатичленное разложение полностью восстанавливает численное решение.

На рис. 6.12 приведены зависимости компоненты $\sigma_{22}(r, \theta)$ от угла на расстоянии 6.48 мм от устья трещины, выстроенные при помощи мультипараметрических разложений М. Уильямса поля напряжений, ассоциированного с вершиной трещины. Рисунок 6.12 четко демонстрирует, что одно-, трех- и пятичленные разложения не совпадают с конечно-элементным решением, тогда как сохранение высших приближений приводит к совпадению аналитического и численного представлений компоненты тензора напряжений.

Результаты вычислений, проведенных с помощью переопределенного метода, пластины, ослабленной трещиной, наклоненной под углом 30° к вертикальной оси, сведены в табл. 6.4.

Рисунок 6.13 слева показывает угловые распределения составляющей тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ на расстоянии 7.9 мм от острия трещины, выстроенные при помощи асимптотического ряда М. Уильямса, в котором сохранено различное количество слагаемых. Сплошными линиями изображено приближенное асимптотическое решение, точками показано угловое распределение напряжений, построенное с помощью конечно-элементного анализа. На рис. 6.13 справа показано конечно-элементное решение и один-

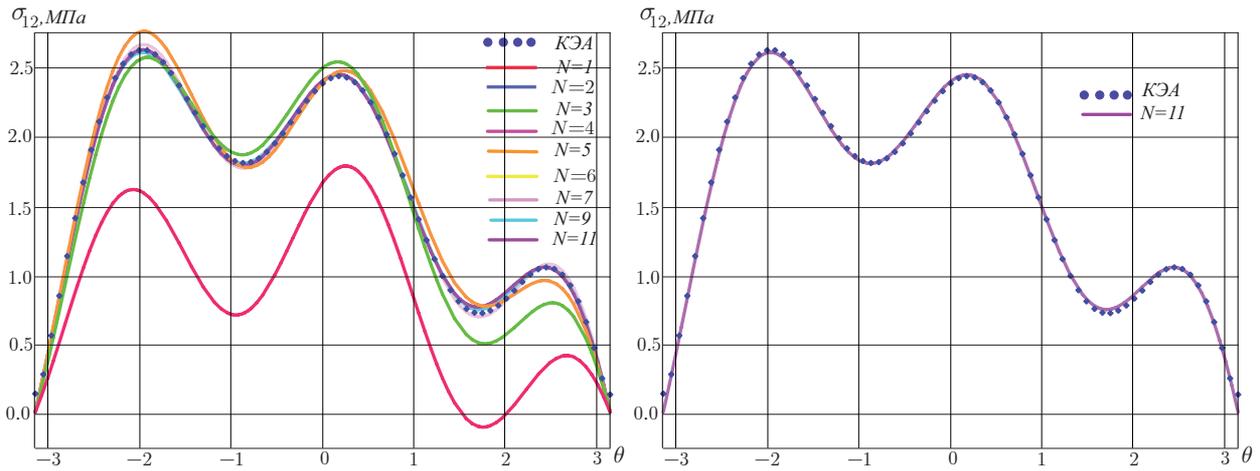


Рис. 6.11. Зависимости от полярного угла θ компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$, полученные с помощью асимптотического представления Уильямса, содержащего различное количество слагаемых, и сравнение конечно-элементного решения с одиннадцатичленным асимптотическим разложением Уильямса (справа)

Fig. 6.11. Circumferential dependence of the stress tensor component $\sigma_{12}(r, \theta)$ obtained by different number of terms in the asymptotic expansion (left) and the comparison of the eleven-term asymptotic Williams series expansion and the finite element solution (right)

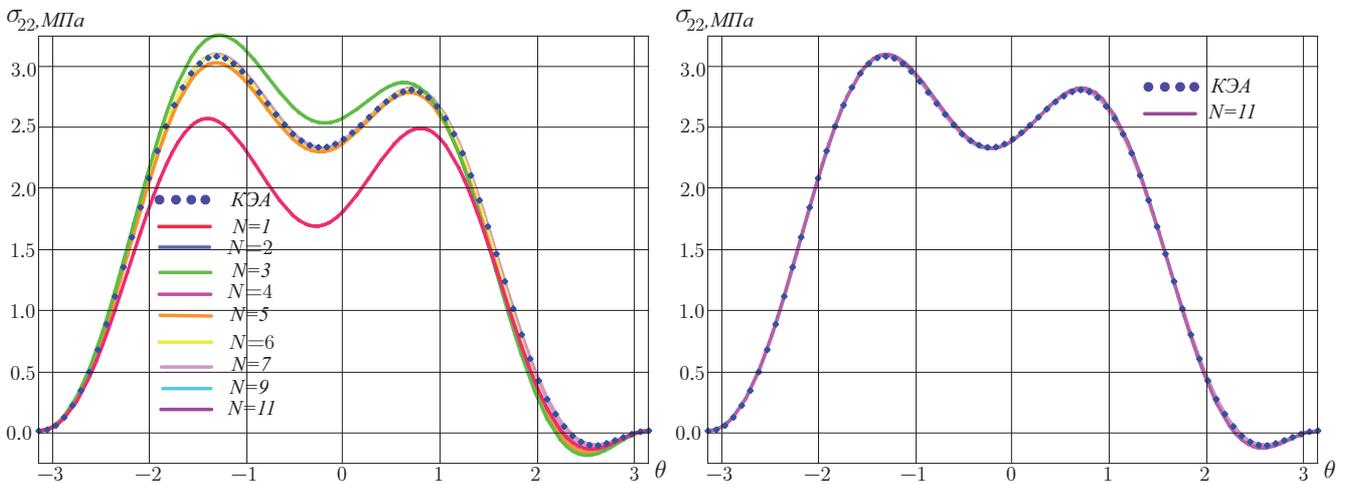


Рис. 6.12. Зависимости от полярного угла θ компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \theta)$, полученные с помощью асимптотического представления Уильямса, содержащего различное количество слагаемых, и сравнение конечно-элементного решения с одиннадцатичленным асимптотическим разложением Уильямса (справа)

Fig. 6.12. Circumferential dependence of the stress tensor component $\sigma_{22}(r, \theta)$ obtained by different number of terms in the asymptotic expansion (left) and the comparison of the eleven-term asymptotic Williams series expansion and the finite element solution (right)

надцатичленное асимптотическое представление поля напряжений σ_{11} . Из рисунков видно, что угловые распределения напряжений, построенные с помощью n -параметрического разложения, где $n \leq 10$, визуально расходятся с конечно-элементным расчетом. Из рис. 6.13 справа явствует, что одиннадцатичленное разложение полностью восстанавливает численное распределение компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$, полученное методом конечных элементов и процедурой переопределенного метода. Таким образом, на расстоянии 7.9 мм от вершины трещины для визуального совпадения угловых распределений требуется сохранение одиннадцати слагаемых ряда.

Подобное свойство обнаруживается для компонент тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ и $\sigma_{22}(r, \theta)$. На рис. 6.14 экспонированы зависимости компоненты $\sigma_{12}(r, \theta)$ от угла θ на расстоянии 7.9 мм от вершины трещины, построенные с помощью многочленных разложений М. Уильямса поля напряжений,

Таблица 6.4

Амплитудные множители ряда Макса Уильямса, описывающего поле напряжений у вершины наклонной под углом 30° к вертикали трещины, вычисленные с помощью конечно-элементного анализа и переопределенного метода

Table 6.4

Amplitude factors of the Max-Williams series describing the stress field at the vertex of a 30° vertical crack calculated using finite element analysis and an overridden method

Масштабные множители	Значение	Масштабные множители	Значение
a_1^1	731.701 КПа $\text{см}^{1/2}$	a_1^2	$-1174.925 \text{ КПа}\text{см}^{1/2}$
a_2^1	405.165 КПа	a_2^2	0
a_3^1	150.723 КПа/ $\text{см}^{1/2}$	a_3^2	$-287.357 \text{ КПа}/\text{см}^{1/2}$
a_4^1	20.233 КПа/ см^1	a_4^2	$-17.844 \text{ КПа}/\text{см}^{3/2}$
a_6^1	4.616 КПа/ см^2	a_6^2	$-8.546 \text{ КПа}/\text{см}^2$
a_7^1	7.663 МПа/ $\text{см}^{5/2}$	a_7^2	$-6.818 \text{ КПа}/\text{см}^{5/2}$
a_8^1	$-3.403 \text{ КПа} / \text{см}^3$	a_8^2	$-0.358 \text{ КПа}/\text{см}^3$
a_9^1	0.638 КПа/ $\text{см}^{7/2}$	a_9^2	$0.143 \text{ КПа}/\text{см}^{7/2}$
a_{10}^1	0.357 КПа/ см^4	a_{10}^2	$-0.187 \text{ КПа} / \text{см}^4$
a_{11}^1	0.138 КПа/ $\text{см}^{9/2}$	a_{11}^2	$-0.184 \text{ КПа}/\text{см}^{9/2}$
a_{12}^1	$-0.498 \text{ КПа}/\text{см}^5$	a_{12}^2	$0.176 \text{ КПа}/\text{см}^5$
a_{13}^1	$-0.185 \text{ КПа}/\text{см}^{11/2}$	a_{13}^2	$0.103 \text{ КПа}/\text{см}^{11/2}$
a_{14}^1	0.887 МПа/ см^6	a_{12}^2	$-0.195 \text{ КПа}/\text{см}^6$
a_{15}^1	0.118 КПа/ $\text{см}^{13/2}$	a_{15}^2	$0.115 \text{ КПа} / \text{см}^{13/2}$

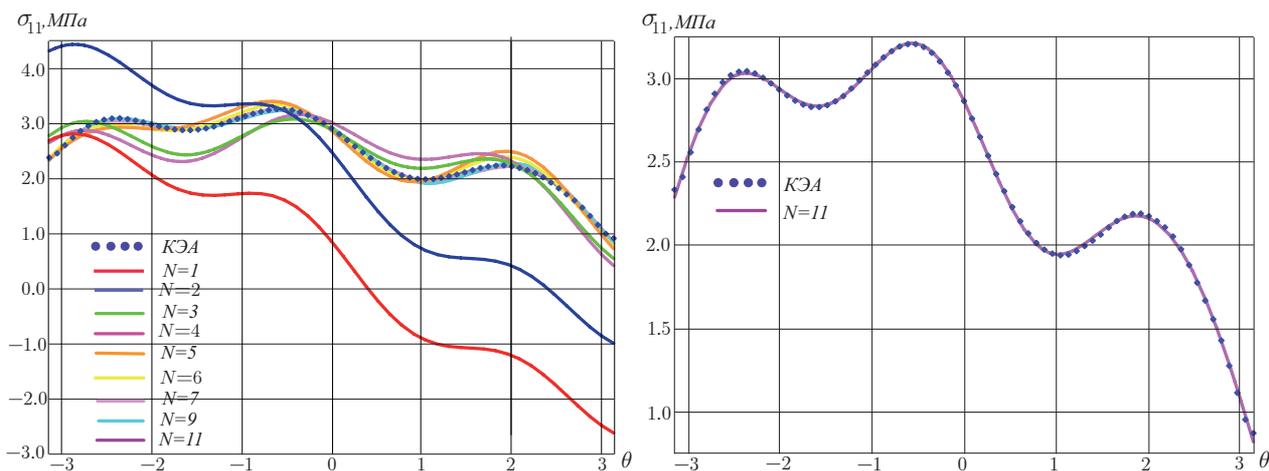


Рис. 6.13. Зависимости от полярного угла θ компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$, полученные с помощью асимптотического представления Уильямса, содержащего различное количество слагаемых (для трещины, наклоненной под углом 30° к вертикали, и сравнение конечно-элементного решения с одиннадцатичленным асимптотическим разложением Уильямса (справа))

Fig. 6.13. θ – dependence of the stress tensor component $\sigma_{11}(r, \theta)$ obtained by different number of terms in the asymptotic expansion (left) and the comparison of the eleven-term asymptotic Williams series expansion and the finite element solution (right)

ассоциированного с вершиной трещины. Из рис. 6.14 очевидно, что главного члена асимптотического разложения для целостного представления поля напряжений недостаточно. Следует прибегать к удержанию слагаемых более высокого порядка. В случае касательного напряжения, изображенного на рис. 6.14, двучленное разложение совпадает с одночленным разложением, поэтому необходимо рассматривать трехчленное разложение и разложения, содержащие слагаемые более высоких порядков по сравнению с главным. Анализ полученных кривых показывает, что только одиннадцатичленное разложение полностью реконструирует численное решение.

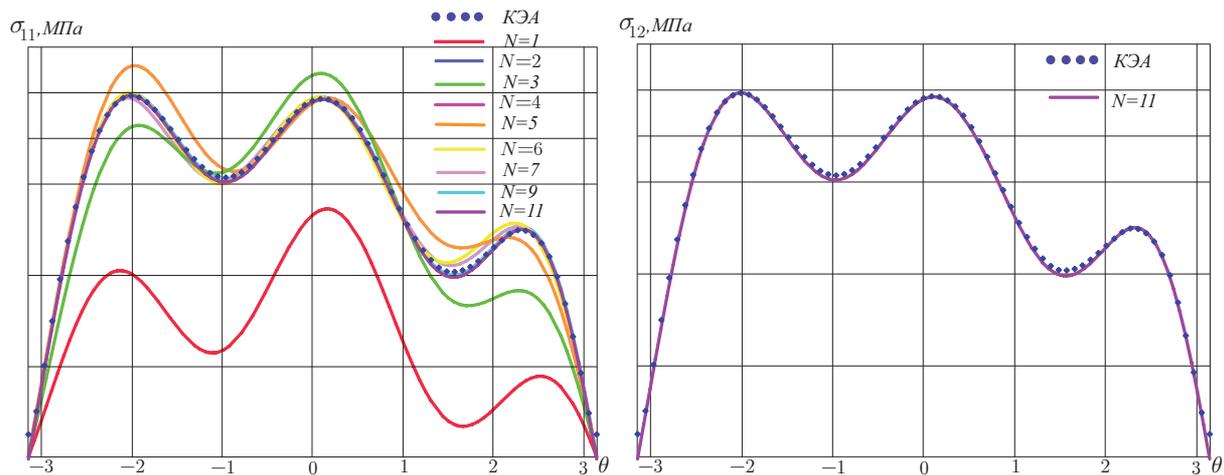


Рис. 6.14. Зависимости компоненты тензора напряжений $\sigma_{12}(r, \theta)$ от полярного угла θ , найденные с помощью асимптотического представления Уильямса, содержащего различное количество слагаемых, и сравнение конечно-элементного решения с одиннадцатичленным асимптотическим разложением Уильямса (справа)
 Fig. 6.14. θ – dependence of the stress tensor component $\sigma_{12}(r, \theta)$ obtained by different number of terms in the asymptotic expansion (left) and the comparison of the eleven-term asymptotic Williams series expansion and the finite element solution (right)

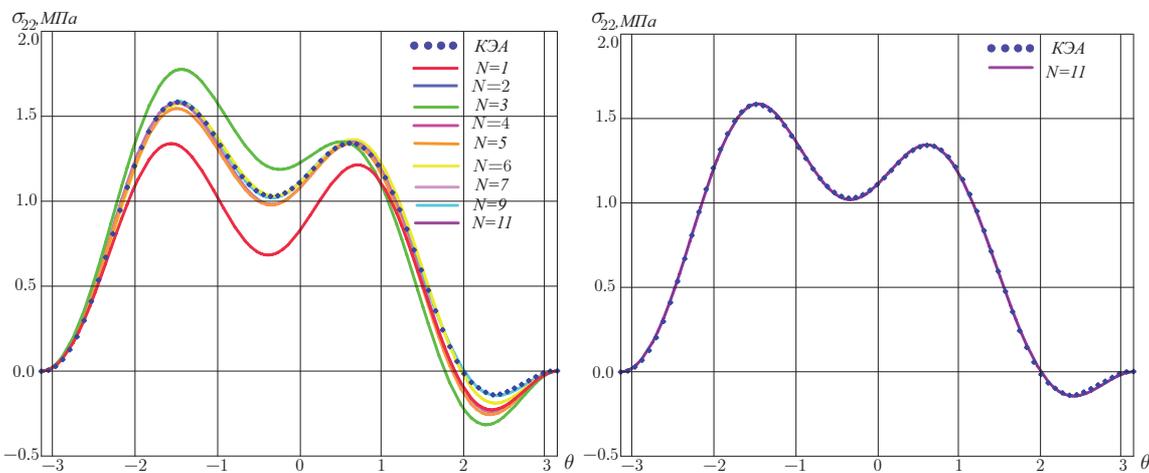


Рис. 6.15. Зависимости компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \theta)$ от полярного угла θ , полученные с помощью асимптотического представления Уильямса, содержащего различное количество слагаемых, и сравнение конечно-элементного решения с одиннадцатичленным асимптотическим разложением Уильямса (справа)
 Fig. 6.15. Circumferential dependence of the stress tensor component $\sigma_{22}(r, \theta)$ obtained by different number of terms in the asymptotic expansion (left) and the comparison of the eleven-term asymptotic Williams series expansion and the finite element solution (right)

На рис. 6.15 приведены зависимости компоненты $\sigma_{22}(r, \theta)$ от угла на расстоянии 7.9 мм от устья трещины, выстроенные при помощи многопараметрических разложений М. Уильямса поля напряжений, ассоциированного с вершиной трещины. Рисунок 6.12 четко демонстрирует, что одно-, трех- и пятичленные разложения не совпадают с конечно-элементным расчетом, тогда как сохранение высших приближений приводит к совпадению аналитического и численного представлений компоненты тензора напряжений.

Выводы

В статье с помощью метода голографической интерферометрии на основании соотношений Фавра вычислены обобщенные коэффициенты разложения М. Уильямса компонент тензора напряжений и вектора перемещения в окрестности острой трещины в однородном изотропном линейно-упругом материале.

В асимптотическом разложении М. Уильямса удержаны регулярные (неособые) слагаемые, коэффициенты при которых получили название обобщенных коэффициентов интенсивности напряжений в мультипараметрическом разложении М. Уильямса. Показано, что неособые (регулярные) слагаемые являются исключительно важными при описании механических полей при увеличении расстояния от кончика трещины. Сохранение высших приближений в разложении М. Уильямса приводит к существенному расширению области действия асимптотического представления. Предложена методика, основывающаяся на двух соотношениях Фавра и их линеаризации, которая позволяет получить переопределенную систему линейных АУ относительно обобщенных коэффициентов интенсивности напряжений. Показано, что метод голографической интерферометрии позволяет найти коэффициенты разложения с высокой точностью. Результаты экспериментального анализа сопоставлены с результатами конечно-элементного расчета. Продемонстрировано, что наблюдается хорошее соответствие между вычислительными и экспериментальными результатами.

В ходе проведенного анализа экспериментальных интерференционных картин и конечно-элементных решений могут быть сформулированы следующие выводы.

1. Экспериментальная оценка и конечно-элементные расчеты обобщенных коэффициентов интенсивности напряжений явственно показывают потребность оперирования с многочленными представлениями напряжений: сохранения членов высокого порядка малости по сравнению с доминирующими первыми двумя слагаемыми, что приводит к значительному расширению области, в которой справедливо решение Уильямса.

2. Обработка экспериментальных данных и проведенная серия конечно-элементных расчетов приводят к необходимости вывода аппроксимирующих формул для обобщенных коэффициентов интенсивности напряжений – множителей разложения Уильямса. Ясно видна необходимость проведения регрессионного анализа, нацеленного на получение по экспериментальным данным натурального и компьютерного эксперимента регрессионных моделей и вычисление коэффициентов регрессионных моделей с использованием простейших полиномов нелинейной регрессии.

Последнему вопросу будут посвящена следующая часть данной работы.

Литература

- [1] Матвиенко Ю.Г. Двухпараметрическая механика разрушения. Москва: Физматлит, 2021. 208 с. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44521290>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ltcqcj>.
- [2] Saxena A. Advanced fracture mechanics and structural integrity. Boca Raton: CRC Press, 2017. 325 p. DOI: <http://dx.doi.org/10.1201/9781351004060>.
- [3] Kostuk R.K. Holographic Interferometry. Boca-Raton: CRC, 2019. 352 p. DOI: <http://dx.doi.org/10.1201/9780429185830-10>.
- [4] Остсемин А.А., Денискин С.А., Ситников Л.Л., Максимов С.Б., Загребалов А.А. Определение напряженного состояния тел с дефектами методом голографической интерферометрии // Проблемы прочности. 1982. № 10. С. 77–81.
- [5] Belova O.N., Stepanova L.V. Photoelastic evaluation of stress fields and coefficients of multi-parameter asymptotic expansion of the crack-tip stress field // Procedia Structural Integrity. 2022. Vol. 32. P. 32–41. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.prostr.2021.09.006>.
- [6] Belova O.N., Stepanova L.V., Kosygina L.N. Experimental study on the interaction between two cracks by digital photoelasticity method: Construction of the Williams series expansion // Procedia Structural Integrity. 2022. Vol. 37. P. 888–899. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.02.023>.
- [7] Frankovsky P., Brodnianska Z., Bocko J., Trebunova M., Kostka J., Kicko M., Carak P. Application of holographic interferometry in the analysis of stress states in a crack root area // Applied Optics. 2020. Vol. 59. Issue 13. Pp. D170–D178. DOI: <http://doi.org/10.1364/AO.377952>.
- [8] Xia H., Guo R., Yan F., Chang H. Real-Time and Quantitative Measurement of Crack-Tip Stress Intensity Factors Using Digital Holographic Interferometry // Advances in Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 2018. Article ID: 1954573. DOI: <http://doi.org/10.1155/2018/1954573>.
- [9] Ajovalasit A. A single hologram technique for the determination of absolute retardations in holographic photoelasticity // Journal of Strain Analysis for Engineering Design. 1975. Vol. 10(3). Pp. 148–152. DOI: <http://doi.org/10.1243/03093247V103148>.
- [10] Post D. The generic nature of the absolute-retardation method of photoelasticity // Experimental Mechanics. 1967. Vol. 7. P. 233–241. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02326994>.

- [11] Соргутов И.В. Методы фотоупругости при оценке технического состояния конструкций зданий и сооружений // Системные технологии. 2021. № 4(41). С. 51–54. DOI: http://doi.org/10.55287/22275398_2021_4_51.
- [12] Остсеин А.А., Уткин П.Б. Напряженно-деформированное состояние наклонного эллиптического дефекта в пластине при ее двухосном нагружении // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53, № 2(312). С. 115–127. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17651508>. EDN: <https://www.elibrary.ru/owgyzn>.
- [13] Остсеин А.А., Уткин П.Б. Напряженно-деформированное состояние и коэффициент интенсивности напряжений в окрестности трещиноподобных дефектов при двухосном растяжении пластины // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т. 55, № 6. С. 162–172. URL: <https://market.sibran.ru/upload/iblock/95a/95ad76219db7f295e6ba5aa626a446ab.pdf>.
- [14] Дильман В.Л., Уткин П.Б. Двухпараметрический метод определения коэффициента интенсивности напряжений К_I трещиноподобных дефектов методом голографической интерферометрии // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер.: Математика. Механика. Физика. 2022. Т. 14, № 3. С. 60–67. DOI: <https://doi.org/10.14529/mmph220307>.
- [15] Merzkirch M. Mechanical Characterization Using Digital Image Correlation. Cham: Springer, 2022. 311 p. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-84040-2>.
- [16] Кесаев В.В. Метод изоплах в неполяризованном свете // Письма в ЖТФ. 2022. Т. 48, № 22. С. 43–46. DOI: <http://doi.org/10.21883/PJTF.2022.22.53807.19360>.
- [17] Ramesh K. Developments in Photoelasticity. A renaissance. Bristol: IOP Publishing, 2021. 225 p. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/978-0-7503-2472-4>.
- [18] Sasikumar S., Ramesh K. Deep learning approach to evaluate fracture parameters from photoelastic images // ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition. 2021. Vol. 12. Paper No: IMECE2021-73114, V012T12A013. DOI: <http://doi.org/10.1115/IMECE2021-73114>.
- [19] Sanvitale N., Gheller C., Bowman E. Deep learning assisted particle identification in photoelastic images of granular flows // Granular Matter. 2022. Vol. 24. Article number 65. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10035-022-01222-w>.
- [20] Sergazinov R., Kramar M. Machine learning approach to force reconstruction in photoelastic materials // Machine Learning Science and Technology. 2021. Vol. 2. Article number 045030. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/2632-2153/ac29d5>.
- [21] Tao B., Wang., Qian X. Photoelastic stress field recovery using deep convolutional neural network // Frontiers in Bioengineering and Biotechnology. 2022. Vol. 10. Article number 818112. DOI: <http://doi.org/10.3389/fbioe.2022.818112>.
- [22] Zhang Y., Zhang M., Liu K., He Z., Cao L. Progress of the Computer-generated Holography Based on Deep Learning // Applied Sciences. 2022. Vol. 12, Issue 17. Article number 8568. DOI: <https://doi.org/10.3390/app12178568>.
- [23] Favre H. Sur une nouvelle methode optique de determination des tensions interieures // Revue d'Optique. 1929. Vol. 8(193). P. 241–289.
- [24] Трумбачев В.Ф., Кутаева Г.С. Методика исследования напряженного состояния моделей массива горных пород методом поляризационно-голографической интерферометрии. Москва: Институт горного дела, 1984. 53 с. URL: <https://meganorm.ru/Data2/1/4293740/4293740742.pdf>.
- [25] Belova O.N., Stepanova L.V. Computational and experimental identification of coefficients of the Williams series expansion by considering higher order terms in the cracked specimens through digital image analysis // Procedia Structural Integrity. 2022. Vol. 40. P. 46–60. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.04.006>.
- [26] Karihaloo B.L., Abdalla H., Xiao Q.Z. Coefficients of the crack tip asymptotic field for wedge splitting specimens // Engineering Fracture Mechanics. 2003. Vol. 70, № 17. P. 2407–2420. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0013-7944\(03\)00005-5](http://doi.org/10.1016/S0013-7944(03)00005-5).
- [27] Karihaloo B.L., Xiao Q.Z. Accurate determination of the coefficients of elastic crack tip asymptotic field by a hybrid crack element with p-adaptivity // Engineering Fracture Mechanics. 2001. Vol. 68, № 15. P. 1609–1630. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0013-7944\(01\)00063-7](http://doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00063-7).
- [28] Karihaloo B.L., Xiao Q.Z. Higher order terms of the crack tip asymptotic field for a wedge-splitting specimen // International Journal of Fracture. 2001. Vol. 112, № 2. P. 129–137. DOI: <http://doi.org/10.1023/A:1013366025494>.

- [29] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // International Journal of Solids and Structures. 2012. Vol. 49. P. 556–566. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024>.
- [30] Hello G. Derivation of complete crack-tip expansion from Westergaard-Sanford solutions // International Journal of Solids and Structures. 2018. Vols. 144–145. P. 265–275. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012>.
- [31] Melching, D., Breibarth E. Advanced cracked tip field characterization using conjugate wick integrals // International Journal of Fatigue. 2023. Vol. 169. Article number 107501. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2023.107501>.
- [32] Stepanova L.V., Belova O.N. The digital photoelasticity method and finite element analysis for determination of the multi-point crack-tip field series expansions for notched semi-disks // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1745. Article number 012104. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1745/1/012104>.
- [33] Белова О.Н., Степанова Л.В. Вычисление коэффициентов асимптотического разложения поля напряжений вблизи вершины трещины. Смешанное нагружение пластины // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2020. Т. 26, № 3. С. 40–62. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-3-40-62>. EDN: <https://www.elibrary.ru/yfaimm>.
- [34] Степанова Л.В., Долгих В.С., Бахарева Ю.С. Цифровая обработка результатов оптоэлектронных измерений: метод фотоупругости и его применение для определения коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.: Физико-математические науки. 2017. Т. 21, № 4. С. 717–735. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1544>.
- [35] Степанова Л.В. Экспериментальное и конечно-элементное определение коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Часть II // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Сер.: Механика. 2021. № 1. С. 72–85. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.1.08>. EDN: <https://www.elibrary.ru/lezlqh>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-1-15-45

Submitted: 15.03.2023

Revised: 21.04.2023

Accepted: 30.05.2023

L.V. Stepanova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: stepanova.lv@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6744-2222>

D.A. Semenov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: denis@gde.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8620-5167>

G.S. Anisimov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: anisgennady@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2774-7158>

APPLICATION OF HOLOGRAPHY METHOD FOR THE RESTORATION OF THE WILLIAMS SERIES NEAR THE CRACK TIP

ABSTRACT

The article describes the processing of the results of a series of experiments performed by the interference-optical method of holographic interferometry (holographic photoelasticity) aimed at computing the amplitude coefficients of the M. Williams series constituting the stress and displacement fields at the crack tip for several cracked configurations. The main objective of this study is the experimental and computational determination of the coefficients of the M. Williams series for the stress, strain and displacement fields associated with the crack tip in an isotropic linearly elastic medium taking into account regular (non-singular) terms in the multiparameter Williams series. These coefficients are named generalized stress intensity factors. The method of holographic interferometry is shown to be a convenient and efficacious tool for reconstructing the stress field near the tip of the crack, because during the experiment it is possible to obtain two families of interference fringe patterns: absolute retardation fringes (isodromics) for vertical and horizontal polarizations.

Experimental outcomes were thoroughly processed using the developed digital application allowing us to accumulate the isodromics orders and coordinates of points belonging to absolute retardations. In this work, absolute retardation fringes in a plate with a central horizontal crack and a crack inclined at different angles are obtained. For each type of experimental sample, the coefficients of the Williams series were calculated taking into account non-singular terms (in the representation of M. Williams, fifteen terms were preserved). A procedure for linearization of nonlinear algebraic equations following from the relations of Favre's law is proposed. By solving the obtained overdeterministic system of linear algebraic equations, the generalized stress intensity factors (coefficients of the M. Williams series) are estimated. Conjointly, the finite element analysis of the specimens with same geometry was effectuated. The experimentally determined values of the Williams series are compared with the results of the finite element calculation of the stress-strain state performed in the SIMULIA Abaqus software. The results of the numerical and experimental studies were found to be quite consistent. It is lucidly shown that it is imperative to keep the higher order terms in the Williams series expansions for the fields associated with the crack tip.

Key words: holographic interferometry; M. Williams series of the stress field; amplitude multipliers; Favre's law; overdeterministic method; absolute difference lines, brittle fracture mechanics.

Citation. Stepanova L.V., Semenov D.A., Anisimov G.S. Application of holography method for the restoration of the Williams series near the crack tip. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 15–45. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-1-15-45>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Stepanova L.V., 2023

Larisa V. Stepanova — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of Information Security, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

© Semenov D.A., 2023

Denis A. Semenov — post-graduate student of the Department of Information Security, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

© Anisimov G.S., 2023

Gennadij S. Anisimov — post-graduate student of the Department of Information Security, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Matvienko Y.G. Two-parameter fracture mechanics. Moscow: Fizmatlit, 2021, 208 p. Availavle at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44521290>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ltcqcj>. (In Russ.)
- [2] Saxena A. Advanced fracture mechanics and structural integrity. Boca Raton: CRC Press, 2017. 325 p. DOI: <http://dx.doi.org/10.1201/9781351004060>.
- [3] Kostuk R.K. Holographic Interferometry. Boca-Ranton: CRC, 2019. 352 p. DOI: <http://dx.doi.org/10.1201/9780429185830-10>.
- [4] Ostsemin A.A., Deniskin S.A., Sitnikov L.L., Maksimov S.B., Zagrebalov A.A. Determination of the stress state of bodies with defects by the method of holographic photoelasticity. *Strength of Materials*, 1982, № 10, pp. 77–81. (In Russ.)
- [5] Belova O.N., Stepanova L.V. Photoelastic evaluation of stress fields and coefficients of multi-parameter asymptotic expansion of the crack-tip stress field. *Procedia Structural Integrity*, 2022, vol. 32, pp. 32–41. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.prostr.2021.09.006>.
- [6] Belova O.N., Stepanova L.V., Kosygina L.N. Experimental study on the interaction between two cracks by digital photoelasticity method: Construction of the Williams series expansion. *Procedia Structural Integrity*, 2022, vol. 37, pp. 888–899. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.02.023>.
- [7] Frankovsky P., Brodnianska Z., Bocko J., Trebunova M., Kostka J., Kicko M., Carak P. Application of holographic interferometry in the analysis of stress states in a crack root area. *Applied Optics*, 2020, vol. 59, issue 13, pp. D170–D178. DOI: <http://doi.org/10.1364/AO.377952>.
- [8] Xia H., Guo R., Yan F., Chang H. Real-Time and Quantitative Measurement of Crack-Tip Stress Intensity Factors Using Digital Holographic Interferometry. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2018, vol. 2018, Article ID: 1954573. DOI: <http://doi.org/10.1155/2018/1954573>.

- [9] Ajovalasit A. A single hologram technique for the determination of absolute retardations in holographic photoelasticity. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 1975, vol. 10, № 3, pp. 148–152. DOI: <http://doi.org/10.1243/03093247V103148>.
- [10] Post D. The generic nature of the absolute-retardation method of photoelasticity. *Experimental Mechanics*, 1967, vol. 7, pp. 233–241. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF02326994>.
- [11] Sorgutov I.V. Methods of photoelasticity in assessing the technical condition of structures of buildings and structures. *System technologies*, 2021, № 41, pp. 51–54. DOI: http://doi.org/10.55287/22275398_2021_4_51. (In Russ.)
- [12] Ostsemin A.A., Utkin P.B. Stress-strain state of an inclined elliptical defect in a plate under biaxial loading. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2012, vol. 53, № 2, pp. 246–257. DOI: <http://doi.org/10.1134/S0021894412020137>. EDN: <https://www.elibrary.ru/pdnlbl>. (In English; original in Russian)
- [13] Ostsemin A.A., Utkin P.B. Stress-strain state and stress intensity factor in the vicinity of crack-like defects in plate biaxial tension. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, vol. 55, № 6, pp. 162–172. Available at: <https://market.sibran.ru/upload/iblock/95a/95ad76219db7f295e6ba5aa626a446ab.pdf>. (In Russ.)
- [14] Dilman V.L., Utkin P.B. Two-parameter method of determining stress intensity factor K_I of crack-like defects using holographic interferometry. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematics. Mechanics. Physics*, 2022, vol. 14, № 3, pp. 60–67. DOI: <https://doi.org/10.14529/mmph220307>. (In Russ.)
- [15] Merzkirch M. *Mechanical Characterization Using Digital Image Correlation*. Cham: Springer, 2022. 311 p. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-84040-2>.
- [16] Kesaev V.V. Isopachic method with unpolarized light. *Technical Physics Letters*, 2022, vol. 48, no. 11, pp. 79–82. DOI: <http://dx.doi.org/10.21883/TPL.2022.11.54898.19360>. (In English; original in Russian).
- [17] Ramesh K. *Developments in Photoelasticity. A renaissance*. Bistol: IOP Publishing, 2021, 225 p. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/978-0-7503-2472-4>.
- [18] Sasikumar S., Ramesh K. Deep learning approach to evaluate fracture parameters from photoelastic images. *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, 2021, vol. 12, paper No: IMECE2021-73114, V012T12A013. DOI: <http://doi.org/10.1115/IMECE2021-73114>.
- [19] Sanvitale N., Gheller C., Bowman E. Deep learning assisted particle identification in photoelastic images of granular flows. *Granular Matter*, 2022, vol. 24, article number 65. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10035-022-01222-w>.
- [20] Sergazinov R., Kramar M. Machine learning approach to force reconstruction in photoelastic materials. *Machine Learning Science and Technology*, 2021, vol. 2, article number 045030. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/2632-2153/ac29d5>.
- [21] Tao B., Wang., Qian X. Photoelastic stress field recovery using deep convolutional neural network. *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*, 2022, vol. 10, article number 818112. DOI: <http://doi.org/10.3389/fbioe.2022.818112>.
- [22] Zhang Y., Zhang M., Liu K., He Z., Cao L. Progress of the Computer-generated Holography Based on Deep Learning. *Applied Sciences*, 2022, vol. 12, issue 17, article number 8568. DOI: <http://doi.org/10.3390/app12178568>.
- [23] Favre H. Sur une nouvelle methode optique de determination des tensions interieures. *Revue d'Optique*, 1929, vol. 8, issue 193, pp. 241–289.
- [24] Trumbachev V.F., Kutaeva G.S. Technique for studying the stress state of rock mass models by the method of polarization-holographic interferometry. Moscow: Institut gornogo dela, 1984, 53 p. Available at: <https://meganorm.ru/Data2/1/4293740/4293740742.pdf>. (In Russ.)
- [25] Belova O. N., Stepanova L.V. Computational and experimental identification of coefficients of the Williams series expansion by considering higher order terms in the cracked specimens through digital image analysis. *Procedia Structural Integrity*, 2022, vol. 40, pp. 46–60. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.04.006>.
- [26] Karihaloo B.L., Abdalla H., Xiao Q.Z. Coefficients of the crack tip asymptotic field for wedge splitting specimens. *Engineering Fracture Mechanics*, 2003, vol. 70, issue 17, pp. 2407–2420. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(03\)00005-5](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(03)00005-5).
- [27] Karihaloo B.L., Xiao Q.Z. Accurate determination of the coefficients of elastic crack tip asymptotic field by a hybrid crack element with p-adaptivity. *Engineering Fracture Mechanics*, 2001, vol. 68, issue 15, pp. 1609–1630. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0013-7944\(01\)00063-7](http://doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00063-7).

- [28] Karihaloo B.L., Xiao Q.Z. Higher order terms of the crack tip asymptotic field for a wedge-splitting specimen. *International Journal of Fracture*, 2001, vol. 112, issue 2, pp. 129–137. DOI: <http://doi.org/10.1023/A:1013366025494>.
- [29] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, vol. 49, issues 3–4, pp. 556–566. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024>.
- [30] Hello G. Derivation of complete crack-tip expansion from Westergaard-Sanford solutions. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, vol. 144–145, pp. 265–275. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012>.
- [31] Melching D., Breibarth E. Advanced cracked tip field characterization using conjugate wirth integrals. *International Journal of Fatigue*, 2023, vol. 169, article number 107501. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2023.107501>.
- [32] Stepanova L.V., Belova O.N. The digital photoelasticity method and finite element analysis for determination of the multi-point crack-tip field series expansions for notched semi-disks. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1745, article number 012104. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1745/1/012104>.
- [33] Belova O.N., Stepanova L.V. Determination of the coefficients of asymptotic crack-tip stress expansion. Mixed mode loading of the plate. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, № 3, pp. 40–62. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-3-40-62>. EDN: <https://www.elibrary.ru/yfaimm>. (In Russ.)
- [34] Stepanova L.V., Dolgikh V.S., Bakhareva Yu.N. Digital processing of the results of optoelectronic measurements. The photoelasticity method and its application for determination of coefficients of the multiparameter asymptotic Williams expansion of the stress field. *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2017, vol. 21, number 4, pp. 717–735. DOI: <http://doi.org/10.14498/vsgtu1544>. (In Russ.)
- [35] Stepanova L.V. Experimental determination and finite element analysis of coefficients of the multi-parameter Williams series expansion in the vicinity of the crack tip in linear elastic materials. Part II. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, no. 1, pp. 72–85. DOI: <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.1.08>. EDN: <https://www.elibrary.ru/lezlhq>. (In Russ.)



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-1-47-63

УДК 512.531; 519.7

Дата: поступления статьи: 03.03.2023
после рецензирования: 14.04.2023
принятия статьи: 30.05.2023

Д.В. Чаплий

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: Chapliy.dv@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9510-3659>

Л.В. Степанова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: Stepanova.lv@ssau.ru ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

О.Н. Белова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: belova.on@ssau.ru ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4492-223X>

ВОЗДЕЙСТВИЕ АККУМУЛЯЦИИ ПОВРЕЖДЕНИЙ НА АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ¹

АННОТАЦИЯ

Предметом данного исследования является анализ механических полей, ассоциированных с вершиной трещины, находящейся в условиях ползучести при учете явления накопления повреждений. Задачей работы является проведение конечно-элементного моделирования, с помощью программного комплекса SIMULIA Abaqus, одноосного растяжения пластины с центральной горизонтальной трещиной в условиях ползучести с учетом накопления поврежденности в плоской постановке задачи. Для численного моделирования ползучести используется степенной закон Бейли — Хортон. Степенной закон ползучести с помощью пользовательской процедуры UMAT (User Material) пакета SIMULIA Abaqus был дополнен кинетическим уравнением накопления поврежденности Качанова — Работнова в связанной постановке. В данном исследовании вершина трещины моделировалась в виде математического надреза, а также выреза с конечным радиусом закругления вершин.

В результате расчетов получены распределения напряжений, деформаций и сплошности в условиях ползучести с учетом накопления поврежденности с течением времени. Построены радиальные распределения сплошности, напряжений и деформаций с течением времени на разных расстояниях от вершины трещины. Целью исследования было рассмотрение асимптотики распределения напряжений. В результате исследования показано, что в упругой области асимптотика соответствует распределению при упругом режиме, а в зоне ползучести выполняется асимптотика Хатчинсона, Райса и Розенгрена (ХРР-решение) для разных показателей n степенного закона ползучести.

Представлено сравнение радиальных распределений напряжений при моделировании без учета поврежденности и в случае учета накопления повреждений. Показано, что наличие поврежденности существенным образом меняет асимптотику поля напряжений в близкой окрестности вершины трещины.

Ключевые слова: пользовательская процедура UMAT; SIMULIA Abaqus; ползучесть; сплошность; поврежденность; асимптотика.

Цитирование. Чаплий Д.В., Степанова Л.В., Белова О.Н. Воздействие аккумуляции повреждений на асимптотическое поведение напряжений в окрестности вершины трещины // Вестник Самарского

¹Исследование поддержано Российским научным фондом, проект № 21-11-00346.

университета. Естественная серия. 2023. Т. 29, № 1. С. 47–63. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-1-47-63>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Чаплий Д.В., 2023

Чаплий Дмитрий Викторович — аспирант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

© Степанова Л.В., 2023

Степанова Лариса Валентиновна — заведующий кафедрой математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

© Белова О.Н., 2023

Белова Оксана Николаевна — ассистент кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

1. Предварительные сведения

Еще в 1999 году [1] Д. Хейхарст подчеркнул первостепенную роль и значение суперкомпьютерного моделирования как инструмента создания фундамента для процесса проектирования и производства. В статье [2] обозначен путь от лабораторных испытаний материалов, выбора соответствующих действительному поведению материала определяющих уравнений до суперкомпьютерного моделирования поведения высокотемпературных инженерных компонентов. Д. Хейхарст использует континуальную механику поврежденности в качестве примера инструментария, который может быть применен для анализа и моделирования поведения поврежденных широкого спектра инженерных компонентов, эксплуатируемых при высоких температурах. Подчеркивается важность использования механически обоснованных определяющих уравнений для достижения точных прогнозов и экстраполяций. Хейхарст обсуждает процедуры выбора доминирующих механизмов на основе лабораторных данных и, следовательно, соответствующих определяющих уравнений. Автор [1] приводит к утверждению, что препятствием для прогресса в использовании этих методов для создания основ и фундамента проектирования и новых технологий будет нехватка достоверных данных о материалах.

Основным технологическим изменением, произошедшим за последние годы, является появление недорогих компьютерных рабочих станций и суперкомпьютеров с доступом к современным, недорогим и быстрым средствам хранения данных. Вместе с этим численные методы и программное обеспечение для решения комбинированных задач с граничными и начальными значениями, часто с использованием метода конечных элементов (МКЭ), становятся доступными и надежными. Следовательно, становится возможным моделирование сложных физических процессов при проектировании и производстве при учете данных и информации о реальных материалах и реологических моделях. Параллельно с этими достижениями методы компьютерной визуализации и разработка средств видеoaнимации достигли такого высокого уровня, что моделирование в реальном времени, иногда называемое виртуальной реальностью, становится доступным инструментом для использования при принятии решений в области проектирования и производства.

Одной из важных проблем современной механики твердого тела является внедрение вычислительной континуальной механики поврежденности в инструментарий МКЭ для анализа широкого спектра конструктивных компонентов элементов конструкций, находящихся в условиях ползучести на основе простых данных об одноосной ползучести. Преимущество метода заключается в том, что он обеспечивает прослеживаемость от определяющих уравнений, используемых в реологии процессов деформирования, повреждаемости и разрушения, связанных с фундаментальным поведением микроструктуры.

Таким образом, можно считать, что основы вычислительной механики поврежденности заложены еще в прошлом веке и сегодня ставший уже технологическим подход инкорпорирования сложных определяющих моделей в инструментарий МКЭ продолжает свое развитие и эксплуатируется множеством научных школ во всем мире.

Например, в [2] для оценки структурной целостности конструкции при повышенной температуре в реакторе на расплаве соли тория выполнен расчет повреждений при ползучести. Авторы отмечают, что модель, базирующаяся на теории повреждений при ползучести, и метод численного моделирования до сих пор не были предложены для ключевых материалов данного класса реакторов. В [2] исследуются

характеристики повреждений при ползучести сплава UNS N10003 с использованием закона ползучести Нортона и модели повреждений Качанова — Работнова в условиях ползучести. Во-первых, были приняты экспериментальные данные о ползучести сплава UNS N10003 при 650 °С, чтобы соответствовать материальным константам двух моделей. Во-вторых, было проанализировано и обсуждено поведение сплава UNS N10003 при повреждении при ползучести в одно- и многоосном напряженных состояниях. Результаты показали, что модель повреждения в условиях ползучести Качанова — Работнова больше подходит для сплава UNS N10003, чем модель, основанная на классических уравнениях Бейли — Нортона. Наконец, был разработан метод численного моделирования с помощью пользовательской подпрограммы UMAT и впоследствии проверен с помощью анализа МКЭ. Авторы показывают, что результаты конечно-элементного моделирования соответствовали имеющимся теоретическим оценкам. Авторы наглядно демонстрируют, что разработанный ими подход представляет собой эффективный метод анализа повреждений в конструкциях в режиме ползучести при повышенной температуре в данном типе реакторов.

Принципы разработки пользовательских моделей материалов UMAT обсуждаются в [3]. Авторы подчеркивают важность основополагающих принципов, поскольку не все известные конституциональные модели материалов были смоделированы и подтверждены в качестве встроенных моделей материалов в рамках обычных МКЭ-решателей. Там, где обнаруживаются новые материалы или даже требуются модификации и усовершенствования существующих встроенных моделей материалов, пользователь МКЭ-пакетов обычно прибегает к вычислительному описанию своих версий конституциональных выражений, чтобы отразить такие изменения.

В [4] авторы представили прогнозирующее моделирование развития повреждений при ползучести материалов путем реализации модифицированных определяющих соотношений Робинсона — Русселье и расширенного метода конечных элементов (XFEM) для решения проблемы разрушения при ползучести в задаче о росте трещины. Разработана новая модель, называемая модифицированной моделью Робинсона — Русселье, для прогнозирования поведения повреждений при ползучести с точки зрения микромеханических повреждений вследствие роста пор в условиях ползучести. Интерфейс модели выполняет неявную схему интеграции в подпрограмме UMAT модуля Abaqus/Standard. Метод радиального возврата используется для интегрирования определяющего уравнения вязкопластичности в конечно-элементной формулировке. Численные модели в 2D и 3D элементах реализуются для определения корректности разработанных подпрограмм, а результаты сравниваются с точным решением для верификации. Кроме того, испытания на ползучесть при растяжении на образце из гладких прутков моделируются и испытываются при постоянной температуре 625 °С с различными уровнями напряжений. Результаты показывают, что максимальные значения напряжений, деформации ползучести и повреждения обнаруживаются вблизи центра образца при растяжении, где наблюдается шейкообразование. Кроме того, результаты сравниваются с известными литературными данными, чтобы проверить и оценить разработанную модель и показать разумное соответствие между обоими результатами. Затем проведенный анализ расширяется путем введения данных о развитии трещин в образце на основе метода XFEM. В результате предложена новая модель, получившая название модифицированной модели Робинсона — Русселье, и результаты сравниваются с результатами, найденными в литературе, которые показали эволюцию роста пустот на пути распространения трещины. Таким образом, доказано [4], что модельное решение обладает потенциалом для прогнозирования поведения повреждений при ползучести с точки зрения роста трещин путем образования, роста и слияния пор на линии продолжения дефекта в конструкциях из пластичных материалов.

В [5] выполнены классический анализ ползучести и моделирование повреждений в непрерывном режиме ползучести для сварного соединения паропровода с исходным материалом 0,5Cr0,5Mo0,25V, металлом сварного шва 2,25CrMo и рассмотрена зона термического воздействия. Оценка срока службы при ползучести с использованием классического анализа деформации ползучести, включающего закон линейного накопления повреждений, часто в значительной степени отличается от практики. Поэтому в исследовании [5] выполнены три вида различного анализа, предполагающих классический анализ ползучести (без деградации материала из-за повреждений), непрерывное повреждение при ползучести при одноосном сварном пересечении и непрерывное повреждение при ползучести при многоосном сварном пересечении. Необходимые формулы для анализа континуальных повреждений при ползучести реализованы в пользовательской подпрограмме материалов (UMAT) и связаны с программным обеспечением ANSYS для конечных элементов. Представлено и обсуждено прогнозируемое распределение эквивалентных напряжений, эволюция повреждений и срок службы зарождения трещин на основе упомянутого выше моделирования. Показано, что прогнозируемый срок службы на основе классического анализа ползучести и с учетом многоосного моделирования значительно превышает срок службы, полученный на основе моделирования повреждений при ползучести. Однако прогнозируемые результаты анализа повреждений при ползучести по одно- и многоосным моделям сопоставимы с разницей примерно в 7,5 %.

Таким образом, к настоящему времени сформировалось устойчивое суждение о необходимости инкорпорирования конституциональных моделей материалов, включающих разнообразные меры поврежденности [1–5]. Тем не менее, несмотря на довольно сильную и достаточную изученность проблемы, которой занимается множество научных учреждений, многие вопросы остаются открытыми и требующими несомненного рассмотрения.

Задача моделирования напряженно-деформированного состояния (НДС) в условиях ползучести являлась фундаментальной проблемой нелинейной механики разрушения и остается актуальной в настоящее время [1–27]. Сегодня особый интерес вызывают исследование разрушения материалов и моделирование поврежденности тел с трещинами в условиях ползучести [6–17].

Как правило, разрушение в материале возникает из-за образования и развития множества трещин. Решения задач о телах с острой трещиной в линейной механике разрушения хорошо известны. Однако зачастую в реальных конструкциях трещина имеет конечный радиус закругления вследствие затупления ее вершины из-за пластических деформаций, образующихся при воздействии нагрузки, поэтому все чаще моделируют трещины, имеющие закругленные вершины [12]. Интерес вызывает исследование процессов разрушения в телах с трещинами именно с закругленными вершинами. Например, авторы работы [13] исследовали влияние радиуса закругления вершины выреза на поля НДС.

До настоящего времени предложено множество определяющих соотношений и кинетических уравнений для описания эволюции повреждений как совершенно новых [14–16], так и базирующихся на модели поврежденности Качанова — Работнова [23].

Нелинейная механика разрушения была развита с применением J -интеграла. Впервые введенный Райсом в 1968 году J -интеграл определяется следующим образом [24]:

$$J = \int_{\Gamma} \left(W n_1 - \sigma_{ij} n_k \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) ds. \quad (1)$$

В данном соотношении n — это нормаль к контуру интегрирования Γ , W — плотность энергии деформации, u_i — перемещение.

Известно классическое решение Хатчинсона — Райса — Розенгрена [24; 25], связывающее J -интеграл и поля НДС в вершине трещины при упругопластическом деформировании. Полученное решение описывается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(r, \theta) &= \left(\frac{J}{\alpha I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n), \\ \varepsilon_{ij}(r, \theta) &= \alpha \left(\frac{J}{\alpha I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n), \\ u_i(r, \theta) &= \alpha \left(\frac{J}{\alpha I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} r^{\frac{1}{1+n}} \tilde{u}_{ij}(\theta, n). \end{aligned} \quad (2)$$

Эти асимптотические формулы часто называют ХРР-асимптотиками. Пользуясь аналогией Хоффа, распределения напряжений, деформаций и перемещений для случая установившейся ползучести представляются аналогично, но в терминах C^* и вычисляются согласно следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(r, \theta) &= \left(\frac{C^*}{\alpha I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n), \\ \dot{\varepsilon}_{ij}(r, \theta) &= \alpha \left(\frac{C^*}{\alpha I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n), \\ \dot{u}_i(r, \theta) &= \alpha \left(\frac{C^*}{\alpha I_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} r^{\frac{1}{1+n}} \tilde{u}_{ij}(\theta, n). \end{aligned} \quad (3)$$

Известно, что C^* -интеграл определяется как контурный интеграл по кривой C , охватывающей вершину трещины, и может быть записан в следующей форме:

$$C^* = \int_C \left(W^* dx_2 - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_1} ds \right), \quad (4)$$

где

$$W^* = \int \sigma_{ij} d\dot{\varepsilon}_{ij}. \quad (5)$$

В формуле (3) в соответствии со структурой решения напряжения при $r \rightarrow 0$ будут стремиться к бесконечности, следовательно, отсутствует возможность исследования эффекта закругления вершин трещины. К тому же ХРР-решение не дает возможности учесть неоднородность материала, варианты геометрии и условия нагружения тел с трещиной.

В данном исследовании показано, что на определенном расстоянии независимо от формы вершины трещины выполняется ХРР-решение. Так актуальной и центральной становится задача извлечения

асимптотического поведения напряжений, деформаций и сплошности вблизи окрестности вершины трещины в материале с введенными мерами поврежденности. Поскольку процесс накопления повреждений и эволюции НДС являются созависимыми, возникает вопрос возможности из численного решения извлечь асимптотическое поведение механических параметров задачи и является ли возможным отыскание асимптотического решения из имеющегося результата, полученного МКЭ-пакетом. Поэтому в данной статье ставится анализ радиального и углового поведения полей напряжений, деформаций и сплошности вблизи трещины в среде с учетом явления накопления повреждений.

Целью настоящего исследования является оценка влияния процесса накопления повреждений на асимптотическое поведение механических характеристик у вершины трещины средствами метода конечных элементов. Для анализа асимптотики полей σ_{ij} и ε_{ij} в вычислительную процедуру метода конечных элементов были с помощью UMAT [28; 29] внедрены конституциональные модели материалов, учитывающие процесс накопления повреждений.

2. Моделирование полей, ассоциированных с вершиной трещины в режиме ползучести

В пакете моделирования SIMULIA Abaqus, осуществляющем расчеты методом конечных элементов, проведено моделирование плоской пластины с центральной трещиной в условиях ползучести. Пластина имеет размеры 100×100 мм, длина трещины равна 10 мм. В первой серии расчетов трещина моделируется острой. Пластина находится в условиях одноосного растяжения.

Для моделирования ползучести избран степенной закон Бейли – Нортон, имеющий следующий вид:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} S_{ij}, \quad \sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}, \quad (6)$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}$ — компоненты скорости деформации ползучести, σ_{ij} — компоненты напряжений Коши, σ_e — интенсивность напряжения, n, B — константы материала; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij} / 3$ — компоненты девиатора напряжений, где δ_{ij} — символ Кронекера. Это определяющее соотношение было внедрено в расчет с помощью пользовательской подпрограммы UMAT.

Материальные константы n, B в соотношении (6) — это параметры материала, в общем случае зависящие от температуры. В качестве материала пластины выбрана сталь, имеющая следующие упругие модули: модуль Юнга $E = 210000$ Н/мм², коэффициент Пуассона ν равен 0.3. Проведен ряд расчетов с различными материальными константами B и n . Принятые значения констант и условия экспериментальных исследований приведены в табл. 1.

Таблица 1

Условия проведения численных расчетов

Table 1

Conditions for making settlement calculations

№ модели	Модуль Юнга	Коэффициент Пуассона	$B, (Н/мм^2)^{-n}(ч)^{-1}$	n	Нагрузка $P, Н/мм^2$
1.1	210000	0.3	$1 \cdot 10^{-10}$	2	20
1.2	210000	0.3	$1 \cdot 10^{-12}$	3	20
1.3	210000	0.3	$1 \cdot 10^{-15}$	4	20
1.4	210000	0.3	$1 \cdot 10^{-16}$	5	20

Обычно показатель ползучести n принимает значения от 3 до 8 для металлов и сплавов. Для отдельных современных высокопрочных сплавов достигает 18 [15; 22; 23]. Изображение модели пластины со схемой приложенной нагрузки представлено на рис. 1.

Сетка построена с использованием сингулярных конечных элементов в окрестности вершины трещины. Концентрические окружности поделены на 72 сектора, таким образом, раствор секторального элемента равен 5° . Тип элементов сетки был избран CPS4. Полученная конечно-элементная сетка представлена на рис. 2.

В течение 35 000 часов к пластине с острой центральной трещиной была приложена одноосная растягивающая нагрузка. В результате расчета получены поля напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины, находящейся в условиях ползучести.

Распределение компоненты тензора напряжений σ_{22} приведено вдоль радиальной траектории, построенной под углом $\theta = 0$, показанной на рис. 3, и построено в двойных логарифмических координатах.

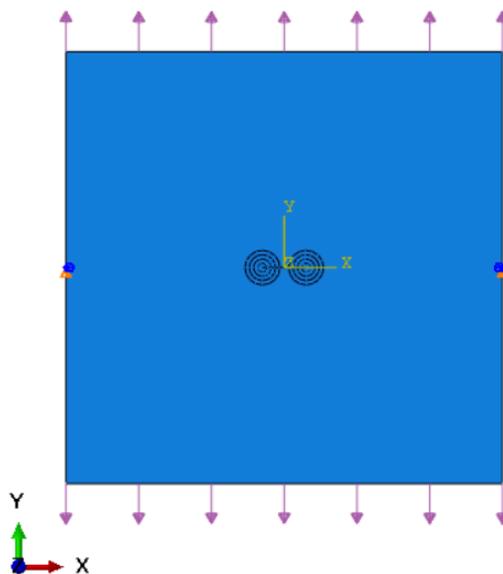


Рис. 1. Изображение модели со схемой приложенной нагрузки
Fig. 1. Scheme of the model geometry and applied loads

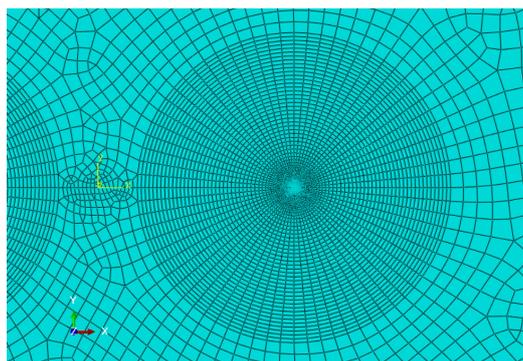


Рис. 2. Конечно-элементная сетка в модели
Fig. 2. Typical finite element mesh of the model

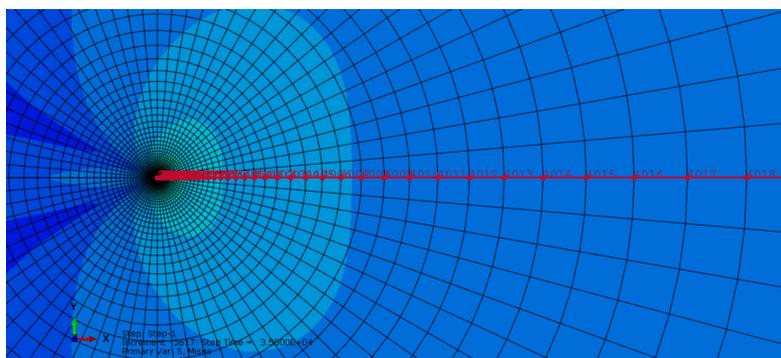


Рис. 3. Путь, вдоль которого строятся радиальные распределения напряжений
Fig. 3. The path along which stress radial distributions are constructed

На рис. 4 изображены итоги вычислений в системе SIMULIA Abaqus для четырех различных моделей с острой центральной трещиной со свойствами в соответствии с табл. 1.

Поля компонент тензора напряжений σ_{22} приведены в различные моменты времени. Общее время моделирования равно 35 000 часов. Различными оттенками отмечены радиальные распределения поля напряжений в разные моменты времени.

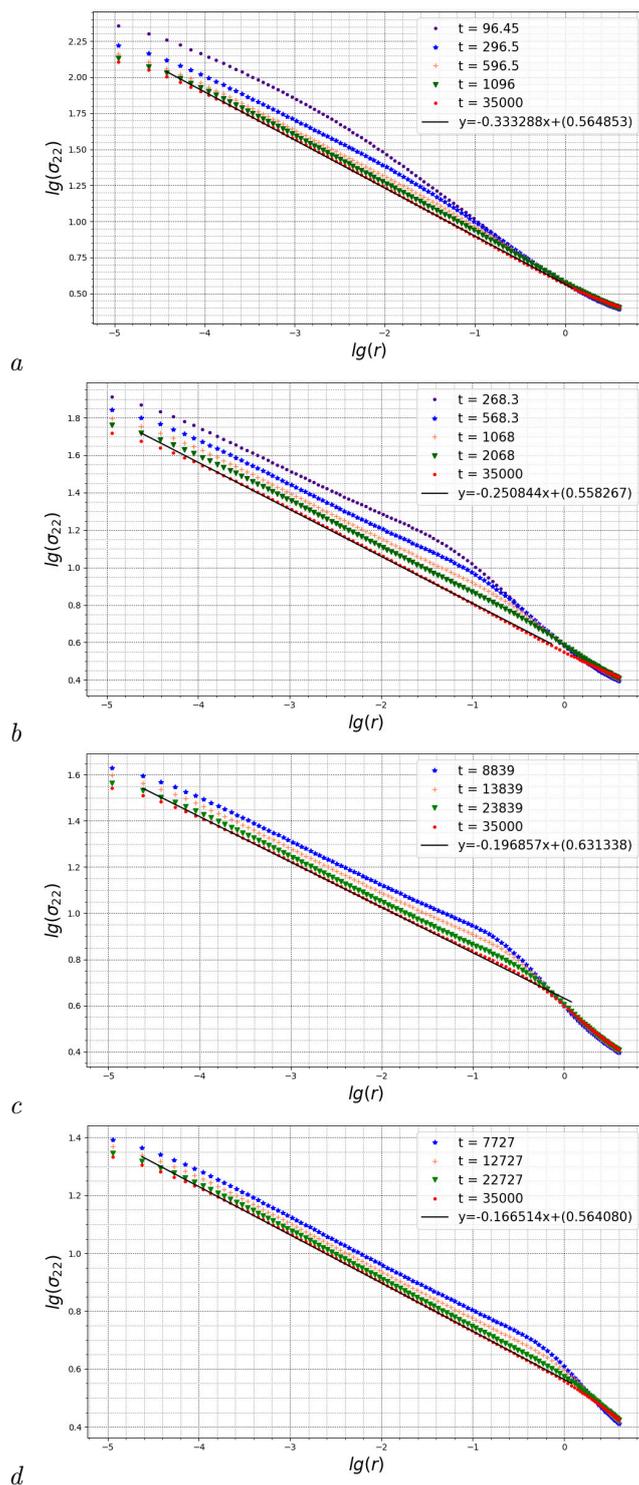


Рис. 4. Результаты конечно-элементного анализа: компоненты тензора напряжений σ_{22} в условиях ползучести с течением времени вдоль радиальной траектории ($\theta = 0$). Результаты для: *a* — модели 1.1, *b* — модели 1.2, *c* — модели 1.3, *d* — модели 1.4

Fig. 4. Results of FEM: the stress tensor components σ_{22} under creep conditions along the radial trajectory ($\theta = 0$). Results for: *a* — model 1.1, *b* — model 1.2, *c* — model 1.3, *d* — model 1.4

Таким образом, для модели с острой центральной трещиной получено численное решение, и распределения напряжений в логарифмических координатах приведены на рис. 4.

Для каждого графика на рис. 4 построена прямая черная линия, аппроксимирующая значения компоненты тензора напряжений σ_{22} в последний момент времени в зоне ползучести. Полученные значения коэффициента наклона этих прямых соответствуют значениям, полученным из соотношения $k = \frac{1}{n+1}$.

Линия, аппроксимирующая значения компоненты тензора напряжений σ_{22} в зоне упругости, имеет при этом коэффициент наклона равный $k = \frac{1}{2}$, что также соответствует аналитическому решению. Это показывает, что асимптотическое решение ХРР присутствует в расчетах для острой трещины.

Многочисленные исследования показали, что расчеты напряженно-деформированного состояния в условиях ползучести необходимо проводить в образцах с трещинами, имеющими закругленные вершины [12; 13; 27]. Ввиду этого следующая серия вычислений проведена для трещин с закругленными концами. Трещина моделируется в виде разреза с закругленными вершинами, радиус закругления составляет 0.001 мм. В настоящем исследовании проведен ряд расчетов с различными материальными константами B и n . Принятые значения констант и условия экспериментальных исследований приведены в табл. 2.

Таблица 2

Условия проведения численных расчетов

Table 2

Conditions for making settlement calculations

№ модели	Модуль Юнга	Коэффициент Пуассона	$B, (Н/мм^2)^{-n}(ч)^{-1}$	n	Нагрузка $P, Н/мм^2$
2.1	210000	0.3	$1 \cdot 10^{-10}$	2	20
2.2	210000	0.3	$1 \cdot 10^{-12}$	3	20
2.3	210000	0.3	$1 \cdot 10^{-15}$	4	20

Сетка в окрестности вершины трещины построена с использованием сингулярных конечных элементов. Концентрические окружности поделены на три области: перед вершиной дуга окружности величиной 180° разбита на 36 секторов, таким образом, раствор секторального элемента равен 5° , две другие части поделены на 17 секторов. Тип элементов сетки был избран CPS4. Полученная конечно-элементная сетка представлена на рис. 5.

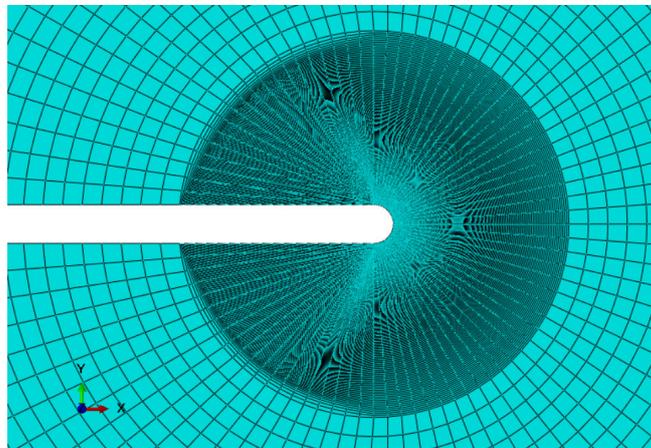


Рис. 5. Конечно-элементная сетка в модели с закругленной трещиной
 Fig. 5. Typical finite element mesh of the model

В численных экспериментах в течение 35 000 часов к пластине с закругленной центральной трещиной прикладывалась одноосная растягивающая нагрузка. В результате расчета были получены поля напряжений, упругих деформаций и деформаций ползучести в окрестности вершины трещины, находящейся в условиях ползучести.

На рис. 7 изображены поля компонент тензора напряжений σ_{22} в логарифмических координатах с течением времени вдоль траектории, показанной на рис. 6. Различными оттенками отмечены радиальные распределения поля напряжений в разные моменты времени.

Для каждого графика построена черная линия, аппроксимирующая значения компоненты тензора напряжений σ_{22} в последний момент времени в зоне ползучести. Полученные значения коэффициента наклона этих прямых находятся в согласии со значениями, соответствующим формуле $k = \frac{1}{n+1}$. Можно отметить, что в области, близкой к вершине закругленной трещины, асимптотика меняется, в отличие от предыдущих расчетов с острой трещиной. Это связано с тем, что такая конфигурация трещины приводит к изменению сингулярности вблизи трещины.

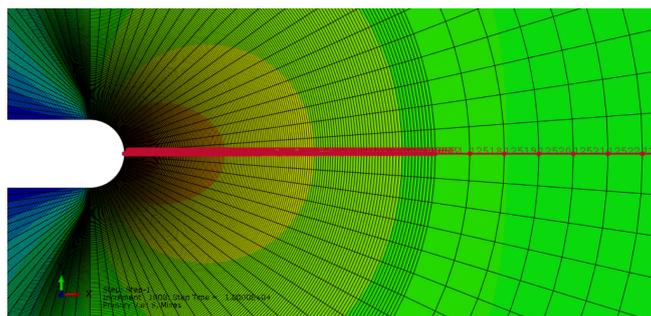


Рис. 6. Путь, вдоль которого строятся радиальные распределения напряжений
 Fig. 6. The path along which stress radial distributions are constructed

Линия, аппроксимирующая значения компоненты тензора напряжений σ_{22} в зоне упругости, имеет при этом коэффициент наклона равный $k = \frac{1}{2}$, что также соответствует аналитическому решению.

По графикам на рис. 7 можно определить границы области ползучести и зоны упругости. С течением времени область, находящаяся в условиях ползучести, увеличивается, а область, находящаяся в режиме упругости, уменьшается. Таким образом, по результатам расчета модели показаны промежутки, расстояния, на которых работает асимптотика ХРР. Определив диапазон значений расстояний, на которых работает решение ХРР, переходим к исследованию влияния на асимптотику процесса накопления поврежденности.

3. Анализ влияния прогрессивного накопления микрповреждений у кончика трещины на асимптотику

Задачей последующего исследования выступает анализ влияния развитой эволюции поврежденности вблизи вершины закругленной трещины в предположении реализации плоского напряженного состояния для степенного закона установившейся ползучести и кинетического уравнения Качанова — Работнова на асимптотику напряжений.

Степенной закон ползучести, следуя классической процедуре [20], был дополнен кинетическим уравнением накопления поврежденности Качанова — Работнова и математическая модель представляется в следующем виде:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2}B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{S_{ij}}{\psi}, \quad \dot{\psi} = -A \left(\frac{\sigma_{eqv}}{\psi} \right)^m, \quad (7)$$

где ψ — параметр сплошности Качанова [18]; σ_{kk} — гидростатическое напряжение, σ_1 — максимальное главное напряжение, $\sigma_{eqv} = \alpha\sigma_e + \beta\sigma_1 + (1 - \alpha - \beta)\sigma_{kk}$ — эквивалентное напряжение, а константы α и β находятся экспериментально. Неповрежденному, целостному материалу соответствует значение параметра $\psi = 1$, а $\psi = 0$ означает, что материал полностью исчерпал несущую способность. Вместо параметра сплошности часто используется параметр поврежденности Работнова ω [20], связанный с параметром сплошности выражением $\omega = 1 - \psi$.

Для конечно-элементного расчета необходимо задать постоянные материала A и m , фигурирующие в эволюционном уравнении 7. Обычно m выбирают таким образом, чтобы выполнялось соотношение $m \approx 0.7n$, полученное эмпирическим путем [22].

В ходе исследования проведен ряд расчетов с различными материальными константами A, B, n и m . Принятые значения констант и условия экспериментальных исследований приведены в табл. 3.

Постоянные материала в эволюционном уравнении и определяющем соотношении (7) выбирались на основании экспериментальных данных, описанных в работах [15; 23], где приведены значения материальных констант для большого ряда металлов и сплавов. С использованием подпрограммы, являющейся процедурой UMAT комплекса SIMULIA Abaqus, конституциональные соотношения степенного закона ползучести и эволюционное уравнение (7) были внесены в вычислительную схему метода конечных элементов пакета Abaqus/Standart. Это дало возможность найти распределения параметра сплошности и механических полей.

Проведена серия расчетов одноосного растяжения пластины с центральной трещиной с закругленными концами в условиях ползучести с учетом процессов накопления поврежденности. В результате расчета были получены поля напряжений, деформаций и сплошности.

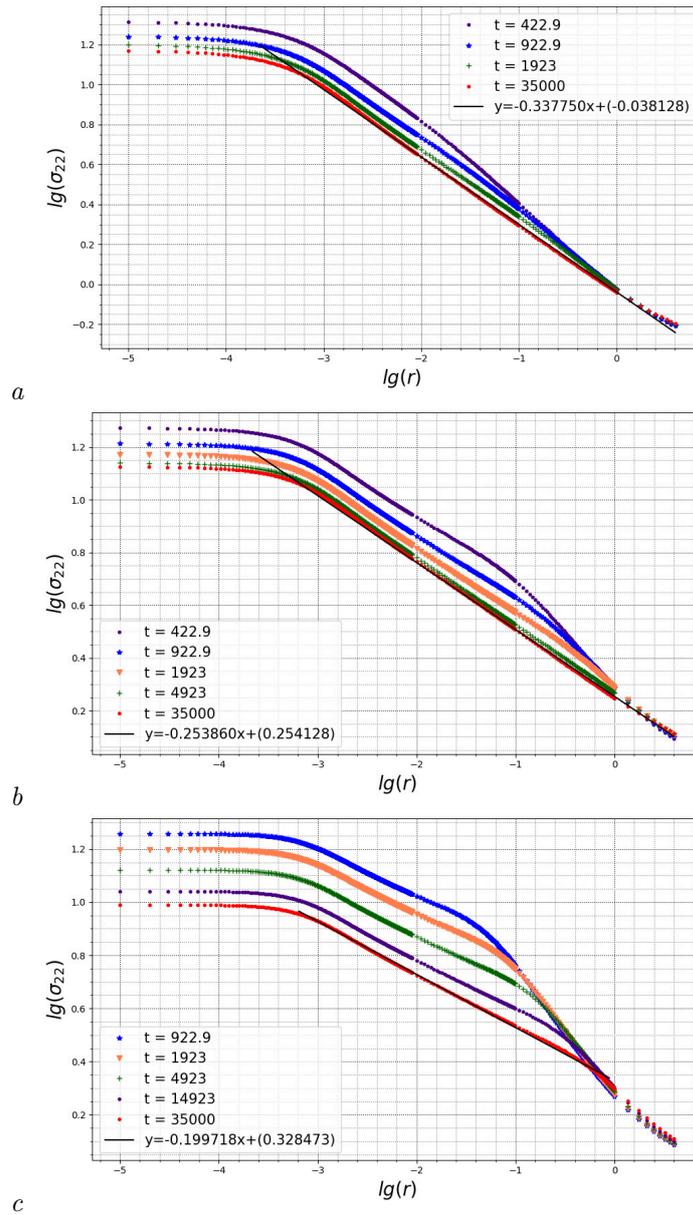


Рис. 7. Результаты конечно-элементного анализа: компоненты тензора напряжений σ_{22} в условиях ползучести с течением времени. Результаты приведены для: *a* — модели 2.1, *b* — модели 2.2, *c* — модели 2.3
 Fig. 7. Results of FEM: the stress tensor components σ_{22} under creep conditions. Results for: *a* — model 2.1, *b* — model 2.2, *c* — model 2.3

Таблица 3

Условия проведения численных расчетов

Table 3

Conditions for making settlement calculations

№ модели	Модуль Юнга	Коэффициент Пуассона	$B, (H/мм^2)^{-n}(ч)^{-1}$	n	$A, (H/мм^2)^{-n}(ч)^{-1}$	m	Нагрузка $P, H/мм^2$
3.1	210000	0.3	$1 \cdot 10^{-13}$	3	$1 \cdot 10^{-1}$	2.5	10
3.2	210000	0.3	$1 \cdot 10^{-16}$	4	$1 \cdot 10^{-1}$	2.8	10
3.3	210000	0.3	$1 \cdot 10^{-19}$	5	$1 \cdot 10^{-1}$	3.5	10

На рис. 8 изображены поля компоненты тензора напряжений σ_{22} в двойных логарифмических координатах с течением времени вдоль траектории, показанной на рис. 6 и построенной по прямой под

углом $\theta = 0$ к оси x . Различными оттенками отмечены радиальные распределения поля напряжений в различные моменты времени.

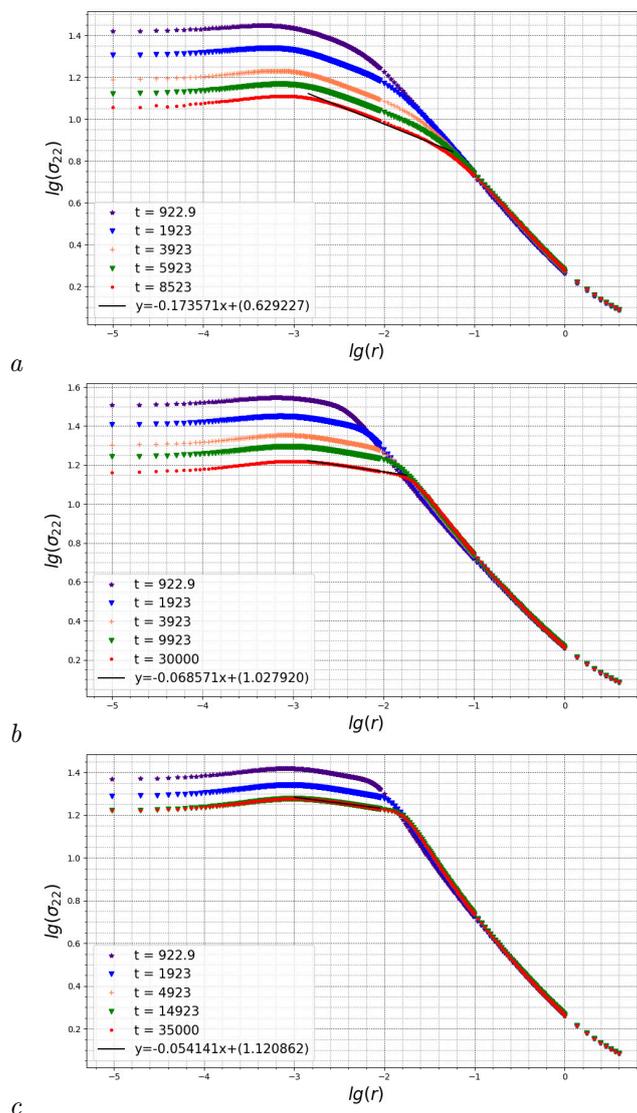


Рис. 8. Результаты конечно-элементного анализа: компоненты тензора напряжений σ_{22} в условиях ползучести при действии процесса накопления поврежденности с течением времени. Результаты для:

a — модели 3.1, b — модели 3.2, c — модели 3.3

Fig. 8. Results of FEM: the stress tensor components σ_{22} under creep condition under the action of damage accumulation over time. Results for: a — model 3.1, b — model 3.2, c — model 3.3

Для каждого графика построена регрессионная прямая, отмеченная на графиках черной линией, аппроксимирующая значения компоненты тензора напряжений σ_{22} в последний рассматриваемый момент времени в зоне ползучести. Полученные значения коэффициента наклона этой прямой существенно отличаются от значений, соответствующих формуле $k = \frac{1}{n+1}$, а значит и асимптотике решения ХРР. Здесь также можно отметить, что в области, близкой к вершине закругленной трещины, асимптотика не наблюдается, в отличие от расчетов с острой трещиной. Результаты на рис. 8 отличаются от распределений, полученных на расчетах при действии ползучести без учета накопления поврежденности, как на рис. 7. По графикам на рис. 8 можно заметить, каким образом процесс накопления поврежденности изменяет асимптотику напряжений в окрестности вершины трещины.

На рис. 9 показано распределения сплошности с течением времени: a – c — состояние в 922.9, 3 923, 7 923 часа, d – f — состояние в 222.9, 9 923, 3 5000 часов.

На рис. 10 представлены картины распределения сплошности вдоль траектории, показанной на рис. 6, с течением времени. Различными оттенками отмечены радиальные распределения сплошности в разные моменты времени.

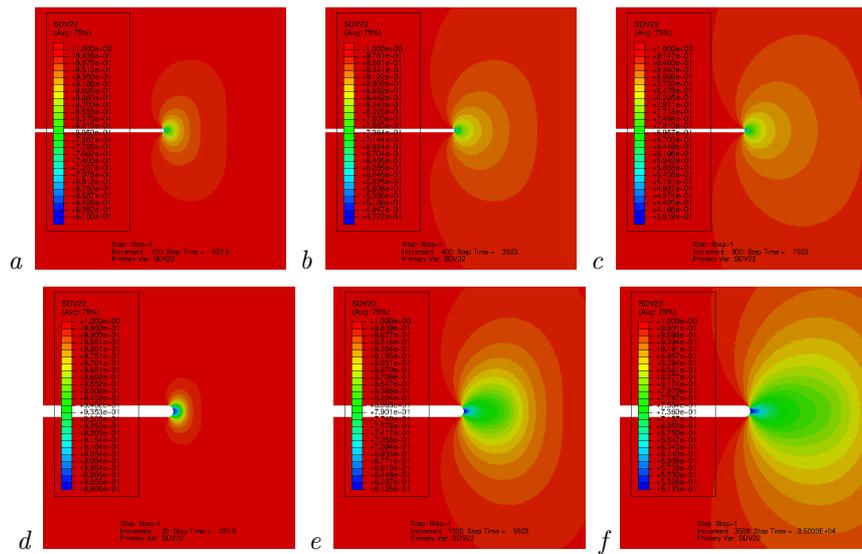


Рис. 9. Распределение сплошности с течением времени в $a-c$ модели 3.1, $d-f$ в модели 3.3
 Fig. 9. Distribution of continuity over time $a-c$ for model 3.1, $d-f$ for model 3.3

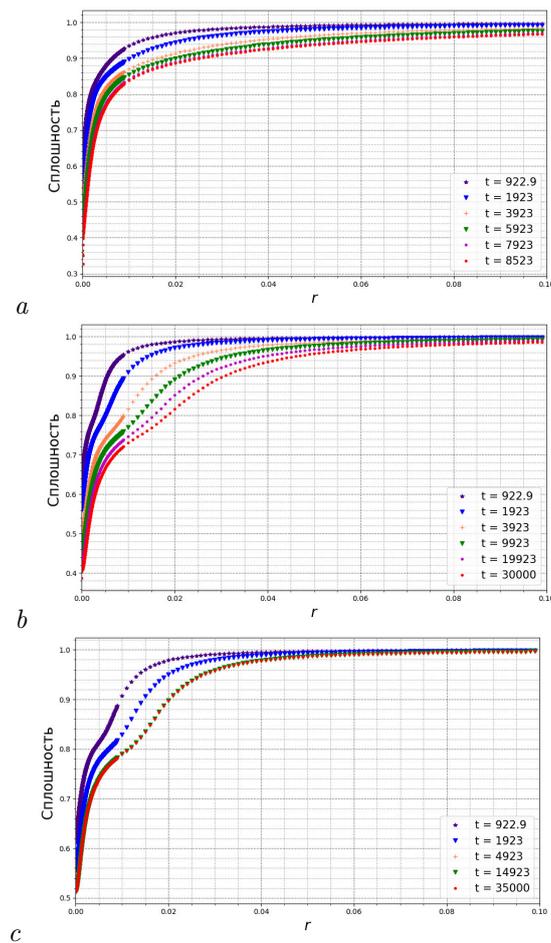


Рис. 10. Результаты конечно-элементного анализа: распределение сплошности в условиях ползучести с учетом накопления повреждений с течением времени. Результаты для: a — модели 3.1, b — модели 3.2, c — модели 3.3

Fig. 10. Results of FEM: distribution of continuity under creep conditions, taking into account the accumulation of damage over time. Results for: a — model 3.1, b — model 3.2, c — model 3.3

Из рис. 9, 10 можно заметить, каким образом для разных значений материальных констант меняется поле сплошности.

Заключение

В ходе исследования выполнено конечно-элементное моделирование одноосного растяжения двумерной пластины с центральной трещиной, находящейся в условиях ползучести с учетом поврежденности в связанной постановке. Моделирование выполнено в комплексе SIMULIA Abaqus с применением пользовательской процедуры UMAT. Степенной закон ползучести с помощью пользовательской процедуры был дополнен кинетическим уравнением накопления поврежденности Качанова — Работнова в связанной постановке. В результате моделирования получены распределения напряжений, деформаций и сплошности в условиях ползучести с учетом накопления поврежденности с течением времени. Приведены асимптотики распределения компоненты тензора напряжений σ_{22} для моделей как с острой трещиной, так и с вырезом с закругленными вершинами. Моделирование выполнено для различных значений материальных констант. Приведено радиальное распределение сплошности вдоль траектории, построенной под углом $\theta = 0$ к горизонтальной оси x . Показано, что асимптотика в упругой области и в области развитой ползучести в первых двух сериях расчетов соответствует аналитическим решениям, однако в случае учета накопления поврежденности эта асимптотика не наблюдается.

Литература

- [1] Hayhurst D.R. Materials Data Bases and Mechanisms-Based Constitutive Equations for Use in Design // In: Altenbach, H., Skrzypek, J.J. (Eds.) Creep and Damage in Materials and Structures. International Centre for Mechanical Sciences, vol 399. Vienna: Springer-Verlag, 1999, pp. 167–208. DOI: http://doi.org/10.1007/978-3-7091-2506-9_4.
- [2] Wang X.-Y., Zhang X.-C., Zhu S.-F. Creep damage characterization of UNS N10003 alloys based on a numerical simulation using the Norton creep law and Kachanov-Rabotnov creep damage model // Nuclear Science and Techniques. 2019. Vol. 30. Article number 65. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s41365-019-0586-2>.
- [3] Okereke M., Keates S. Material Response: Constitutive Models and Their Implementation. // In: Finite Element Applications. Springer Tracts in Mechanical Engineering. Cham: Springer, 2018, pp. 363–436. DOI: http://doi.org/10.1007/978-3-319-67125-3_10.
- [4] Ahmad M.I.M, Akbar M., Abdullah N.A. Development of constitutive creep damage-based modified Robinson-Rousselier (MRR) model with XFEM for void-crack relation in ductile materials // Mechanics of Time-Dependent Materials. 2022. DOI: <http://doi.org/10.1007/s11043-022-09540-5>.
- [5] Hosseini-Toudeshky H., Jannnesari M. An investigation on creep life assessment of welded steam pipeline intersection using classical and progressive damage analyses // Welding in the World, 2022, Vol. 66, pp. 1653–1664. DOI: <http://doi.org/10.1007/s40194-022-01324-2>.
- [6] Степанова Л.В. Компьютерное моделирование процессов накопления повреждений в твердых телах с трещинами с помощью пользовательской процедуры UMAT вычислительного комплекса Simulia Abaqus // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Сер.: Механика. 2018. №. 3. С. 71–86. DOI: <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.3.08>. EDN: <https://www.elibrary.ru/yljexz>.
- [7] Turkova V.A., Stepanova L.V. Evaluation of damage accumulation zone in the vicinity of the crack tip: FEM analysis via UMAT procedure // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 1096. P. 012157. DOI: <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1096/1/012157>.
- [8] Шлянников В.Н., Туманов А.В. Силовая и деформационная модели поврежденности и разрушения при ползучести // Физическая мезомеханика. 2018. Т. 21, № 3. С. 70–85. DOI: <http://doi.org/10.24411/1683-805X-2018-13008>. EDN: <https://www.elibrary.ru/xrgsgd>.
- [9] Shlyannikov V.N. Crack tip fields and fracture resistance parameters based on strain gradient plasticity // International Journal of Solids and Structures. 2021. Vols. 208–209, pp. 63–82. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.10.015>.
- [10] Шлянников В.Н. Решение задач нелинейного деформирования и разрушения материалов при сложном напряженном состоянии // Физическая мезомеханика. 2012. Т. 15, № 1. С. 57–67. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17428838>. EDN: <https://www.elibrary.ru/orkhbf>.

- [11] Shlyannikov V. N., Tumanov A. V. Creep damage and stress intensity factor assessment for plane multi-axial and three-dimensional problems // International Journal of Solids and Structures. 2018. Vol. 150. Pp. 166–183. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.06.009>. EDN: <https://www.elibrary.ru/xwikmx>.
- [12] McMeeking R.M. Finite deformation analysis of crack-tip opening in elastic-plastic materials and implications for fracture // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1977. Vol. 25, № 5. Pp. 357–381. DOI: [http://doi.org/10.1016/0022-5096\(77\)90003-5](http://doi.org/10.1016/0022-5096(77)90003-5).
- [13] Shlyannikov V.N., Kislova S.Y. Parameters of deformation mixed modes with account of crack tip curvature // Strength of Materials. 2010. Vol. 42, № 6. Pp. 660–674. DOI: <http://doi.org/10.1007/s11223-010-9254-9>.
- [14] Meng Li., Chen W., Yan Y., Kitamura T., Feng. M. Modelling of creep and plasticity deformation considering creep damage and kinematic hardening // Engineering Fracture Mechanics. 2019. Vol. 218. P. 106582. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2019.106582>.
- [15] Meng Q., Zhenqing H. Creep damage models and their applications for crack growth analysis in pipes: A review // Engineering Fracture Mechanics. 2019. Vol. 205. Pp. 547–576. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.09.055>.
- [16] Murakami S. Continuum Damage Mechanics. A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture. Springer Dordrecht, 2012. 423 p. Available at: <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2666-6>.
- [17] Wen J.F., Tu S.T., Gao X.L., Reddy J.N. Simulations of creep crack growth in 316 stainless steel using a novel creep-damage model // Engineering Fracture Mechanics. 2012. Vol. 98. Pp. 169–184. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2012.12.014>.
- [18] Kachanov L.M. Force and deformation models of damage and fracture during creep // Physical Mesomechanics. 2018. Vol. 21, № 3. Pp. 70–85.
- [19] Качанов Л.М. Теория ползучести. Москва: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1960. 455 с. URL: <https://lib-bkm.ru/13835>.
- [20] Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. Москва: Наука, 2014. 752 с. URL: <https://lib-bkm.ru/13795>.
- [21] Локощенко А.М., Фомин Л.В., Тербуад В.В., Басалов Ю.Г., Агабабян В.С. Ползучесть и длительная прочность металлов при нестационарных сложных напряженных состояниях (обзор) // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.: Физико-математические науки. 2020. Т. 24, № 2. С. 275–318. DOI: <http://doi.org/10.14498/vsgtu1765>. EDN: <https://www.elibrary.ru/oqccvc>.
- [22] Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. Москва: Мир. 1986. 360 с.
- [23] Riedel H. Fracture at High Temperatures. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1987. 418 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-642-82961-1>.
- [24] Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // Journal of The Mechanics and Physics of Solids. 1968. Vol. 16, № 1. Pp. 1–12. URL: http://esag.harvard.edu/rice/016_RiceRosengren_CrackSing_JMPS68.pdf.
- [25] Hutchinson J.W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material // Journal of The Mechanics and Physics of Solids. 1968. Vol. 16, № 1. Pp. 13–31. URL: <https://groups.seas.harvard.edu/hutchinson/papers/312.pdf>.
- [26] Hutchinson J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip // Journal of The Mechanics and Physics of Solids. 1968. Vol. 16, № 5. Pp. 337–342. URL: <https://groups.seas.harvard.edu/hutchinson/papers/313.pdf>.
- [27] Naumenko K., Altenbach H. Modelling of Creep for Structural Analysis. Berlin, Heidelberg: Springer. 2007. 220 p. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-70839-1_1.
- [28] USER MATERIAL IN ABAQUS. URL: <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAESUBRefMap/simasub-c-umat.htm>.
- [29] Lecture 6. Writing a UMAT or VUMAT. URL: <https://imechanica.org/files/Writing%20a%20UMAT.pdf>.



D.V. Chapliy

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: Dch300189@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9510-3659>

L.V. Stepanova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: Stepanovalv2015@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

O.N. Belova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: BelovaONik@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4492-223X>

EFFECT OF DAMAGE ACCUMULATION ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF STRESSES AHEAD THE CRACK TIP²

ABSTRACT

The subject of this study is the analysis of mechanical fields associated with a crack tip under creep conditions, taking into account the phenomenon of damage accumulation. The objective of the study is to perform finite element modeling, using the SIMULIA Abaqus software package, of uniaxial tension of a plate with a central horizontal crack under creep conditions, taking into account damage accumulation. For numerical simulation of creep, the Bailey-Norton power law is used. The power law of creep with the help of the user procedure UMAT (User Material) of the SIMULIA Abaqus package was supplemented with the Kachanov-Rabotnov kinetic equation of damage accumulation in a related formulation. In the calculation scheme of finite elements, the crack tip was modeled as a mathematical notch and as a notch with a finite radius of curvature. As a result of the calculations, the distributions of stresses, strains, and continuity under creep conditions were obtained, taking into account the accumulation of damage over time. Radial distributions of continuity, stresses, and strains are plotted over time at various distances from the crack tip. The subject of the study was the consideration of the asymptotic of the stress distribution. As a result of the study, it is shown that in the elastic region the asymptotic corresponds to the distribution under the elastic regime, and in the creep zone the asymptotics of Hutchinson, Rice and Rosengren (HRR-solution) is satisfied for different exponents n of the power law of creep.

A comparison is made of the radial stress distributions in modeling without taking into account damage and in the case of taking into account damage accumulation. It is shown that the presence of damage significantly changes the asymptotics of the stress field in the vicinity of the crack tip.

Key words: user procedure UMAT; SIMULIA Abaqus; creep; damage; continuity; asymptotic.

Citation. Chapliy D.V., Stepanova L.V., Belova O.N. Effect of damage accumulation on the asymptotic behavior of stresses ahead the crack tip. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia serii* = *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 47–63. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-1-47-63>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Chapliy D.V., 2023

Dmitriy V. Chapliy — postgraduate student of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

© Stepanova L.V., 2023

Larisa V. Stepanova — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, head of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

© Belova O.N., 2023

Oksana N. Belova — assistant lecturer of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

²The research is supported by the Russian Scientific Fund, project № 21-11-00346.

References

- [1] Hayhurst D.R. Materials Data Bases and Mechanisms-Based Constitutive Equations for Use in Design. In: Altenbach, H., Skrzypek, J.J. (Eds.) Creep and Damage in Materials and Structures. International Centre for Mechanical Sciences, vol 399. Vienna: Springer-Verlag, 1999, pp. 167–208. DOI: http://doi.org/10.1007/978-3-7091-2506-9_4.
- [2] Wang X.-Y., Zhang X.-C., Zhu S.-F. Creep damage characterization of UNS N10003 alloys based on a numerical simulation using the Norton creep law and Kachanov-Rabotnov creep damage model. *Nuclear Science and Techniques*, 2019, vol. 30. Article number 65. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s41365-019-0586-2>.
- [3] Okereke M., Keates S. Material Response: Constitutive Models and Their Implementation. In: Finite Element Applications. Springer Tracts in Mechanical Engineering. Cham: Springer, 2018, pp. 363–436. DOI: http://doi.org/10.1007/978-3-319-67125-3_10.
- [4] Ahmad M.I.M, Akbar M., Abdullah N.A. Development of constitutive creep damage-based modified Robinson-Rousselier (MRR) model with XFEM for void-crack relation in ductile materials. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 2022. DOI: <http://doi.org/10.1007/s11043-022-09540-5>.
- [5] Hosseini-Toudeshky H., Jannnesari M. An investigation on creep life assessment of welded steam pipeline intersection using classical and progressive damage analyses. *Welding in the World*, 2022, vol. 66, pp. 1653–1664. DOI: <http://doi.org/10.1007/s40194-022-01324-2>.
- [6] Stepanova L.V. Computational simulation of the damage accumulation processes in cracked solids by the user procedure UMAT of SIMULIA Abaqus. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 3, pp. 71–86. DOI: <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.3.08>. EDN: <https://www.elibrary.ru/yljexz>. (In Russ.)
- [7] Turkova V.A., Stepanova L.V. Evaluation of damage accumulation zone in the vicinity of the crack tip: FEM analysis via UMAT procedure. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 1096, p. 012157. DOI: <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1096/1/012157>.
- [8] Shlyannikov V.N., Tumanov A.V. Force and deformation models of damage and fracture during creep. *Physical Mesomechanics*, 2018, vol. 21, № 3, pp. 70–85. DOI: <https://doi.org/10.24411/1683-805X-2018-13008>. EDN: <https://www.elibrary.ru/xrgsgd>. (In Russ.)
- [9] Shlyannikov V.N. Crack tip fields and fracture resistance parameters based on strain gradient plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2021, vols. 208–209, pp. 63–82. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.10.015>.
- [10] Shlyannikov V.N. Solution of nonlinear strain and fracture problems of materials in complex stress states. *Physical Mesomechanics*, 2012, vol. 15, no. 1, pp. 57–67. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17428838>. EDN: <https://www.elibrary.ru/orkhbf>. (In Russ.)
- [11] Shlyannikov V.N., Tumanov A.V. Creep damage and stress intensity factor assessment for plane multi-axial and three-dimensional problems. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, vol. 150, pp. 166–183. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.06.009>. EDN: <https://www.elibrary.ru/xwikmx>.
- [12] McMeeking R.M. Finite deformation analysis of crack-tip opening in elastic-plastic materials and implications for fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1977, vol. 25, № 5, pp. 357–381. DOI: [http://doi.org/10.1016/0022-5096\(77\)90003-5](http://doi.org/10.1016/0022-5096(77)90003-5).
- [13] Shlyannikov V.N., Kislova S.Y. Parameters of deformation mixed modes with account of crack tip curvature. *Strength of Materials*, 2010, vol. 42, № 6, pp. 660–674. DOI: <http://doi.org/10.1007/s11223-010-9254-9>.
- [14] Meng Li., Chen W., Yan Y., Kitamura T., Feng. M. Modelling of creep and plasticity deformation considering creep damage and kinematic hardening. *Engineering Fracture Mechanics*, 2019, vol. 218, p. 106582. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2019.106582>.
- [15] Meng Q., Zhenqing H. Creep damage models and their applications for crack growth analysis in pipes: A review. *Engineering Fracture Mechanics*, 2019, vol. 205, pp. 547–576. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.09.055>.
- [16] Murakami S. Continuum Damage Mechanics. A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture. Springer Dordrecht, 2012. 423 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2666-6>.
- [17] Wen J.F., Tu S.T., Gao X.L., Reddy J.N. Simulations of creep crack growth in 316 stainless steel using a novel creep-damage model. *Engineering Fracture Mechanics*, 2012, vol. 98, pp. 169–184. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2012.12.014>.
- [18] Kachanov L.M. Force and deformation models of damage and fracture during creep. *Physical Mesomechanics*, 2018, vol. 21, № 3, pp. 70–85.

- [19] Kachanov L.M. Creep theory. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury, 1960, 455 p. Available at: <https://lib-bkm.ru/13835>. (In Russ.)
- [20] Rabotnov Yu.N. Creep problems in structural members. Moscow: Nauka, 2014, 752 p. Available at: <https://lib-bkm.ru/13795>. (In Russ.)
- [21] Lokoshchenko A.V., Fomin L.V., Teraud W.V., Basalov Y.G., Agababyan V.S. Creep and long-term strength of metals under unsteady complex stress states (review). *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2020, vol. 24, №2, pp. 275–318. DOI: <http://doi.org/10.14498/vsgtu1765>. EDN: <https://www.elibrary.ru/oqcev>. (In Russ.)
- [22] Boyle J.T, Spence J. Stress analysis for creep. Moscow: Mir, 1986, 360 p. (In Russ.)
- [23] Riedel H. Fracture at High Temperatures. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1987. 418 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-642-82961-1>.
- [24] Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *Journal of The Mechanics and Physics of Solids*, 1968, vol. 16, № 1, pp. 1–12. Available at: http://esag.harvard.edu/rice/016_RiceRosengren_CrackSing_JMPS68.pdf.
- [25] Hutchinson J.W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. *Journal of The Mechanics and Physics of Solids*, 1968, vol. 16, № 1, pp. 13–31. Available at: <https://groups.seas.harvard.edu/hutchinson/papers/312.pdf>.
- [26] Hutchinson J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip. *Journal of The Mechanics and Physics of Solids*, 1968, vol. 16, № 5, pp. 337–342. Available at: <https://groups.seas.harvard.edu/hutchinson/papers/313.pdf>.
- [27] Naumenko K., Altenbach H. Modelling of Creep for Structural Analysis. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. 220 p. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-70839-1_1.
- [28] USER MATERIAL IN ABAQUS. Available at: <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAESUBRefMap/simasub-c-umat.htm>.
- [29] Lecture 6. Writing a UMAT or VUMAT. Available at: <https://imechanica.org/files/Writing%20a%20UMAT.pdf>.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ MATHEMATICAL METHODS IN NATURAL SCIENCES



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-1-64-73

УДК 519.62; 51.73

Дата: поступления статьи: 02.02.2023
после рецензирования: 16.03.2023
принятия статьи: 30.05.2023

И.В. Семенова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: semenova.iv@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6400-4682>

А.А. Корнеева

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: korneevaaa2002@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4344-3357>

ПОЛЕ НАПРАВЛЕННОГО НИЗКОЧАСТОТНОГО АКУСТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

АННОТАЦИЯ

В связи с тем, что именно к низкочастотным относятся многие излучатели волн, которые способен воспринимать человек, актуальными являются исследования звуковых полей, создаваемых такими излучателями. Благодаря полученным результатам становится возможным понимать, в каких направлениях и с какой мощностью будет распространяться созданное ими звуковое поле, формировать практические рекомендации по выбору зоны, наиболее подходящей для наблюдения за ними, решать обратные задачи по определению их местоположения. В результате проведенного анализа существующих моделей, используемых для описания акустических излучателей, установлено, что наиболее адекватными являются модели, учитывающие направленность источников звука. Среди них отдельного внимания заслуживает параметрическая модель, предложенная Г.Н. Кузнецовым и А.Н. Степановым, которая и была использована в статье. В качестве модельного представления атмосферы была выбрана система однородных слоев, в одном из которых находится источник. Для выбранных моделей источника и среды поставлена краевая задача нахождения потенциала создаваемого источником поля, получены точные и приближенные соотношения, которые могут быть использованы для решения прямых и обратных задач, связанных с мультипольным излучателем. Проведено исследование влияния на амплитудную составляющую поля таких факторов, как высота и частота источника, а также горизонтальное расстояние между источником и приемником.

Ключевые слова: направленный низкочастотный излучатель; неоднородное пространство; система однородных слоев; поле акустического излучателя; потенциал поля; амплитуда; коэффициент отражения; импеданс.

Цитирование. Семенова И.В., Корнеева А.А. Поле направленного низкочастотного акустического излучателя в пограничном слое атмосферы // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2023. Т. 29, № 1. С. 64–73. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-1-64-73>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Семенова И.В., 2023

Семенова Ирина Владимировна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной математики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

© Корнеева А.А., 2023

Корнеева Анастасия Александровна — студент механико-математического факультета, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

1. Модели направленных низкочастотных акустических излучателей

В [1–3], а также рядом других авторов показано не только то, что многие реальные акустические излучатели обладают свойством направленности, но и то, что для построения адекватных моделей таких излучателей необходимо учитывать это свойство, так как оно оказывает существенное влияние на создаваемое ими поле. Однако, например, в [4–6] и других современных работах при решении важных практических задач все еще используется модель монополя — ненаправленного акустического излучателя.

Для описания направленности источников звука предлагаются различные подходы. Условно их можно разделить на непараметрические [7–10] и параметрические [11–13]. Чаще всего авторами непараметрических моделей предлагается рассматривать реальный источник звука как совокупность монополей или диполей, которые непрерывно распределены по поверхности или объему источника. Однако функция, описывающая такой закон распределения, как правило, задается очень большим или даже бесконечным количеством уравнений, что приводит к вычислительным сложностям и затрудняет применение таких моделей на практике. Авторы параметрических моделей предполагают, что по поверхности или объему источника дискретным образом распределено конечное число монополей или диполей. В качестве параметров модели могут выступать геометрические характеристики источника, его местоположение в пространстве, амплитуда или фаза, а также мощности используемых монополей или диполей. Для получения выражения, описывающего потенциал поля, создаваемого таким источником, используют преобразование Фурье. По сути, полученное выражение представляет собой разложение потенциала в ряд Тейлора по совокупности плоских волн, которые хорошо изучены [14–17]. Однако использование ряда Тейлора приводит к тому, что разложение осуществляется по системе линейно зависимых функций. В связи с этим получить удобные для вычислений соотношения, позволяющие решить обратную задачу, возможно лишь для мультиполей нулевого или первого порядка. В силу отсутствия единственности решения использовать такие выражения для мультиполей более высоких порядков невозможно, что является существенным недостатком таких моделей.

Избежать описанных трудностей позволяет подход, предложенный в [18]. Авторами предлагается реальный источник звука заменить эквивалентным точечным направленным излучателем, а создаваемое им поле в неограниченном пространстве описывать при помощи разложения в ряд по сферическим мультиполям, образующим систему линейно независимых функций. Коэффициенты такого разложения являются мультипольными моментами и позволяют описать направленные свойства источника. Использование этой модели позволяет и в свободном пространстве, и в волноводах различных типов описывать поле звукового давления выражениями, линейно зависящими от параметров мультипольной модели.

Согласно этому подходу переход к модельному излучателю осуществляется следующим образом. Пусть источник низкочастотных колебаний находится в однородном неограниченном пространстве и имеет конечный размер, а также произвольную форму. Из произвольной точки O внутри излучателя построим сферу S_0 так, чтобы источник находился внутри нее. Введем сферическую систему координат, совместив ее центр с точкой O . В произвольной точке на поверхности сферы рассматриваемый источник создает давление, величина которого может быть определена при помощи соотношения:

$$\tilde{P}(r, \theta, \varphi, t) = i\omega\rho_0\tilde{\psi}(r_0, \theta, \varphi)e^{-i\omega t},$$

где r_0, θ, φ — сферические координаты точки наблюдения; t — время; i — мнимая единица; ω — частота колебаний; ρ_0 — плотность среды; $\tilde{\psi}$ — потенциал скоростей поля давления.

Потенциал $\tilde{\psi}(r_0, \theta, \varphi)$ является непрерывно дифференцируемой функцией, модуль которой на поверхности сферы единичного радиуса представляет собой приведенную амплитудную, а аргумент — приведенную фазовую диаграмму направленности источника.

Колебания, которые создает источник в области Ω , находящейся за пределами сферы S_0 , описываются функцией, которая может быть найдена как решение внешней задачи Дирихле для сферы S_0 [18]. Это решение единственно и для $r \geq 0$ может быть представлено равномерно сходящимся рядом:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n C_{nm} h_n^{(1)}(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (1.1)$$

где N — порядок мультипольности модели; C_{nm} — мультипольные моменты, описывающие направленность источника; $P_n^{(m)}$ — присоединенные полиномы Лежандра; $h_n^{(1)}$ — сферические функции Бесселя третьего рода порядка n ; $k = \frac{\omega}{c}$ — волновое число; c — фазовая скорость распространения волны в области; r, θ, ϕ — сферические координаты точки наблюдения.

2. Моделирование пограничного слоя атмосферы системой однородных слоев

При моделировании поля, создаваемого излучателем в пространстве, необходимо учитывать не только особенности самого источника, но и среды распространения сигнала. Большое внимание при исследовании полей низкочастотных источников звука уделяется случаю, когда они находятся в воде [19–22]. Однако в современном мире появились низкочастотные акустические излучатели, исследование полей которых важно именно в атмосфере. Практический интерес в этом случае представляет ее нижний слой, начинающийся от поверхности Земли и не превышающий 2–3 км. Согласно [23] такие высоты соответствуют пограничному слою атмосферы.

Известны различные модели атмосферы. Самым простым, но менее всего соответствующим действительности, является хорошо исследованный случай однородного пространства. Именно при использовании такой модели потенциал поля, создаваемого в нем рассматриваемым точечным мультипольным излучателем, описывается соотношением (1.1).

Для того чтобы учесть влияние на создаваемое поле поверхности Земли, можно применить модель однородного полупространства. Тогда потенциал поля, создаваемого в нем рассматриваемым точечным мультипольным излучателем, будет описываться следующим соотношением [18]:

$$\psi(M) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n C_{nm} [h_n^{(1)}(kr) P_n^{(m)}(\cos \theta) - \chi_{nm} h_n^{(1)}(kr') P_n^{(m)}(\cos \theta')] e^{im\phi}, \quad (2.1)$$

где $\chi_{nm} = (-1)^{n+|m|}$, $r'^2 = r^2 + 4rz_0 \cos \theta + 4z_0^2$, $\cos \theta' = \frac{r \cos \theta + 2z_0}{r'}$.

Однако большинство реальных сред, в том числе и атмосфера, являются неоднородными. Исследования в области атмосферной акустики показали, что особенно резко ее свойства изменяются в вертикальном направлении. В связи с этим по температуре, составу, электрическим характеристикам атмосфера может быть разделена на слои в вертикальном направлении. В качестве модели такого пространства может быть взята система однородных слоев с неидеальными границами, то есть границами, для которых коэффициент отражения волны зависит от угла ее падения.

В отличие от подходов, в которых атмосфера рассматривается как непрерывно-стратифицированная среда с определенным профилем показателя преломления [24], такая модель позволяет учесть наличие условных границ, отделяющих однородные слои друг от друга. Кроме того, ее использование целесообразно в случае, когда длина волны сравнима с толщиной слоя, в котором находится излучатель, или расстояние до него существенно превышает толщину слоя.

Для осуществления замены реального излучателя модельным будем считать, что выполняются условия $k(d_2 - z_0) > 1$ и $kz_0 > 1$.

3. Постановка и решение задачи о направленном излучателе в пространстве, моделируемом системой однородных слоев

Рассмотрим точечный излучатель, потенциал поля которого в неограниченном пространстве описывается функцией (1.1), находится в многослойной области, состоящей из однородных в горизонтальном направлении слоев $\Omega_1 \dots \Omega_m \dots \Omega_{m+n}$. Каждый слой имеет неидеальные границы Σ_i и Σ_{i+1} и характеризуется толщиной d_i , постоянной плотностью ρ_i , фазовой скоростью распространения волны c_i . Над слоем Ω_{m+n} находится полупространство Ω_{m+n+1} , а под слоем Ω_1 находится полупространство Ω_0 . Полупространства являются однородными в горизонтальном направлении и характеризуются постоянными плотностью ρ_{m+n+1}, ρ_0 и фазовой скоростью распространения колебаний c_{m+n+1}, c_0 .

Пусть точечный излучатель находится в точке $r = 0, z = z_1, z_1 > 0$ слоя Ω_m на расстоянии z_0 от его верхней границы.

Поле, создаваемое источником в слое Ω_p , описывается функцией, которая является решением следующей краевой задачи:

Найти функцию $\psi(r, \theta, \phi)$, которая удовлетворяет:

1) однородному дифференциальному уравнению в области Ω_m

$$\Delta\psi + k^2(z)\psi = 0, \quad (3.1)$$

где $k(z) = k_0 n(z)$;

2) условию сохранения непрерывности потенциала и его нормальной производной на границах Σ_m и Σ_{m+1} волновода

$$[\psi]|_s = 0, \left[\frac{d\psi}{dn}\right]|_s = 0, s = \Sigma_m \cup \Sigma_{m+1}; \quad (3.2)$$

3) краевому условию

$$\lim_{r \rightarrow 0} r|\psi(r, \theta, \phi) - \psi_0(r, \theta, \phi)| = 0, \quad (3.3)$$

где $\psi_0(r, \theta, \phi)$ — потенциал поля в однородном неограниченном пространстве, рассчитанный по формуле (1.1).

Приближенное решение поставленной задачи было найдено авторами при помощи вычисления имеющегося в точном решении интеграла методом перевала. Полученное решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n \frac{Cnm}{k_m r} e^{i(m\phi + k_m r)} (-i)^{n+1} & \left[\left(1 + \frac{a}{\sin \theta}\right) (F^*(\theta)) - \frac{iF^*(\theta)}{8k_m r (\sin \theta)^2} - \frac{i((F^*(\theta)))''}{2k_m r} \right) - \\ & - \left(1 - \frac{a}{\sin \theta}\right) \left(\frac{i(F^*(\theta))'}{2k_m r \tan \theta} - \frac{i(F^*(\theta))}{4k_m r (\sin \theta)^2}\right) \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} F^*(\theta) &= P_n^{lm}(\cos \theta) f(\beta_j), b_m = ik_m \cos \beta_m, \\ f(\beta_j) &= \frac{1 + \chi_{nm} e^{2b_m(d_m - z_0)} V_m + \chi_{nm} e^{2b_m(z_j - z_{j-1})} V_{m+1} + e^{2b_m d_m} V_m V_{m+1}}{1 - V_m V_{m+1} e^{2b_m d_m}}, \end{aligned}$$

β_j — угол падения плоской волны на границы j -го слоя.

Полученные расчетные формулы позволяют вычислять поле направленного излучателя, находящегося в пространстве, которое моделируется системой однородных слоев с неидеальными границами. Соотношения для коэффициентов отражения $V_m(\beta)$ и $V_{m+1}(\beta)$ были получены авторами путем обобщения полученных ими [25] выражений для случая трехслойной области:

$$\begin{aligned} V_m(\beta_m) &= \frac{Z^{(i)} - Z_m}{Z^{(i)} + Z_m}, \\ V_{m+1}(\beta_m) &= \frac{Z^{(j)} - Z_m}{Z^{(j)} + Z_m}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Z^i &= \frac{(Z^{i-1} + Z_i) e^{-2ik_{iz} z_{i+1}} + (Z^{i-1} - Z_i) e^{-2ik_{iz} z_i}}{(Z^{i-1} + Z_i) e^{-2ik_{iz} z_{i+1}} - (Z^{i-1} - Z_i) e^{-2ik_{iz} z_i}} Z_i, \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ Z^0 &= Z_0 = \frac{\rho_0 c_0}{\cos \beta_0}, \quad Z^{m+n+1} = Z_{m+n+1} = \frac{\rho_{m+n+1} c_{m+n+1}}{\cos \beta_{m+n+1}}, \quad Z_i = \frac{\rho_i c_i}{\cos \beta_i}, \\ k_{iz} &= k_i \cos \beta_i, \quad k_i = \frac{\omega_i}{c_i}, \quad k_i \sin \beta_i = k_{i-1} \sin \beta_{i-1}, \\ k_{jz} &= k_j \cos \beta_j, \quad k_j = \frac{\omega_j}{c_j}, \quad k_j \sin \beta_j = k_{j+1} \sin \beta_{j+1}, \\ Z^j &= \frac{(Z^{j+1} + Z_j) e^{-2ik_{jz} z_{j+1}} + (Z^{j+1} - Z_j) e^{-2ik_{jz} z_j}}{(Z^{j+1} + Z_j) e^{-2ik_{jz} z_{j+1}} - (Z^{j+1} - Z_j) e^{-2ik_{jz} z_j}} Z_j, \quad m \leq j \leq m+n, \\ Z_j &= \frac{\rho_j c_j}{\cos \beta_j}, \quad z_i = -\sum_{q=i}^{m+1} d_q + z_0, \quad z_j = \sum_{q=m+2}^{j-1} d_q + z_0. \end{aligned}$$

4. Результаты численного моделирования поля направленного низкочастотного акустического излучателя в пограничном слое атмосферы

С целью исследования влияния на амплитудную структуру звукового поля, создаваемого направленным низкочастотным излучателем в атмосфере, таких факторов, как его частота, высота и горизонтальное расстояние до приемников, при помощи разработанного авторами пакета прикладных программ была проведена серия вычислительных экспериментов.

Пространство, в котором находится источник, моделировалось системой из 10 однородных слоев. Из Международной стандартной модели атмосферы (International Standard Atmosphere, MCA, англ. ISA) были взяты среднемесячные значения плотности и скорости звука для летнего периода времени, приведенные в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Характеристики системы слоев

Table 4.1

Characteristics of the layer system

Номер слоя	Плотность, кг/м ³	Скорость звука, м/с	Толщина, м	Высота над поверхностью земли, м
1	1,1725	345,77	100	100
2	1,161172	345,39	100	200
3	1,149928	345,01	100	300
4	1,138768	344,64	100	400
5	1,127691	344,26	100	500
6	1,116698	343,88	100	600
7	1,105786	343,05	100	700
8	1,094957	343,12	100	800
9	1,08421	342,74	100	900
10	1,073544	342,36	100	1000

При проведении расчетов в качестве модели источника был выбран мультиполь, состоящий из монополя, диполя, квадруполья с моментами: $C_{nm} = 1 + i$ для всех n и m . Предполагалось, что регистрация сигнала осуществляется датчиками колебаний, расположенными вдоль прямой на равных расстояниях друг от друга.

Во всех сериях расчетов в качестве базовых были выбраны следующие значения: частота источника 10 Герц, высота источника над поверхностью земли 390 м. Также считалось, что датчики колебаний находятся на высоте 220 м вдоль прямой, параллельной оси OY системы координат, связанной с поверхностью Земли, на горизонтальном расстоянии 50 м от излучателя.

В первой серии численных экспериментов изучалось влияние на амплитуду звуковых колебаний частоты излучателя. Частоты брались в диапазоне от 10 до 35 Гц.

На рис. 4.1 изображены обезразмеренные значения амплитуды звуковых колебаний, создаваемых источниками частотой 10, 20 и 35 Гц. Как видно, увеличение частоты источника приводит к существенному уменьшению его амплитуды. Также с увеличением частоты источника существенно вырождается определяемая направленностью излучателя структура поля.

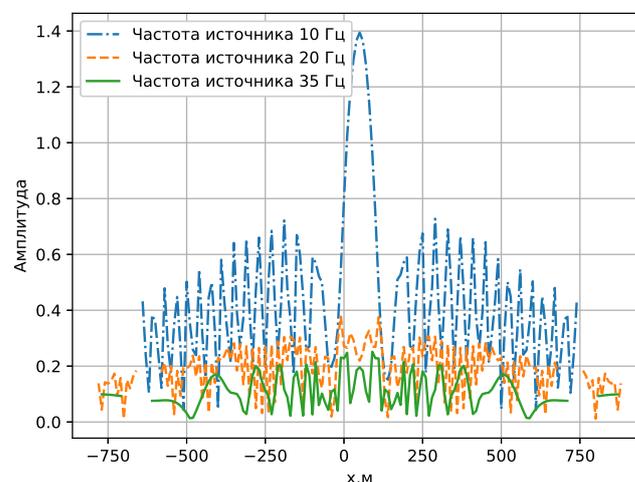


Рис. 4.1. Зависимость амплитудной структуры полей от частоты сигналов
 Fig. 4.1. Dependence of the amplitude structure of the field on the frequency of the source

Далее была изучена зависимость амплитуды от высоты излучателя.

На рис. 4.2 изображены безразмерные значения амплитуды звуковых колебаний, создаваемых источником, находящимся на высоте 390, 690 и 890 м. Анализ графиков показывает, что положения точек максимума и минимума амплитуды сигналов зависят от высоты излучателя и с увеличением его высоты положение максимума смещается. Максимальное значение амплитуды поля наблюдается в точке расположения излучателя, что согласуется с экспериментальными данными и может быть использовано для решения обратных задач по обнаружению источников звука.

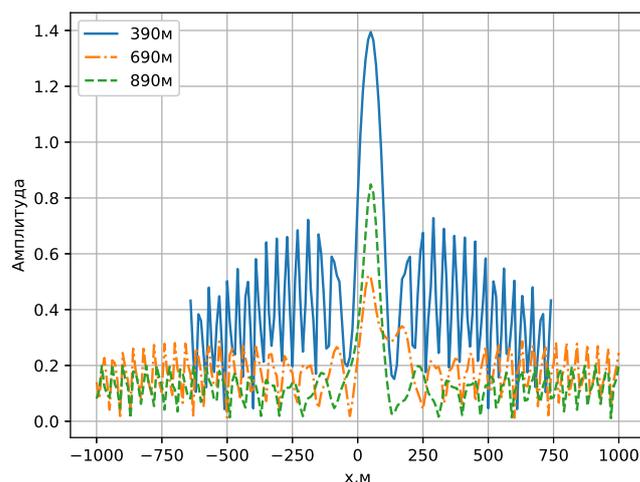


Рис. 4.2. Зависимость амплитудной структуры полей от высоты источника
Fig. 4.2. Dependence of the amplitude structure of the fields on the height of the source

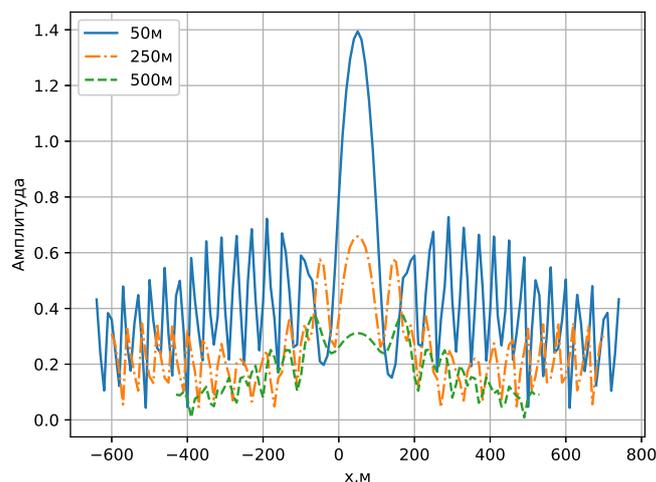


Рис. 4.3. Зависимость амплитудной структуры полей от высоты источника
Fig. 4.3. Dependence of the amplitude structure of the fields on the height of the source

При расположении источника на различных высотах наблюдаются качественно близкие интерференционные картины, которые определяются тремя факторами: влиянием изменения ориентации в пространстве характеристики направленности мультиполей относительно перемещающегося по горизонтали приемника; влиянием дипольного эффекта и влиянием увеличения расстояния между приемником и источником.

Кроме перемещения реальных источников в вертикальном направлении, типичным является их движение вблизи приемной антенны на некоторой фиксированной высоте с заданным горизонтальным расстоянием. Для анализа структурных особенностей сигналов в описанных условиях были рассчитаны

значения амплитуды тонального сигнала в точках приема при разных значениях горизонтального расстояния между источником и приемниками.

В результате анализа графиков, приведенных на рис. 4.3, можно заметить, что поля на различных расстояниях имеют схожую структуру, но наблюдается небольшое изменение характера интерференции при удалении источника от приемников. Сохраняются и характерные особенности, такие как, например, максимум в точке расположения излучателя. На больших расстояниях амплитуда сглаживается.

Выводы

1. В результате сравнительного анализа существующих моделей акустических излучателей установлено, что наиболее подходящей для описания направленного низкочастотного излучателя в пограничном слое атмосферы является параметрическая модель, предложенная в [18], основанная на замене реальных источников эквивалентным точечным направленным излучателем и описании создаваемого им поля при помощи разложения в ряд по сферическим мультиполям, образующим систему линейно независимых функций.

2. Использование в качестве модельного представления атмосферы неограниченного однородного пространства, однородного полупространства или однородного слоя является сильным упрощением. Более точным, учитывающим ее горизонтальную стратифицированность, является описание атмосферы системой однородных слоев.

3. Полученные соотношения (3.4) являются приближенным решением краевой задачи (3.1)–(3.3) и позволяют вычислять потенциал поля, создаваемого низкочастотным акустическим излучателем в пограничном слое атмосферы, а также могут быть использованы для решения прямых и обратных задач, связанных с мультипольным излучателем.

4. В неоднородном пространстве, которое моделируется системой однородных слоев, существенное влияние на амплитуду поля, создаваемого направленным низкочастотным излучателем, оказывают все рассмотренные факторы: высота и частота источника, а также горизонтальное расстояние между источником и приемниками.

В результате проведенных численных экспериментов установлено, что увеличение частоты источника приводит к существенному уменьшению его амплитуды, положение точек максимума и минимума амплитуды сигналов зависят от высоты излучателя, а при удалении источника от приемников наблюдается небольшое изменение характера интерференции.

Отмеченные закономерности позволяют формировать практические рекомендации по выбору зоны, в которой необходимо производить анализ характеристик источника в каждом конкретном случае.

Литература

- [1] Pachner J. On the dependence of directivity patterns on the distance from emitter // Journal of the Acoustical Society of America. 1956. Vol. 28. Issue 1. P. 86–90. DOI: <http://doi.org/10.1121/1.1908232>.
- [2] Horton C.W., Sabey A.E. Studies on the near field of monopole and dipole acoustic sources // Journal of the Acoustical Society of America. 1958. Vol. 30. Issue 12. P. 1088–1099. DOI: <http://doi.org/10.1121/1.1909467>.
- [3] Isakovich M.A. Nonlinear effect accompanying the dipole radiation. // 4th Int. Congr. Acoustics. Copenhagen. 1962. Vol. 1. P. 3–4 (NK 55).
- [4] Глебова Г.М., Кузнецов Г.Н. Методы оценивания приведенной шумности движущегося монопольного источника в мелком море // Акустический журнал. 2021. Т. 67, № 3. С. 275–285. DOI: <http://doi.org/10.31857/S0320791921030035>. EDN: <https://www.elibrary.ru/bwdibj>.
- [5] Кузнецов Г.Н., Семенова И.В., Степанов А.Н. Локальные аномальные зоны звукового поля в мелком море. Эксперимент и моделирование // Акустический журнал. 2021. Т. 67, № 6. С. 626–638. DOI: <http://doi.org/10.31857/S0320791921060046>. EDN: <https://www.elibrary.ru/salfzm>.
- [6] Сумбатян М.А., Мартынова Т.С., Мусатова Н.К. К дифракции точечного источника звука на бесконечном клине // Акустический журнал. 2022. Т. 68, № 4. С. 351–360. DOI: <http://doi.org/10.31857/S0320791922030145>. EDN: <https://www.elibrary.ru/krxviz>.
- [7] Oestreicher H.L. Representation of the field of an acoustic source as a series of multipole fields // Journal of the Acoustical Society of America. 1957. Vol. 29. Issue 11. P. 1219–1222. DOI: <http://doi.org/10.1121/1.1908749>.
- [8] Бобровицкий Ю.И. Физическая модель и характеристики ближнего поля мультиполя // Акустический журнал. 1998. Т. 44, № 1. С. 11–20. URL: http://www.akzh.ru/pdf/1998_1_11-20.pdf.
- [9] Шарфарец Б.П. Поле протяженного излучателя в нерегулярном океаническом волноводе // Акустический журнал. 1992. Т. 38, № 2. С. 245–349. URL: http://www.akzh.ru/pdf/1992_2_345-349.pdf.

- [10] Шарфарец Б.П. Представление поля давления протяженного источника в виде геометрооптического ряда в двумерном случае // Научное приборостроение. 2001. Т. 11, № 4. С. 41–45. URL: <http://iairas.ru/mag/2001/full4/Art6.pdf>.
- [11] Welkowitz W. Directional circular arrays of point sources // Journal of the Acoustical Society of America. 1956. Vol. 28. Issue 3. Pp. 362–366. DOI: <http://doi.org/10.1121/1.1908330>.
- [12] Виноградова Э.Л., Фурдуев В.В. Коэффициент направленности линейной группы излучателей // Акустический журнал. 1966. Т. 12, № 2. С. 181–185. URL: http://www.akzh.ru/pdf/1966_2_181-184.pdf.
- [13] Бобровицкий Ю.И., Томилина Т.М. Общие свойства и принципиальные погрешности метода эквивалентных источников // Акустический журнал. 1995. Т. 41, № 5. С. 737–750. URL: http://www.akzh.ru/pdf/1995_5_737-750.pdf.
- [14] Бреховских Л.М. Отражение и преломление сферических волн // Успехи физических наук. 1949. Т. 38. Вып. 1. С. 1–42. DOI: <http://doi.org/10.3367/UFNr.0038.194905a.0001>.
- [15] Van Moerhen W.K. Reflection of a spherical wave from a plane surface // Journal of Sound and Vibration. 1975. Vol. 42. Issue 2. P. 201–208. DOI: [http://doi.org/10.1016/0022-460X\(75\)90215-1](http://doi.org/10.1016/0022-460X(75)90215-1).
- [16] Matthen Nobile A., Hayek Sabih I. Acoustic propagation over an impedance plane // Journal of the Acoustical Society of America. 1985. Vol. 78. Issue 4. P. 1325–1336. DOI: <http://doi.org/10.1121/1.392902>.
- [17] Глебова Г.М., Жбанков Г.А., Кузнецов Г.Н. Экспериментальная оценка направленности излучения движущегося надводного судна в мелком море // Акустический журнал. 2022. Т. 68, № 1. С. 57–67. DOI: <http://doi.org/10.31857/S0320791922010038>. EDN: <https://elibrary.ru/mzbbqsg>.
- [18] Кузнецов Г.Н., Степанов А.Н. Векторно-скалярные поля мультипольных гидроакустических источников, эквивалентных шумоизлучению морских объектов. Москва: Буки Веди, 2022. 304 с. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=48035148>. EDN: <https://elibrary.ru/qcrpkd>.
- [19] Аксенов С.П., Кузнецов Г.Н. Амплитудная и фазовая структура низкочастотного гидроакустического поля в глубоком океане // Акустический журнал. 2021. Т. 67, № 5. С. 493–504. DOI: <http://doi.org/10.31857/S0320791921040018>. EDN: <https://www.elibrary.ru/uo9rxn>.
- [20] Тыщенко А.Г., Заикин О.С., Сорокин М.А., Петров П.С. Комплекс программ для расчета акустических полей в мелком море на основе метода широкоугольных модовых параболических уравнений // Акустический журнал. 2021. Т. 67, № 5. С. 533–541. DOI: <http://doi.org/10.31857/S0320791921050117>.
- [21] Луньков А.А., Петников В.Г., Сидоров Д.Д. Использование линейных приемных антенн для наблюдения горизонтальной рефракции низкочастотного звука в мелком море с сильно неоднородным водоподобным дном // Акустический журнал. 2022. Т. 68, № 4. С. 400–408. DOI: <http://doi.org/10.31857/S0320791922040074>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ytwzau>.
- [22] Кузнецов Г.Н., Степанов А.Н. О возможности повышения помехоустойчивости обнаружения звуковых сигналов в мелком море с использованием энергетических и фазовых инвариантов // Акустический журнал. 2022. Т. 68, № 3. С. 300–311. DOI: <http://doi.org/10.31857/S0320791922030066>. EDN: <https://www.elibrary.ru/zitqiz>.
- [23] ГОСТ Р 54084-2010. Модели атмосферы в пограничном слое на высотах от 0 до 3000 м для аэрокосмической практики. Параметры: Национальный стандарт Российской Федерации: дата введения 2012-01-01. URL: <https://docs.cntd.ru/document/1200088881>.
- [24] Петухов Ю.В. О возможности безотражательного распространения плоских акустических волн в непрерывно-стратифицированных средах // Акустический журнал. 2022. Т. 68, № 2. С. 129–138. DOI: <http://doi.org/10.31857/S0320791922020071>. EDN: <https://www.elibrary.ru/dkvenj>.
- [25] Корнеева А.А., Семенова И.В. Поле направленного низкочастотного излучателя в многослойной области // XXIII Всероссийская конференция молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям. Новосибирск, 2022. С. 32. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=50142121>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ihxbui>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-1-64-73

Submitted: 02.02.2023

Revised: 16.03.2023

Accepted: 30.05.2023

I. V. Semenova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: semenova.iv@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6400-4682>

A. A. Korneeva

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: korneevaaa2002@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4344-3357>

FIELD OF A DIRECTIONAL LOW-FREQUENCY ACOUSTIC EMITTER IN THE BOUNDARY LAYER OF THE ATMOSPHERE

ABSTRACT

Due to the fact that many wave emitters that a person is able to perceive belong to low-frequency ones, studies of sound fields created by such emitters are relevant. Thanks to the results obtained, it becomes possible to understand in which directions and with what power the sound field created by them will propagate, form practical recommendations for choosing the zone most suitable for observing them, solve inverse problems to determine their location. As a result of the analysis of existing models used to describe acoustic emitters, it was found that the most adequate models are those that take into account the directionality of sound sources. Among them, the parametric model proposed by G.N. Kuznetsov and A.N. Stepanov deserves special attention, which was used in the work. As a model representation of the atmosphere, a system of homogeneous layers was chosen, in one of which the source is located. For the selected models of the source and medium, the boundary value problem of finding the potential of the field created by the source is set, exact and approximate relations are obtained that can be used to solve direct and inverse problems associated with a multipole emitter. The influence of such factors as the height and frequency of the source, as well as the horizontal distance between the source and receiver on the amplitude component of the field has been studied.

Key words: directional low-frequency emitter; inhomogeneous space; system of homogeneous layers; acoustic emitter field; field potential; amplitude; reflection coefficient; impedance.

Citation. Semenova I.V., Korneeva A.A. Field of a directional low-frequency acoustic emitter in the boundary layer of the atmosphere. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 64–73. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-1-64-73>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Semenova I.V., 2023

Irina V. Semenova — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of Information Security, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

© Korneeva A.A., 2023

Anastasia A. Korneeva — student of the Department of Mechanics and Mathematics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Pachner J. On the dependence of directivity patterns on the distance from emitter. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, vol. 28, issue 1, pp. 86–90. DOI: <http://doi.org/10.1121/1.1908232>.
- [2] Horton C.W., Sabey A.E. Studies on the near field of monopole and dipole acoustic sources. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1958, vol. 30, issue 12, pp. 1088–1099. DOI: <http://doi.org/10.1121/1.1909467>.
- [3] Isakovich M.A. Nonlinear effect accompanying the dipole radiation. *4th International Congress of Acoustics*. Copenhagen, 1962, vol. 1, pp. 3–4 (NK 55).
- [4] Glebova G.M., Kuznetsov G.N. Methods for estimating the reduced noise of a moving monopole source in shallow water. *Acoustical Physics*, 2021, vol. 67, no. 3, pp. 273–282. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1063771021030039>. EDN: <https://www.elibrary.ru/oawwmmr>. (In English; original in Russian)
- [5] Kuznetsov G.N., Stepanov A.N., Semenova I.V. Local anomalous sound field zones in shallow water. Experiment and simulation. *Acoustical Physics*, 2021, vol. 67, no. 6, pp. 619–630. DOI: <http://doi.org/10.1134/S106377102106004X>. EDN: <https://www.elibrary.ru/qrajmi>. (In English; original in Russian)
- [6] Sumbatyan M.A., Martynova T.S., Musatova N.K. To diffraction of a point sound source on an infinite wedge. *Acoustical Physics*, 2022, vol. 68, no. 4, pp. 351–360. DOI: <http://doi.org/10.31857/S0320791922030145>. EDN: <https://www.elibrary.ru/krxviz>. (In Russ.)
- [7] Oestreicher H.L. Representation of the field of an acoustic source as a series of multipole fields. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1957, vol. 29, issue 11, pp. 1219–1222. DOI: <http://doi.org/10.1121/1.1908749>.

- [8] Bobrovnikskii Yu.I. A Physical Model and the Near Field Characteristics of a Multipole. *Acoustical Physics*, 1998, vol. 44, no. 1, pp. 11–20. Available at: http://www.akzh.ru/pdf/1998_1_11-20.pdf. (In Russ.)
- [9] Sharfarets B.P. Extended source field in a non-regular ocean waveguide. *Acoustical Physics*, 1992, vol. 38, no. 2, pp. 245–349. Available at: http://www.akzh.ru/pdf/1992_2_345-349.pdf. (In Russ.)
- [10] Sharfarets B.P. Representation of the pressure field of an extended source as a geometric-optical series in the two-dimensional case. *Nauchnoe Priborostroenie = Scientific Instrumentation*, 2001, vol. 11, no. 4, pp. 41–45. Available at: <http://iairas.ru/mag/2001/full4/Art6.pdf>. (In Russ.)
- [11] Welkowitz W. Directional circular arrays of point sources. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, vol. 28, issue 3, pp. 362–366. DOI: <http://doi.org/10.1121/1.1908330>.
- [12] Vinogradova E.L., Furduev V.V. Directivity coefficient of a linear group of emitters. *Acoustical Physics*, 1966, vol. 12, no. 2, pp. 181–184. Available at: http://www.akzh.ru/pdf/1966_2_181-184.pdf. (In Russ.)
- [13] Bobrovnikskii Yu.I., Tomilina T.M. General Properties and Fundamental Errors of the Method of Equivalent Sources. *Acoustical Physics*, 1995, vol. 41, no. 5, pp. 737–750. Available at: http://www.akzh.ru/pdf/1995_5_737-750.pdf. (In Russ.)
- [14] Brekhovskikh L.M. Reflection and refraction of spherical waves. *Physics-Uspeski = Advances in Physical Sciences*, 1949, vol. 38, no. 1, pp. 1–42. DOI: <http://doi.org/10.3367/UFNr.0038.194905a.0001>. (In Russ.)
- [15] Van Moerhen W.K. Reflection of a spherical wave from a plane surface. *Journal of Sound and Vibration*, 1975, vol. 42, issue 2, pp. 201–208. DOI: [http://doi.org/10.1016/0022-460X\(75\)90215-1](http://doi.org/10.1016/0022-460X(75)90215-1).
- [16] Matthen Nobile A., Hayek Sabih I. Acoustic propagation over an impedance plane. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1985, vol. 78, issue 4, pp. 1325–1336. DOI: <http://doi.org/10.1121/1.392902>.
- [17] Glebova G.M., Zhibankov G.A., Kuznetsov G.N. Experimental evaluation of radiation directivity of a moving surface vessel in a shallow sea. *Acoustical Physics*, 2022, vol. 68, no. 1, pp. 57–67. DOI: <http://doi.org/10.31857/S0320791922010038>. EDN: <https://elibrary.ru/mzbqsg>. (In Russ.)
- [18] Kuznetsov G.N., Stepanov A.N. Vector-scalar fields of multipole hydroacoustic sources equivalent to the noise emission of marine objects. Moscow: «Buki Vedi», 2022, 304 p. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=48035148>. EDN: <https://elibrary.ru/qcrpkd>. (In Russ.)
- [19] Aksenov S.P., Kuznetsov G.N. Amplitude and phase structure of a low-frequency hydroacoustic field in the deep ocean. *Acoustical Physics*, 2021, vol. 67, no. 5, pp. 474–485. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1063771021040011>. EDN: <https://www.elibrary.ru/irrlvw>. (In English; original in Russian)
- [20] Tyshchenko A.G., Zaikin O.S., Sorokin M.A., Petrov P.S. Software package for calculating acoustic fields in shallow seas based on the method of wide-angle mode parabolic equations. *Acoustical Physics*, 2021, vol. 67, no. 5, pp. 533–541. DOI: <http://doi.org/10.31857/S0320791921050117>. (In Russ.)
- [21] Lunkov A.A., Petnikov V.G., Sidorov D.D. The use of linear receiving antennas to observe the horizontal refraction of low-frequency sound in a shallow sea with a highly heterogeneous water-like bottom. *Acoustical Physics*, 2022, vol. 68, no. 4, pp. 400–408. DOI: <http://doi.org/10.31857/S0320791922040074>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ytwzau>. (In Russ.)
- [22] Kuznetsov G.N., Stepanov A.N. On the possibility of increasing the noise immunity in detecting sound signals in a shallow water using energy and phase invariants. *Acoustical Physics*, 2022, vol. 68, no. 3, pp. 262–271. DOI: <http://doi.org/10.1134/S106377102203006X>. EDN: <https://www.elibrary.ru/yqsrog>. (In English; original in Russian)
- [23] GOST R 54084-2010. Models of the atmosphere in the boundary layer at altitudes from 0 to 3000 m for aerospace practice. Parameters: national standard of the Russian Federation: date of introduction 2012-01-01. Available at: <https://docs.cntd.ru/document/1200088881>. (In Russ.)
- [24] Petukhov Yu.V. On the possibility of non-reflective propagation of plane acoustic waves in continuously stratified media. *Acoustical Physics*, 2022, vol. 68, no. 2, pp. 129–138. DOI: <http://doi.org/10.31857/S0320791922020071>. EDN: <https://www.elibrary.ru/dkvenj>. (In Russ.)
- [25] Korneeva A.A., Semenova I. Field of a directional low-frequency emitter in a multi-layer region. In: *XXIII all-russian conference of young scientists on mathematical modeling and information technologies*. Novosibirsk, 2021, pp. 362–365. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=50142121>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ihxbui>. (In Russ.)



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-1-74-88

УДК 532.5-1/-9

Дата: поступления статьи: 24.01.2023
после рецензирования: 27.02.2023
принятия статьи: 30.05.2023

Федоров К.М.

Тюменский государственный университет
г. Тюмень, Российская Федерация

E-mail: k.m.fedorov@utmn.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0347-3930>

Ганопольский Р.М.

Тюменский государственный университет
г. Тюмень, Российская Федерация

E-mail: r.m.ganopolskij@utmn.ru.

Гильманов А.Я.

Тюменский государственный университет
г. Тюмень, Российская Федерация

E-mail: a.y.gilmanov@utmn.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7115-1629>

Шевелёв А.П.

Тюменский государственный университет
г. Тюмень, Российская Федерация

E-mail: a.p.shevelev@utmn.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0017-4871>

ПРОЦЕДУРА ОПТИМИЗАЦИИ ТЕХНОЛОГИИ ВЫРАВНИВАНИЯ ПРОФИЛЯ ПРИЕМИСТОСТИ

АННОТАЦИЯ

Статья посвящена разработке процедуры оптимизации технологии выравнивания профиля приемистости. В настоящее время, в связи со значительной долей пластов с высокой обводненностью актуально использовать методы, позволяющие снизить темпы прироста обводненности добычи и продлить период рентабельной эксплуатации скважин. Одним из наиболее распространенных способов сделать это является технология выравнивания профиля приемистости путем закачки суспензии в пласт. Классическая модель глубокого проникновения суспензии в пористую среду хорошо зарекомендовала себя для расчета технологических параметров обработки, но на сегодняшний день она не содержит критериев оптимизации процесса. Введение таких критериев и их физическое обоснование являются целью данной работы. Были поставлены следующие задачи: модификация классической модели глубокого проникновения суспензии в пористую среду для слоисто-неоднородного пласта, введение критериев эффективности обработки суспензией и оптимизация процесса. Математическая модель состоит из законов сохранения массы дисперсных частиц в потоке и в удержанном состоянии, а также из закона Дарси. Исходные данные были выбраны для одного из месторождений в Западной Сибири, где была проведена закачка суспензии. Проанализирован промысловый опыт закачки суспензии, определены скважины, где обработка прошла успешно. Введен новый критерий эффективности выравнивания профиля приемистости. Этот критерий представляет собой разницу в среднеквадратичных отклонениях скорости потока вдоль пропластков до и после обработки. Установлено, что это различие более выражено демонстрирует выравнивания профиля приемистости, чем классический критерий Дикстры — Парсонса. Процедура оптимизации позволяет оценить необходимый объем закачиваемой суспензии, обеспечивающий максимальное перераспределение профиля приемистости.

Ключевые слова: Выравнивание профиля приемистости; модель глубокого проникновения суспензии в пористую среду; закачка суспензии; оптимизация; отношение приемистостей.

Цитирование. Федоров К.М., Ганопольский Р.М., Гильманов А.Я., Шевелёв А.П. Процедура оптимизации технологии выравнивания профиля приемистости // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2023. Т. 29, № 1. С. 74–88. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-1-74-88>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Федоров К.М., 2023

Федоров Константин Михайлович — доктор физико-математических наук, научный руководитель Физико-технического института, 625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, д. 6.

© Ганопольский Р.М., 2023

Ганопольский Родион Михайлович — кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой моделирования физических процессов и систем, 625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, д. 6.

© Гильманов А.Я., 2023

Гильманов Александр Янович — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры моделирования физических процессов и систем, 625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, д. 6.

© Шевелёв А.П., 2023

Шевелёв Александр Павлович — кандидат физико-математических наук, профессор кафедры моделирования физических процессов и систем, 625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, д. 6.

Введение

Контроль обводненности включает снижение пористости при закачке и добыче [1] в коллекторе, поддержание пластового давления, снижение обводненности добываемой продукции [2]. Решение последней проблемы является самым сложным. Оно осуществляется как со стороны нагнетательной скважины, так и со стороны добывающей. Обработка со стороны нагнетательной скважины называется технологией выравнивания профиля приемистости. Снижение обводненности добывающих скважин называется мероприятиями по снижению риска прорыва воды [3].

Статья посвящена теоретическому анализу применения технологии выравнивания профиля приемистости (ВПП) [4; 5]. На практике ВПП включает в себя решение двух проблем: выравнивание профиля приемистости по вертикали и улучшение горизонтального охвата пласта заводнением. Первая проблема решается путем закачки химических веществ, которые перераспределяют вертикальный профиль приемистости или уменьшают расход воды в высокопроницаемых [6] пропластках и перенаправляют поток воды в низкопроницаемые. Решение второй проблемы осуществляется перераспределением закачиваемой воды между окружающими добывающими скважинами или отклонением потоков в боковом направлении. Обе обработки приводят к снижению обводненности у окружающих скважин. Это позволяет снизить обводненность после обработки от 3 до 7 %, а эффект исчезает через 1–7 месяцев [7].

Традиционная технология ВПП включает закачку водного раствора полимера с гелирующими агентами [8–10]. Распространенными гелирующими агентами являются поливалентные металлы, такие как ацетат хрома [11], цитрат алюминия [12]. Основным недостатком такой технологии является ограничение критической температурой и концентрациями солей, приводящими к разрушению полимера. В диапазоне температур выше 60 °С молекулы полимера гидролизованного полиакриламида (ПАА) [13] начинают разрушаться. Поэтому для высокотемпературных пластов неорганический гель на основе хлорида алюминия был предложен специалистами из Томска [14]. На практике применение силикагелей широко распространено при добыче нефти в Западной Сибири. Эта технология включает закачку силиката натрия с соляной кислотой или другими гелирующими агентами. Продуктом этой реакции является гель кремниевой кислоты. Преимущества этой технологии заключаются в использовании недорогих агентов, простоте приготовления реагентов, управлении периодом реакции с помощью концентрации кислоты и разрушении оторочки щелочью в случае неудачных обработок [15].

Иной подход разработан китайскими учеными [16]. Они предложили применять так называемый гель с предварительно сформованными частицами (Preformed Particle Gel (PPG)) [17–19] или полимерный гель с коллоидной или микроэмульсионной структурой. Основными свойствами PPG являются способность набухать в воде с задержкой от 3 до 6 месяцев и проникновение в пористую породу с пустотами

меньше размера частиц [20]. Эти свойства позволяют осуществлять глубокое проникновение РРГ и закупоривать высокопроницаемые участки вдали от скважины.

Другим подходом к разработке блокирующих составов является применение суспензий и коллоидных растворов [21]. Глинистые коллоиды и мелкие частицы мела или древесной муки стабилизируются в воде полимером или полимерным гелем [22]. Некоторые авторы называют эту стабилизацию суспензии термином "флокуляция частиц с молекулами полимера"[23]. Смесь частиц относительно большого размера и полимерного геля со скоплением небольших молекул проникает и закупоривает узкие поры, а также естественные трещины [21].

Механизмы ВПП путем закачки геля или суспензии следующие. Образование геля на месте начинается с момента приготовления смеси полимера и сшивающего агента. Гелирующая жидкость проникает в неоднородные слои в соответствии с их проницаемостью: если два пропластка одинаковой толщины отличаются по проницаемости в два раза, то объем геля в пропластке с высокой проницаемостью в два раза больше, чем в слое с низкой проницаемостью. Время гелеобразования составляет несколько часов и обеспечивает закачку раствора и проникновение в призабойную зону. Полное гелеобразование происходит во время остановки скважины на несколько часов. Закупорка части порового пространства уменьшает не только пористость, но и проницаемость в соответствии с формулой Козени — Кармана [23]. Это является причиной селективного закупоривания разнородных пластов.

Фильтрация суспензии в пласте рассматривается в рамках теории глубокого проникновения суспензии в пористую среду [24]. Согласно этой теории, максимальное удерживание частиц происходит очень близко к нагнетательной скважине. Когда пустота полностью заполняется удержанными частицами, на поверхности ствола скважины начинает образовываться осадок. Проницаемость пористых сред определяется распределением пор по размерам. Удерживание частиц изменяет это распределение, а также способность пористой среды к удерживанию и остаточную проницаемость. Эффект перераспределения размеров пор после оседания частиц описан в рамках модели, предложенной в работе [25].

Основная цель ВПП – уменьшить обводненность окружающих добывающих скважин. Эффект достигается за счет двух механизмов: первый заключается в обеспечении максимального перераспределения профиля приемистости нагнетательной скважины, второй – в реакции окружающих скважин на перераспределение потоков. Первый механизм зависит от перераспределения профиля и снижения приемистости; задача оптимизации может быть сформулирована как достижение максимального выравнивания профиля приемистости при минимальном ее снижении. Статья посвящена решению этой проблемы в рамках оптимизации объема оторочки и концентрации суспензии [26].

Второй механизм зависит от размера и геометрии пласта, неоднородности проницаемости и местных подвижных запасов нефти, а также текущей обводненности. Точное решение второй задачи определяется численным моделированием окружающей сетки добывающих скважин и сопоставлением истории с текущим состоянием профиля добычи. Это обычная, но отнимающая много времени и дорогостоящая задача. Авторы разрабатывают упрощенный подход к решению второй задачи, в котором параметры перераспределения профиля приемистости нагнетательной скважины транслируются на окружающие добывающие скважины без построения геологической модели. Результаты этого исследования будут опубликованы в ближайшее время.

Классическая модель глубокого проникновения суспензии в пористую среду [24] хорошо зарекомендовала себя для расчета технологических параметров обработки, но на сегодняшний день она не содержит критериев оптимизации процесса. Введение таких критериев и их физическое обоснование являются целью данной работы. Были поставлены следующие задачи: модификация классической модели глубокого проникновения суспензии в пористую среду для слоисто-неоднородного пласта, введение критериев эффективности обработки суспензией и оптимизация процесса, которая проводится впервые.

1. Анализ промыслового опыта закачки суспензии в пласт

Рассматриваемое месторождение расположено на юге Западной Сибири и обладает хорошими фильтрационно-емкостными свойствами. Средние значения пористости и проницаемости для месторождения составляют 18 % и 158 мД ($1 \text{ Д} = 10^{-12} \text{ м}^2$). В то же время при средней общей толщине 15 м пласт состоит примерно из 12 пропластков с проницаемостью от 0,4 мД до 1,2 Д. Заводнение является основной технологией добычи нефти на месторождении, элементом разработки является семиточечная схема. Вертикальная неоднородность пласта является причиной значительного обводнения добываемой продукции на ранних стадиях добычи. На сегодняшний день средняя обводненность составляет 60 % со значительным изменением от скважины к скважине.

Контроль заводнения обеспечивался применением технологии ВПП. Большинство нагнетательных скважин подверглись гидравлическому разрыву, остальные скважины также демонстрируют наличие ав-

тогидравлических разрывов (иницирование трещин при превышении давления гидроразрыва пласта), в среднем скин-фактор нагнетательных скважин составляет около – 4. Обработка включает закачку суспензий бентонитовой глины и мела, стабилизированных полимером, в нагнетательные скважины. Предполагаемые размеры частиц составляли от 2 до 4 мкм для глины и от 6 до 8 мкм для частиц мела. Концентрация частиц в суспензиях составляла от 2 до 4 %. Средняя концентрация полимера в растворе составляла 0,5 % в глине и 0,25 % в меловых суспензиях.

На рассматриваемом объекте 50 нагнетательных скважин были обработаны суспензионными смесями. В 26 нагнетательных скважин была закачана глинистая суспензия, остальные обработаны меловой суспензией. Средний объем закачки составил 1100 м³ с колебаниями в зависимости от скважины от 400 до 2000 м³. Количество реагирующих добывающих скважин на обработку составляло в среднем 4. В результате воздействия средний прирост добычи за одну обработку составил 2,16 тыс. тонн нефти. Удельный (на единицу толщины пласта) объем закачки оставался примерно постоянным.

Дополнительная нефть была извлечена в ходе 45 обработок. К сожалению, только 28 из 50 скважин имеют результаты интерпретации данных геофизических исследований скважин (ГИС).

Согласно теоретическим представлениям, приемистость обработанной скважины уменьшается пропорционально объему закачиваемого агента. Анализ этой функции представлен на рис. 1. На нем обозначены две группы скважин. В первой группе падение приемистости составляет менее 15 %. Эта группа включает 16 нагнетательных скважин, по которым имеются петрофизические данные, вторая группа состоит из 12 скважин с данными ГИС. Для последней группы снижение эффективности закачки пропорционально объему закачиваемого реагента, для первой группы корреляция не отображается. По мнению авторов, в скважинах с небольшим падением приемистости во время обработки было превышено давление разрыва пласта и увеличена длина трещины. Таким образом, эффект блокирования пор в этих скважинах уменьшается. Следствие этого суждения приводит к практическому выводу о том, что во время обработки следует контролировать давление в скважине, чтобы избежать ее удлинения.

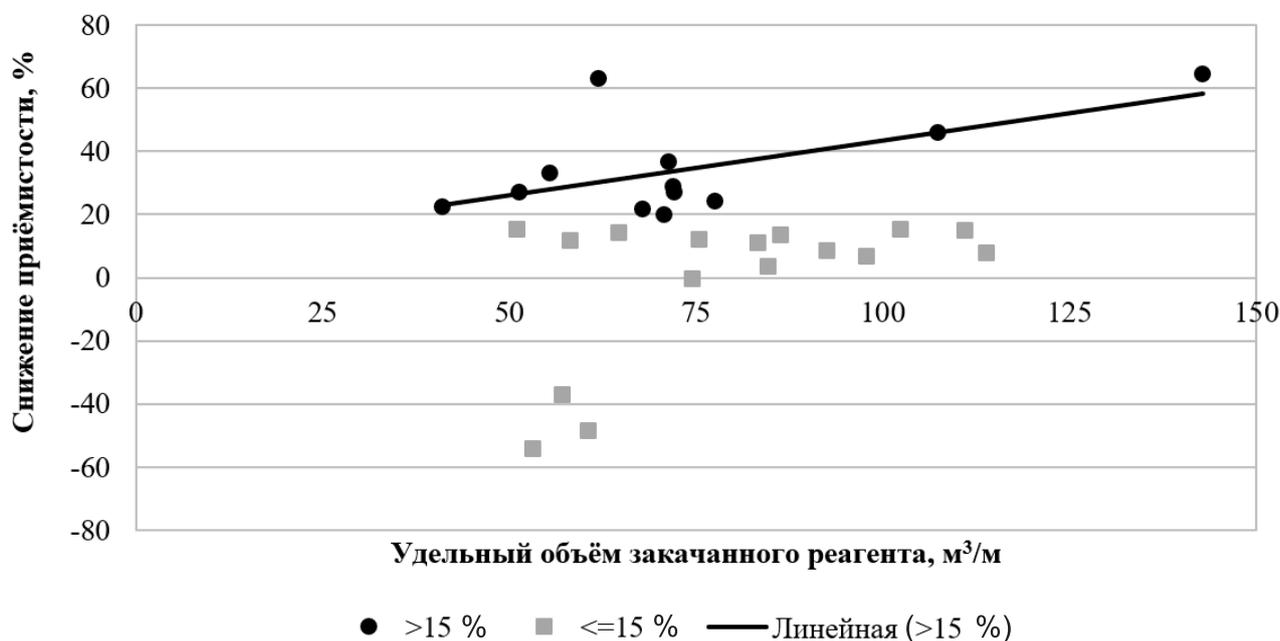


Рис. 1. Зависимость снижения приемистости обработанных скважин от удельного объема закачки реагента для двух групп нагнетательных скважин с небольшим ($\leq 15\%$) и большим ($> 15\%$) снижением приемистости

Fig. 1. Injectivity decrease in treated wells vs. specific reagent injection volume for two groups of injectors with small ($\leq 15\%$) and large ($> 15\%$) injectivity drop

Для дальнейших расчетов и анализа были выбраны четыре скважины из второй группы. Петрофизические данные по этим скважинам приведены в табл. 1. Характеристики обработки и параметры результатов закачки были представлены в табл. 2.

Таблица 1

Петрофизические данные для выбранных скважин

Table 1

Petrophysical data for selected wells

Номер скважины	Пористость, пропластка, %	Проницаемость, пропластка, мД	Толщина, пропластка, м
2092	23,6	1213	1,3
	20,9	371	1,4
	18,9	52	4,7
	20,1	106	1,6
	19,6	135	1,3
2328	15,8	15	0,9
	20,0	262	1,3
	21,9	558	1,7
	21,2	186	0,7
	20,9	352	1,1
	18,2	63	1,3
	18,8	57	3,2
	14,1	2	0,9
	17,2	49	0,5
	23,2	1034	1,0
	19,7	204	0,4
	16,4	10	2,4
	17,4	18	2,8
	15,3	4	1,8
2447	16,7	41	0,4
	22,2	667	1,1
	17,5	19	1,1
	21,0	393	3,3
	20,2	245	0,9
	17,7	20	0,5
	17,3	35	0,7
	16,6	11	0,6
	16,7	40	1,0
	16,7	12	1,3
	17,8	79	0,8
	14,7	2	0,6
	15,6	5	0,7
	14,4	2	2,1
	15,7	7	0,9
13,8	1	1,2	
2547	12,9	1	0,5
	16,9	16	0,4
	18,8	47	0,6
	20,8	342	3,1
	18,7	50	1,6
	15,0	4	1,3
	19,0	96	0,5
	19,9	253	0,7
	16,1	8	1,4
	15,3	5	1,8
	20,5	294	2,3
	17,0	39	0,8

Таблица 2

Характеристики обработки и ее эффективности

Table 2

Treatment characteristics and its efficiency

Характеристики	2092	2328	2447	2547
Концентрация суспензии и тип частиц	2 % бентонитовая глина	2 % бентонитовая глина	3 % бентонитовая глина	4 % мел
Концентрация полимера	0,5 %	0,5 %	0,5 %	0,25 %
Удельный объем закачки (на единицу толщины пласта), м ³	68	71	58	107
Падение приемистости скважины после обработки	22 %	37 %	12 %	46 %
Дополнительная добыча нефти, тыс. т	1,06 %	0,17 %	0,66 %	2,15 %

2. Модификация модели глубокого проникновения суспензии в пористую среду для слоисто-неоднородного пласта

Существующая модель глубокого проникновения суспензии в пористую среду [27] модифицируется для слоисто-неоднородного пласта, состоящего из n изолированных пропластков. Интервал времени вертикальных перетоков значительно превышает время закачки оторочки суспензии объемом менее тысячи кубических метров. Таким образом, предположение об изолированных слоях является достаточным допущением для рассматриваемого процесса [26]. Уравнения, из которых состоит модель, являются следующими [24]:

$$\frac{\partial m_i C_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial C_i}{\partial x} = -\lambda u_i C_i, \quad \frac{\partial \sigma_i}{\partial t} = \lambda u_i C_i, \quad u_i = -\frac{k_i}{\mu(1 + \beta \sigma_i)} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1)$$

где m_i – пористость, C_i – объемная концентрация частиц в потоке, t – время, u_i – скорость фильтрации, x – горизонтальная координата, λ – коэффициент фильтрации, σ_i – объемная концентрация удержанных частиц, k_i – проницаемость, μ – динамическая вязкость суспензии, β – коэффициент повреждения породы, p – поровое давление, i – номер пропластка.

После введения безразмерных переменных и критериев подобия:

$$X = \frac{x}{L}, \quad T = \frac{qt}{2LHl}, \quad \Lambda = \lambda L, \quad V_i = \frac{k_i H}{\sum_j k_j h_j}, \quad (2)$$

где q – объемный расход закачанной суспензии, L – характерный размер пласта вблизи трещины, в котором поток близок к плоскопараллельному, H – мощность пласта (суммарная толщина пропластков), l – полудлина трещины (из-за симметрии относительно скважины) [28], h_j – толщина j -го пропластка, j – номер пропластка, система уравнений принимает следующий вид в безразмерной записи:

$$\frac{\partial C_i}{\partial T} + \frac{V_i}{m_i} \frac{\partial C_i}{\partial X} = -\Lambda \frac{V_i}{m_i} C_i, \quad \frac{\partial \sigma_i}{\partial T} = \Lambda V_i C_i. \quad (3)$$

Общий объемный расход закачиваемой суспензионной смеси рассчитывается по формуле

$$q = \frac{2l \sum_j k_j h_j}{\mu} \frac{\Delta p}{L}, \quad (4)$$

где Δp – перепад давления вблизи трещины, постоянный до и после обработки.

Безразмерный объем закачки T_0 соответствует безразмерному времени закачки и вычисляется из (2) при времени закачки суспензии t_0 . Начальные и граничные условия для закачки оторочки суспензии, сопровождаемой последующей закачкой воды, следующие:

$$T = 0, \quad 0 < X < 1: \quad C_i = 0, \quad \sigma_i = 0, \quad (5)$$

$$X = 0, \quad T_0 > T > 0: \quad q = q_0, \quad C_i = C_0, \quad X = 0, \quad T > T_0: \quad q = q_1, \quad C_i = 0, \quad (6)$$

где q_0 – расход закачиваемой суспензии на забое нагнетательной скважины, C_0 – начальная концентрация частиц суспензии на забое нагнетательной скважины, q_1 – расход закачки воды, нагнетаемой после оторочки суспензии.

Решение уравнения (3) при начальных (5) и граничных условиях (6) может быть получено методом характеристик после бесконечной (очень продолжительной) закачки воды. Эта процедура приводит к следующему решению для распределения удержанных частиц

$$\sigma_i = \Lambda V_i C_0 \exp(-\Lambda X) T_0. \quad (7)$$

Скорости фильтрации в i -м пропластке до u_{i0} и после u_{i1} обработки вычисляются по закону Дарси

$$u_{i0} = -\frac{k_i \Delta p}{\mu L}, \quad u_{i1} = -\frac{k_{i1} \Delta p}{\mu L}, \quad (8)$$

где проницаемость призабойной зоны скважины после обработки k_{i1} вычисляется по формуле:

$$k_{i1} = \frac{k_i}{\int_0^1 (1 + \beta \sigma_i) dX} = \frac{k_i}{1 + \gamma V_i}, \quad (9)$$

где γ – параметр, определяемый объемом закачанной суспензии и ее свойствами:

$$\gamma = \beta C_0 T_0 (1 - \exp(-\Lambda)). \quad (10)$$

Дополнительное гидродинамическое сопротивление g_i с учетом (10) определяется по формуле

$$g_i = \int_0^1 (1 + \beta \sigma_i) dX = 1 + \beta V_i C_0 T_0 (1 - \exp(-\Lambda)). \quad (11)$$

3. Введение критерия эффективности обработки суспензией

Механизм обработки суспензией заключается в следующем. Во время течения суспензии в пористой среде некоторые частицы задерживаются и снижают проницаемость пласта. Количество подвижных и удержанных частиц больше в высокопроницаемых слоях; следовательно, падение проницаемости в низкопроницаемых слоях меньше, поэтому распределение проницаемости в слоисто-неоднородном пласте отличается до и после обработки.

Неоднородность проницаемости слоистого коллектора может быть охарактеризована коэффициентом Дикстры – Парсона или коэффициентом вариации проницаемости K_{D0} [29]. Формальное представление вариации включает логарифмическую среднюю проницаемость и проницаемость, которая определяется с вероятностью 84 %:

$$K_{D0} = \frac{k_{50} - k_{84}}{k_{50}}, \quad (12)$$

где k_{50} – 50-я перцентиль проницаемости, k_{84} – 84-я перцентиль проницаемости.

Коэффициент Дикстры – Парсона равен нулю в однородном пласте и единице в бесконечно неоднородном. Этот коэффициент, рассчитанный для начального состояния коллектора, характеризует неоднородность пласта до обработки. Этот же коэффициент, рассчитанный для проницаемостей пропластков с дополнительным сопротивлением потоку (11), определяет изменение, вызванное обработкой. Положительный результат означает снижение коэффициента Дикстры – Парсона после ВПП. Таким образом, разница коэффициентов Дикстры – Парсона до и после обработки D_{01} определяет эффективность обработки.

С другой стороны, неоднородность коллектора может быть охарактеризована среднеквадратичным отклонением безразмерной проницаемости

$$S_{0d} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i \left(\frac{k_i H}{\sum_j k_j h_j} - \frac{k_a H}{\sum_j k_j h_j} \right)^2}, \quad (13)$$

где k_a – среднее значение проницаемости пласта.

В этом случае эффективность обработки определяется разницей среднеквадратичных отклонений проницаемости до S_{0d} и после S_{1d} воздействия R_{01} : $R_{01} = S_{0d} - S_{1d}$. Введенный параметр обработки суспензией назван авторами коэффициентом выравнивания профиля приемистости.

Сравнительный анализ зависимостей двух введенных критериев от безразмерного объема закачки T_0 для скважины 2447 приведен на рис. 2. Эти зависимости показывают, что разница между коэффициентами Дикстры – Парсона до и после воздействия изменяется в небольшом интервале от нуля до 0,004, в то время как разница среднеквадратичных отклонений составляет от нуля до 0,28.

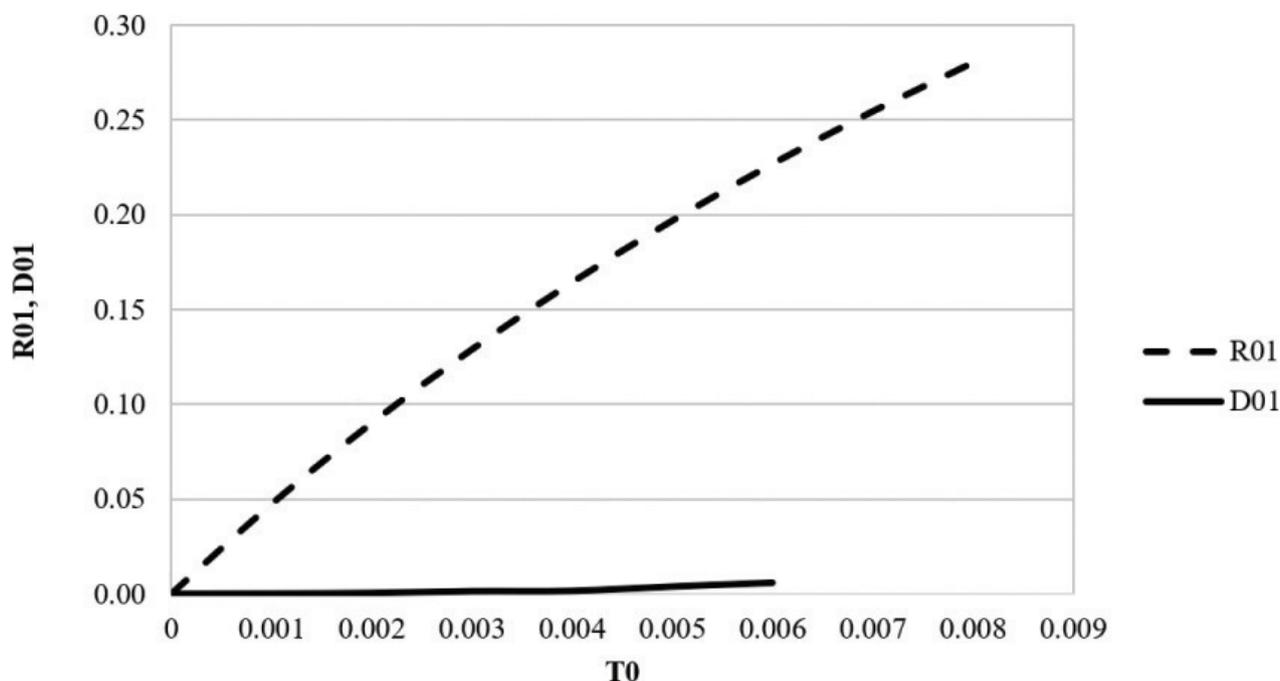


Рис. 2. Зависимость критериев эффективности ВПП от безразмерного объема закачанного реагента
 Fig. 2. Conformance treatment efficiency criteria vs. various suspension slug volume

В различных задачах оптимизации ВПП больший интервал изменения критерия дает преимущества по сравнению с критерием с низким интервалом.

4. Предлагаемая процедура оптимизации технологии ВПП

Для успешного применения технологии ВПП необходима оптимизация параметров обработки, таких как концентрация суспензии, объем оторочки. Процедура оптимизации предполагает определение критерия оптимизации. Закачка суспензии приводит к положительному и отрицательному эффектам. Положительный эффект – это увеличение коэффициента ВПП. Отрицательным эффектом является снижение приемистости скважины из-за ухудшения фильтрационно-емкостных свойств призабойной зоны. Последний эффект может быть охарактеризован отношением K_{01} приемистости до I_0 и после воздействия I_1 :

$$K_{01} = \frac{I_1}{I_0} = \sum (V_{i1} v_i), \quad (14)$$

где V_{i1} – безразмерная проницаемость после обработки, а доля толщины i -го пропластка в общей толщине пласта $v_i = \frac{h_i}{H}$.

Комплексный критерий, включающий эти два результата, может быть получен путем умножения коэффициента ВПП и снижения приемистости:

$$M = R_{01} K_{01}. \quad (15)$$

Этот критерий показывает оптимальное соотношение между выравниванием профиля приемистости и снижением приемистости. Параметры оптимизации могут быть объединены в одну переменную. Этой переменной в соответствии с (10) будет γ . Таким образом, процедура оптимизации будет сведена к определению максимума функции M по переменной γ .

Все вычисления были проведены для выбранных скважин, суспензией являлась глина со следующими параметрами: $\beta = 400$ и $\lambda = 10 \text{ м}^{-1}$ [26], полудлина трещины была рассчитана из скин-фактора. Результаты расчета полудлины трещины дают следующие величины: для скважины 2092 $l = 79$ м, для скважины 2328 $l = 35,5$ м, для скважины 2447 $l = 11,8$ м и для скважины 2547 $l = 71,4$ м. Дополнительный параметр – характерный размер призабойной зоны равен 40 м.

Процедура определения максимального значения проиллюстрирована на рис. 3. Максимальные значения для выбранных скважин приведены в табл. 3. Рассчитанные значения близки к фактическим данным (объем закачки, отнесенный к единице толщины пласта), которые берутся из промышленного

опыта. Но при отсутствии промысловых данных предлагаемая процедура будет полезна, и такие расчеты могут быть использованы в качестве вспомогательных данных.

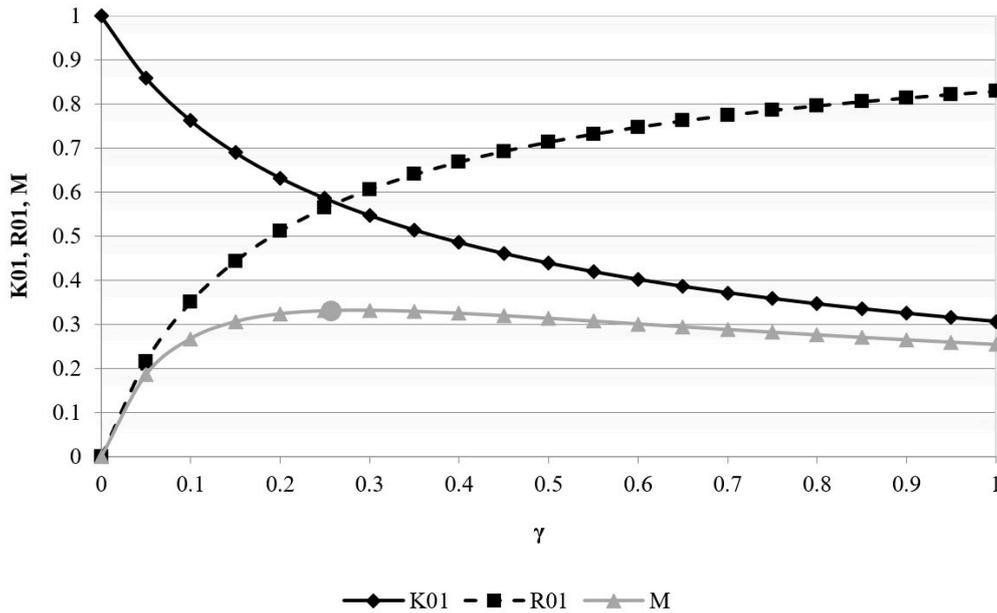


Рис. 3. Зависимость параметров K_{01} , R_{01} и M от переменной γ для скважины 2328
 Fig. 3. K_{01} , R_{01} and M functions vs. variable γ for Well 2328

Таблица 3

Оптимальные значения переменной γ для выбранных скважин

Table 3

Optimal values of γ for selected wells

Номер скважины	Оптимальное значение γ	Оптимальный объем закачки для заданных параметров на единицу толщины пласта, m^3/m	Фактический объем закачки на единицу толщины пласта, m^3/m
2092	0,351	277	68
2328	0,286	73	71
2447	0,323	25	58
2547	0,514	183	107

Следует заметить, что в соответствии с представленной процедурой можно определить не только объем закачиваемой оторочки суспензии, но и концентрацию и тип суспензии (каждому типу суспензии соответствуют свои значения параметров β и λ).

5. Влияние неоднородности пласта на эффективность обработки

В рамках сформулированной модели неоднородность пласта определяется средним значением проницаемости до воздействия k_a , среднеквадратичным отклонением проницаемости S_{k0} и среднеквадратичным отклонением проводимости S_{kh0} :

$$S_{k0} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i (k_i - k_a)^2}, \quad S_{kh0} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i (k_i h_i - \varepsilon_a)^2}, \quad (16)$$

где ε_a – среднее по всем пропласткам значение произведения проницаемости пропластка на его толщину.

Анализ влияния перечисленных параметров на оптимальное значение коэффициента γ представлен на рис. 4–6. Увеличение среднего значения проницаемости требует большего объема оторочки для достижения оптимального значения γ . Коэффициент ВПП R_{01} также повышается, но не так быстро.

Напротив, большая степень неоднородности пласта, определяемая большими среднеквадратичными отклонениями S_{k0} и S_{kh0} , приводит к уменьшению параметра оптимизации, связанного с объемом оторочки. Коэффициент ВПП немного уменьшается. Слабое влияние неоднородности пласта на коэффициент ВПП может быть объяснено тем, что этот коэффициент является безразмерным.

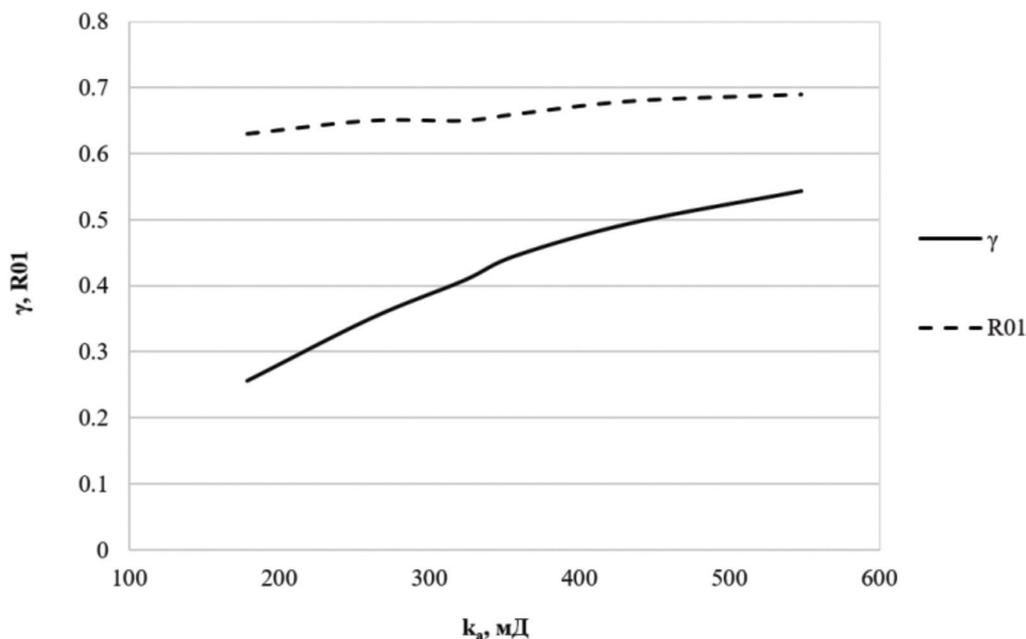


Рис. 4. Зависимость коэффициента ВПП R_{01} и оптимальной величины коэффициента γ от средней проницаемости пласта k_a

Fig. 4. Conformance improvement factor R_{01} and optimal of the γ factor value vs. mean reservoir permeability k_a

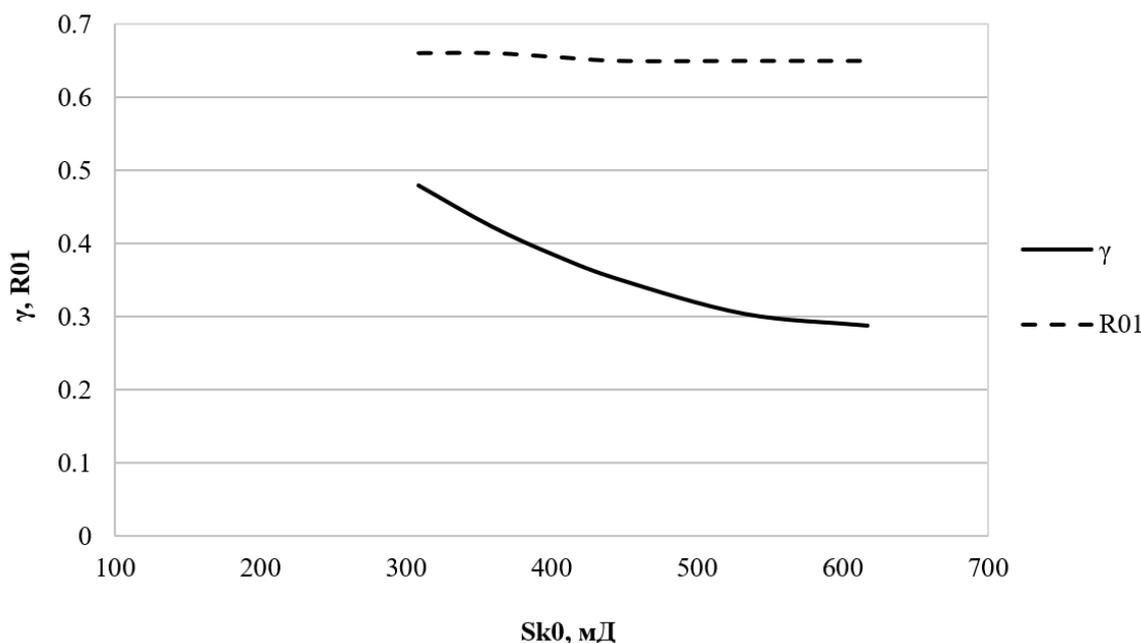


Рис. 5. Зависимость коэффициента ВПП R_{01} и оптимальной величины коэффициента γ от среднеквадратичного отклонения проницаемостей пропластков S_{k0}

Fig. 5. Conformance improvement factor R_{01} and optimal of the γ factor value vs. the mean square deviation of reservoir permeability S_{k0}

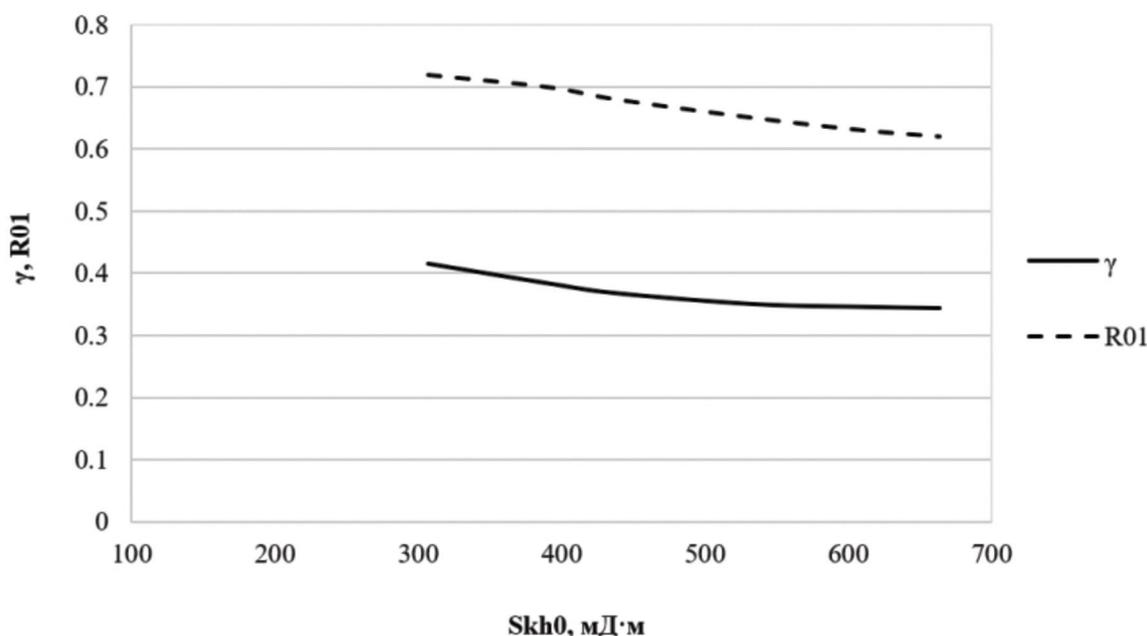


Рис. 6. Зависимость коэффициента ВПП R_{01} и оптимальной величины коэффициента γ от среднеквадратичного отклонения проводимостей пропластков S_{kh0}

Fig. 6. Conformance improvement factor R_{01} and optimal of the γ factor value vs. the mean square deviation of reservoir conductivity S_{kh0}

Заключение

В результате работы могут быть сделаны следующие выводы.

С использованием критерия приемистости установлено наличие двух групп скважин для одного из месторождений в Западной Сибири. Для одной из этих групп приемистость снижается менее чем на 15 %, для другой приемистость снижается более чем на 15 %. Для последующего анализа была выбрана группа скважин с наибольшим падением приемистости.

Введен критерий эффективности обработки суспензии. Этот критерий представляет собой разницу среднеквадратичных отклонений безразмерной проницаемости до и после обработки. Показано, что этот критерий более значительно возрастает с увеличением объема закачиваемой суспензии, чем классический коэффициент Дикстры — Парсонса.

Установлено наличие оптимального объема закачки, что приводит к наиболее эффективному выравниванию профиля приемистости при относительно небольшом снижении общей приемистости. Определены рекомендуемые объемы закачки для скважин одного из месторождений Западной Сибири.

Проведен анализ влияния неоднородности пласта на эффективность обработки суспензией. Увеличение среднего значения проницаемости приводит к большему оптимальному объему оторочки. Напротив, повышение степени неоднородности коллектора приводит к уменьшению оптимального объема закачиваемой суспензии.

Литература

- [1] Canbolat S., Parlaktuna M. Polymer gel conformance on oil recovery in fractured medium: Visualization and verification // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2019. Vol. 182, p. 106289. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.petrol.2019.106289>.
- [2] Sagbana P.I., Abushaikha A.S. A comprehensive review of the chemical-based conformance control methods in oil reservoirs // Journal of Petroleum Exploration and Production Technology. 2021. Vol. 11. P. 2233–2257. DOI: <http://doi.org/10.1007/s13202-021-01158-6>.
- [3] Caili D., Qing Y., Fulin Z. In-depth Profile Control Technologies in China — A Review of the State of the Art // Petroleum Science and Technology. 2010. Vol. 28, Issue 13. P. 1307–1315. DOI: <http://doi.org/10.1080/10916460903419164>.

- [4] Fuseni A.B., AlSofi A.M., AlJulaih A.H., AlAseeri A.A. Development and evaluation of foam-based conformance control for a high-salinity and high-temperature carbonate // *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*. 2018. Vol. 8, Issue 4. P. 1341–1348. DOI: <http://doi.org/10.1007/s13202-018-0431-x>.
- [5] Seright R., Brattekas B. Water shutoff and conformance improvement: an introduction // *Petroleum Science*. 2021. Vol. 18. P. 450–478. DOI: <http://doi.org/10.1007/s12182-021-00546-1>.
- [6] Zhao Y., Leng J., Lin B., Wei M., Bai B. Experimental study of microgel conformance-control treatment for a polymer-flooding reservoir containing superpermeable channels // *SPE Journal*. 2021. Vol. 26, Issue 4. P. 2305–2317. DOI: <http://dx.doi.org/10.2118/205486-PA>.
- [7] Старковский А.В., Старковский В.А. Перераспределение фильтрационных потоков на нефтяных месторождениях гелеобразующими составами на основе силиката натрия // *Бурение и нефть*. 2009. № 1. С. 34–37. URL: <https://burneft.ru/archive/issues/2009-01/11>.
- [8] Feng Q., Zhang G., Yin X., Luan Z. Numerical simulation of the blocking process of gelled particles in porous media with remaining polymers // *Petroleum Science*. 2009. Vol. 6. P. 284–288. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s12182-009-0045-5>.
- [9] Kumai J., Sasagawa S., Horie M., Yui Y. A novel method for polyacrylamide gel preparation using N-hydroxysuccinimide-acrylamide ester to study cell-extracellular matrix mechanical interactions // *Frontiers in Materials*. 2021. Vol. 8, Paper 637278. DOI: <http://doi.org/10.3389/fmats.2021.637278>.
- [10] Li Q., Wang L., Liu Q., Hong W., Yang C. Fatigue damage-resistant physical hydrogel adhesion // *Frontiers in Robotics and AI*. 2021. Vol. 8, Paper 666343. DOI: <http://doi.org/10.3389/frobt.2021.666343>.
- [11] Sun X., Bai B., Alhuraishawy A.K., Zhu D. Understanding the Plugging Performance of HPAM-Cr (III) Polymer Gel for CO2 Conformance Control // *SPE Journal*. 2021. Vol. 26, Issue 5. P. 3109–3118. DOI: <http://doi.org/10.2118/204229-PA>.
- [12] Seright R.S. Use of preformed gels for conformance control in fractured systems // *SPE Production & Operations*. 1997. Vol. 12, Issue 01. Pp. 59–65. DOI: <http://doi.org/10.2118/35351-PA>.
- [13] Lu G., Zhao J., Li S., Chen Y., Li C., Wang Y., Li D. Incorporation of Partially Hydrolyzed Polyacrylamide With Zwitterionic Units and Poly(Ethylene Glycol) Units Toward Enhanced Tolerances to High Salinity and High Temperature // *Frontiers in Materials*. 2021. Vol. 8, Paper 788746. DOI: <http://doi.org/10.3389/fmats.2021.788746>.
- [14] Алтунина Л. К., Кувшинов В. А. Физико-химические методы увеличения нефтеотдачи пластов // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер.: Физика и химия*. 2013. Вып. 2. С. 46–76. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19111874>. EDN: <https://www.elibrary.ru/qcfwat>.
- [15] Таирова С.В. Гелеобразующие составы как метод повышения нефтеотдачи пластов // *Вестник недропользователя Ханты-Мансийского автономного округа*. 2002. № 8. С. 66–71. URL: <http://www.oilnews.ru/8-8/geobrazuyushhie-sostavy-kak-metod-povysheniya-nefteotdachi-plastov/>.
- [16] Bai B., Liu Y., Coste J. P., Li L. Preformed Particle Gel for Conformance Control: Transport Mechanism Through Porous Media // *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*. 2007. Vol. 10, Issue 2. P. 176–184. DOI: <http://doi.org/10.2118/89468-PA>.
- [17] Ding X., Dai C., Sun Y., Zhu M., Liu Y., Chang Y., Zhao G., You Q., Shaikh A. Conformance control study by micrometer sized dispersed particle gel in three-dimensional tight oil fracture network // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 2021. Vol. 197, Paper 108112. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.petrol.2020.108112>.
- [18] Mousavi Moghadam A., Vafaie Sefti M., Baghban Salehi M., Dadvand Koochi A. Preformed particle gel: evaluation and optimization of salinity and pH on equilibrium swelling ratio // *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*. 2012. Vol. 2. P. 85–91. DOI: <http://doi.org/10.1007/s13202-012-0024-z>.
- [19] Tongwa P., Baojun B. A more superior preformed particle gel with potential application for conformance control in mature oilfields // *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*. 2015. Vol. 5, P. 201–210. DOI: <http://doi.org/10.1007/s13202-014-0136-8>.
- [20] Wang J., Liu H. Q., Zhang H. L., Sepehrnoori K. Simulation of deformable preformed particle gel propagation in porous media // *AIChE Journal*. 2017. Vol. 63, Issue 10. Pp. 4628–4641. DOI: <https://doi.org/10.1002/aic.15793>.
- [21] Газизов А.Ш., Никифоров А.И., Газизов А.А. Математическая модель вытеснения нефти водой с применением полимердисперсных систем // *Инженерно-физический журнал*. 2002. Т. 75, № 1. С. 91–94. URL: http://www.itmo.by/publications/jepeter/bibl/?ELEMENT_ID=6087.
- [22] Хисамов Р.С., Газизов А.А., Газизов А.Ш. Научно-технологические основы применения полимердисперсных систем для увеличения нефтеотдачи // *Нефтяное хозяйство*. 2002. № 11. С. 52–56. URL: https://oil-industry.net/Journal/archive_detail.php?art=2502.
- [23] Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. Москва: Недра, 1984. 211 с. URL: <https://www.geokniga.org/bookfiles/geokniga-dvizenie-zhidkostey-i-gazov-v-prirodnih-plastah-gibarenblatt-vmentov-vmryzhik.pdf>.

- [24] Vaz A.S.L., Bedrikovetsky P., Furtado C.J.A., Souza A.L. Well Injectivity Decline for Nonlinear Filtration of Injected Suspension: Semi-Analytical Model // Journal of Energy Resources Technology. 2010. Vol. 132, Issue 3. Paper 033301. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4002242>.
- [25] Низаев Р.Х., Никифоров А.И., Газизов А.Ш. Оценка воздействия на нефтяные пласты полимердисперсными системами // Нефтяное хозяйство. 2009. № 8. С. 50–53. URL: https://oil-industry.net/Journal/archive_detail.php?art=179807.
- [26] Федоров К.М., Шевелёв А.П., Кобяшев А.В., Захаренко В.А., Кочетов А.В., Неклеса Р.С., Усольцев А.В. Определение фильтрационных параметров суспензии по экспериментальным данным // Society of Petroleum Engineers: статья с Российской нефтегазовой технической конференции SPE-202018-RU. Москва, 2020. С. 1–16.
- [27] Bedrikovetsky P.G., Santos P.M., Neto A.M.M., Riente A.F. Application of Fractional Flow Theory for Particle- and Fines-Induced Formation Damage // Society of Petroleum Engineers: SPE Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference. Cartagena, Colombia, 2009. Paper SPE-121822-MS. DOI: <http://doi.org/10.2118/121822-MS>.
- [28] Татосов А.В., Шляпкин А.С. Движение проппанта в раскрывающейся трещине гидроразрыва пласта // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, Вып. 2. С. 217–226. DOI: <http://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-2-217-226>.
- [29] Уиллхайт Г.П. Заводнение пластов. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 792 с.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-1-74-88

Submitted: 24.01.2023

Revised: 27.02.2023

Accepted: 30.05.2023

K.M. Fedorov

University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation

E-mail: k.m.fedorov@utmn.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0347-3930>

R.M. Ganopolskiy

University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation

E-mail: r.m.ganopolskiy@utmn.ru.

A.Y. Gilmanov

University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation

E-mail: a.y.gilmanov@utmn.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7115-1629>

A.P. Shevelev

University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation

E-mail: a.p.shevelev@utmn.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0017-4871>

OPTIMIZATION PROCEDURE FOR CONFORMANCE CONTROL

ABSTRACT

The article is devoted to the development of an optimization procedure for conformance control treatment. Currently, due to the significant share of reservoirs with high water cut, it is relevant to use methods that allow reducing the rate of production water cut increase. One of the most common methods to do this is to improve conformance by injecting suspension into the reservoir. The classical model of deep bed suspension migration has shown itself well for calculating the technological parameters of treatment, but it does not contain criteria for optimizing the process. The introduction of such criteria and their physical justification is the purpose of this work. The following objectives were set: modification of the classical model of deep bed suspension migration for layered strata, introduction of criteria of suspension treatment efficiency, and optimization of the process. Mathematical model consists of mass conservation laws and Darcy's law. Initial data were selected for one of the fields in West Siberia, where suspension treatments were carried out to improve conformance. The field experience of these treatments is analyzed, the wells where the treatment was successful are determined. The new criterion for the effectiveness of suspension treatment is introduced. This criterion is the difference in the standard deviations of the flow rate along the layers before and after the treatment. It is established that this difference more clearly demonstrates the injectivity profile exchange than the classical Dykstra-Parsons criterion. The optimization procedure allows assessing the required slug volume that provides the maximum injectivity profile redistribution.

Key words: conformance control; deep bed suspension migration; suspension injection; optimization; injectivity ratio.

Citation. Fedorov K.M., Ganopolskiy R.M., Gilmanov A.Y., Shevelev A.P. Optimization procedure for conformance control. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 74–88. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-1-74-88>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Fedorov K.M., 2023

Konstantin M. Fedorov — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, scientific supervisor of the Institute of Physics and Technology, University of Tyumen, 6, Volodarskogo Street, Tyumen, 625003, Russian Federation.

© Ganopolskiy R.M., 2023

Rodion M. Ganopolskiy — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, head of the Department of Modeling of Physical Processes and Systems, University of Tyumen, 6, Volodarskogo Street, Tyumen, 625003, Russian Federation.

© Gilmanov A.Ya., 2023

Alexander Ya. Gilmanov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, senior lecturer of the Department of Modeling of Physical Processes and Systems, University of Tyumen, 6, Volodarskogo Street, Tyumen, 625003, Russian Federation.

© Shevelev A.P., 2023

Alexander P. Shevelev — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Modeling of Physical Processes and Systems, University of Tyumen, 6, Volodarskogo Street, Tyumen, 625003, Russian Federation.

References

- [1] Canbolat S., Parlaktuna M. Polymer gel conformance on oil recovery in fractured medium: Visualization and verification. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2019, vol. 182, paper 106289. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.petrol.2019.106289>
- [2] Sagbana P. I., Abushaikha A. S. A comprehensive review of the chemical-based conformance control methods in oil reservoirs. *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*, 2021, vol. 11, pp. 2233–2257. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13202-021-01158-6>.
- [3] Caili D., Qing Y., Fulin Z. In-depth Profile Control Technologies in China – A Review of the State of the Art. *Petroleum Science and Technology*, 2010, vol. 28, issue 13, pp. 1307–1315. DOI: <http://doi.org/10.1080/10916460903419164>.
- [4] Fuseni A.B., AlSofi A.M., AlJulaih A.H., AlAseeri A.A. Development and evaluation of foam-based conformance control for a high-salinity and high-temperature carbonate. *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*, 2018, vol. 8, issue 4, pp. 1341–1348. DOI: <http://doi.org/10.1007/s13202-018-0431-x>.
- [5] Seright R., Brattakas B. Water shutoff and conformance improvement: an introduction. *Petroleum Science*, 2021, vol. 18, pp. 450–478. DOI: <http://doi.org/10.1007/s12182-021-00546-1>.
- [6] Zhao Y., Leng J., Lin B., Wei M., Bai B. Experimental study of microgel conformance-control treatment for a polymer-flooding reservoir containing superpermeable channels. *SPE Journal*, 2021, vol. 26, issue 4, pp. 2305–2317. DOI: <http://dx.doi.org/10.2118/205486-PA>.
- [7] Starkovsky A.V., Starkovsky V.A. Technologies of redistribution of filtrational streams on the petroleum deposits by use on the basis of sodium silicate the helium formed composition. *Burenie i neft'*, 2009, no. 1, pp. 34–37. Available at: <https://burneft.ru/archive/issues/2009-01/11>. (In Russ.)
- [8] Feng Q., Zhang G., Yin X., Luan Z. Numerical simulation of the blocking process of gelled particles in porous media with remaining polymers. *Petroleum Science*, 2009, vol. 6, pp. 284–288. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s12182-009-0045-5>.
- [9] Kumai J., Sasagawa S., Horie M., Yui Y. A novel method for polyacrylamide gel preparation using N-hydroxysuccinimide-acrylamide ester to study cell-extracellular matrix mechanical interactions. *Frontiers in Materials*, 2021, vol. 8, paper 637278. DOI: <http://doi.org/10.3389/fmats.2021.637278>.
- [10] Li Q., Wang L., Liu Q., Hong W., Yang C. Fatigue damage-resistant physical hydrogel adhesion. *Frontiers in Robotics and AI*, 2021, vol. 8, paper 666343. DOI: <http://doi.org/10.3389/frobt.2021.666343>.

- [11] Sun X., Bai B., Alhuraishawy A.K., Zhu D. Understanding the Plugging Performance of HPAM-Cr (III) Polymer Gel For CO₂ Conformance Control. *SPE Journal*, 2021, vol. 26, issue 05, pp. 3109–3118. URL: <http://doi.org/10.2118/204229-PA>.
- [12] Seright R.S. Use of Preformed Gels for Conformance Control in Fractured Systems. *SPE Production & Operations*, 1996, vol. 12, issue 01, pp. 59–65. DOI: <http://doi.org/10.2118/35351-PA>.
- [13] Lu G., Zhao J., Li S., Chen Y., Li C., Wang Y., Li D. Incorporation of Partially Hydrolyzed Polyacrylamide With Zwitterionic Units and Poly(Ethylene Glycol) Units Toward Enhanced Tolerances to High Salinity and High Temperature. *Frontiers in Materials*, 2021, vol. 8, paper 788746. DOI: <http://doi.org/10.3389/fmats.2021.788746>.
- [14] Altunina L.K., Kuvshinov V.A. Physico-chemical methods for enhanced oil recovery. *Vestnik of Saint-Petersburg University. Physics and Chemistry*, 2013, no. 2, pp. 46–76. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19111874>. EDN: <https://www.elibrary.ru/qcfwat>. (In Russ.)
- [15] Tairova S.V. Gel-forming compositions as an enhanced oil recovery method. *Vestnik nedropol'zovatelya Khanty-Mansiyskogo avtonomnogo okruga*, 2002, no. 8, pp. 66–71. Available at: <http://www.oilnews.ru/8-8/geleobrazuyushhie-sostavy-kak-metod-povysheniya-nefteotdachi-plastov>. (In Russ.)
- [16] Bai B., Liu Y., Coste J.P., Li L. Preformed Particle Gel for Conformance Control: Transport Mechanism Through Porous Media. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 2007, vol. 10, issue 2, pp. 176–184. DOI: <http://doi.org/10.2118/89468-PA>.
- [17] Ding X., Dai C., Sun Y., Zhu M., Liu Y., Chang Y., Zhao G., You Q., Shaikh A. Conformance control study by micrometer sized dispersed particle gel in three-dimensional tight oil fracture network. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2021, vol. 197, paper 108112. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2020.108112>.
- [18] Mousavi Moghadam A., Vafaie Sefti M., Baghban Salehi M., Dadvand Koochi A. Preformed particle gel: evaluation and optimization of salinity and pH on equilibrium swelling ratio. *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*, 2012, vol. 2, pp. 85–91. DOI: <http://doi.org/10.1007/s13202-012-0024-z>.
- [19] Tongwa P., Baojun B. A more superior preformed particle gel with potential application for conformance control in mature oilfields. *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*, 2015, vol. 5, pp. 201–210. DOI: <http://doi.org/10.1007/s13202-014-0136-8>.
- [20] Wang J., Liu H.Q., Zhang H.L., Sepehrnoori K. Simulation of deformable preformed particle gel propagation in porous media. *AIChE Journal*, 2017, vol. 63, issue 10, pp. 4628–4641. DOI: <http://doi.org/10.1002/aic.15793>.
- [21] Gazizov A.Sh., Nikiforov A.I., Gazizov A.A. Mathematical model of oil displacement by water with the use of polymer-disperse systems. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2002, vol. 75, no. 1, pp. 91–94. Available at: http://www.itmo.by/publications/jepeter/bibl/?ELEMENT_ID=6087. (In Russ.)
- [22] Khisamov R.S., Gazizov A.A., Gazizov A.Sh. Fundamentals of polymer-suspension systems application for oil recovery enhancement. *Neftyanoe Khozyaistvo = Oil Industry*, 2002, no. 11, pp. 52–56. Available at: https://oil-industry.net/Journal/archive_detail.php?art=2502. (In Russ.)
- [23] Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. Theory of fluid flows through natural rocks. Moscow: Nedra, 1984, 211 p. Available at: <https://www.geokniga.org/bookfiles/geokniga-dvizhenie-zhidkostey-i-gazov-v-prirodnih-plastah-gibarenblatt-vmentov-vmryzhik.pdf>. (In Russ.)
- [24] Vaz A.S.L., Bedrikovetsky P., Furtado C.J.A., Souza A.L. Well Injectivity Decline for Nonlinear Filtration of Injected Suspension: Semi-Analytical Model. *Journal of Energy Resources Technology*, 2010, vol. 132, issue 3, paper 033301. DOI: <http://doi.org/10.1115/1.4002242>.
- [25] Nizaev R.Kh., Nikiforov A.I., Gazizov A.Sh. Assessment of polymer-dispersed systems efficiency. *Neftyanoe Khozyaistvo = Oil Industry*, 2009, no. 8, pp. 50–53. Available at: https://oil-industry.net/Journal/archive_detail.php?art=179807. (In Russ.)
- [26] Fedorov K.M., Shevelev A.P., Kobyashev A.V., Zakharenko V.A., Kochetov A.V., Neklesa R.S., Usoltsev A.V. Determination of suspension filtration parameters from experimental data. In: *Society of Petroleum Engineers: SPE Russian Petroleum Technology Conference paper SPE-202018-MS*. Moscow, 2020, pp. 1–16. (In Russ.)
- [27] Bedrikovetsky P.G., Santos P.M., Neto A.M.M., Riente A.F. Application of fractional flow theory for particle- and fines-induced formation damage. *Society of Petroleum Engineers: SPE Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference*. Cartagena, Colombia, 2009. Paper SPE-121822-MS. DOI: <http://doi.org/10.2118/121822-MS>.
- [28] Tatosov A.V., Shlyapkin A.S. The motion of propping agent in an opening crack in hydraulic fracturing plast. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, vol. 18, issue 2, pp. 217–226. DOI: <http://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-2-217-226>. (In Russ.)
- [29] Willhite G.P. Waterflooding. Moscow-Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy, NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», 2009. 792 p. (In Russ.)

ФИЗИКА PHYSICS



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-1-89-101

УДК 517.9; 519.7; 530.145.83

Дата: поступления статьи: 08.02.2023
после рецензирования: 29.03.2023
принятия статьи: 30.05.2023

А.Р. Багров

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: alexander.bagrov00@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1098-0300>

Е.К. Башкиров

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8682-4956>

ПЕРЕПУТЫВАНИЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТРЕХКУБИТНОЙ МОДЕЛИ ДЖЕЙНСА — КАММИНГСА

АННОТАЦИЯ

В данной статье исследована динамика перепутывания пар кубитов в системе трех идентичных кубитов, нерезонансно взаимодействующих с выделенной модой микроволнового резонатора без потерь со средой Керра посредством однофотонных переходов. Найдено решение квантового временного уравнения Шредингера для полной волновой функции системы для начальных сепарабельных, бисепарабельных и истинных перепутанных состояний кубитов и фоковского начального состояния поля резонатора. На основе указанных решений проведено вычисление критерия перепутанности пар кубитов – отрицательности. Результаты численного моделирования отрицательности пар кубитов показали, что наличие расстройки и керровской нелинейности в случае начального неперепутанного состояния пары кубитов может приводить к существенному увеличению степени их перепутывания. В случае начального перепутанного состояния пары кубитов расстройка и керровская среда могут приводить к существенной стабилизации начального перепутывания кубитов. Показано также, что наличие расстройки и керровская среда могут приводить к исчезновению эффекта мгновенной смерти перепутывания кубитов.

Ключевые слова: кубиты; нерезонансное взаимодействие; расстройка, резонатор; однофотонные переходы; нелинейность Керра; перепутывание; отрицательность; мгновенная смерть перепутывания.

Цитирование. Багров А.Р., Башкиров Е.К. Перепутывание в нелинейной трехкубитной модели Джейнса — Каммингса // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2023. Т. 29, № 1. С. 89–101. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-1-89-101>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Багров А.Р., 2023

Багров Александр Романович — бакалавр кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

© Башкиров Е.К., 2023

Башкиров Евгений Константинович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Исследования многокубитных перепутанных состояний является одной из приоритетных задач квантовой информатики [1–7]. Перепутанные состояния естественных или искусственных атомов (кубитов) необходимы для функционирования таких квантовых устройств, как квантовые компьютеры, квантовые сети и др. [8–16]. Для теоретического и экспериментального описания свойств перепутанных состояний необходимо ввести количественные критерии степени перепутывания кубитов. В настоящее время указанная проблема полностью решена для двухкубитных систем [17–19]. Однако для систем, содержащих более чем два кубита, ситуация более сложная, поскольку для них до настоящего времени не удается ввести аналогичные критерии. Ненулевые значения критериев перепутывания, введенных для многокубитных систем, свидетельствуют лишь о наличии перепутанности в системе, но не дают информации о ее конкретной структуре и, следовательно, о возможности использования данных критериев для количественной оценки степени перепутывания кубитов [20; 21]. Проблема состоит еще в том, что существуют несколько неэквивалентных классов перепутанных состояний [22–24]. Для простейшего случая трехкубитной системы для чистых перепутанных состояний обычно выделяют три типа: полностью сепарабельные состояния, бисепарабельные состояния и подлинные перепутанные состояния [25–30]. К последним относятся перепутанные состояния Гринберга — Хорна — Цайлингера (*GHZ*-состояния) и перепутанные состояния Вернера (*W*-состояния). При этом *GHZ*-состояния весьма неустойчивы по отношению к потере системой частиц. Такие состояния могут использоваться для детерминированной телепортации или плотного кодирования. Напротив, *W*-состояния максимально устойчивы не только к потерям частиц, но и к воздействию внешнего шума. Такие состояния могут использоваться при квантовой обработке информации.

В нашей предыдущей работе мы детально исследовали динамику перепутывания в системе трех кубитов, резонансно взаимодействующих с модой квантового электромагнитного поля в идеальном резонаторе [31]. Представляет большой интерес обобщить полученные результаты на случай нерезонансного взаимодействия трех кубитов с электромагнитным полем резонатора с нелинейной средой Керра. Такой интерес обусловлен тем, что в ряде работ на примере двухкубитных моделей было показано, что учет расстройки и нелинейной среды Керра может существенно увеличить степень перепутывания кубитов, индуцированного полем резонатора, в случае сепарабельных начальных состояний кубитов и существенно стабилизировать осцилляции Раби параметра перепутывания кубитов в случае их перепутанного начального состояния [32–36]. Для некоторых начальных состояний кубитов включение расстройки и нелинейности может также приводить к исчезновению эффекта мгновенной смерти перепутывания кубитов.

В настоящей статье мы исследовали динамику системы, состоящей из трех идентичных кубитов, нерезонансно взаимодействующих с модой фоковского квантового электромагнитного поля идеального нелинейного резонатора со средой Керра посредством однофотонных переходов. Полученные решения квантового уравнения эволюции использованы для расчета параметра перепутывания пар кубитов. Для оценки количественной меры перепутывания пар кубитов использовалась отрицательность или параметр Переса — Хородецких [17; 18].

1. Модель и решение временного уравнения Шредингера

Рассмотрим систему трех идентичных сверхпроводящих кубитов A_1, A_2, A_3 с энергетической целью $\hbar\Omega$, нерезонансно взаимодействующих с модой квантового электромагнитного поля идеального микроволнового компланарного резонатора частоты ω со средой Керра. Гамильтониан такой модели в системе отсчета вращающейся с частотой моды поля ω можно представить в виде

$$H = (1/2)\hbar\Delta \sum_{i=1}^3 R_i^z + \hbar\gamma \sum_{i=1}^3 (\eta^+ R_i^- + R_i^+ \eta) + \hbar\Xi \eta^{+2} \eta^2, \quad (1.1)$$

где η^+ (η^-) — оператор рождения (уничтожения) фотонов моды поля, R_i^+ (R_i^-) — операторы перехода из основного $|-\rangle_i$ в возбужденное $|+\rangle_i$ (из возбужденного в основное) состояние i -го кубита, γ — параметр кубит-фотонного взаимодействия, $\Delta = \Omega - \omega$ — расстройка и Ξ — параметр керровской нелинейности.

Выберем в качестве начальных состояний подсистемы кубитов сепарабельные состояния вида

$$|\Phi_1(0)\rangle_{A_1 A_2 A_3} = |+, -, -\rangle, \quad (1.2)$$

бисепарабельные состояния вида

$$|\Phi_2(0)\rangle_{A_1 A_2 A_3} = \cos \theta |+, +, -\rangle + \sin \theta |+, -, +\rangle, \quad (1.3)$$

а также истинно перепутанные состояния W -типа

$$|\Phi_3(0)\rangle_{A_1 A_2 A_3} = a|+, +, -\rangle + b|+, -, +\rangle + c|-, +, +\rangle, \quad (1.4)$$

где

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1,$$

и истинно перепутанные состояния GHZ -типа

$$|\Phi_4(0)\rangle_{A_1 A_2 A_3} = d|+, +, +\rangle + g|-, -, -\rangle, \quad (1.5)$$

где

$$|d|^2 + |g|^2 = 1.$$

В качестве начального состояния поля резонатора выберем фоковские состояния вида

$$|\Phi(0)\rangle_F = |n\rangle \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Для описания динамики рассматриваемой системы нам необходимо найти временную волновую функцию системы. Введем для нашей системы число возбуждений N , равное $N = n_1 + n$, где n_1 – число кубитов, приготовленных в возбужденном состоянии. Для чисел возбуждения $N \geq 3$ будем использовать следующие базисные векторы:

$$\begin{aligned} &|+, +, +, n\rangle, |+, +, -, n+1\rangle, |+, -, +, n+1\rangle, |-, +, +, n+1\rangle, \\ &|+, -, -, n+2\rangle, |-, +, -, n+2\rangle, |-, -, +, n+2\rangle, |-, -, -, n+3\rangle. \end{aligned}$$

Тогда для начальных состояний кубитов (1.2)–(1.5) волновая функция в последующие моменты времени t может быть записана следующим образом:

$$|\psi(t)\rangle_{A_1 A_2 A_3 F} = B_1(t)|+, +, +, n\rangle + B_2(t)|+, +, -, n+1\rangle + B_3(t)|+, -, +, n+1\rangle + B_4(t)|-, +, +, n+1\rangle + B_5(t)|+, -, -, n+2\rangle + B_6(t)|-, +, -, n+2\rangle + B_7(t)|-, -, +, n+2\rangle + B_8(t)|-, -, -, n+3\rangle. \quad (1.6)$$

Для описания динамики рассматриваемой системы с гамильтонианом (1.1) необходимо решить квантовое уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H|\psi(t)\rangle.$$

Подставляя в это уравнение волновую функцию вида (1.6), получаем для коэффициентов $B_i(t)$

$$\left\{ \begin{aligned} i\dot{B}_1(t) &= \gamma\sqrt{n+1}(B_4(t) + B_3(t) + B_2(t)) + \Xi n(n-1)B_1(t) + \frac{3\Delta}{2}B_1(t), \\ i\dot{B}_2(t) &= \gamma(\sqrt{n+2}B_6(t) + \sqrt{n+2}B_5(t) + \sqrt{n+1}B_1(t)) + \Xi B_2(t)n(n+1) + \frac{\Delta}{2}B_2(t), \\ i\dot{B}_3(t) &= \gamma(\sqrt{n+2}B_7(t) + \sqrt{n+2}B_5(t) + \sqrt{n+1}B_1(t)) + \Xi B_3(t)n(n+1) + \frac{\Delta}{2}B_3(t), \\ i\dot{B}_4(t) &= \gamma(\sqrt{n+1}B_1(t) + B_7(t)\sqrt{n+2} + B_6(t)\sqrt{n+2}) + \Xi B_4(t)n(n+1) + \frac{\Delta}{2}B_4(t), \\ i\dot{B}_5(t) &= \gamma(B_8(t)\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}B_2(t) + \sqrt{n+2}B_3(t)) + \Xi B_5(t)(n+2)(n+1) - \frac{\Delta}{2}B_5(t), \\ i\dot{B}_6(t) &= \gamma(B_2(t)\sqrt{n+2} + B_4(t)\sqrt{n+2} + B_8(t)\sqrt{n+3}) + \Xi B_6(t)(n+2)(n+1) - \frac{\Delta}{2}B_6(t), \\ i\dot{B}_7(t) &= \gamma(B_4(t)\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}B_8(t) + B_3(t)\sqrt{n+2}) + \Xi B_7(t)(n+2)(n+1) - \frac{\Delta}{2}B_7(t), \\ i\dot{B}_8(t) &= \gamma\sqrt{n+3}(B_5(t) + B_6(t) + B_7(t)) + \Xi B_8(t)(n+3)(n+2) - \frac{3\Delta}{2}B_8(t). \end{aligned} \right. \quad (1.7)$$

Для числа возбуждений $N = 2$ будем использовать следующие базисные векторы:

$$\begin{aligned} &|+, +, -, 0\rangle, |+, -, +, 0\rangle, |-, +, +, 0\rangle, \\ &|+, -, -, 1\rangle, |-, +, -, 1\rangle, |-, -, +, 1\rangle, |-, -, -, 2\rangle. \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае временная волновая функция может быть записана следующим образом:

$$|\psi_{A_1 A_2 A_3 F}(t)\rangle_2 = x_1(t)|+, +, -, 0\rangle + x_2(t)|+, -, +, 0\rangle + x_3(t)|-, +, +, 0\rangle + x_4(t)|+, -, -, 1\rangle + x_5(t)|-, +, -, 1\rangle + x_6(t)|-, -, +, 1\rangle + x_7(t)|-, -, -, 2\rangle. \quad (1.8)$$

Система дифференциальных уравнений для коэффициентов $x_i(t)$ получается аналогично предыдущему случаю:

$$\left\{ \begin{array}{l} i\dot{x}_1(t) = \gamma(x_5(t) + x_4(t)) + \frac{\Delta}{2}x_1(t), \\ i\dot{x}_2(t) = \gamma(x_6(t) + x_4(t)) + \frac{\Delta}{2}x_2(t), \\ i\dot{x}_3(t) = \gamma(x_6(t) + x_5(t)) + \frac{\Delta}{2}x_3(t), \\ i\dot{x}_4(t) = \gamma(\sqrt{2}x_7(t) + x_1(t) + x_2(t)) - \frac{\Delta}{2}x_4(t), \\ i\dot{x}_5(t) = \gamma(\sqrt{2}x_7(t) + x_1(t) + x_3(t)) - \frac{\Delta}{2}x_5(t), \\ i\dot{x}_6(t) = \gamma(\sqrt{2}x_7(t) + x_2(t) + x_3(t)) - \frac{\Delta}{2}x_6(t), \\ i\dot{x}_7(t) = \gamma\sqrt{2}(x_4(t) + x_5(t) + x_6(t)) - \frac{3\Delta}{2}x_7(t) + 2\Xi x_7(t). \end{array} \right. \quad (1.9)$$

Для числа возбуждений $N = 1$ выбираем базис гильбертова пространства в виде:

$$|+, -, -, 0\rangle, |-, +, -, 0\rangle, |-, -, +, 0\rangle, |-, -, -, 1\rangle.$$

Волновая функция для числа возбуждений $N = 1$ записывается следующим образом:

$$|\psi(t)_{A_1 A_2 A_3 F}\rangle_3 = y_1(t)|+, -, -, 0\rangle + y_2(t)|-, +, -, 0\rangle + y_3(t)|-, -, +, 0\rangle + y_4(t)|-, -, -, 1\rangle. \quad (1.10)$$

Соответствующая система дифференциальных уравнений для коэффициентов $y_i(t)$ будет следующей:

$$\left\{ \begin{array}{l} i\dot{y}_1(t) = \gamma y_4(t) - \frac{\Delta}{2}y_1(t), \\ i\dot{y}_2(t) = \gamma y_4(t) - \frac{\Delta}{2}y_2(t), \\ i\dot{y}_3(t) = \gamma y_4(t) - \frac{\Delta}{2}y_3(t), \\ i\dot{y}_4(t) = \gamma(y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)) - \frac{3\Delta}{2}y_4(t). \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Наконец для $N = 0$ базис гильбертова пространства составляет вектор $|-, -, -, 0\rangle$. Соответствующая временная волновая функция есть

$$|\psi_{A_1 A_2 A_3 F}(t)\rangle_4 = |-, -, -, 0\rangle. \quad (1.12)$$

В работе [31] для модели с нулевой расстройкой и в отсутствие среды Керра нами найдены аналитические решения уравнений (1.7), (1.9) и (1.11). Для модели, рассматриваемой в настоящей статье, решения указанных уравнений имеют чрезмерно громоздкий вид. Поэтому мы ограничимся численным решением указанных уравнений. Имея временные волновые функций системы (1.6), (1.8), (1.10) или (1.12), мы можем вычислить временную матрицу плотности полной системы "три кубита+мода поля". Для начальных состояний кубитов (1.2)–(1.5) и фоковского состояния поля резонатора временную матрицу плотности полной системы можно записать как

$$\rho_{A_1 A_2 A_3 F}(t) = |\chi_{A_1 A_2 A_3 F}(t)\rangle\langle\chi_{A_1 A_2 A_3 F}(t)|, \quad (1.13)$$

где $|\chi_{A_1 A_2 A_3 F}(t)\rangle$ – временная волновая функция системы, которая совпадает для начальных состояний (1.2)–(1.4) с одной из функций (1.6), (1.8), (1.10) или (1.12) в зависимости от выбора числа начальных возбуждений системы N , а для начального состояния кубитов (1.5) представляет собой суперпозицию состояний (1.6), (1.8), (1.10) или (1.12), соответствующих разнице числа начальных возбуждений системы равным 3.

Мы можем также вычислить редуцированную матрицу плотности трех кубитов, усредняя выражения (1.13) по переменным поля

$$\rho_{A_1 A_2 A_3}(t) = Sp_F \rho_{A_1 A_2 A_3 F}(t). \quad (1.14)$$

Как уже отмечалось во введении, точные количественные меры перепутывания кубитов в настоящее время разработаны только для двухкубитных систем. В настоящей работе в качестве меры перепутывания выбран критерий Переса — Хорощедекких или отрицательность [17–18]. Для вычисления отрицательности пары кубитов необходимо вычислить редуцированную двухкубитную матрицу плотности. Для этого необходимо усреднить трехкубитную матрицу плотности (1.14) по переменным третьего кубита

$$\rho_{A_i A_j}(t) = Sp_{A_k} \rho_{A_1 A_2 A_3}(t)(i, j, k = 1, 2, 3 \ i \neq j, j \neq k, i \neq k). \quad (1.15)$$

2. Вычисление отрицательности и обсуждение результатов

Определим отрицательность для двух кубитов A_i и A_j стандартным образом

$$\varepsilon_{ij} = -2 \sum_l \mu_l^-, \quad (2.1)$$

где μ_l^- – отрицательные собственные значения частично транспонированной по переменным одного кубита редуцированной двухкубитной матрицы плотности. Для перепутанных состояний $\varepsilon = 0$. Для перепутанных состояний $0 < \varepsilon \leq 1$. Максимальной степени перепутывания соответствует значение $\varepsilon = 1$.

Для сепарабельного начального состояния кубитов (1.2), бисепарабельного состояния (1.3) и истинных перепутанных состояний (1.4), (1.5) двухкубитная редуцированная матрица плотности имеет вид

$$\rho_{A_i A_j}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{23}^* & \rho_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Матричные элементы (2.2) кубитов A_1 и A_2 в случае начального состояния кубитов (1.2) и числа фотонов в моде $n = 1$ имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= |x_1(t)|^2, \\ \rho_{22}(t) &= |x_2(t)|^2 + |x_4(t)|^2, \\ \rho_{33}(t) &= |x_3(t)|^2 + |x_5(t)|^2, \\ \rho_{44}(t) &= |x_6(t)|^2 + |x_7(t)|^2, \\ \rho_{23}(t) &= x_4(t)x_5^*(t) + x_2(t)x_3^*(t), \\ \rho_{32}(t) &= (\rho_{23}(t))^*. \end{aligned}$$

Для того же начального состояния и кубитов A_2 и A_3 матричные элементы принимают вид

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= |x_3(t)|^2, \\ \rho_{22}(t) &= |x_1(t)|^2 + |x_5(t)|^2, \\ \rho_{33}(t) &= |x_2(t)|^2 + |x_6(t)|^2, \\ \rho_{44}(t) &= |x_4(t)|^2 + |x_7(t)|^2, \\ \rho_{23}(t) &= x_1(t)x_2^*(t) + x_5(t)x_6^*(t), \\ \rho_{32}(t) &= (\rho_{23}(t))^*. \end{aligned}$$

Явные выражения для матричных элементов в (2.2) кубитов A_1 и A_2 в случае начальных состояний кубитов (1.3), (1.4) и числа фотонов $n = 2$, а также начального состояния кубитов (1.5) и числа фотонов $n = 3$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= |B_1(t)|^2 + |B_2(t)|^2, \\ \rho_{22}(t) &= |B_3(t)|^2 + |B_5(t)|^2, \\ \rho_{33}(t) &= |B_4(t)|^2 + |B_6(t)|^2, \\ \rho_{44}(t) &= |B_7(t)|^2 + |B_8(t)|^2, \\ \rho_{23}(t) &= B_3(t)B_4^*(t) + B_5(t)B_6^*(t), \\ \rho_{32}(t) &= (\rho_{23}(t))^*. \end{aligned}$$

Явный вид матричных элементов для тех же начальных состояний, но для кубитов A_2 и A_3 :

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= |B_1(t)|^2 + |B_4(t)|^2, \\ \rho_{22}(t) &= |B_2(t)|^2 + |B_6(t)|^2, \\ \rho_{33}(t) &= |B_3(t)|^2 + |B_7(t)|^2, \\ \rho_{44}(t) &= |B_5(t)|^2 + |B_8(t)|^2, \\ \rho_{23}(t) &= B_2(t)B_3^*(t) + B_6(t)B_7^*(t), \\ \rho_{32}(t) &= (\rho_{23}(t))^*. \end{aligned}$$

Частично транспонированная по переменным одного кубита редуцированная матрица плотности кубитов для (2.2) может быть представлена в виде

$$\rho_{A_i A_j}^{T_1}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{23}^* \\ 0 & \rho_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{23} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Матрица (2.3) имеет всего одно собственное значение, которое может быть отрицательным. В результате отрицательность (2.1) может быть записана как

$$\varepsilon_{ij} = \sqrt{(\rho_{44} - \rho_{11})^2 + 4 \cdot \rho_{23}^2} - \rho_{11} - \rho_{44}. \quad (2.4)$$

Результаты компьютерного моделирования временной зависимости отрицательности ε_{12} для кубитов 1 и 2 от приведенного времени γt для начального сепарабельного состояния кубитов $|+, -, -\rangle$, и различных значений параметра расстройки и керровской нелинейности представлены на рис. 2.1. Начальное число фотонов в моде выбрано равным $n = 1$. Из рисунка хорошо видно, что учет расстройки и керровской нелинейности приводит к существенному увеличению максимальной степени перепутывания кубитов 1 и 2. Заметим также, что в отличие от случая теплового поля резонатора [31] для фоковского начального состояния поля для кубитов 1 и 2 отсутствует эффект мгновенной смерти перепутывания.

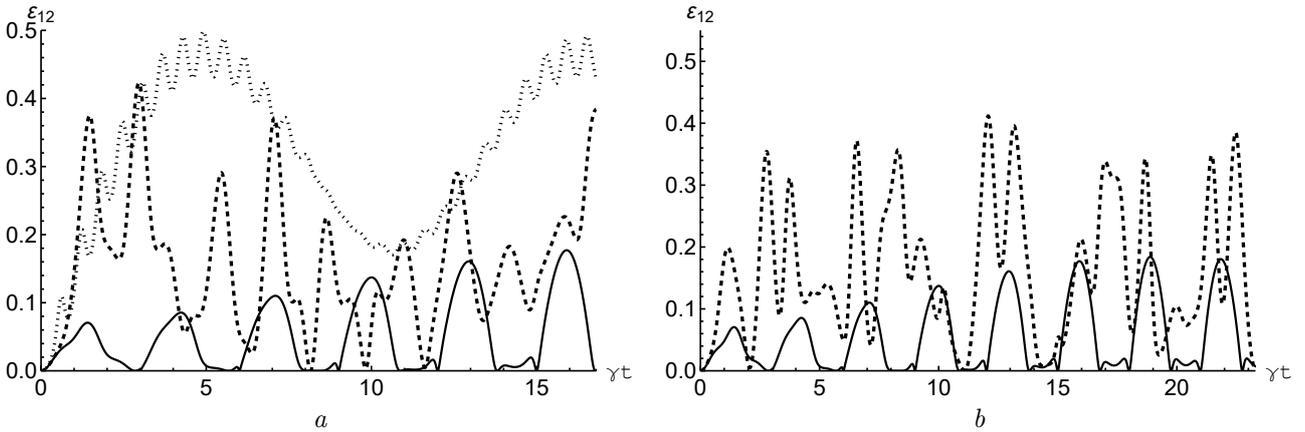


Рис. 2.1. Зависимость отрицательностей ε_{12} (а) от приведенного времени γt для начального состояния кубитов $|+, -, -\rangle$. Число фотонов в моде резонатора выбрано равным $n = 1$. Значения параметров расстройки керровской нелинейности в случае а): $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (сплошная линия); $\Delta = 2.5\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (штриховая линия) и $\Delta = 9.5\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (пунктирная линия). В случае б): $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (сплошная линия) и $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = \gamma$ (пунктирная линия)

Fig. 2.1. Dependence of the negatives ε_{12} (a) on the reduced time γt for the initial state of qubits $|+, -, -\rangle$. The number of photons in the resonator mode is chosen to be $n = 1$. Values of Kerr nonlinearity detuning parameters in case a): $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (solid line); $\Delta = 2.5\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (dashed line) and $\Delta = 9.5\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (dotted line). In case b): $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (solid line) and $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = \gamma$ (dotted line)

На рис. 2.2 показаны аналогичные зависимости отрицательности ε_{23} для кубитов 2 и 3. В рассматриваемом случае увеличение максимальной степени перепутывания кубитов 2 и 3 возможно только при включении расстройки. Керровская нелинейность слабо влияет на максимальную степень перепутывания кубитов 2 и 3. В резонансном случае и в отсутствие керровской нелинейности для кубитов 2 и 3 так же, как и в случае теплового поля, имеет место эффект мгновенной смерти перепутывания. При этом подавлению эффекта способствует только наличие расстройки. Зависимость отрицательности ε_{12} для кубитов 1 и 2 от приведенного времени γt для начального бисепарабельного состояния кубитов $(1/\sqrt{2})(|+, +, -\rangle + |+, -, +\rangle)$ и различных значений параметра расстройки и керровской нелинейности представлена на рис. 2.3. Начальное число фотонов в моде выбрано равным $n = 2$. Для рассматриваемого случая кубиты 1 и 2 в начальный момент времени не перепутаны. В отсутствие расстройки и керровской нелинейности имеет место эффект мгновенной смерти перепутывания. Включение расстройки приводит к существенному увеличению максимальной степени перепутывания кубитов 1 и 2 и исчезновению мгновенной смерти перепутывания. Включение керровской нелинейности, напротив, приводит к исчезновению перепутывания кубитов, индуцированного полем резонатора. На рис. 2.4 показаны аналогичные зависимости отрицательности ε_{23} для кубитов 2 и 3. В рассматриваемом случае кубиты 2 и 3 в начальный момент времени находятся в максимально перепутанном состоянии ($\varepsilon_{23}(0) = 1$). Для резонансного случая и в отсутствие керровской нелинейности взаимодействие кубитов с полем резонатора приводит к осцилляциям Раби и к периодической смерти и рождению перепутывания их состояний. Включение расстройки и керровской нелинейности приводит к уменьшению амплитуд осцилляций параметра перепутывания кубитов 2 и 3 и стабилизации их начальной перепутанности. Зависимость отрицательности ε_{23} (или ε_{12}) для кубитов 2 и 3 (для кубитов 1 и 2) от приведенного времени γt для начального истинного перепутанного состояния кубитов W - типа $(1/\sqrt{3})(|+, +, -\rangle + |+, -, +\rangle + |-, +, +, 2\rangle)$ и различных

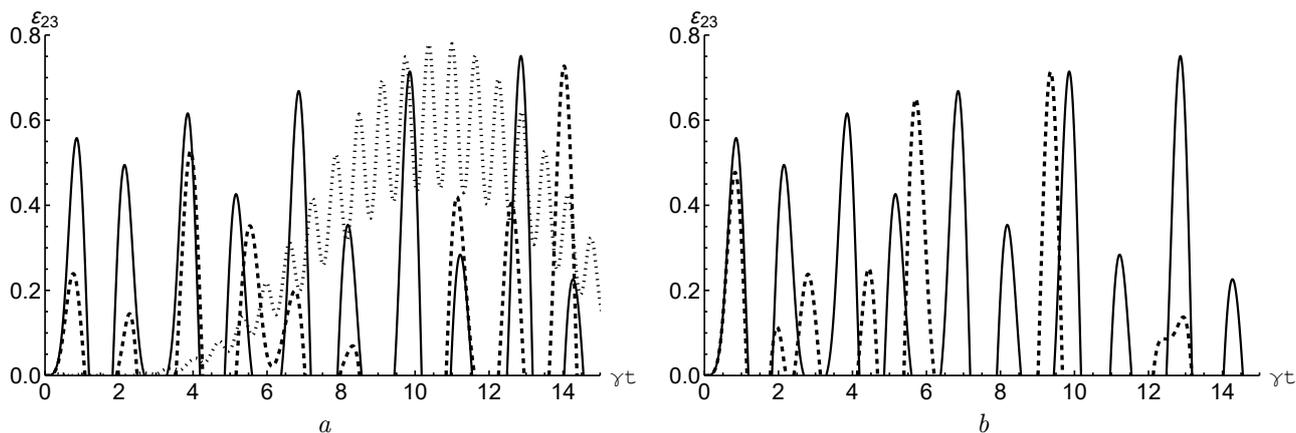


Рис. 2.2. Зависимость отрицательностей ε_{23} (a) от приведенного времени γt для начального состояния кубитов $|+, -, -\rangle$. Число фотонов в режиме резонатора выбрано равным $n = 1$. Значения параметров расстройки керровской нелинейности в случае a): $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (сплошная линия); $\Delta = 2.5\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (штриховая линия) и $\Delta = 9.5\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (пунктирная линия). В случае б): $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (сплошная линия) и $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = \gamma$ (пунктирная линия)

Fig. 2.2. Dependence of the negatives ε_{23} (a) on the reduced time γt for the initial state of qubits $|+, -, -\rangle$. The number of photons in the resonator mode is chosen to be $n = 1$. Values of Kerr nonlinearity detuning parameters in case a): $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (solid line); $\Delta = 2.5\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (dashed line) and $\Delta = 9.5\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (dotted line). In case b): $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (solid line) and $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = \gamma$ (dotted line)

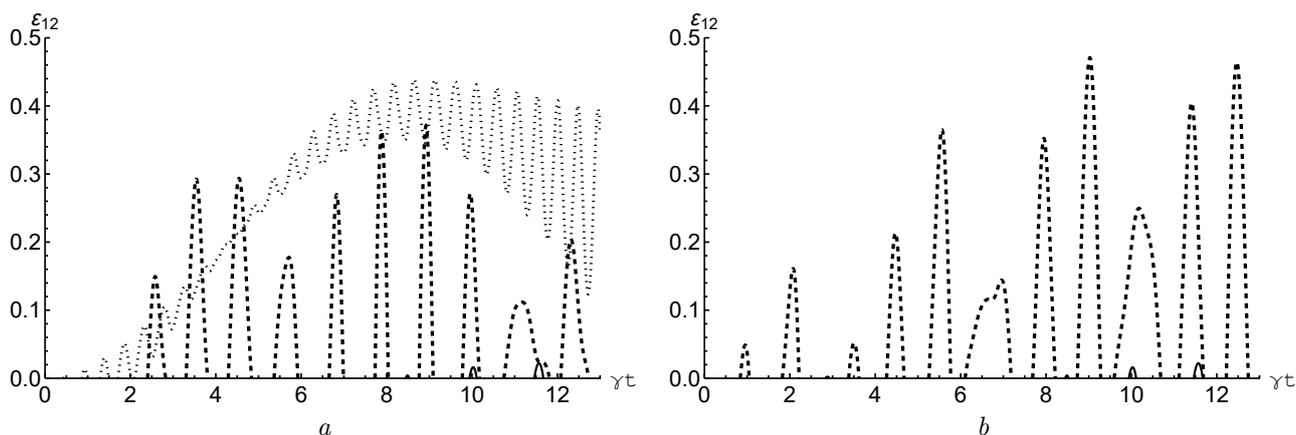


Рис. 2.3. Зависимость отрицательностей ε_{12} (a) от приведенного времени γt для начального состояния кубитов $(1/\sqrt{2})(|+, +, -\rangle + |+, -, +\rangle)$. Число фотонов в режиме резонатора выбрано равным $n = 2$. Значения параметров расстройки керровской нелинейности в случае a): $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (сплошная линия); $\Delta = 5\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (штриховая линия) и $\Delta = 13\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (пунктирная линия). В случае б): $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (сплошная линия) и $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = \gamma$ (пунктирная линия)

Fig. 2.3. Dependence of the negatives ε_{12} (a) on the reduced time γt for the initial state of qubits $(1/\sqrt{2})(|+, +, -\rangle + |+, -, +\rangle)$. The number of photons in the resonator mode is chosen equal to $n = 2$. The values of the parameters of the Kerr nonlinearity detuning in the case of a): $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (solid line); $\Delta = 5\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (dashed line) and $\Delta = 13\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (dotted line). In case b): $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (solid line) and $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = \gamma$ (dotted line)

значений параметра расстройки и керровской нелинейности представлена на рис. 2.5. Начальное число фотонов в режиме выбрано равным $n = 2$. Для рассматриваемого начального состояния кубитов поведение отрицательности любой пары кубитов аналогично поведению ε_{23} , представленному на предыдущем рисунке. Единственное отличие заключается в том, что максимально возможное значение отрицательности любой пары кубитов равно $\varepsilon_{ij}(0) = (1/3)(\sqrt{5} - 1)$. Наконец, зависимость отрицательности ε_{23} (или ε_{12}) для кубитов 2 и 3 (для кубитов 1 и 2) от приведенного времени γt для начального истинного перепутанного состояния кубитов GHZ - типа $(1/\sqrt{2})(|+, +, +\rangle + |-, -, -\rangle)$ и различных значений параметра расстройки представлена на рис. 2.6. Начальное число фотонов в режиме выбрано равным $n = 3$. В рассматриваемом случае в начальный момент времени все пары кубитов неперепутаны. Для резо-

нансной модели в отсутствие керровской нелинейности взаимодействие кубитов с полем резонатора не индуцирует их перепутывание в процессе эволюции. Включение расстройки приводит к возникновению перепутывания пар кубитов, однако зависимость максимальной степени их перепутывания от расстройки достаточно слабая. При этом для любых расстроек имеет место эффект мгновенной смерти перепутывания. Учет керровской нелинейности в случае резонансного взаимодействия кубитов с полем резонатора не приводит к возникновению их перепутывания.

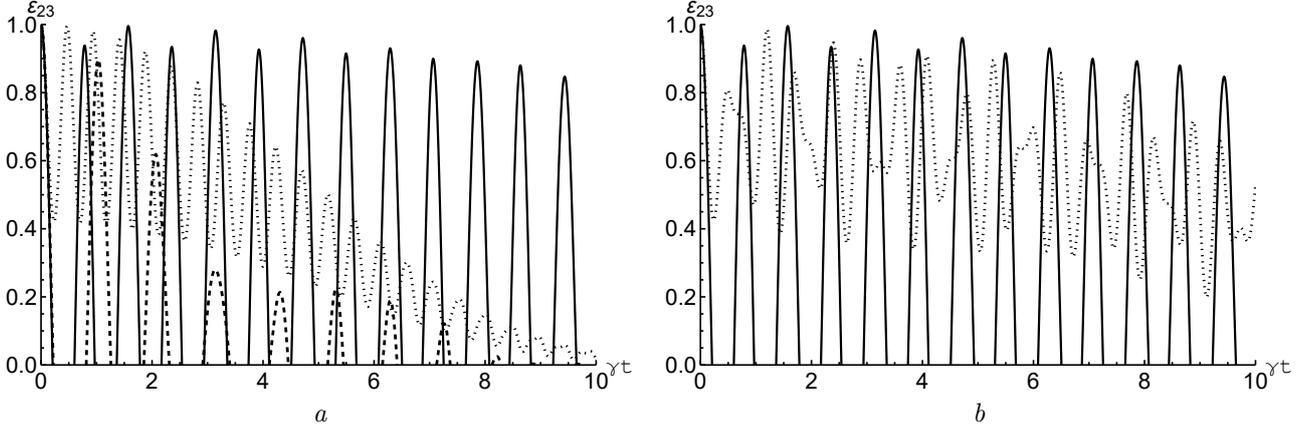


Рис. 2.4. Зависимость отрицательностей ε_{23} для начального состояния кубитов $(1/\sqrt{2})(|+, +, -\rangle + |+, -, +\rangle)$ при $\theta = \frac{\pi}{4}$. Число фотонов в режиме резонатора выбрано равным $n = 1$. Значения параметров расстройки керровской нелинейности в случае *a*): $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (сплошная линия); $\Delta = 5\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (штриховая линия) и $\Delta = 13\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (пунктирная линия). В случае *b*): $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (сплошная линия) и $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 2.5\gamma$ (пунктирная линия)

Fig. 2.4. Dependence of negatives ε_{23} for the initial state of qubits $(1/\sqrt{2})(|+, +, -\rangle + |+, -, +\rangle)$ when $\theta = \frac{\pi}{4}$. The number of photons in the resonator mode is chosen to be $n = 1$. Values of Kerr nonlinearity detuning parameters in case *a*): $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (solid line); $\Delta = 5\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (dashed line) and $\Delta = 13\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (dotted line). In case *b*): $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (solid line) and $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 2.5\gamma$ (dotted line)

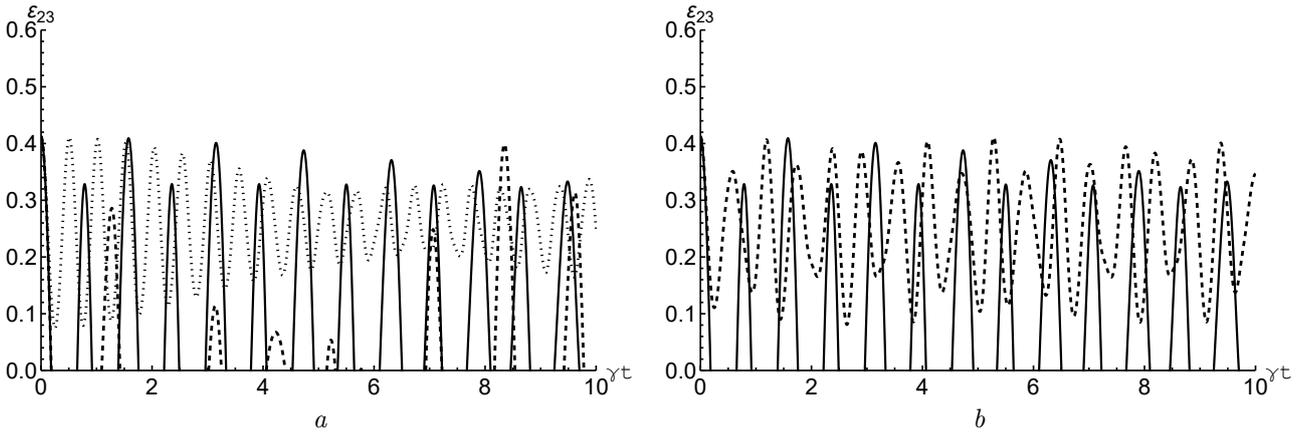


Рис. 2.5. Зависимость отрицательностей ε_{23} (*a*) от приведенного времени γt для начального состояния кубитов $(1/\sqrt{3})(|+, +, -\rangle + |+, -, +\rangle + |-, +, +\rangle)$. Число фотонов в режиме резонатора выбрано равным $n = 1$. Значения параметров расстройки керровской нелинейности в случае *a*): $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (сплошная линия); $\Delta = 3.5\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (штриховая линия) и $\Delta = 12\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (пунктирная линия). В случае *b*): $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 0.01$ (сплошная линия) и $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 2.5\gamma$ (пунктирная линия)

Fig. 2.5. Dependence of negatives ε_{23} (*a*) on the reduced time γt for the initial state of qubits $(1/\sqrt{3})(|+, +, -\rangle + |+, -, +\rangle + |-, +, +\rangle)$. The number of photons in the resonator mode is chosen to be $n = 1$. Values of Kerr nonlinearity detuning parameters in case *a*): $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (solid line); $\Delta = 3.5\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (dashed line) and $\Delta = 12\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (dotted line). In case *b*): $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 0.01$ (solid line) and $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 2.5\gamma$ (dotted line)

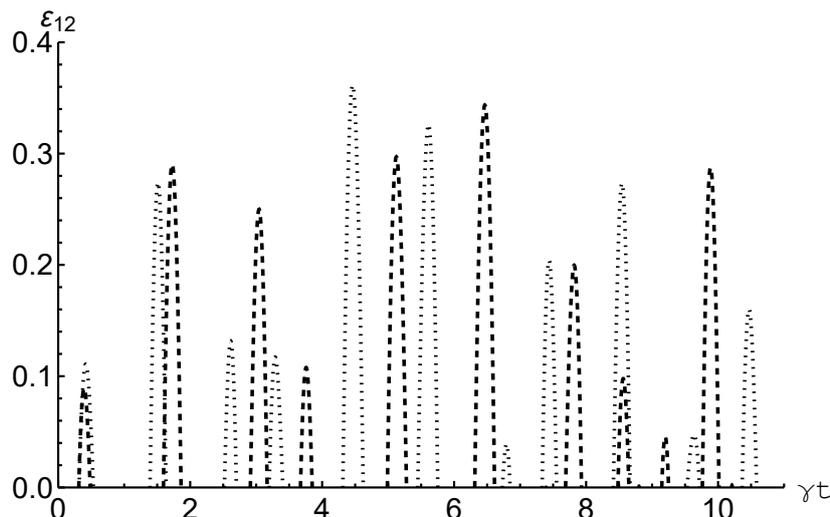


Рис. 2.6. Зависимость отрицательности ε_{12} от приведенного времени γt для начального состояния кубитов $(1/\sqrt{2})(|+, +, +\rangle + |-, -, -\rangle)$. Число фотонов в моде выбрано равным $n = 3$. Значение параметра расстройки: $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (сплошная линия); $\Delta = 2\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (штриховая линия) и $\Delta = 3.5\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (пунктирная линия)

Fig. 2.6. Dependence of the negativity of ε_{12} on the reduced time γt for the initial state of qubits $(1/\sqrt{2})(|+, +, +\rangle + |-, -, -\rangle)$. The number of photons in the mode is chosen to be $n = 3$. The value of the detuning parameter: $\Delta = 0.01\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (solid line); $\Delta = 2\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (dashed line) and $\Delta = 3.5\gamma$, $\Xi = 0.01\gamma$ (dotted line)

Выводы

Таким образом, в данной статье нами исследована динамика перепутывания пар кубитов в системе, состоящей из трех идентичных кубитов, нерезонансно взаимодействующих с модой фоковского поля идеального резонатора со средой Керра. В работе рассмотрены три типа начальных состояний кубитов: сепарабельные, бисепарабельные и истинно перепутанные состояния W - и GHZ -типа. Результаты численного моделирования отрицательности пар кубитов показали, что наличие расстройки и керровской нелинейности в случае начального перепутанного состояния пары кубитов может приводить к существенному увеличению степени их перепутывания, индуцированного полем резонатора. В случае начального перепутанного состояния пары кубитов расстройка и керровская среда могут приводить к стабилизации начального перепутывания кубитов. Нерезонансное взаимодействие и керровская среда могут также подавлять эффект мгновенной смерти перепутывания кубитов. Таким образом, расстройка и керровская нелинейность могут выступать в качестве эффективного механизма контроля и управления критерия перепутывания кубитов в резонаторах.

Литература

- [1] Kendon V.M., Nemoto K., Munro W.J. Typical entanglement in multi-qubit systems // Journal of Modern Optics. 2002. Vol. 49. Issue 10. Pp. 1709–1716. DOI: <http://doi.org/10.1080/09500340110120914>.
- [2] Most Y., Shimoni Y., Biham O. Formation of multipartite entanglement using random quantum gates // Physical Review A: Atomic, molecular, and optical physics. 2007. Vol. 76. Issue 2. Article number 022328. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.76.022328>.
- [3] Zhi P., Hu Y. Construct maximally five- and seven-qubit entangled states via three-qubit GHZ state // International Journal of Theoretical Physics. 2022. Vol. 36. Issue 30. Article number 2250215. DOI: <http://doi.org/10.1142/S0217979222502150>.
- [4] Kazuyuki F., Kyoko H., Ryosuke K., Tatsuo S., Yukako W. Explicit Form of the Evolution Operator of TAVIS-CUMMINGS Model: Three and Four Atoms Cases // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 2012. Vol. 1. No. 6. P. 721–730. DOI: <http://doi.org/10.1142/S0219887804000344>.
- [5] Rinner S.J., Pittorino T. Generation of Multipartite Entangled States Using Switchable Coupling of Cooper-Pair-Boxes // Journal of Modern Physics. 2020. Vol. 11. No. 10. P. 1514–1527. DOI: <https://doi.org/10.4236/jmp.2020.1110093>.

- [6] Wendin G. Quantum information processing with super-conducting circuits: a review // Reports on Progress in Physics. 2017. Vol. 80. Number 10. Article number 106001. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
- [7] Kjaergaard M., Schwartz M.E., Braumüller J., Krantz P., Wang J.-I., Gustavsson S., Oliver W.D. Superconducting Qubits: Current State of Play // Annual Reviews of Condensed Matter Physics. 2020. Vol. 11. P. 369–395. DOI: <http://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605>.
- [8] Huang H.-L., Wu D., Fan D., Zhu X. Superconducting quantum computing: a review // Science China. Information Sciences. 2020. Vol. 63. Article number 180501. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s11432-020-2881-9>.
- [9] Chen J. Review on Quantum Communication and Quantum Computation // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1865. Article number 022008. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1865/2/022008>.
- [10] Biamonte J., Faccin M., De Domenico M. Complex Networks: from Classical to Quantum // Communications Physics. 2019. Vol. 2. Article number 53. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/s42005-019-0152-6>.
- [11] Mooney G.J., Hill C.D., Hollenberg L.C.L. Entanglement in a 20-Qubit Superconducting Quantum Computer // Scientific Reports. 2019. Vol. 9. Article number 13465. DOI: <http://doi.org/10.1038/s41598-019-49805-7>.
- [12] Apollaro T. J. G., Lorenzo S., Plastina F., Consiglio M., Zyczkowski K. Entangled States Are Harder to Transfer than Product States // Entropy. 2023. Vol. 25. Issue 1. Article number 46. DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/e25010046>.
- [13] Nieman K., Rangan K.K., Durand H. Control Implemented on Quantum Computers: Effects of Noise, Nondeterminism, and Entanglement // Industrial and Engineering Chemistry Research. 2022. Vol. 61. Issue 28. Pp. 10133–10155. DOI: <http://doi.org/10.1021/acs.iecr.2c00454>.
- [14] Arute F. [et al.] Quantum supremacy using a programmable superconducting processor // Nature. 2019. Vol. 574. Pp. 505–510. DOI: <http://doi.org/10.1038/s41586-019-1666-5>.
- [15] Ball P. First quantum computer to pack 100 qubits enters crowded race // Nature. 2021. Vol. 599. No. 7886. P. 542. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/d41586-021-03476-5>.
- [16] Lacroix D. Symmetry-Assisted Preparation of Entangled Many-Body States on a Quantum Computer // Physical Review Letters. 2020. Vol. 125. Article number 230502. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.230502>.
- [17] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices // Physical Review Letters. 1996. Vol. 77. Pp. 1413–1415. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [18] Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Condition // Physics Letters A. 1996. Vol. 223. Pp. 333–339. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](http://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).
- [19] Wootters W.K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits // Physical Review Letters. 1998. Vol. 80. No. 10. Article number 2245. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
- [20] Zha X., Yuan C., Zhang Y. Generalized criterion for a maximally multi-qubit entangled state // Laser Physics Letters. 1998. Vol. 10. Number 4. Article number 045201. DOI: <http://doi.org/10.1088/1612-2011/10/4/045201>.
- [21] Filippov S.N. Quantum Mappings and Characterization of Entangled Quantum States // Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 241. Pp. 210–236. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10958-019-04418-3>.
- [22] Seevinck M., Gühne O. Separability criteria for genuine multiparticle entanglement // New Journal of Physics. 2010. Vol. 12. Article number 053002. DOI: <http://doi.org/10.1088/1367-2630/12/5/053002>.
- [23] Pereira L., Zambrano L., Delgado A. Scalable estimation of pure multi-qubit states // npj Quantum Information. 2022. Vol. 8. Article number 57. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/s41534-022-00565-9>.
- [24] Zhahir A. A., Mohd S. M., Shuhud M.I.M., Idrus B., Zainuddin H., Jan N.M., Wahiddin M. Entanglement Quantification and Classification: A Systematic Literature Review // International Journal of Advanced Computer Science and Applications. 2022. Vol. 13. Issue 5. Pp. 218–225. DOI: <http://dx.doi.org/10.14569/IJACSA.2022.0130527>.
- [25] Dur W., Cirac J.I. Classification of multiqubit mixed states: Separability and distillability properties // Physical Review A: Atomic, molecular and optical physics. 2000. Vol. 61. Article number 042314. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevA.61.042314>.
- [26] Dur W., Cirac J.I., Vidal G. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways // Physical Review A: Atomic, molecular, and optical physics. 2000. Vol. 62. Article number 062314. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.062314>.
- [27] Acin A., Bruß D., Lewenstein M., Sanpera A. Classification of Mixed Three-Qubit States // Physical Review Letters. 2000. Vol. 87. Article number 040401. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.040401>.
- [28] Garcia-Alcaine G., Sabin C. A classification of entanglement in three-qubit systems // The European Physical Journal D. 2008. Vol. 48. Pp. 435–442. DOI: <http://doi.org/10.1140/epjd/e2008-00112-5>.
- [29] Siti Munirah Mohd S.M., Idrus B., Zainuddin H., Mukhtar M. Entanglement Classification for a Three-qubit System using Special Unitary Groups // International Journal of Advanced Computer Science and Applications. 2019. Vol. 10. Issue 7. Pp. 374–379. DOI: <http://dx.doi.org/10.14569/IJACSA.2019.0100751>.

- [30] Akbari-Kourbolagh Y. Entanglement criteria for the three-qubit states // International Journal of Quantum Information. 2017. Vol. 15, No. 7. Article number 1750049. DOI: <http://doi.org/10.1142/S0219749917500496>.
- [31] Багров А.Р., Башкиров Е.К. Динамика трехкубитной модели Тависа — Каммингса // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2022. Т. 28, № 1–2. С. 95–105. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-95-105>.
- [32] Zhang B. Entanglement between two qubits interacting with a slightly detuned thermal field // Optics Communications. 2010. Vol. 283. Issue 23. Pp. 4676–4679. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.optcom.2010.06.094>.
- [33] Bashkirov E.K. Thermal Entanglement Between a Jaynes — Cummings Atom and an Isolated Atom // International Journal of Theoretical Physics. 2018. Vol. 57. Issue 12. Pp. 3761–3771. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10773-018-3888-y>.
- [34] Al Naim A.F., Khan J.Y., Khalil E.M., Abdel-Khalek S. Effects of Kerr Medium and Stark Shift Parameter on Wehrl Entropy and the Field Purity for Two-Photon Jaynes–Cummings Model Under Dispersive Approximation // Journal of Russian Laser Research. 2019. Vol. 40. Issue 1. P. 20–29. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10946-019-09764-w>.
- [35] Aldaghfag S.A., Berrada K., Abdel-Khalek S. Entanglement and photon statistics of two dipole-dipole coupled superconducting qubits with Kerr-like nonlinearities // Results in Physics. 2020. Vol. 16. Article number 102978. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2020.102978>.
- [36] Bashkirov E.K. Thermal entanglement in Tavis-Cummings models with Kerr media // Proceedings of SPIE. 2022. Vol. 12193. Article number 121930Q. DOI: <http://doi.org/10.1117/12.2625838>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-1-89-101

Submitted: 08.02.2023

Revised: 29.03.2023

Accepted: 30.05.2023

A.R. Bagrov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: alexander.bagrov00@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1098-0300>

E.K. Bashkirov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8682-4956>

ENTANGLEMENT IN NONLINEAR THREE-QUBITS JAYNES — CUMMINGS MODEL

ABSTRACT

In this paper, we investigated the dynamics of entanglement of pairs of qubits in a system of three identical qubits that interact non-resonantly with the selected mode of a microwave resonator without loss with the Kerr medium by means of single-photon transitions. We have found solutions to the quantum time Schrodinger equation for the total wave function of the system for the initial separable, biseparable and true entangled states of qubits and the Fock initial state of the resonator field. Based on these solutions, the criterion of entanglement of qubit pairs — negativity is calculated. The results of numerical simulation of the negativity of qubit pairs have shown that the presence of disorder and Kerr nonlinearity in the case of an initial non-entangled state of a pair of qubits can lead to a significant increase in the degree of their entanglement. In the case of an initial entangled state of a pair of qubits, the disorder and the Kerr medium can lead to a significant stabilization of the initial entanglement.

Key words: qubits; not-resonant interaction; cavity; one-photon transitions; Kerr nonlinearity; entanglement; negativity; sudden death of entanglement.

Citation. Bagrov A.R., Bashkirov E.K. Entanglement in nonlinear three-qubits Jaynes — Cummings model. *Vestnik Samarского университета. Естественнонаучная серия = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 89–101. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-1-89-101>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Bagrov A.R., 2023

Alexander R. Bagrov — undergraduate student of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

© Bashkirov E.K., 2023

Eugene K. Bashkirov — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Kendon V.M., Nemoto K., Munro W.J. Typical entanglement in multi-qubit systems. *Journal of Modern Optics*, 2002, vol. 49, issue 10, pp. 1709–1716. DOI: <http://doi.org/10.1080/09500340110120914>.
- [2] Most Y., Shimoni Y., Biham O. Formation of multipartite entanglement using random quantum gates. *Physical Review A: Atomic, molecular, and optical physics*, 2007, vol. 76, issue 2, article number 022328. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.76.022328>.
- [3] Zhi P., Hu Y. Construct maximally five- and seven-qubit entangled states via three - qubit GHZ state. *International Journal of Theoretical Physics*, 2022, vol. 36, issue 30, article number 2250215. DOI: <http://doi.org/10.1142/S0217979222502150>.
- [4] Kazuyuki F., Kyoko H., Ryosuke K., Tatsuo S., Yukako W. Explicit Form of the Evolution Operator of TAVIS-CUMMINGS Model: Three and Four Atoms Cases. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2012, vol. 1, number 6, pp. 721–730. DOI: <http://doi.org/10.1142/S0219887804000344>.
- [5] Rinner S.J., Pittorino T. Generation of Multipartite Entangled States Using Switchable Coupling of Cooper-Pair-Boxes. *Journal of Modern Physics*, 2020, vol. 11, no. 10, pp. 1514–1527. DOI: <http://doi.org/10.4236/jmp.2020.1110093>.
- [6] Wendin G. Quantum information processing with super-conducting circuits: a review. *Reports on Progress in Physics*, 2017, vol. 80, no. 10, article number 106001. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
- [7] Kjaergaard M., Schwartz M.E., Braumüller J., Krantz P., Wang J.-I., Gustavsson S., Oliver W.D. Superconducting Qubits: Current State of Play. *Annual Reviews of Condensed Matter Physics*, 2020, vol. 11, pp. 369–395. DOI: <http://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605>.
- [8] Huang H.-L., Wu D., Fan D., Zhu X. Superconducting quantum computing: a review. *Science China. Information Sciences*, 2020, vol. 63, article number 180501. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s11432-020-2881-9>.
- [9] Chen J. Review on Quantum Communication and Quantum Computation. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1865, article number 022008. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1865/2/022008>.
- [10] Biamonte J., Faccin M., De Domenico M. Complex networks from classical to quantum. *Communications Physics*, 2019, vol. 2, article number 53. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/s42005-019-0152-6>.
- [11] Mooney G.J., Hill C.D., Hollenberg L.C.L. Entanglement in a 20-Qubit Superconducting Quantum Computer. *Scientific Reports*, 2019, vol. 9, article number 13465. DOI: <http://doi.org/10.1038/s41598-019-49805-7>.
- [12] Apollaro T.J.G., Lorenzo S., Plastina F., Consiglio M., Zyczkowski K. Entangled States Are Harder to Transfer than Product States. *Entropy*, 2023, vol. 25, issue 1, article number 46. DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/e25010046>.
- [13] Nieman K., Rangan K.K., Durand H. Control Implemented on Quantum Computers: Effects of Noise, Nondeterminism, and Entanglement. *Industrial Engineering Chemistry Research*, 2022, vol. 61, issue 28, pp. 10133–10155. DOI: <http://doi.org/10.1021/acs.iecr.2c00454>.
- [14] Arute F. [et al.] Quantum supremacy using a programmable superconducting processor. *Nature*, 2019, vol. 574, pp. 505–510. DOI: <http://doi.org/10.1038/s41586-019-1666-5>.
- [15] Ball P. First quantum computer to pack 100 qubits enters crowded race. *Nature*, 2021, vol. 599, no. 7886, p. 542. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/d41586-021-03476-5>.
- [16] Lacroix D. Symmetry-Assisted Preparation of Entangled Many-Body States on a Quantum Computer. *Physical Review Letters*, 2020, vol. 125, article number 230502. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.230502>.
- [17] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices. *Physical Review Letters*, 1996, vol. 77, pp. 1413–1415. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [18] Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Condition. *Physics Letters A*, 1996, vol. 223, pp. 333–339. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](http://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).
- [19] Wootters W.K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. *Physical Review Letters*, 1998, vol. 80, article number 2245. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
- [20] Zha X., Yuan C., Zhang Y. Generalized criterion for a maximally multi-qubit entangled state. *Laser Physics Letters*, 1998, vol. 10, number 4, article number 045201. DOI: <http://doi.org/10.1088/1612-2011/10/4/045201>.
- [21] Filippov S.N. Quantum Mappings and Characterization of Entangled Quantum States. *Journal of Mathematical Sciences*, 2019, vol. 241, pp. 210–236. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10958-019-04418-3>

- [22] Seevinck M., Gühne O. Separability criteria for genuine multipartite entanglement. *New Journal of Physics*, 2010, vol. 12, article number 053002. DOI: <http://doi.org/10.1088/1367-2630/12/5/053002>.
- [23] Pereira L., Zambrano L., Delgado A. Scalable estimation of pure multi-qubit states. *npj Quantum Information*, 2022, vol. 8, article number 57. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/s41534-022-00565-9>.
- [24] Zhahir A.A., Mohd S.M., Shuhud M.I.M., Idrus B., Zainuddin H., Jan N.M., Wahiddin M. Entanglement Quantification and Classification: A Systematic Literature Review. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 2022, vol. 13, issue 5, pp. 218–225. DOI: <http://dx.doi.org/10.14569/IJACSA.2022.0130527>.
- [25] Dur W., Cirac J.I. Classification of multiqubit mixed states: Separability and distillability properties. *Physical Review A: Atomic, molecular, and optical physics*, 2000, vol. 62, article number 042314. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevA.61.042314>.
- [26] Dur W., Cirac J.I., Vidal G. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. *Physical Review A: Atomic, molecular, and optical physics*, 2000, vol. 62, article number 062314. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.062314>.
- [27] Acin A., Bruß D., Lewenstein M., Sanpera A. Classification of Mixed Three-Qubit States. *Physical Review Letters*, 2000, vol. 87, article number 040401. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.040401>.
- [28] Garcia-Alcaine G., Sabin C. A classification of entanglement in three-qubit systems. *European Physical Journal D*, 2008, vol. 48, pp. 435–442. DOI: <http://doi.org/10.1140/epjd/e2008-00112-5>.
- [29] Siti Munirah Mohd S.M., Idrus B., Zainuddin H., Mukhtar M. Entanglement Classification for a Three-qubit System using Special Unitary Groups. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 2019, vol. 10, issue 7, pp. 374–379. DOI: <http://dx.doi.org/10.14569/IJACSA.2019.0100751>.
- [30] Akbari-Kourbolagh Y. Entanglement criteria for the three-qubit states. *International Journal of Quantum Information*, 2017, vol. 15, no. 7, article number 1750049. DOI: <http://doi.org/10.1142/S0219749917500496>.
- [31] Bagrov A.R., Bashkirov E.K. Dynamics of the three-qubits Tavis — Cummings model. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, issue 1–2, pp. 95–105. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-95-105>. (In Russ.)
- [32] Zhang B. Entanglement between two qubits interacting with a slightly detuned thermal field. *Optics Communications*, 2010, vol. 283, issue 23, pp. 4676–4679. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.optcom.2010.06.094>.
- [33] Bashkirov E.K. Thermal Entanglement Between a Jaynes-Cummings Atom and an Isolated Atom. *International Journal of Theoretical Physics*, 2018, vol. 57, issue 12, pp. 3761–3771. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10773-018-3888-y>.
- [34] Al Naim A.F., Khan J.Y., Khalil E.M., Abdel-Khalek S. Effects of Kerr Medium and Stark Shift Parameter on Wehrl Entropy and the Field Purity for Two-Photon Jaynes-Cummings Model Under Dispersive Approximation. *Journal of Russian Laser Research*, 2019, vol. 40, issue 1, pp. 20–29. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10946-019-09764-w>.
- [35] Aldaghfag S.A., Berrada K., Abdel-Khalek S. Entanglement and photon statistics of two dipole-dipole coupled superconducting qubits with Kerr-like nonlinearities. *Results in Physics*, 2020, vol. 16, number 102978. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.rinp.2020.102978>.
- [36] Bashkirov E.K. Thermal entanglement in Tavis-Cummings models with Kerr media. *Proceedings of SPIE*, 2022, vol. 12193, article number 121930Q. DOI: <http://doi.org/10.1117/12.2625838>.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

Журнал "Вестник Самарского университета. Естественная серия" издается с 1995 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Самарским университетом с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде. Электронная версия журнала размещается на сайте Самарского университета по адресу <http://vestnik.samsu.ru> <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>. Все статьи проходят проверку в программе "Антиплагиат".

В журнале "Вестник Самарского университета. Естественная серия" печатаются оригинальные научные результаты из различных областей естествознания по профилю базы данных zbMath, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. **Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала.**

Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Самарскому университету. Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи должны сопровождаться направлением организации, в которой выполнена работа. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию. Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. **Редакция просит авторов при оформлении работы придерживаться следующих правил и рекомендаций:**

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронная (e-mail: nsvestnik@ssau.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы (без формул), список авторов, представленный в алфавитном порядке, с указанием места работы и его адреса с индексом, адресов электронной почты каждого из них, звания, должности, ORCID на русском и английском языках; аннотацию не менее 100 слов на русском и английском языках, которая дается перед основным текстом; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной классификации (УДК), необходимо представить ключевые слова на русском и английском языках.

4. Объем статьи не должен превышать 15–25 страниц, иллюстрированного не более чем 5 рисунками и 5 таблицами. Базовый размер шрифта — 10 пунктов. Опубликование работ, не соответствующих этим ограничениям, возможно только после специального решения редколлегии журнала.

5. Подписи к рисункам должны размещаться снизу от рисунка и должны содержать их краткое описание и, возможно, объяснение использованных символов и условных обозначений.

6. Указатель таблицы должен быть размещен справа сверху от таблицы. Заголовок таблицы (как и сама таблица) должен быть отцентрирован по ширине основного текста.

7. Нумерация рисунков и таблиц должна быть пораздельной по тексту статьи. Не допускается размещать в тексте рисунки и таблицы до появления на них ссылки в тексте.

8. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы L^AT_EX₂_ε с использованием стиля `samgu.cls`. Стиль `samgu.cls` и пример оформления статьи можно найти на сайте Самарского государственного университета (адрес указан выше). Использование других реализаций T_EX'a крайне нежелательно. Подготовка электронной версии статьи с помощью других средств должна быть заранее согласована с редакцией. Иллюстративный материал (рисунки, таблицы, диаграммы) готовится стандартными средствами L^AT_EX'a. Рисунки могут быть также подготовлены в любом графическом редакторе и предоставлены в формате EPS. Электронные представления фотографий допускаются только в форматах EPS или TIFF с разрешением не менее 600 dpi. В случае использования нестандартных стилевых файлов автор обязан предоставить редакции необходимые стилевые файлы. Изменения стандартных стилевых файлов недопустимы.

9. При подготовке электронного варианта статьи следует принимать во внимание следующие рекомендации:

а) при наборе статьи необходимо различать следующие знаки препинания и контрольные последовательности, им соответствующие: одинарный дефис ("—"), двойной дефис ("--")¹, тройной дефис ("---")². Одинарный дефис используют в составных словах; двойной дефис рекомендуется для указания диапазона чисел и "двойных" фамилий; тройной дефис означает тире;

б) допустимо использование только обратных кавычек ("") с помощью контрольной последовательности `\textquotedblright`;

в) недопустимо нахождения рядом двух и более закрывающих или открывающих скобок одного вида. Рекомендуется внимательно относиться к балансу скобок;

г) допускается использование следующих команд переключения шрифтов: `\rm`, `\it`, `\bf`, `\sl` и стандартных шрифтов семейства AMS с использованием следующих команд переключения шрифтов `\mathbf`, `\mathcal`, `\mathfrak`. Использование других шрифтов должно быть согласовано с редакцией журнала;

д) на графиках должна быть нанесена сетка (желательно квадратная) с обозначением делений. Рекомендуемый размер рисунков — 11-15 см по горизонтали и 5-15 см по вертикали. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках и за подобием шрифтов. Надписи, загромождающие рисунки, должны

¹Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash--`

²Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash---`

быть заменены цифрами или буквенными обозначениями и внесены в подрисуночные подписи. Сами подрисуночные подписи должны быть, по возможности, краткими. Редакция оставляет за собой право требовать от автора более качественного выполнения графического материала;

е) для математических обозначений рекомендуется употреблять, по возможности, стандартные и наиболее простые символы. Не следует применять индексы из букв русского алфавита. Векторы и тензоры выполняются жирным шрифтом. Вместо одинаковых повторяющихся блоков в формулах желательно использовать их сокращенные обозначения;

ж) при нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой. Рекомендуется двойная нумерация: первая цифра — номер раздела статьи, вторая цифра после точки — номер формулы внутри раздела. Номер должен стоять справа от формулы. Не следует нумеровать формулы, на которые нет ссылок в тексте;

з) теоремы, леммы, примеры, утверждения и т.п. выполняются обычным шрифтом; их заголовки даются жирным шрифтом;

и) список литературы составляется по порядку цитирования, располагается в конце статьи на русском и английском языках (не менее 10 пунктов). Для книг сообщается следующая информация: фамилии и инициалы авторов, полное название книги, издательство, год издания и количество страниц; для статей в сборниках и журналах — фамилии и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала (сборника) полностью или, если есть стандартное сокращение, сокращенно, полная информация об издании (серия, том, номер, выпуск, год), номера начальной и конечной страниц статьи;

к) ссылки на иностранные источники (включая переведенные на русский язык статьи и книги) даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются в случае перевода на русский язык с указанием названия и выходных данных перевода.

Цитирование осуществляется командой `\cite` с соответствующей меткой. Ссылки на неопубликованные работы недопустимы.

Невыполнение авторами перечисленных выше правил может повлечь за собой задержку с опубликованием работы.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию и даты ее принятия. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией журнала.

Редакция журнала