



**САМАРСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

Самарский национальный
исследовательский университет
имени академика С.П. Королёва



ISSN 2541-7525 Print
ISSN 2712-8954 Online

ВЕСТНИК

САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

**ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ
СЕРИЯ**

VESTNIK

OF SAMARA UNIVERSITY

**NATURAL SCIENCE
SERIES**

ТОМ 28 • №3-4 • 2022 ГОД

Подписной индекс 80307
ISSN 2541-7525

**ВЕСТНИК
САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ СЕРИЯ**

- *Математика*
- *Механика*

ТОМ 28 • № 3-4 • 2022 ГОД

УЧРЕДИТЕЛЬ И ИЗДАТЕЛЬ ЖУРНАЛА

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»
(Самарский университет)

eLIBRARY.RU РИНЦ ВИНТИ ULRICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet

Все статьи по тематике международной базы данных zbMATH считаются включенными в Перечень ведущих научных журналов Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки РФ

Журнал издается с 1995 г. под названием «Вестник Самарского государственного университета», с 2016 г. —

«Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия»

2022 Т. 28 № 3–4

Главный редактор:

Е.В. Шахматов, член-корреспондент РАН, д-р тех. наук, проф., научный руководитель Самарского университета, главный научный сотрудник института акустики машин, зав. кафедрой автоматических систем энергетических установок (Самара, Самарский университет, РФ)

Заместители главного редактора:

А.Ф. Крутов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры общей и теоретической физики, зам. директора Межвузовского научно-исследовательского центра по теоретическому материаловедению (Самара, Самарский университет, РФ)

С.В. Асташкин, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой функционального анализа и теории функций (Самара, Самарский университет, РФ)

Л.В. Степанова, д-р физ.-мат. наук, доц., проф. кафедры математического моделирования в механике (Самара, Самарский университет, РФ)

Ответственный секретарь:

М.А. Лихобабенко, канд. физ.-мат. наук

Лит. редактирование, корректура

Т.И. Кузнецовой

Компьютерная верстка, макет

М.А. Лихобабенко

Выпускающий редактор

Т.А. Мурзинова

Информация на английском языке

М.С. Стрельникова

Издатель: Самарский университет

Адрес издателя:

443086, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, Московское шоссе, 34, корп. 22а, 312 б.

Центр периодических изданий Самарского университета

Адрес редакции: 443011, Российская

Федерация, Самарская обл., г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

E-mail: nvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций, регистрационный номер серии ПИ № ФС 77-67328 от 05.10.2016

Подписной индекс в Объединенном каталоге «Пресса России» 80307

ISSN 2541-7525

Авторские статьи не обязательно отражают мнение издателя.
0+

Цена свободная

Подписано в печать 23.03.2023. Дата выхода в свет 28.03.2023
Формат 60 × 84/8.

Бумага офсетная. Печать оперативная.

Печ. л. 14.

Тираж 200 экз. (первый завод — 30 экз.). Заказ №

Отпечатано в типографии Самарского университета

443086, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, Московское шоссе, 34.

www: <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Редакционная коллегия:

В.Э. Видельман, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой экспериментальной механики и конструкционного материаловедения, директор Центра экспериментальной механики (Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, РФ)

А.В. Горохов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры общей и теоретической физики (Самарский университет, Самара, РФ)

А.М. Зюзин, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой экспериментальной физики (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, РФ)

В.В. Иважник, д-р физ.-мат. наук, проф., декан физического факультета, зав. кафедрой оптики и спектроскопии (Самарский университет, Самара, РФ)

А.И. Кожанов, д-р физ.-мат. наук, проф., ведущий научный сотрудник лаборатории теории функций (Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, РФ)

М.А. Леган, д-р тех. наук, доц., проф. кафедры прочности летательных аппаратов (Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, РФ)

Константин Панкрашкин, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры математики (Университет Париж-юг 11, Орсе, Франция)

А.Н. Панов, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой алгебры и геометрии (Самарский университет, Самара, РФ)

А.В. Покоев, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой физики твердого тела и неравновесных систем (Самарский университет, Самара, РФ)

Давиде М. Прозертио, д-р химии, проф. кафедры химии (Миланский университет, Милан, Италия)

Л.С. Пулькина, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры дифференциальных уравнений и теории управления (Самарский университет, Самара, РФ)

С.Г. Пятков, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой высшей математики; ведущий научный сотрудник (Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, РФ; Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, РФ)

В.В. Ревин, д-р биол. наук, проф., декан факультета биотехнологии и биологии, зав. кафедрой биотехнологии, биоинженерии и биохимии (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, РФ)

В.А. Салеев, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры физики (Самарский университет, Самара, РФ)

В.А. Соболев, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой дифференциальных уравнений и теории управления, профессор кафедры кибернетики (Самарский университет, Самара, РФ)

П.А. Терехин, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры теории функций и стохастического анализа (Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, РФ)

А.И. Хромов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры прикладной математики и информатики (Комсомольский-на-Амуре государственный университет, Комсомольск-на-Амуре, РФ)

© Самарский университет, 2022

Subscription Index 80307
ISSN 2541-7525

**VESTNIK
OF SAMARA UNIVERSITY
NATURAL SCIENCE SERIES**

- *Mathematics*
- *Mechanics*

VOL. 28 • № 3-4 • 2022

JOURNAL FOUNDER AND PUBLISHER
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
«Samara National Research University»
(Samara University)

eLIBRARY.RU RSCI VINITI ULRICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet
All articles on the subject of an international database zbMATH seemed to be included in the list of leading scientific journals of the Higher Attestation Committee at the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

The journal is published since 1995 under the title Vestnik of Samara State University, since 2016 —
Vestnik of Samara University. Natural Science Series

Chief editor:

E.V. Shakhmatov, corresponding member of the RAS, Dr. of Science (Engineering), prof., scientific adviser of Samara National Research University, chief researcher of Machine Acoustics Institute, head of Department of Power Plant Automatic Systems (Samara, Samara National Research University, RF)

Deputy chief editors:

A.F. Krutov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., professor of Department of General and Theoretical Physics, deputy director of Samara Center for Theoretical Materials Science (Samara, Samara National Research University, RF)

S.V. Astashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Functional Analysis and Function Theory (Samara, Samara National Research University, RF)

L.V. Stepanova, Dr. of Phys.-Math. Sci., associate prof., prof. of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics (Samara, Samara National Research University, Russian Federation)

Executive editor:

M.A. Likhobabenko, Cand. of Phys.-Math. Sci.

Literary editing, proofreading

T.I. Kuznetsova

Computer makeup, dummy

M.A. Likhobabenko

Executive editor

T.A. Murzinova

Information in English

M.S. Strelnikov

Publisher: Samara National Research University

Address publisher:

312 b, building 22 a, 34, Moskovskoye shosse,
Samara, 443086, Samara region, Russian Federation.

Centre of Periodical Publications of Samara University

Address of editorial stuff: 1, Akademika Pavlova Street, Samara,
443011, Samara region, Russian Federation.

E-mail: nvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Certificate of registration of means of mass media ПИ № ФС
77-67328 dated 05.10.2016, issued by the Federal Service for
Supervision of Communications, Information Technology and Mass
Media.

**Subscription Index in the United catalog «Press of Russia»
80307**

ISSN 2541-7525

Author's articles do not necessarily reflect the views of the publisher.

0+

Price free

Passed for printing 23.03.2023.

Format 60 × 84/8.

Litho paper. Instant print.

Print. sheets 14.

Circulation 200 copies (first printing – 30 copies).

Order №

Printed on the printing house of Samara University

34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Samara region, Russian
Federation

www: <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Editorial board:

V.E. Videlman, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the
Department of Experimental Mechanics and Engineering Materials
Science, head of the Center of Experimental Mechanics (Perm
National Research Polytechnic University, Perm, RF)

A.V. Gorokhov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the
Department of General and Theoretical Physics (Samara National
Research University, Samara, RF)

A.M. Zyuzin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the
Department of Experimental Physics (Ogarev Mordovia National
University, Saransk, RF)

V.V. Ivakhnik, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., dean of the Faculty
of Physics, head of the Department of Optics and Spectroscopy
(Samara National Research University, Samara, RF)

A.I. Kozhanov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., leading research
worker of the Laboratory of the Theory of Functions (Sobolev
Institute of Mathematics of the Siberian branch of the RAS,
Novosibirsk, RF)

M.A. Legan, Dr. of Engineering Sci., associate prof., prof. of the
Department of Strength of Flying Machines (Novosibirsk State
Technical University, Novosibirsk, RF)

Konstantin Pankrashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. of the
Department of Mathematics (University of Paris-Sud 11, Orsay,
France)

A.N. Panov, Dr. of Phys.-Math. Sci., professor, head of the
Department of Algebra and Geometry (Samara National Research
University, Samara, RF)

A.V. Pokoev, Dr. of Phys.-Math. Sci., professor, head of the
Department of Solid-State Physics and Nonequilibrium Systems
(Samara National Research University, Samara, RF)

Davide M. Proserpio, Dr. of Chemistry, prof. of the Department
of Chemistry (University of Milan, Milan, Italy)

L.S. Pulkina, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the
Department of Differential Equations and Control Theory (Samara
National University, Samara, RF)

S.G. Pyatkov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the
Department of Higher Mathematics; leading research worker (Yugra
State University, Khanty-Mansiysk, RF; Sobolev Institute of
Mathematics of the Siberian branch of the RAS, Novosibirsk, RF)

V.V. Revin, Dr. Degree in Biology, prof., dean of the Faculty
of Biotechnology and Biology, head of the Department of
Biotechnology, Bioengineering and Biochemistry (Ogarev Mordovia
National Research University, Saransk, RF)

V.A. Saleev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department
of Physics (Samara National Research University, Samara, RF)

V.A. Sobolev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the
Department of Differential Equations and Control Theory, prof.
of the Department of Engineering Cybernetics (Samara National
Research University, Samara, RF)

P.A. Terekhin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the
Department of Function Theory and Stochastic Analysis (Saratov
State University, Saratov, RF)

A.I. Khromov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the
Department of Applied Mathematics and Informatics (Komsomolsk-
na-Amure State University, Komsomolsk-on-Amur, RF)

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Богатов А.В., Пулькина Л.С. Разрешимость обратной коэффициентной задачи с интегральным переопределением для одномерного параболического уравнения	7
Воскресенская Г.В. О характеристике группы числами классов сопряженных элементов.....	18
Избяков И.М. О системах векторов и подпространств конечномерного пространства, восстанавливающих вектор-сигнал	26
Соболев В.А. Редукция задачи оптимального слежения при наличии шумов	32

Механика

Великанов П.Г., Артюхин Ю.П. Общая теория ортотропных оболочек. Часть II.....	40
Лычев С.А., Койфман К.Г. Отсчетная форма тел с конечными несовместными деформациями	53
Петрова Д.М., Миронов А.В., Буханько А.А., Жаббаров Р.М. К вопросу экспериментального и численного определения коэффициентов многопараметрического ряда М. Уильямса	88
Хвостунков К.А. Последовательность разрушения слоев двуслойной балки при трехточечном нагружении	105
<i>Требования к оформлению статей</i>	111

CONTENTS

Mathematics

Bogatov A.V., Pulkina L.S. On solvability of the inverse problem for the one-dimensional parabolic equation with unknown time-dependent coefficient under integral observation	7
Voskresenskaya G.V. On group characterization by numbers of conjugate classes	18
Izbiakov I.M. About systems of vectors and subspaces in finite dimensional space recovering vector-signal	26
Sobolev V.A. Reduction of the optimal tracking problem in the presence of noise	32

Mechanics

Velikanov P.G., Artyukhin Y.P. General theory of orthotropic shells. Part II	40
Lychev S.A., Koifman K.G. Reference shape of bodies with finite incompatible deformations ..	53
Petrova D.M., Mironov A.V., Buchanko A.A., Zhabbarov R.M. To the scrutiny of the experiential and computational elicitation of factors of the Williams multi-parameter expansion....	88
Khvostunkov K.A. Fracture initiation sequence of double-layer beam layers under three-point loading	105
<i>Requirements to the design of articles</i>	111

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-7-17

УДК 517.95

Дата: поступления статьи: 15.09.2022
после рецензирования: 17.10.2022
принятия статьи: 05.12.2022

А.В. Богатов

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: andrebogato@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5797-1930>

Л.С. Пулькина

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: louse@samdiff.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7947-6121>

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

АННОТАЦИЯ

Исследуется разрешимость коэффициентной обратной задачи с нелокальными краевыми условиями и интегральным условием переопределения для одномерного параболического уравнения. Обоснование существования единственного решения базируется на полученных в работе априорных оценках и результатах о разрешимости прямой нелокальной задачи для изучаемого уравнения.

Ключевые слова: обратная задача; параболическая задача с неизвестным коэффициентом; интегральное условие переопределения; нелокальные краевые условия.

Цитирование. Богатов А.В., Пулькина Л.С. Разрешимость обратной коэффициентной задачи с интегральным переопределением для одномерного параболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2022. Т. 28, № 3–4. С. 7–17. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-7-17>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Богатов А.В., Пулькина Л.С., 2022

Андрей Владимирович Богатов — аспирант кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Людмила Степановна Пулькина — доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Статья посвящена исследованию разрешимости задачи, которую будем называть **задача К**, состоящей в нахождении пары функций $(U(x, t), p(t))$ таких, что в области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$

$$U_t - (a(x, t)U_x)_x + p(t)U + c(x, t)U = f(x, t), \quad (1)$$

выполняются начальное и краевые условия

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

$$\begin{aligned} a(0, t)U_x(0, t) + \alpha_1(t)U(0, t) + \beta_1(t)U(l, t) + \int_0^l H_1(x, t)U(x, t)dx = 0, \\ a(l, t)U_x(l, t) + \alpha_2(t)U(0, t) + \beta_2(t)U(l, t) + \int_0^l H_2(x, t)U(x, t)dx = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

а также условие переопределения

$$\int_0^l U(x, t)dx = E(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Функции $a(x, t), c(x, t), f(x, t), H_i(x, t), i = 1, 2$, заданы в Q_T , причем $a(x, t) > 0$ всюду в $\bar{Q}_T$, $E(t), \alpha_i(t), \beta_i(t), i = 1, 2$, заданы в $[0, T]$, и $E(t) \neq 0$ для всех $t \in [0, T]$, тогда как $p(t)$ подлежит определению.

Интерес к обратным задачам с неизвестным коэффициентом, зависящим лишь от переменной времени, связан с тем фактором, что такие ситуации возникают в различных приложениях, например, в задачах управления [1–3], в задачах со свободной границей [4].

Особенностью задачи (1) – (4) являются нелокальные краевые условия.

Условия вида (3) возникают при изучении различных процессов тепломассопереноса, термоупругости, а также тесно связаны с задачами управления. Примеры, иллюстрирующие эти утверждения, можно найти в [3], а также в статьях, ссылки на которые содержатся в списке литературы отмеченной статьи.

Заметим, что нелокальные краевые условия (3) являются обобщением краевых условий статьи [3], которые, в свою очередь, являются обобщением условий (S) Стеклова [5], возникающих при исследовании процесса остывания твердого тела:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}u_x(0, t) + \alpha_{12}u_x(l, t) + \beta_{11}u(0, t) + \beta_{12}u(l, t) &= g_1(t), \\ \alpha_{21}u_x(0, t) + \alpha_{22}u_x(l, t) + \beta_{21}u(0, t) + \beta_{22}u(l, t) &= g_2(t), \end{aligned}$$

где α_{ij}, β_{ij} — числа. Эта статья, по-видимому, является первой статьей, посвященной исследованию разрешимости задачи для уравнения теплопроводности с условиями (S), которые гораздо позднее стали называть нелокальными условиями.

Таким образом, условия (3) изучаемой задачи можно интерпретировать как возмущенные (в силу присутствия интегральных слагаемых) обобщения условий Стеклова.

Условие переопределения (4) имеет интегральное представление, и его естественно понимать как результат действия некоего прибора [6], дающего информацию о среднем значении искомого решения. Обратные задачи с интегральным условием переопределения рассматривались в работах Камынина [7–9], но в них задан интеграл по переменной времени t . В нашей работе условие переопределения представляет собой интеграл по пространственной переменной.

Нелинейные обратные задачи с неизвестными коэффициентами, зависящими от переменной времени, изучались различными методами многими авторами. Отметим как наиболее близкие по виду условия переопределения, кроме упомянутых уже [1–9] еще и работы [10; 11].

1. Разрешимость задачи К

Начнем исследование задачи К с выполнения преобразований

$$r(t) = \exp\left\{-\int_0^t p(\tau)d\tau\right\}, \quad u(x, t) = U(x, t)r(t). \quad (5)$$

Тогда, если $(U(x, t), p(t))$ — решение задачи К, то введенные в (5) новые функции удовлетворяют равенствам

$$u_t - (a(x, t)u_x)_x + c(x, t)u = r(t)f(x, t), \quad (6)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad (7)$$

$$\begin{aligned} a(0, t)u_x(0, t) + \alpha_1(t)u(0, t) + \beta_1(t)u(l, t) + \int_0^l H_1(x, t)u(x, t)dx &= 0, \\ a(l, t)u_x(l, t) + \alpha_2(t)u(0, t) + \beta_2(t)u(l, t) + \int_0^l H_2(x, t)u(x, t)dx &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$r(t) = [E(t)]^{-1} \int_0^l u(x, t)dx, \quad t \in [0, T]. \quad (9)$$

Из (6)–(9) видно, что преобразования (5) сводят коэффициентную и, стало быть, нелинейную, задачу К к линейной обратной задаче определения источника, другими словами, правой части уравнения (6). Назовем ее **задача R**. Если окажется, что существует решение (u, r) задачи R, то решение задачи К может быть получено с помощью обратных к (5) преобразований

$$U(x, t) = \frac{u(x, t)}{r(t)}, \quad p(t) = -\frac{r'(t)}{r(t)}. \quad (10)$$

Уточним понятие решений задач. Начнем с задачи К.

Определение 1. Решением задачи К будем называть пару функций (U, p) таких, что $U \in W_2^{1,1}(Q_T)$, $p \in L_2(0, T)$, $U(x, 0) = \varphi(x)$, для всех $v \in \hat{W}_2^1(Q_T)$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l [U_t v + a(x, t) U_x v_x + p(t) U + c(x, t) U] dx dt + \\ & + \int_0^T v(l, t) [\alpha_2 U(0, t) + \beta_2 U(l, t) + \int_0^l H_2(x, t) U(x, t) dx] dt - \\ & - \int_0^T v(0, t) [\alpha_1 U(0, t) + \beta_1 U(l, t) + \int_0^l H_1(x, t) U(x, t) dx] dt = \\ & = \int_0^T \int_0^l f(x, t) v(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (11)$$

и выполняется равенство

$$\int_0^l U(x, t) dx = E(t).$$

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

- a) $a, a_t, c \in C(\bar{Q}_T)$, $\alpha_i, \beta_i \in C^1[0, T]$, $\varphi \in L_2(0, l)$,
- b) $f, H_i, H_{it} \in C(\bar{Q}_T)$, $E \in C[0, T]$, $E(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T]$,
- c) $\alpha_2(t) + \beta_1(t) = 0$,
- d) $\alpha_1(t)\xi^2 + 2\beta_1(t)\xi\eta - \beta_2(t)\eta^2 \leq 0, \quad t \in [0, T]$.

Тогда существует единственное решение $(U(x, t), p(t))$ задачи К.

Доказательство Теоремы 1 базируется на факте разрешимости задачи R и будет предъявлено после того, как мы докажем существование единственного решения задачи R, принадлежащего нужному нам пространству, что мы уточним ниже. Поэтому перейдем к исследованию задачи R.

1.1. Разрешимость задачи R

Определение 2.

Решением задачи R будем называть пару функций (u, r) таких, что $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$, $r \in L_2(0, T)$, для всех $v \in \hat{W}_2^1(Q_T)$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l [-uv_t + a(x, t) u_x v_x + c(x, t) u] dx dt + \int_0^l \varphi(x) v(x, 0) dx + \\ & + \int_0^T v(l, t) [\alpha_2 u(0, t) + \beta_2 u(l, t) + \int_0^l H_2(x, t) u(x, t) dx] dt - \\ & - \int_0^T v(0, t) [\alpha_1 u(0, t) + \beta_1 u(l, t) + \int_0^l H_1(x, t) u(x, t) dx] dt = \\ & = \int_0^T \int_0^l f(x, t) r(t) v(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (12)$$

и выполняется равенство

$$\int_0^l u(x, t) dx = E(t) r(t). \quad (13)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия Теоремы 1. Тогда существует единственное решение задачи R.

Доказательство.

Не ограничивая общности, положим $\varphi(x) = 0$. Будем искать приближенные решения задачи R из соотношений:

$$\int_0^T \int_0^l (-u_n v_t + a(x, t) u_{nx} v_x + c(x, t) u_n v) dx dt -$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T v(0, t) [\alpha_1(t) u_n(0, t) + \beta_1(t) u_n(l, t) + \int_0^l H_1(x, t) u_n(x, t) dx] dt + \\
 & + \int_0^T v(l, t) [\alpha_2(t) u_n(0, t) + \beta_2(t) u_n(l, t) + \int_0^l H_2(x, t) u_n(x, t) dx] dt = \\
 & = \int_0^T \int_0^l v f(x, t) r_n(t) dx dt,
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$r_n(t) = \frac{1}{E(t)} \int_0^l u_{n-1}(x, t) dx, \tag{15}$$

выбрав

$$u_0 = \frac{E(t)}{l}.$$

В силу выбора нулевого приближения u_0 из (13) найдем $r_1(t) = 1$. Тогда для $n = 1$ (14) представляет собой тождество, определяющее обобщенное решение нелокальной прямой задачи N в Q_T , состоящей в нахождении решения уравнения

$$u_t - (a(x, t) u_x)_x + c(x, t) u = f(x, t),$$

удовлетворяющего начальным данным

$$u(x, 0) = 0,$$

и нелокальным условиям

$$\begin{aligned}
 a(0, t) u_x(0, t) + \alpha_1(t) u(0, t) + \beta_1(t) u(l, t) + \int_0^l H_1(x, t) u(x, t) dx &= 0, \\
 a(l, t) u_x(l, t) + \alpha_2(t) u(0, t) + \beta_2(t) u(l, t) + \int_0^l H_2(x, t) u(x, t) dx &= 0.
 \end{aligned}$$

Разрешимость в $W_2^{1,0}(Q_T)$ этой задачи доказана в [12], поэтому существует единственная функция $u_1(x, t)$, удовлетворяющая тождеству (12).

Тогда мы можем найти $r_2(t)$ из (15), причем очевидно, что $r_2 \in L_2(0, T)$. Действительно,

$$r_2(t) = \frac{1}{E(t)} \int_0^l u_1(x, t) dx,$$

откуда с помощью неравенства Коши — Буняковского получим

$$r_2^2(t) \leq \frac{l}{E^2(t)} \int_0^l u_1^2(x, t) dx.$$

Интегрируя полученное неравенство по $(0, T)$ и учитывая, что $E(t) \neq 0$ всюду в $[0, T]$ и там же непрерывна, а следовательно, найдется положительное число E_0 такое, что $[E^2(t)]^{-1} < E_0$, приходим к неравенству

$$\int_0^T r_2^2 dt \leq E_0 \int_0^T \int_0^l u_1^2(x, t) dx dt,$$

из которого в силу принадлежности $u_1 \in W_2^{1,0}(Q_T)$ следует ограниченность интеграла $\int_0^T r_2^2(t) dt$.

На следующем шаге заметим, что $f r_2 \in L_2(0, T)$. Действительно, так как $f \in C(\bar{Q}_T)$, то существует $k > 0$ такое, что $\max_{Q_T} |f| \leq \sqrt{k}$, тогда

$$\int_0^T f^2(x, t) r_2^2(t) dt \leq k \int_0^T r_2^2(t) dt,$$

и в силу доказанной выше принадлежности $r_2(t)$ пространству $L_2(0, T)$ убеждаемся в справедливости утверждения.

Продолжив этот процесс, мы построим последовательности $\{u_n(x, t)\}$ и $\{r_n(t)\}$.

Покажем теперь, что эти последовательности сходятся. Для этого воспользуемся результатами статьи [12], немного модифицировав в ней оценку.

Приведем кратко вывод априорной оценки решения задачи N в нужной нам форме и представим его в виде Леммы.

Лемма 1. Решение задачи N, принадлежащее пространству $W_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leq \sqrt{\varepsilon} M \|f\|_{L_2(Q_T)},$$

где число $M > 0$ и будет уточнено при доказательстве.

Доказательство. В [12] доказано существование функции $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$, которая является решением задачи N. Существенную роль в доказательстве играет полученная априорная оценка. Оставляя неизменными основные этапы вывода этой оценки, внесем в нее некоторые коррективы. Для наглядности приведем здесь коротко вывод равенства, из которого получена оценка.

Приближенное решение задачи N ищется в виде

$$u^m(x, t) = \sum_{k=1}^m c_{km}(t) w_k(x),$$

где $w_k(x)$ — фундаментальная система в $W_2^{1,0}$ из соотношений

$$\begin{aligned} & \int_0^l [u_t^m w_i(x) + a(x, t) u_x^m w_i'(x) + c(x, t) u^m w_i(x)] dx - \\ & - w_i(0) [\alpha_1 u^m(0, t) + \beta_1 u^m(l, t) + \int_0^l H_1(x, t) u^m(x, t) dx] + \\ & + w_i(l) [\alpha_2 u^m(0, t) + \beta_2 u^m(l, t) + \int_0^l H_2(x, t) u^m(x, t) dx] = \\ & = \int_0^l f(x, t) w_i(x) dx. \end{aligned} \quad (16)$$

В результате преобразований, которые подробно проделаны в [12], и здесь их опустим, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l (u^m(x, \tau))^2 dx + \int_0^\tau \int_0^l a(x, t) (u_x^m)^2 dx dt = - \int_0^\tau \int_0^l c(x, t) (u^m)^2 dx dt + \\ & + \int_0^\tau \alpha_1(t) (u^m(0, t))^2 dt - \int_0^\tau \beta_2(t) (u^m(l, t))^2 dt + 2 \int_0^\tau \beta_1(t) u^m(0, t) u^m(l, t) dt + \\ & + \int_0^\tau u^m(0, t) \int_0^l H_1(x, t) u^m(x, t) dx dt - \int_0^\tau u^m(l, t) \int_0^l H_2(x, t) u^m(x, t) dx dt + \\ & + \int_0^\tau \int_0^l f(x, t) u^m(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (17)$$

В силу условий теоремы 1 существуют положительные числа a_0, b_0, c_0, h_0 такие, что

$$a(x, t) \geq a_0, \max_{Q_T} |c| \leq c_0, \max_{[0, T]} |\alpha_i, \beta_i| \leq b_0, \max_i \max_{[0, T]} \int_0^l H_i^2 dx \leq h_0.$$

Оценим правую часть равенства (17), применив неравенства Коши, Коши — Буяковского, учитывая условие (ii) Теоремы 1, а также используя неравенства, выведенные в [12]

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau (u^m(0, t))^2 dt \leq \frac{a_0}{2} \int_0^\tau \int_0^l (u_x^m(x, t))^2 dx dt + \frac{2(2l + a_0)}{a_0 l} \int_0^\tau \int_0^l (u^m)^2 dx dt, \\ & \int_0^\tau (u^m(l, t))^2 dt \leq \frac{a_0}{2} \int_0^\tau \int_0^l (u_x^m)^2 dx dt + \frac{2(2l + a_0)}{a_0 l} \int_0^\tau \int_0^l (u^m)^2 dx dt, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} & \int_0^l (u^m(x, \tau))^2 dx + a_0 \int_0^\tau \int_0^l (u_x^m(x, t))^2 dx dt \leq \\ & \leq 2c_1 \int_0^\tau \int_0^l (u_x^m(x, t))^2 dx dt + 2 \left| \int_0^\tau \int_0^l f(x, t) u^m(x, t) dx dt \right|, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$c_1 = c_0 + h_0 + \frac{2(2l + a_0)}{a_0 l}.$$

Последнее слагаемое (18) оценим с помощью неравенства "Коши с ε " и получим

$$\int_0^l (u^m(x, \tau))^2 dx + a_0 \int_0^\tau \int_0^l (u_x^m(x, t))^2 dx dt \leq$$

$$\leq c_2 \int_0^\tau \int_0^l (u^m(x, t))^2 dx dt + \varepsilon \int_0^\tau \int_0^l f^2(x, t) dx dt, \quad (19)$$

где

$$c_2 = 2c_1 + \frac{1}{\varepsilon}.$$

Усилим неравенство (19), прибавив к его правой части слагаемое

$c_2 a_0 \int_0^\tau \int_0^l (\tau - t)(u_x^m(x, t))^2 dx dt$, что приводит к неравенству

$$\begin{aligned} & \int_0^l (u^m(x, \tau))^2 dx + a_0 \int_0^\tau \int_0^l (u_x^m)^2 dx dt \leq \\ & \leq c_2 \left[\int_0^\tau \int_0^l (u^m)^2 dx dt + a_0 \int_0^\tau \int_0^l (\tau - t)(u_x^m)^2 dx dt \right] + \varepsilon \int_0^\tau \int_0^l f^2 dx dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Заметим, что справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \int_0^l (\tau - t)(u_x^m(x, t))^2 dx dt = \int_0^\tau \int_0^l (u_x^m(x, t))^2 dx dt,$$

и поэтому к (20) можно применить лемму Гронуолла [13], что приводит к неравенству:

$$\int_0^l (u^m(x, \tau))^2 dx + a_0 \int_0^\tau \int_0^l (u_x^m)^2 dx dt \leq \varepsilon e^{c_2 \tau} \int_0^\tau \int_0^l f^2 dx dt, \quad (21)$$

которое выполняется для всех m и для всех $\tau \in [0, T]$, при этом правая его часть от m не зависит. Тогда для решения задачи N, которое есть слабый предел последовательности $\{u^m(x, t)\}$, справедливо неравенство

$$\int_0^l (u(x, \tau))^2 dx + a_0 \int_0^\tau \int_0^l u_x^2(x, t) dx dt \leq \varepsilon e^{c_2 \tau} \int_0^\tau \int_0^l f^2(x, t) dx dt. \quad (22)$$

Из последнего неравенства имеем:

$$\begin{aligned} & \int_0^l u^2 dx \leq \varepsilon e^{c_2 \tau} \|f\|_{L_2(Q_T)}^2, \\ & a_0 \int_0^\tau \int_0^l u_x^2 dx dt \leq \varepsilon e^{c_2 \tau} \|f\|_{L_2(Q_T)}^2. \end{aligned}$$

Интегрируя первое из них по $(0, T)$, извлекая квадратный корень, а затем складывая, получим

$$\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leq \sqrt{\varepsilon M} \|f\|_{L_2(Q_T)}, \quad (23)$$

где

$$M = \max \left\{ \frac{e^{c_2 T}}{a_0}, \frac{e^{c_2 T} - 1}{c_2} \right\}.$$

Вернемся к обратной задаче. Для каждого n функция $u_n(x, t)$ является решением прямой задачи с правой частью $f(x, t)r_n(t)$, но тогда справедливо неравенство (23) и, учитывая, что $\max_{\bar{Q}_T} |f(x, t)| \leq \sqrt{k}k$, получим

$$\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leq \sqrt{kM} \sqrt{\varepsilon} \|r_n\|_{L_2(0, T)}. \quad (24)$$

Из равенства (23) следует неравенство

$$r_n^2(t) = \frac{1}{E^2(t)} \left(\int_0^l u_{n-1}(x, t) dx \right)^2 \leq E_0 l \int_0^l u_{n-1}^2 dx,$$

интегрируя которое получим

$$\int_0^T r_n^2(t) dt \leq E_0 l \int_0^T \int_0^l u_{n-1}^2 dx dt.$$

откуда следует неравенство

$$\|r_n\|_{L_2(Q_T)} \leq \sqrt{E_0 l} \|u_{n-1}\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}. \quad (25)$$

Из (24) и (25) следует:

$$\begin{aligned} & \|u_n\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leq \sqrt{kM} \sqrt{\varepsilon} \sqrt{E_0 l} \|u_{n-1}\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}, \\ & \|r_n\|_{L_2(0, T)} \leq \sqrt{kM} \sqrt{\varepsilon} \sqrt{E_0 l} \|r_{n-1}\|_{L_2(0, T)}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$s = \sqrt{MkE_0 l}.$$

Тогда

$$\|u_n\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leq s\sqrt{\varepsilon}\|u_{n-1}\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}. \quad (26)$$

$$\|r_n\|_{L_2((0,T))} \leq s\sqrt{\varepsilon}\|r_{n-1}\|_{L_2(0,T)}. \quad (27)$$

Выберем ε так, чтобы $s\sqrt{\varepsilon} < 1$. Тогда (26) и (27) образуют бесконечно убывающие геометрические прогрессии, а значит, сходятся при $n \rightarrow \infty$. Из этого следует, что обе последовательности $\{u_n\}$ и $\{r_n\}$ сходятся по норме в соответствующих пространствах, и предел каждой последовательности единственный. Но из сильной сходимости (по норме) следует слабая сходимости. Переходя к пределу в (14) и (15), получаем, что предельные функции $u(x, t)$ и $r(t)$ образуют решение задачи R.

Покажем теперь, что некоторые дополнительные условия гарантируют принадлежность $u \in W_2^{1,1}Q_T$, $r \in W_2^1(0, T)$.

Лемма 2. Условия теоремы 1 гарантируют принадлежность решения задачи R пространству $W_2^{1,1}(Q_T)$.

Доказательство. Так как каждое приближенное решение $u_n(x, t)$ задачи R определяется через решение прямой задачи N, то достаточно показать, что решение прямой задачи принадлежит $W_2^{1,1}(Q_T)$. Умножим каждое из равенств (16) на $c'_{im}(t)$, просуммируем по i от 1 до m , а затем проинтегрируем по $t \in (0, \tau)$. Получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^l [(u_t^m)^2 + au_x^m u_{xt}^m + cu^m u_t^m] dx dt - \\ & - \int_0^\tau u_t^m(0, t) [\alpha_1(t) u_t^m(0, t) + \beta_1(t) u_t^m(l, t) + \int_0^l H_1(x, t) u^m(x, t) dx] dt + \\ & + \int_0^\tau u_t^m(l, t) [\alpha_2(t) u_t^m(0, t) + \beta_2(t) u_t^m(l, t) + \int_0^l H_2(x, t) u^m(x, t) dx] dt = \\ & = \int_0^\tau \int_0^l f(x, t) u_t^m(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (28)$$

Преобразуем (28), интегрируя некоторые из слагаемых.

- 1) $\int_0^\tau \int_0^l au_x^m u_{xt}^m dx dt = -\frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_x^m)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^l a (u_x^m(x, \tau))^2 dx;$
- 2) $-\int_0^\tau \alpha_1(t) u_t^m(0, t) u^m(0, t) dt = \frac{1}{2} \int_0^\tau \alpha'_1(t) (u^m(0, t))^2 dt - \frac{1}{2} \alpha_1(\tau) (u^m(0, \tau))^2;$
- 3) $\int_0^\tau \alpha_2(t) u_t^m(0, t) u_t^m(l, t) dt = -\int_0^\tau \alpha_2(t) u_t^m(0, t) u^m(l, t) dt -$
 $-\int_0^\tau \alpha'_2 u^m(0, t) u^m(l, t) dt + \alpha_2(\tau) u^m(0, \tau) u^m(l, \tau);$
- 4) $\int_0^\tau \beta_2(t) u_t^m(l, t) u^m(l, t) dt = -\frac{1}{2} \int_0^\tau \beta'_2(t) (u^m(l, t))^2 dt + \frac{1}{2} \beta_2(\tau) (u^m(l, \tau))^2;$
- 5) $-\int_0^\tau u_t^m(0, t) \int_0^l H_1(x, t) u^m(x, t) dx dt = \int_0^\tau u^m(0, t) \int_0^l H_{1t}(x, t) u_t^m(x, t) dx dt +$
 $+\int_0^\tau u^m(0, t) \int_0^l H_{1t}(x, t) u^m(x, t) dx dt - u^m(0, \tau) \int_0^l H_1(x, \tau) u^m(x, \tau) dx;$
- 6) $-\int_0^\tau u_t^m(l, t) \int_0^l H_2(x, t) u^m(x, t) dx dt = \int_0^\tau u^m(l, t) \int_0^l H_{2t}(x, t) u_t^m(x, t) dx dt +$
 $+\int_0^\tau u^m(l, t) \int_0^l H_{2t}(x, t) u^m(x, t) dx dt - u^m(l, \tau) \int_0^l H_2(x, \tau) u^m(x, \tau) dx.$

Подставим полученные выражения в (28), учтя условие $\alpha_2(t) + \beta_1(t) = 0$.

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^l [(u_t^m)^2 + \frac{1}{2} \int_0^l a (u_x^m(x, \tau))^2 dx = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_x^m)^2 dx dt - \int_0^\tau \int_0^l cu^m u_t^m dx dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^\tau \alpha'_1(t) (u^m(0, t))^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \beta'_2(t) (u^m(l, t))^2 dt + \int_0^{\tau_{au}} \alpha'_2(t) u^m(0, t) u^m(l, t) dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \alpha_1(\tau) (u^m(0, \tau))^2 - \alpha_2(\tau) u^m(0, \tau) u^m(l, \tau) - \frac{1}{2} \beta_2(\tau) (u^m(l, \tau))^2 - \\
 & - \int_0^\tau u^m(0, t) \int_0^l H_1(x, t) u_t^m(x, t) dx dt - \int_0^\tau u^m(0, t) \int_0^l H_{1t}(x, t) u^m(x, t) dx dt + \\
 & + u^m(0, \tau) \int_0^l H_1(x, \tau) u^m(x, \tau) dx + \int_0^\tau u^m(l, t) \int_0^l H_2(x, t) u_t^m(x, t) dx dt - \\
 & - \int_0^\tau u^m(l, t) \int_0^l H_{2t}(x, t) u^m(x, t) dx dt + u^m(l, \tau) \int_0^l H_2(x, \tau) u^m(x, \tau) dx + \\
 & + \int_0^\tau \int_0^l f(x, t) u_t^m(x, t) dx dt.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Оценим правую часть равенства (29), учитывая условие теоремы $\alpha_1(t)\xi^2 - 2\alpha_2(t)\xi\eta - \beta_2(t)\eta^2 \leq 0$ и применяя неравенства Коши, Коши с ε , Коши — Буняковского:

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^\tau \int_0^l c u^m u_t^m dx dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\tau \int_0^l (u_t^m)^2 dx dt + \frac{c_0^2}{2\varepsilon} \int_0^\tau \int_0^l (u^m)^2 dx dt; \\
 & \left| \int_0^\tau u^m(0, t) \int_0^l H_1 u_t^m dx dt \right| \leq \frac{h_0}{2} \varepsilon \int_0^\tau \int_0^l (u_t^m)^2 dx dt + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^\tau (u^m(0, t))^2 dt; \\
 & \left| \int_0^\tau u^m(l, t) \int_0^l H_2 u_t^m dx dt \right| \leq \frac{h_0}{2} \varepsilon \int_0^\tau \int_0^l (u_t^m)^2 dx dt + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^\tau (u^m(l, t))^2 dt; \\
 & \left| \int_0^\tau \int_0^l f(x, t) u_t^m(x, t) dx dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\tau \int_0^l (u_t^m)^2 dx dt + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^\tau \int_0^l f^2(x, t) dx dt.
 \end{aligned}$$

Слагаемые, содержащие следы решения на $x = 0$ и на $x = l$, оценим с помощью неравенств

$$u^2(\xi_i, t) \leq 2l \int_0^l u_x^2 dx + \frac{2}{l} \int_0^l u^2 dx, \quad \xi_0 = 0, \quad \xi_1 = l$$

и получим

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\tau (u^m(0, t))^2 dt \leq 2l \int_0^\tau \int_0^l (u_x^m(x, t))^2 dx dt + \frac{2}{l} \int_0^\tau \int_0^l (u^m(x, t))^2 dx dt, \\
 & \int_0^\tau (u^m(l, t))^2 dt \leq 2l \int_0^\tau \int_0^l (u_x^m(x, t))^2 dx dt + \frac{2}{l} \int_0^\tau \int_0^l (u^m(x, t))^2 dx dt.
 \end{aligned}$$

Выберем ε так, чтобы $\nu = 1 - (h_0 + \frac{3}{2})\varepsilon > 0$. Теперь из (29) следует неравенство

$$\begin{aligned}
 & \nu \int_0^\tau \int_0^l (u_t^m)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^l a(u_x^m(x, \tau))^2 dx \leq \\
 & \leq \mu \int_0^\tau \int_0^l [(u^m(x, t))^2 + (u_x^m(x, t))^2] dx dt + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^\tau \int_0^l f^2(x, t) dx dt,
 \end{aligned} \tag{30}$$

где $\mu = \max\{\frac{l+4}{l\varepsilon}, \max_{\bar{Q}_T} |a_t|\}$. Первое слагаемое правой части (30) ограничено в силу (23), а второе — в силу непрерывности функции $f(x, t)$ в $\bar{Q}_T$, поэтому из неравенства (30) следует существование $u_t^m \in L_2(Q_T)$.

Оценка (30) вместе с оценкой (23) позволяет выполнить предельный переход при $m \rightarrow \infty$ и заключить, что искомое решение задачи N действительно имеет производную $u_t \in L_2(Q_T)$.

Так как каждое очередное приближение к решению задачи R, которое ищется из соотношений (14), находится как решение задачи N, то существует первая производная по t и u решения задачи R.

Лемма 2 доказана.

Далее, из неравенств (25) и (27), рассуждая так же, как и выше, убеждаемся, что существует $r' \in L_2(0, T)$

Доказательство Теоремы 1

Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что для $U(x, t) = \frac{u(x, t)}{r(t)}$, $p(t) = -\frac{r'(t)}{r(t)}$ выполняются все пункты определения 1.

В (12) возьмем $v(x, t) = \Phi(t)V(x)$, где $V(x)$ — произвольный элемент из $W_2^1(0, l)$, $\Phi(t)$ — произвольный элемент из $L_2(0, T)$, $\Phi(T) = 0$. Тогда (12) в силу леммы 2 может быть записано следующим образом:

$$\int_0^T \Phi(t) \int_0^l [u_t V(x) + a(x, t) u_x V'(x) + c(x, t) u V(x)] dx dt +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^T \Phi(t)V(l)[\alpha_2 u(0, t) + \beta_2 u(l, t) + \int_0^l H_2(x, t)u(x, t)dx]dt - \\
 & - \int_0^T \Phi(t)V(0)[\alpha_1 u(0, t) + \beta_1 u(l, t) + \int_0^l H_1(x, t)u(x, t)dx]dt = \\
 & = \int_0^T \Phi(t)r(t) \int_0^l f(x, t)V(x)dxdt.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Так как $\Phi(t)$ выбрана достаточно произвольно, то из (31) следует, что для почти всех $t \in [0, T]$ выполняется тождество

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l [u_t V(x) + a(x, t)u_x V'(x) + c(x, t)uV(x)]dx + \\
 & + V(l)[\alpha_2 u(0, t) + \beta_2 u(l, t) + \int_0^l H_2(x, t)u(x, t)dx] - \\
 & - V(0)[\alpha_1 u(0, t) + \beta_1 u(l, t) + \int_0^l H_1(x, t)u(x, t)dx] = \\
 & = r(t) \int_0^l f(x, t)V(x)dxdt.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Подставим в (32) $u(x, t) = U(x, t)r(t)$ и учтем, что $(U(x, t)r(t))_t = U_t(x, t)r(t) - U(x, t)r(t)p(t)$ в силу (10). Заметим, что $r(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T]$. Поэтому сократив последнее равенство на $r(t)$, умножив на $\Phi(t)$ и проинтегрировав по $t \in [0, T]$, получим (11). Из (13) после подстановки в него $u(x, t) = U(x, t)r(t)$ следует и выполнение второго равенства определения 1 решения задачи К.

Теорема 1 доказана.

Выводы

Таким образом, в работе исследована разрешимость коэффициентной обратной задачи с нелокальными краевыми условиями и интегральным условием переопределения для одномерного параболического уравнения. Были получены априорные оценки. С помощью полученных оценок и результатов о разрешимости прямой нелокальной задачи для изучаемого уравнения обосновано существование единственного решения поставленной задачи.

Литература

- [1] Прилепко А.И., Орловский Д.Г. Об определении параметра эволюционного уравнения и обратных задач математической физики. II // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21, № 4. С. 694–701. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de5501>.
- [2] Cannon J.R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations // Inverse Problems. 1988. Vol. 4. Number 1. P. 35–45. DOI: <http://doi.org/10.1088/0266-5611/4/1/006>.
- [3] Cannon J.R., Lin Y. Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation // J. Austral. Math. Soc. Ser. 1991. В 33. P. 149–163. DOI: <http://doi.org/10.1017/S0334270000006962>.
- [4] Иванчов Н.И. Некоторые обратные задачи для уравнения теплопроводности с нелокальными краевыми условиями // Украинский математический журнал. 1993. Т. 45, № 8. С. 1066–1071. URL: <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/154453>.
- [5] Стеклов В.А. Задача об охлаждении неоднородного твердого тела // Сообщения Харьковского математического общества. Сер. 2. 1897. Т. 5. С. 136–181. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/khmo222>; <http://dspace.univer.kharkov.ua/handle/123456789/13963>.
- [6] Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. Москва: Изд-во Московского университета. 1994. 208 с. URL: [http://tka4.org/materials/study/7%20sem/From%20Marcus/\[7sem\]/Obratnye%20Zadachi%20%5B%20A.V.%5D/Book%20%5B%20Denisov%20A.M.%20Good%20Scan%5D%20-%20Введение%20в%20теорию%20обратных%20задач.pdf](http://tka4.org/materials/study/7%20sem/From%20Marcus/[7sem]/Obratnye%20Zadachi%20%5B%20A.V.%5D/Book%20%5B%20Denisov%20A.M.%20Good%20Scan%5D%20-%20Введение%20в%20теорию%20обратных%20задач.pdf).
- [7] Камынин В.Л. Обратная задача одновременного определения двух зависящих от пространственной переменной младших коэффициентов в параболическом уравнении // Матем. заметки. 2019. Т. 106, № 2. С. 248–261. DOI: <http://doi.org/10.4213/mzm12164>.

- [8] Камынин В.Л. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального переопределения // Матем. заметки. 2013. Т. 94, № 2. С. 207–217. DOI: <http://doi.org/10.4213/mzm9370>.
- [9] Камынин В.Л. Об обратной задаче одновременного определения двух зависящих от времени младших коэффициентов в недивергентном параболическом уравнении на плоскости // Матем. заметки. 2020. Т. 107, № 1. С. 74–86. DOI: <http://doi.org/10.4213/mzm12406>.
- [10] Кожанов А.И. О разрешимости обратной задачи нахождения коэффициента теплопроводности // Сибирский математический журнал. 2005. Т. 46, № 5. С. 1053–1071. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/smj1021>.
- [11] Кожанов А.И. Обратные задачи восстановления правой части специального вида в параболическом уравнении // Математические заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 4. С. 31–45. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/svfu37>; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29959200>. EDN: <https://www.elibrary.ru/zfpnlf>.
- [12] Бейлин А.Б., Богатов А.В., Пулькина Л.С. Задача с нелокальными условиями для одномерного параболического уравнения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 2. С. 380–395. DOI: <http://doi.org/10.14498/vsgtu1904>.
- [13] Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. Москва: Изд-во иностранной литературы, 1961. URL: <https://libcats.org/book/507115>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-7-17

Submitted: 15.09.2022

Revised: 17.10.2022

Accepted: 05.12.2022

A.V. Bogatov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: andrebogato@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5797-1930>

L.S. Pulkina

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: louise@samdiff.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7947-6121>

ON SOLVABILITY OF THE INVERSE PROBLEM FOR THE ONE-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION WITH UNKNOWN TIME-DEPENDENT COEFFICIENT UNDER INTEGRAL OBSERVATION

ABSTRACT

In this article, we study the inverse problem of determination of time-dependent coefficient in the parabolic equation. We prove existence and uniqueness theorem for the solution of the inverse problem with nonlocal boundary conditions and integral observation. The proof is based on a priori estimates obtained in this article and the results on solvability of corresponding direct problem for the equation under consideration.

Key words: inverse problem; time-dependent unknown coefficient; integral observation; nonlocal boundary conditions.

Citation. Bogatov A.V., Pulkina L.S. On solvability of the inverse problem for the one-dimensional parabolic equation with unknown time-dependent coefficient under integral observation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 7–17. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-7-17>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Bogatov A.V., Pulkina L.S., 2022

Andrey V. Bogatov — postgraduate student of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Ludmila S. Pulkina — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Prilepko A.I., Orlovskii D.G. Determination of the parameter of an evolution equation and inverse problems of mathematical physics. II. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1985, vol. 21, no. 4, pp. 694–701. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/de5501>. (In Russ.)
- [2] Cannon J.R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations. *Inverse Problems*, 1988, vol. 4, number 1, pp. 35–45. DOI: <http://doi.org/10.1088/0266-5611/4/1/006>.
- [3] Cannon J.R., Lin Y. Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, 33 (1991), pp. 149–163. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0334270000006962>.
- [4] Ivanchov N.I. Inverse problems for the heat-conduction equation with nonlocal boundary conditions. *Ukrainian Mathematical Journal*, 1993, vol. 45, issue 8, pp. 1066–1071. Available at: <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/154453>. (In Russ.)
- [5] Stekloff W. The problem of cooling a heterogeneous solid. *Communications de la Soci  te   mathe  matique de Kharkov. 2-e  e se  rie*, 1897, vol. 5, pp. 136–181. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/khmo222>; <http://dspace.univer.kharkov.ua/handle/123456789/13963>. (In Russ.)
- [6] Denisov A.M. Introduction to inverse problem theory. Moscow: Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, 1994, 208 p. Available at: [http://tka4.org/materials/study/7%20sem/From%20Marcus/\[7sem\]/Obratnye%20Zadachi%20%5Bbaev%20A.V.%5D/Book%20%5BDenisov%20A.M.%20Good%20Scan%5D%20-%20Введение%20в%20теорию%20обратных%20задач.pdf](http://tka4.org/materials/study/7%20sem/From%20Marcus/[7sem]/Obratnye%20Zadachi%20%5Bbaev%20A.V.%5D/Book%20%5BDenisov%20A.M.%20Good%20Scan%5D%20-%20Введение%20в%20теорию%20обратных%20задач.pdf). (In Russ.)
- [7] Kamynin V.L. The Inverse Problem of Simultaneous Determination of the Two Lower Space-Dependent Coefficients in a Parabolic Equation. *Mathematical Notes*, 2019, vol. 106, issue 2, pp. 235–247. DOI: <http://doi.org/10.1134/S0001434619070277>. (In English; original in Russian).
- [8] Kamynin V.L. The inverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equations with integral observation. *Mathematical Notes*, 2013, vol. 94, issue 2, pp. 205–213. DOI: <http://doi.org/10.1134/S0001434613070201>. (In English; original in Russian).
- [9] Kamynin V.L. The Inverse Problem of Simultaneous Determination of the Two Time-Dependent Lower Coefficients in a Non-Divergent Parabolic Equation in the Plane. *Mathematical Notes*, 2020, vol. 107, issue 1, pp. 93–104. DOI: <http://doi.org/10.1134/S0001434620010095>. (In English; original in Russian)
- [10] Kozhanov A.I. Solvability of the Inverse Problem of Finding Thermal Conductivity. *Siberian Mathematical Journal*, 2005, vol. 46, issue 5, pp. 841–856. DOI: <http://doi.org/10.1007/s11202-005-0082-2>. (In English; original in Russian).
- [11] Kozhanov A.I. Inverse problems of recovering the right-hand side of a special kind of parabolic equations. *Mathematical notes of NEFU*, 2016, vol. 23, no. 4, pp. 31–45. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/svf37>; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29959200>. EDN: <https://www.elibrary.ru/zfpnlf>. (In Russ.)
- [12] Beylin A.B., Bogatov A.V., Pulkina L.S. A problem with nonlocal conditions for a one-dimensional parabolic equation. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2022, vol. 26, no. 2, pp. 380–395. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1904>. (In Russ.)
- [13] Gording L. Cauchy's problem for hyperbolic equations. Moscow: Izdatel'stvo inostrannoi literatury, 1961. Available at: <https://libcats.org/book/507115>. (In Russ.)



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-18-25

УДК 512.542

Дата: поступления статьи: 20.09.2022
после рецензирования: 09.11.2022
принятия статьи: 05.12.2022

Г.В. Воскресенская

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: galvosk@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6288-5372>

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ГРУППЫ ЧИСЛАМИ КЛАССОВ СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

АННОТАЦИЯ

Обозначим через $c(n, G)$ число классов сопряженных элементов, на которые распределяются в группе G элементы порядка n . В статье рассматривается проблема распознавания конечной группы по множеству $\text{ncl}(G)$, состоящему из чисел $c(n, G)$. Доказывается, что абелевы группы распознаются по множеству $\text{ncl}(G)$ при известном порядке группы. Описываются также некоторые другие типы распознаваемых групп. Приведены примеры неизоморфных групп, для которых множества $\text{ncl}(G)$ совпадают. Доказано несколько теорем о распознавании группы по частичным условиям на $c(n, G)$.

Ключевые слова: конечная группа; классы сопряженных элементов; порядок элемента; генетический код группы; теоремы Силова; абелевы группы; знакопеременные группы; диэдральные группы.

Цитирование. Воскресенская Г.В. О характеристике группы числами классов сопряженных элементов // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2022. Т. 28, № 3–4. С. 18–25. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-18-25>.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Воскресенская Г.В., 2022

Галина Валентиновна Воскресенская — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и геометрии, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

1. Постановка задачи

Основные понятия и цитируемые факты можно найти в [1; 2; 6; 8; 11].

В современных исследованиях по теории групп актуальными являются проблемы распознавания групп по некоторым условиям. Здесь возможны разные подходы. В исследованиях математиков В.Д. Мазурова, Д.О. Ревина, М.А. Гречкосеевой и других исследуется проблема распознавания группы по ее спектру-множеству $\omega(G)$ порядков ее элементов [4; 8; 9]. В работах И.Б. Горшкова, Н.В. Масловой исследуется распознавание по графу Грюнберга — Кегеля [5]. В работе В.В. Панышина изучается распознавание групп по множеству размеров классов сопряженности [10].

В этой статье мы расскажем о распознавании еще по одному множеству. Эти исследования начаты в работе автора [3]. Пусть G — конечная группа, $c(n, G)$ — количество классов сопряженных элементов, на которые распределяются элементы порядка n в группе G . Если в группе нет элементов порядка n , то $c(n, G) = 0$. Мы расскажем об исследованиях проблемы распознавания по множеству $\{c(n, G)\}$, которое для краткости обозначим через $\text{ncl}(G)$. Если группы распознаваемы по спектру, то они распознаются и по множеству $\text{ncl}(G)$, однако групп, распознаваемых по множеству $\text{ncl}(G)$, больше. В ряде случаев

для распознавания группы нет необходимости указывать все это множество и даже предварительно указывать порядок группы.

Число $c(1, G) = 1$ всегда. Мы это значение далее указывать не будем.

Выделяются три основных вопроса:

1. Когда группа G определяется множеством $ncl(G)$ однозначно?
2. Какие группы имеют одни и те же множества $ncl(G)$?
3. Какие группы можно определить частичными условиями на числа $c(n, G)$?

Теорема 7.3. цитируется по книге [2]. Остальные теоремы статьи являются новыми.

2. Абелевы группы

Лемма 2.1.

$\sum_{n \in \mathbf{N}} c(n, G) = |G|$ в том и только том случае, когда G — абелева группа.

Доказательство.

Это легко следует из того факта, что $|g^G| = 1 \quad \forall g \in G \iff G$ — абелева группа.

Теорема 2.2.

Абелева группа однозначно распознается по множеству $ncl(G)$, если указан ее порядок.

Доказательство.

Сначала мы проверим выполнение условия леммы 2.1, а затем достаточно показать, что однозначно определяется силовская p -подгруппа для каждого простого числа p .

$$G \cong \underbrace{Z_p \times \dots \times Z_p}_{m_1} \times \underbrace{Z_{p^2} \times \dots \times Z_{p^2}}_{m_2} \dots \times \underbrace{Z_{p^s} \times \dots \times Z_{p^s}}_{m_s},$$

m_k могут быть равны 0.

Тогда

$$\begin{aligned} c(p, G) &= p^{m_1 + \dots + m_s} - 1, \\ c(p^2, G) &= p^{m_1 + 2m_2 + 2m_3 + \dots + 2m_s} - c(p, G) - 1, \\ c(p^3, G) &= p^{m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots + 3m_s} - c(p^2, G) - c(p, G) - 1, \\ &\vdots \\ c(p^k, G) &= p^{m_1 + 2m_2 + \dots + (k-1)m_3 + km_3 + \dots + km_s} - c(p^{k-1}, G) - c(p^{k-2}, G) - \dots - 1, \\ c(p^s, G) &= p^{m_1 + 2m_2 + \dots + sm_s} - c(p^{s-1}, G) - c(p^{s-2}, G) - \dots - 1. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} m_1 + \dots + m_s &= \log_p c(p, G) + 1, \\ m_1 + 2m_2 + \dots + 2m_s &= \log_p c(p^2, G) + \log_p c(p, G) + 1, \\ &\vdots \\ m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots + 3m_s &= \log_p c(p^3, G) + \log_p c(p^2, G) + \log_p c(p, G) + 1, \\ m_1 + 2m_2 + \dots + sm_s &= \log_p c(p^s, G) + \log_p c(p^{s-1}, G) + \dots + \log_p c(p, G) + 1, \end{aligned}$$

m_k находятся однозначно.

3. Группы порядков 8, p , p^2 , pq , p^3

Здесь p , q — различные нечетные простые числа.

Теорема 3.1.

Группы порядков 8, p , p^2 , pq , p^3 однозначно определяются указанием порядков и множествами $ncl(G)$, указанными в табл. 1 и 2.

Таблица 1
 Table 1

G	$ G $	$c(n)$
$\mathbf{Z}_8$	8	$c(8) = 4, c(4) = 2, c(2) = 1$
$\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_2$	8	$c(4) = 4, c(2) = 3$
$\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$	8	$c(2) = 7$
$\mathbf{D}_4$	8	$c(4) = 1, c(2) = 3$
$\mathbf{Q}_8$	8	$c(4) = 3, c(2) = 1$

Таблица 2
 Table 2

G	$ G $	$c(n)$
Z_p	p	$c(p) = p - 1$
Z_{p^2}	p^2	$c(p) = p - 1,$ $c(p^2) = p(p - 1)$
Z_{pq}	pq	$c(p) = p - 1, c_G(q) = q - 1,$ $c(pq) = pq - p - q + 1$
$\langle a, b : a^q = b^p = e,$ $b^{-1}ab = a^r \rangle, r^p \equiv 1(q)$	pq	$c_G(p) = p - 1, c_G(q) = \frac{q-1}{p}$
Z_{p^3}	p^3	$c(p) = p - 1,$ $c(p^2) = p(p - 1),$ $c(p^3) = p^2(p - 1),$
$Z_{p^2} \times Z_p$	p^3	$c(p) = p^2 - 1,$ $c(p^2) = p^2(p - 1)$
$Z_p \times Z_p \times Z_p$	p^3	$c(p) = p^3 - 1$

Доказательство.

Эти данные получаются прямыми вычислениями. Мы используем известные данные о генетическом коде этих групп, взятые из книги [11]. Мы видим, что эти множества различны.

4. Группы порядков $p^n, n \geq 4$, с условием $c(p^{n-1}, G) \neq 0$

Теорема 4.1.

Группы порядков $p^n, n \geq 4$, с условием $c(p^{n-1}, G) \neq 0$ однозначно определяются порядком и частичными условиями на числа $c(n, G)$, указаны в табл. 3 (для нечетных p) и табл. 4 (для $p=2$).

Таблица 3
 Table 3

G	Частичные условия на $c(n, G)$
$Z_{p^{n-1}} \times Z_p$	$c(p^n, G) = 0,$ $c(p^{n-1}, G) = p^n - p^{n-1}$
Z_{p^n}	$c(p^n, G) \neq 0$
$\langle a, b : a^{p^{n-1}} =$ $= b^p = e, ba = a^{1+p^{n-2}}b \rangle$	$c(p^n, G) = 0, c(p^{n-1}, G) = p^{n-1} - p^{n-2}$

Доказательство.

Условия на числа $c(n, G)$ находятся явными вычислениями из генетических кодов, приведенных в [11].

5. Группы Z_p и D_p

В этом и следующем параграфах мы докажем несколько утверждений, в которых группа однозначно определяется частичными условиями на $c(n, G)$ без указания порядка группы.

Теорема 5.1.

Пусть p — простое число. Тогда условия $c(p, G) = p - 1, c(1, G) = 1, c(n, G) = 0 \forall n \neq 1, p$, выполняются в том и только том случае, когда $G \cong Z_p$.

Таблица 4
 Table 4

G	Частичные условия на $c(n, G)$
Z_{2^n}	$c(2^n, G) \neq 0$
$Z_{2^{n-1}} \times Z_2$	$c(2^n, G) = 0, c(2^{n-1}, G) = 2^{n-1}, c(2) = 3$
$D_{2^{n-1}}$	$c(2^n, G) = 0, c(2^{n-1}, G) = 2^{n-2}, c(2, G) = 3$
$\langle a, b : a^{2^{n-1}} = b^2 = e, bab^{-1} = a^{1+2^{n-2}} \rangle$	$c(2^{n-2}, G) = 2^{n-1}, c(2^n, G) = 0, c(2, G) = 2, c(8, G) = 4$
$\langle a, b : a^{2^{n-1}} = b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1+2^{n-2}} \rangle$	$c_G(2^{n-2}) = 2^{n-2}, c(2^n, G) = 0, c(2, G) = 2, c(8, G) = 2$
$\langle a, b : a^{2^{n-1}} = b^2 = e, b^2 = a^{2^{n-2}}, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$	$c(2^n, G) = 0, c(2, G) = 1$

Доказательство.

В этой группе имеются элементы только порядка 1 и p . Имеется, по крайней мере, $p - 1$ класс сопряженных элементов, эти классы образованы центральными элементами порядка p . Но больше классов для таких элементов нет. Получим, $Z(G) \cong Z_p \cong G$.

Пусть далее p — нечетное простое число.

Теорема 5.2.

Условия $c(p, G) = \frac{p-1}{2}, c(1, G) = c(2, G) = 1, c(n, G) = 0 \forall n \neq 1, 2, p$, выполняются в том и только том случае, когда $G \cong D_p$.

Доказательство.

$$|G| = 2^k \cdot p^l.$$

В нашем случае G_2 абелева, так как любая группа экспоненты 2 абелева, в группе нет элементов порядка $2p$. Нет элементов порядка $2p$ и в фактор-группе G/G' .

Поэтому если $ord(g) = 2$, то $|Z(g)| = 2^k$.

$$|g^G| = p^l.$$

Возникают две возможности : $G' \cong G_p$ или $G' \supseteq G_2$, так как G' целиком содержит или не содержит G_2 , так как она является нормальной подгруппой, а элементы порядка 2 образуют один класс сопряженных элементов.

Случай 1. $G' \cong G_p$

$$|G| = |G_p| + |g^G| = p^l + p^l = 2p^l,$$

$$ord(g) = 2. \text{ Получаем } k = 1.$$

Пусть $h \in Z(G_p)$, $ord(h) = p$, $|h^G| = 2$. Существуют $\frac{p-1}{2}$ классов сопряженных элементов, которые состоят из элементов $h, \dots, h^{p-1}$. Все классы сопряженных элементов мы перебрали, для других элементов порядка p больше нет места. Получаем, что $|G| = 2p$.

Таким образом, $G \cong D_p$, так как G — неабелева группа.

Случай 2. $G' \supseteq G_2$

$$\text{В этом случае } |G/G'| = p^k, \quad 0 < k \leq l.$$

Тогда

$$p^k \leq \frac{p-1}{2} + 2 = \frac{p+3}{2}.$$

Это невозможно.

6. Группа A_4

Теорема 6.1.

Условия $c(3, G) = 2, c(1, G) = c(2, G) = 1, c(n, G) = 0 \forall n \neq 1, 2, 3$, выполняются в том и только том случае, когда $G \cong A_4$.

Доказательство.

В группе 4 класса сопряженных классов группа G неабелева и разрешима.

Случай 1. $G' \cong G_2, G/G' \cong Z_3$.

$$|G| = 3 \cdot 2^l.$$

В этом случае G/G' является степенью числа 3, но не может быть больше 3, так как G/G' — это количество одномерных представлений, а оно не превосходит 4 в нашей ситуации.

Если $\text{ord}(g) = 2$, то $|g^G| = 3$, так как $Z(g) = G_2$.

$$2^l - 1 = 3, \quad l = 2.$$

$$|G| = 12.$$

$$G \cong A_4.$$

Случай 2. $G' \cong G_3, G/G' \cong Z_2$.

Группа неабелева, все ее представления не могут быть одномерными, поэтому если $G' \cong G_3$, то $G/G' \cong Z_2$.

$$|G| = 2 \cdot 3^m.$$

S_3 не удовлетворяет условию на классы сопряженных элементов, поэтому $m \geq 2$.

Пусть $h, h^2 \in Z(G_3)$, $\text{ord}(h) = \text{ord}(h^2) = 3$.

$$|h^G| = |(h^2)^G| = 2.$$

Если h и h^2 не сопряжены, то $|G_3| = 5$, а это невозможно.

Если эти элементы сопряжены, то рассмотрим элемент третьего порядка f , который с ними не сопряжен, в классе f^G содержатся все оставшиеся элементы порядка 3.

$$|f^G| = 3^m - 3 \text{ делит } 2 \cdot 3^m.$$

$3^{m-1} - 1 | 2$. Получаем $|G| = 18$. Но группы порядка 18 не удовлетворяют заявленному условию на классы сопряженных элементов.

Случай 3. $G/G' \cong Z_3$, $G' \neq G_3$, $G' \neq G_2$.

$$|G| = 2^l \cdot 3^m.$$

Один класс сопряженных элементов порядка 3 лежит в G' , а другой — нет.

Пусть $h \notin G'$, $\text{ord}(h) = 3$.

$$|h^G| = 2^l \cdot 3^m - 2^l \cdot 3^{m-1} = 2^{l+1} \cdot 3^{m-1}.$$

$|h^G|$ делит $2^l \cdot 3^m$. Получаем противоречие.

7. Группы с одинаковым $ncl(G)$

Пример 7.1.

$$\begin{aligned} G &\cong \langle a, b, c : a^5 = b^5 = c^4 = e, \\ &c^{-1}ac = a^2, \quad c^{-1}bc = b^2, \quad ab = ba \rangle, \\ H &\cong \langle a, b, c : a^5 = b^5 = c^4 = e, \\ &c^{-1}ac = a^2, \quad c^{-1}bc = b^3, \quad ab = ba \rangle. \end{aligned}$$

Эти группы имеют одинаковые множества $ncl(G)$,

$$c(2) = 1, \quad c(4) = 2, \quad c(5) = 6.$$

Однако эти группы неизоморфны. В группе H можно найти такие элементы порядков 5 и 4, которые порождают всю группу. Например, это элементы ab и c . В группе G таких элементов нет. Любая пара элементов, где один пятого, а другой четвертого порядка, порождает группу порядка 20.

Пример 7.2.

Пусть p — нечетное простое число,

$$l = 1 + p, \quad m = 1 - p.$$

$$G_1 \cong \langle a, b, c : a^{p^2} = b^{p^2} = c^p = e, \quad c^{-1}ac = a^l, \quad c^{-1}bc = b^l, \quad ab = ba \rangle,$$

$$G_2 \cong \langle a, b, c : a^{p^2} = b^{p^2} = c^p = e, \quad c^{-1}ac = a^l, \quad c^{-1}bc = b^m, \quad ab = ba \rangle.$$

$$|G_1| = |G_2| = p^5,$$

$$c(p, G) = c(p, H) = p^2 + p - 1, \quad c(p^2, G) = c(p^2, H) = 2p^3 - p^2 - 2p + 1.$$

Рассмотрим группу G_1 . Центр этой группы $Z(G_1) = \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle$.

Рассмотрим подгруппу $H = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$. В H имеется $p^4 - p^2$ элементов порядка p^2 . Каждый класс содержит p элементов. Возникает $p^3 - p$ классов. Вне H имеется $(p^4 - p^2)(p - 1)$ элементов порядка p^2 . Центризатор каждого такого элемента имеет порядок p^3 , индекс центризатора равен p^2 . Вне H лежит $(p^2 - 1)(p - 1)$ классов, состоящих из элементов порядка p^2 . Итак, $c(p^2, G) = 2p^3 - p^2 - 2p + 1$. В H имеется $p^2 - 1$ элементов p . Каждый класс состоит из одного элемента. Вне H имеется p^3 элементов порядка p . Центризатор каждого такого элемента имеет порядок p^3 , индекс центризатора равен p^2 . Возникает p классов. Итак, $c(p, G) = p^2 + p - 1$.

Во второй группе есть подгруппа порядка p^4 , порожденная элементом порядка p^2 и элементом порядка p . Эта подгруппа является прямым произведением метациклической группы и циклической группы. В первой группе такой подгруппы нет. Любой элемент порядка p^2 и элемент порядка p , который не является степенью первого, порождают подгруппу порядка p^3 .

В монографии [2] на странице 307 приводится следующая теорема.

Теорема 7.3.

Пусть группа G равна прямому произведению $G_1 \times G_2$ своих подгрупп G_1 и G_2 . Тогда, если C_1 — класс сопряженных элементов группы G_1 , а C_2 — класс сопряженных элементов группы G_2 , то всевозможные произведения вида $g_1 g_2$, где $g_1 \in C_1$, $g_2 \in C_2$, образуют класс сопряженных элементов самой группы G , и обратно, каждый класс сопряженных элементов группы G получается таким образом.

Из нее сразу следует

Утверждение 7.4.

Если $ncl(G) = ncl(H)$, F — некоторая группа, то

$$ncl(G \times F) = ncl(H \times F).$$

Поэтому рассматривать неизоморфные группы с одинаковыми множествами $ncl(G)$ следует с точностью до умножения на одинаковый прямой множитель. Интересно исследовать, насколько схожей является структура групп с одинаковым $ncl(G)$. Например, если группа G является полупрямым произведением подгруппы H и фактора $G/H = F$, то верно ли это для всех групп с таким же множеством $ncl(G)$? Во всех известных примерах это так.

Выводы

Таким образом, в статье показывается, что изучение структуры группы по множеству $ncl(G)$ является актуальной проблемой, так как группы многих типов могут быть определены этим множеством однозначно, и в любом случае знание этого множества является хорошей стартовой площадкой для ее изучения.

Литература

- [1] Винберг Э.Б. Курс алгебры. Москва: Факторил Пресс, 2002, 544 с. URL: <https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbm9raG1lbG5pdG1ldGF1YXxneDozMDhiMmU3NTg2MzJhNTY0>.
- [2] Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. Москва: Наука, 1975, 408 с. URL: <https://studizba.com/files/show/djvu/2439-1-l-i-golovina-lineynaya-algebra-i.html>.
- [3] Воскресенская Г.В. Распознавание группы по условиям на классы сопряженных элементов // Восьмая школа-конференция "Алгебры Ли. Алгебраические группы и теория инвариантов": тез. докл. Москва: МЦНМО, 2020. С. 19.
- [4] Горшков И.Б. Распознаваемость симметрических групп по спектру // Алгебра и логика, 2014, Т. 53, № 6. С. 693–703. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/al660>; <https://elibrary.ru/item.asp?id=23159536>. EDN: <https://elibrary.ru/tmuurv>.
- [5] Горшков И.Б., Маслова Н.В. Конечные почти простые группы с графами Грюнберга — Кегеля как у разрешимых групп // Алгебра и логика, 2018. Т. 57, № 2. С. 175–196. DOI: <http://doi.org/10.17377/alglog.2018.57.203>. EDN: <https://www.elibrary.ru/uunuwx>.
- [6] Караполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. Санкт-Петербург: Лань, 2022, 288 с. URL: <https://lanbook.com/catalog/matematika/osnovy-teorii-grupp-73277352/>.

- [7] Коксетер Г.С.М., Мозер У.О.Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. Москва: Наука, 1980. 240 с. URL: <https://knigovid.ru/books/1868817-porozhdayuschie-elementy-i-opredelyayuschie-sootnosheniya-diskretnyh-grupp/toread>.
- [8] Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. Atlas of Finite Groups: Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups. Oxford: Oxford Press, 1985, 252 pp.
- [9] Мазуров В.Д. Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 6. С. 651–666. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/al2451>.
- [10] Панышин В.В. О распознавании групп по множеству размеров классов сопряженности // Вторая конференция Математических центров России (7–11 ноября 2022): сборник тезисов. Москва: Изд-во МГУ, 2022. С. 172–173. URL: https://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=36711.
- [11] Холл М. Теория групп. Москва: Изд-во иностр. лит., 1962, 468 с. URL: <https://vdocuments.site/589c3be41a28abec478b5da7.html?page=1>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-18-25

Submitted: 20.09.2022

Revised: 09.11.2022

Accepted: 05.12.2022

G. V. Voskresenskaya

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: galvosk@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6288-5372>

ON GROUP CHARACTERIZATION BY NUMBERS OF CONJUGATE CLASSES

ABSTRACT

Let $c(n, G)$ be a number of conjugate elements of order n in a group G . In the article we study the problem of recognition of finite group by the set $\text{ncl}(G)$ that consists of numbers $c(n, G)$. We prove that Abelian groups can be recognized by the set $\text{ncl}(G)$ when the order of the group is known. We also describe some other types of groups that can be recognized. The examples of non-isomorphic groups with the same sets $\text{ncl}(G)$ are given. Some theorems about a group recognition by partial conditions on $c(n, G)$ are proved.

Key words: finite group; class of conjugate elements; order of element; genetic code; Sylow theorem; Abelian group; alternating group; dihedral groups.

Citation. Voskresenskaya G.V. On group characterization by numbers of conjugate classes. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 18–25. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-18-25>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

© Voskresenskaya G.V., 2022

Galina V. Voskresenskaya — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Algebra and Geometry, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Vinberg E.B. Course of algebra. Moscow: Faktorial Press, 2002, 544 p. Available at: <https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWVpbnxraG1lbG5pdG1ldGF1YXxneDozMDhiMmU3NTg2MzJhNTY0>. (In Russ.)
- [2] Golovina L.I. Linear algebra and some its applications. Moscow: Nauka, 1975, 408 p. Available at: <https://studizba.com/files/show/djvu/2439-1-l-i-golovina-lineynaya-algebra-i.html>. (In Russ.)
- [3] Voskresenskaya G.V. Group recognition by conditions on classes of conjugate elements. In: *Eighth school-conference "Lie algebras, algebraic groups and the theory of invariants"*. Abstracts. Moscow: MTsNMO, 2020, p. 19. (In Russ.)
- [4] Gorshkov I.B. Recognizability of Symmetric Groups by Spectrum. *Algebra and Logic*, 2014, vol. 53, issue 6, pp. 450–457. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10469-015-9306-0>. (In English; original in Russian).

- [5] Gorshkov I.B., Maslova N.V. Finite almost simple groups whose Gruenberg-Kegel graphs coincide with Gruenberg-Kegel graphs of solvable groups. *Algebra and Logic*, 2018, vol. 57, issue 2, pp. 115–129. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10469-018-9484-7>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ycchpv>. (In English; original in Russian).
- [6] Kargapolov M.I., Merzlyakov Yu.I. Basics of group theory. Saint Petersburg: Lan', 2022, 288 p. Available at: <https://lanbook.com/catalog/matematika/osnovy-teorii-grupp-73277352/>.
- [7] Coxeter H.S.M., Moser W.O.J. Generators and relations for discrete groups. Moscow: Nauka, 1980, 240 p. Available at: <https://knigogid.ru/books/1868817-porozhdayushie-elementy-i-opredelyayushie-sootnosheniya-diskretnyh-grupp/toread>. (In Russ.)
- [8] Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. Atlas of Finite Groups: Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups. Oxford: Oxford Press, 1985, 252 p.
- [9] Mazurov V.D. Recognition of finite groups by a set of orders of their elements. *Algebra and Logic*, 1998, vol. 37, issue 6, pp. 371–379. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF02671691>. (in English; original in Russian).
- [10] Panshin V.V. On group recognition by the set of dimensions of conjugate classes. In: *Second conference of Russian Mathematical Centers (November 7–11, 2022): abstracts*. Moscow: Izd-vo MGU, 2022, pp. 172–173. Available at: https://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=36711. (In Russ.)
- [11] Hall M. Group theory. Moscow: Izd-vo inostr. lit., 1962, 468 p. Available at: <https://vdocuments.site/589c3be41a28abec478b5da7.html?page=1>. (In Russ.)



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-26-31

УДК 512.64, 517.98.

Дата: поступления статьи: 27.09.2022
после рецензирования: 29.11.2022
принятия статьи: 05.12.2022

И.М. Избяков

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: iliya-izbyakov@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3358-966X>

О СИСТЕМАХ ВЕКТОРОВ И ПОДПРОСТРАНСТВ КОНЕЧНОМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА, ВОССТАНАВЛИВАЮЩИХ ВЕКТОР-СИГНАЛ¹

АННОТАЦИЯ

Предметом рассмотрения данной статьи являются системы векторов, допускающие восстановление неизвестного вектор-сигнала по модулям измерений, и подпространства, восстанавливающие сигнал по нормам проекторов на них. Проанализирована взаимосвязь свойств восстановления по модулям измерений и восстановления по нормам проекций со свойствами альтернативной полноты в евклидовом и унитарном пространствах. Рассмотрена теорема о рангах одного линейного оператора, которая может рассматриваться как еще один критерий возможности восстанавливать вектор-сигнал. Доказана эквивалентность свойства альтернативной полноты и утверждения упомянутой теоремы о рангах для евклидова пространства. Показано, что теореме о рангах в вещественном случае можно распространить на системы подпространств.

Рассмотрены вопросы о минимальном количестве векторов, допускающих восстановление по модулям измерений. Приведены имеющиеся на данный момент результаты, которые обобщены в виде таблицы для пространств размерности 10 и ниже. Также кратко приведены известные результаты к вопросу о минимальном количестве подпространств, допускающих восстановление по нормам проекций.

Ключевые слова: восстановление по модулям измерений; восстановление по нормам проекций; спектральная теорема; альтернативная полнота системы векторов; инъективность отображения; скалярное произведение Гильберта — Шмидта; метод подъема фазы; самосопряженные матрицы.

Цитирование. Избяков И.М. О системах векторов и подпространств конечномерного пространства, восстанавливающих вектор-сигнал // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2022. Т. 28, № 3–4. С. 26–31. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-26-31>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Избяков И.М., 2022

Илья Михайлович Избяков — аспирант кафедры безопасности информационных систем, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

1. Восстановление по модулям измерений

Во многих прикладных исследованиях возникает задача восстановления неизвестного вектор-сигнала $x \in \mathbb{H}^D$ ($\mathbb{H}^D$ обозначает D -мерное евклидово или унитарное пространство) с помощью набора изме-

¹Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-878).

рительных векторов $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^N$, когда доступны лишь результаты измерений этого сигнала в виде модулей скалярных произведений $|\langle \mathbf{x}, \varphi_k \rangle|$.

Определение 1.1. Набор векторов $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^N$ восстанавливает вектор-сигнал по модулям измерений (ВМИ), если для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}^D$, таких, что $|\langle \mathbf{x}, \varphi_k \rangle| = |\langle \mathbf{y}, \varphi_k \rangle|$ для всех $k = 1, \dots, N$, имеем $\mathbf{x} = c\mathbf{y}$, где $|c| = 1$.

Это определение также может быть сформулировано в виде свойства инъективности (с точностью до унимодулярного множителя) нелинейного оператора $(\mathcal{A}(\mathbf{x}))(k) := |\langle \mathbf{x}, \varphi_k \rangle|^2$, $k = 1, \dots, N$.

Определение 1.2. Набор векторов $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ в $\mathbb{H}^D$ обладает свойством альтернативной полноты (АП), если для каждого подмножества $T \subseteq \{1, \dots, N\}$, по крайней мере, одно из множеств $\{\varphi_k\}_{k \in T}$ или $\{\varphi_k\}_{k \in T^c}$ полно в $\mathbb{H}^D$.

Известно [1], что в $\mathbb{R}^D$ свойства ВМИ и АП оказываются эквивалентными. В $\mathbb{C}^D$ свойство АП является необходимым, но недостаточным для выполнения свойства ВМИ [1].

Для линеаризации задачи вводится оператор суперанализа $\mathbf{A}$, определенный на пространстве самосопряженных матриц $\mathbb{H}^{D \times D}$ равенством

$$(\mathbf{A}H)(k) = \langle H, \varphi_k \varphi_k^* \rangle_{HS} = \text{tr} [\varphi_k \varphi_k^* \mathbf{x} \mathbf{x}^*], \quad (1.1)$$

где HS — скалярное произведение Гильберта — Шмидта.

В силу линейности скалярного произведения по первому аргументу $\mathbf{A}$ является линейным оператором, и

$$(\mathbf{A} \mathbf{x} \mathbf{x}^*)(k) = \langle \mathbf{x} \mathbf{x}^*, \varphi_k \varphi_k^* \rangle_{HS} = \text{tr} [\varphi_k \varphi_k^* \mathbf{x} \mathbf{x}^*] = \text{tr} [\varphi_k^* \mathbf{x} \mathbf{x}^* \varphi_k] = \varphi_k^* \mathbf{x} \mathbf{x}^* \varphi_k = |\langle \mathbf{x}, \varphi_k \rangle|^2 = \mathcal{A}(\mathbf{x})(k). \quad (1.2)$$

Переход от нелинейного оператора $\mathcal{A}$ к линейному оператору $\mathbf{A}$ называют «подъемом фазы» (в англоязычной литературе phase lift). Таким образом, $\mathbf{x} \bmod \mathbb{T}$ «поднимается» до $\mathbf{x} \mathbf{x}^*$, что позволяет линеаризовать оператор $\mathcal{A}$ за счет увеличения размерности пространства — области определения.

Теорема 1.3. Оператор $\mathcal{A}$ не является инъективным тогда и только тогда, когда ядро оператора $\mathbf{A}$ содержит матрицы, ранг которых равен 1 или 2. (В [2] эта теорема доказана для пространства $\mathbb{C}^D$).

Доказательство. ($\Rightarrow$)

Если оператор $\mathcal{A}$ не является инъективным, то

$$\exists \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \mathbb{C}^D / \mathbb{T} : \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{A} \mathbf{x} \mathbf{x}^* = \mathbf{A} \mathbf{y} \mathbf{y}^* \Rightarrow \mathbf{x} \mathbf{x}^* - \mathbf{y} \mathbf{y}^* \in \ker \mathbf{A}.$$

$\text{rank}(\mathbf{x} \mathbf{x}^* - \mathbf{y} \mathbf{y}^*) = 1$, когда $\mathbf{x} \mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y} \mathbf{y}^*$ либо линейно зависимы, либо один и только один из них нулевой. В случае, когда они линейно независимы, $\text{rank}(\mathbf{x} \mathbf{x}^* - \mathbf{y} \mathbf{y}^*) = 2$.

($\Leftarrow$)

rank $\mathbf{H} = 1$.

Пусть $H \in \ker \mathbf{A}$. Тогда существует $\mathbf{x} \neq 0 \in \mathbb{C}^D / \mathbb{T}$ такой, что $H = \mathbf{x} \mathbf{x}^*$. $\mathbf{A}H(k) = \mathbf{A}(\mathbf{x} \mathbf{x}^*)(k) = 0$. В то же время $(\mathbf{A} \mathbf{x} \mathbf{x}^*)(k) = \mathcal{A}(\mathbf{x})(k)$. Таким образом $\mathcal{A}(\mathbf{x})(k) = 0 = \mathcal{A}(\mathbf{0})(k)$. Однако $\mathbf{x} \not\equiv 0 \bmod \mathbb{T}$, таким образом получили, что оператор $\mathcal{A}$ отображает два различных вектора: один нулевой и один ненулевой в нулевое значение, следовательно, не является инъективным.

В пространстве $\mathbb{R}^D$ из равенства $\text{rank } H = 1$ может не следовать существования $\mathbf{x} \neq 0 \in \mathbb{R}^D / \{\pm 1\}$ такого, что $H = \mathbf{x} \mathbf{x}^T$. Такой $\mathbf{x}$ не существует, если на главной диагонали H стоят отрицательные элементы. Однако в таком случае можно рассмотреть $-H \in \ker \mathbf{A}$, откуда в силу линейности $\mathbf{A}$ следует, что $H \in \ker \mathbf{A}$.

rank $\mathbf{H} = 2$.

Пусть $H \in \ker \mathbf{A}$. Тогда согласно спектральной теореме для самосопряженных матриц существуют ортонормированные $u_1, u_2 \in \mathbb{C}^D$ и ненулевые значения $\lambda_1 \geq \lambda_2$ такие, что $H = U \Lambda U^* = \lambda_1 u_1 u_1^* + \lambda_2 u_2 u_2^*$ [10]. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}H(k) &= \langle H, \varphi_k \varphi_k^* \rangle_{HS} = \langle \lambda_1 u_1 u_1^* + \lambda_2 u_2 u_2^*, \varphi_k \varphi_k^* \rangle_{HS} = \\ &= \lambda_1 |\langle u_1, \varphi_k \rangle|^2 + \lambda_2 |\langle u_2, \varphi_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

Взяв $x = \sqrt{|\lambda_1|} u_1$ и $y = \sqrt{|\lambda_2|} u_2$, заметим, что $y \not\equiv x \bmod \mathbb{T}$, поскольку они ненулевые и ортогональные.

Пусть λ_1 и λ_2 одного знака, тогда для любого n выполняется равенство $|\langle x, \varphi_k \rangle|^2 + |\langle y, \varphi_k \rangle|^2 = 0$, отсюда $|\langle x, \varphi_k \rangle|^2 = |\langle y, \varphi_k \rangle|^2 = 0$, следовательно, $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y)$ и оператор $\mathcal{A}$ не инъективен.

Теперь предположим, что λ_1 и λ_2 имеют разные знаки, тогда $\mathbf{x} \mathbf{x}^* - \mathbf{y} \mathbf{y}^* = \lambda_1 u_1 u_1^* + \lambda_2 u_2 u_2^* = H \in \ker \mathbf{A}$. Следовательно, $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{x} \mathbf{x}^* = \mathbf{A} \mathbf{y} \mathbf{y}^* = \mathcal{A}(\mathbf{y})$ и оператор $\mathcal{A}$ не инъективен.

2. Задача о минимальном количестве измерительных векторов

На данный момент до сих пор остается нерешенным в общем случае вопрос о том, каково минимальное количество $N = N(D)$ измерительных векторов $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$, обладающих свойством (ВМИ) в $\mathbb{H}^D$?

Определение 2.1. Спарком системы векторов Φ называется наименьшее количество линейно зависимых векторов этой системы.

Спарк системы векторов можно определить формально, расположив векторы $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ в виде столбцов $D \times N$ -матрицы Φ , и воспользоваться обозначением $\|\mathbf{x}\|_0$ для количества ненулевых координат вектора $\mathbf{x}$.

При таком подходе

$$\text{spark}(\Phi) = \min \{ \|\mathbf{x}\|_0 : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \text{ такие что } \Phi \mathbf{x} = \mathbf{0} \}.$$

Ответ на вопрос о минимальном количестве измерительных векторов, обладающих свойством ВМИ, в вещественном случае хорошо известен. Оказывается, что для $\mathbb{R}^D$ минимальное количество таких векторов оказывается равным $N(D) = 2D - 1$, причем для того, чтобы система из $2D - 1$ измерительных векторов в $\mathbb{R}^D$ обладала свойством ВМИ, необходимо и достаточно, чтобы она имела полный спарк.

В вопросе поиска минимального количества $N(D)$ измерительных векторов, обладающих свойством ВМИ в пространстве $\mathbb{C}^D$, на данный момент имеются следующие результаты.

1) Для любого $D \geq 2$, $N(D) \leq 4D - 4$ [3].

2) Если $D = 2^k + 1$ для целого неотрицательного k , то $N(D) = 4D - 4$ [4].

3) В $\mathbb{C}^4$ Vinzant [5] нашла 11 векторов, обеспечивающих ВМИ. На данный момент пространство $\mathbb{C}^4$ является единственным, в котором найден набор векторов, обеспечивающих ВМИ с их числом $N < 4D - 4$.

Кроме определения числа $N(D)$ ведутся поиски числа $\mathcal{N}(D)$ такого, что если $N \leq \mathcal{N}(D)$, то ни один сигнал $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^D$ не может быть однозначно восстановлен (с точностью до унимодулярного множителя) по набору $\{|\langle \mathbf{x}, \varphi_1 \rangle|, \dots, |\langle \mathbf{x}, \varphi_N \rangle|\}$, т. е. для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^D$ найдется $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^D$, $\mathbf{x} \neq h\mathbf{y}$ ни для какого $h \in \mathbb{T}$, и $|\langle \mathbf{x}, \varphi_n \rangle| = |\langle \mathbf{y}, \varphi_n \rangle|$, $n = 1, \dots, N$.

В [6] показано, что $\mathcal{N}(D) \geq 4D - 4 - 2s_2(D - 1)$, где $s_2(D - 1)$ обозначает количество единиц в двоичном представлении числа $D - 1$. Для $D = 4$ получаем $\mathcal{N}(4) \geq 8$, оставляя возможность уменьшать число 11 в примере Vinzant.

В таблице приведем значения чисел $N(D)$ и $\mathcal{N}(D)$ при $2 \leq D \leq 10$.

Таблица

Зависимость $N(D)$ и $\mathcal{N}(D)$ от D

Table

Dependence of $N(D)$ and $\mathcal{N}(D)$ on D

D	$N(D)$ в $\mathbb{R}^D$	$\mathcal{N}(D)$ в $\mathbb{C}^D$	$N(D)$ в $\mathbb{C}^D$
2	3	3	4
3	5	7	8
4	7	≥ 8	≤ 11
5	9	15	16
6	11	≥ 16	≤ 20
7	13	≥ 20	≤ 24
8	15	≥ 22	≤ 28
9	17	31	32
10	19	≥ 32	≤ 36

Таким образом, например, для пространства $\mathbb{C}^6$ о количестве векторов, допускающих ВМИ, на данный момент известно лишь то, что оно не менее 16 и не превосходит 20. Попытка проверить хотя бы один случайный набор из 19 векторов в $\mathbb{C}^6$ на обладание свойством ВМИ методом, описанным Винзант в своей статье, требует вычислительных мощностей, значительно превосходящих мощности математических пакетов, которые использовались при проверке ее набора из 11 векторов в $\mathbb{C}^4$, и, по всей видимости, требует иных подходов.

3. Восстановление по нормам проекций

Некоторые прикладные задачи приводят к задаче восстановления сигнала по нормам его проекций на подпространства, например, проблема близнецов в кристаллографии.

Определение 3.1. Семейство подпространств $\{W_k\}_{k=1}^N$ в $\mathbb{H}^D$ с соответствующими ортопроекторами $\{P_k\}_{k=1}^N$ восстанавливает по нормам векторов (ВНП), если для произвольных $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}^D$ таких, что $\|P_k \mathbf{x}\| = \|P_k \mathbf{y}\|$ для всех $k = 1, 2, \dots, N$, имеем $\mathbf{x} = c\mathbf{y}$, где $|c| = 1$ [7].

Это определение также может быть сформулировано в виде свойства инъективности (с точностью до унимодулярного множителя) нелинейного оператора:

$$\mathcal{A}: \mathbb{H}^D / \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^N, (\mathcal{A}(\mathbf{x}))(k) := \|P_k \mathbf{x}\|^2, k = 1, \dots, N.$$

Определим вещественное D^2 -мерное пространство $\mathbb{H}^{D \times D}$ самосопряженных $D \times D$ -матриц. Для набора проекций $\{W_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{R}^D$ с соответствующими проекторами P_k введем оператор супер-анализа $\mathbf{A}: \mathbb{H}^{D \times D} \rightarrow \mathbb{R}^N$:

Обозначим через $\{\varphi_{k,j}\}_{j=1}^{J_k}$ ортонормированный базис подпространства $\{W_k\}$ и введем линейный оператор суперанализа аналогично тому, как это было сделано выше:

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}^*)(k) = \langle \mathbf{x}\mathbf{x}^T, P_k \rangle_{HS} = \text{tr} [\mathbf{x}\mathbf{x}^T P_k] = \text{tr} \left[\mathbf{x}\mathbf{x}^T \sum_{j=1}^{J_k} \varphi_{k,j} \varphi_{k,j}^T \right] = \quad (3.1)$$

$$= \sum_{j=1}^{J_k} \varphi_{k,j}^T \mathbf{x}\mathbf{x}^T \varphi_{k,j} = \sum_{j=1}^{J_k} |\langle \mathbf{x}, \varphi_{k,j} \rangle|^2 = \|P_k \mathbf{x}\|^2 = \mathcal{A}(\mathbf{x})(k). \quad (3.2)$$

При этом оператор $\mathcal{A}$ так же, как и в случае ВМИ, не является инъективным тогда и только тогда, когда ядро оператора $\mathbf{A}$ содержит матрицы, ранг которых равен 1 или 2. Этот результат известен и сформулирован в [3] для $\mathbb{R}^D$. Аналогичный результат в $\mathbb{C}^D$ неизвестен.

4. Задача о минимальном количестве восстанавливающих подпространств

Подобно вопросу о минимальном количестве векторов, допускающих ВМИ, ставится вопрос о минимальном количестве $N = \mathbf{N}(D)$ подпространств $\{W_j\}_{j=1}^N$, обеспечивающих ВНП в $\mathbb{H}^D$. В настоящий момент получены некоторые результаты для вещественного пространства $\mathbb{R}^D$.

Теорема 4.1. Для любого набора чисел $1 \leq r_k \leq D-1$, $k = 1, 2, \dots, 2D-1$, существуют подпространства $\{W_k\}_{k=1}^{2D-1}$ в $\mathbb{R}^D$, обеспечивающие ВНП, причем $\dim W_k = r_k$ [7].

Из вышеприведенной теоремы следует, что в $\mathbb{R}^D$ $\mathbf{N}(D) \leq 2D-1$.

В [8] построено 6 = 2 · 4 - 2 двумерных подпространств пространства $\mathbb{R}^4$, обеспечивающих (ВНП).

Как показывает следующая теорема, дальнейшее уменьшение числа $\mathbf{N}(D)$ невозможно.

Теорема 4.2. Пусть $\{W_k\}_{k=1}^N$ – подпространства $\mathbb{R}^D$ с соответствующими ортопроекторами $\{P_k\}_{k=1}^N$. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) подпространства $\{W_k\}_{k=1}^N$ обеспечивают ВНП;
- 2) для любого $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$ семейство векторов $\{P_k \mathbf{x}\}_{k=1}^N$ полно в $\mathbb{R}^D$, т. е. $\text{span}(\{P_k \mathbf{x}\}_{k=1}^N) = \mathbb{R}^D$.

Доказательство теоремы приведено в [4]. В рамках данной статьи опустим его, рассмотрим более подробно следующую теорему, для доказательства которой необходимо использование теоремы 4.2.

Теорема 4.3. В пространстве $\mathbb{R}^D$ $\mathbf{N}(D) \geq 2D-2$ [9].

Доказательство. Покажем, что для ВНП в $\mathbb{R}^D$ требуется не менее $2D-2$ гиперплоскостей. Предположим, что возможно ВНП с $N \leq 2D-3$ гиперплоскостями $\{W_k\}_{k=1}^N$. Выберем вектор $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \bigcap_{k=1}^{D-1} W_k$ так, чтобы $P_k \mathbf{x} = \mathbf{x}$ для $k = 1, 2, \dots, D-1$. Рассмотрим семейство векторов $\{P_k \mathbf{x}\}_{k=1}^N = \{\mathbf{x}\} \cup \{P_k \mathbf{x}\}_{k=D}^N$. Общее количество таких векторов $\leq 1 + (2D-3) - (D-1) = D-1$, так что $\{P_k \mathbf{x}\}_{k=1}^N$ не полно в $\mathbb{R}^D$, что противоречит теореме 4.2. Можно показать, что для каждого семейства подпространств $\{W_k\}_{k=1}^N$, восстанавливающих по нормам проекторов в $\mathbb{R}^D$, найдутся гиперплоскости $W'_k \supset W_k$, которые также восстанавливают по нормам проекторов. Следовательно, $N \geq 2D-2$.

Таким образом, в пространстве $\mathbb{R}^D$ минимальное количество восстанавливающих подпространств равно $2D-2$ или $2D-1$, однако на данный момент построен только один пример в виде шести двумерных подпространств, обеспечивающих ВНП в $\mathbb{R}^4$. Кроме $D=4$ неизвестен пример ни для одного пространства $\mathbb{R}^D$, для которых реализуется значение $\mathbf{N}(D) = 2D-2$.

Для комплексного пространства $\mathbb{C}^D$ в настоящий момент минимальное количество подпространств, обеспечивающее ВНП, неизвестно.

Выводы

В данной статье было показано, что в евклидовом пространстве свойства восстановления по модулям измерений, альтернативной полноты и отсутствия матриц ранга 1 или 2 в ядре оператора **A** являются эквивалентными. В унитарном пространстве свойство набора векторов восстанавливать вектор-сигнал по модулям измерений является эквивалентным только свойству отсутствия матриц ранга 1 или 2 в ядре оператора **A**, свойство альтернативной полноты является необходимым, но недостаточным для выполнения первых двух.

Также показано, что в евклидовом пространстве свойство набора подпространств восстанавливать вектор-сигнал по нормам проекций может быть охарактеризовано свойствами ядра оператора **A**. Предметом дальнейшего исследования является вопрос о том, являются ли эти свойства эквивалентными в унитарном пространстве.

Проанализированы имеющиеся результаты в отношении минимального количества векторов, допускающих ВМИ, и минимального количества подпространств, допускающих ВПП. Для пространств размерности, не превосходящей 10, приведена таблица, содержащая сведения о минимальном количестве векторов, допускающих ВМИ. Для некоторых подпространств это количество оказывается точно известным, в то время как для других известны лишь границы, в которых оно находится.

Литература

- [1] Bahmanpour S., Cahill J., Casazza P.G., Jasper J., Woodland L.M. Phase retrieval and norm retrieval by vectors and projections. URL: <https://arxiv.org/pdf/1409.8266.pdf>.
- [2] Bandeira A.S., Cahil J., Mixon D.G., Nelson A.A. Saving phase: Injectivity and stability for phase retrieval. URL: <https://arxiv.org/pdf/1302.4618v2.pdf>.
- [3] Conca A., Edidin D., Hering M., Vinzant C. An algebraic characterization of injectivity in phase retrieval // Applied and Computational Harmonic Analysis, 2014. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.acha.2014.06.005>.
- [4] Edidin D. Projections and Phase retrieval. DOI: <http://doi.org/10.48550/arXiv.1506.00674>.
- [5] Vinzant C. A small frame and a certificate of its injectivity // 2015 International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA). DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/SAMPTA.2015.7148879>.
- [6] Heinosaari T., Mazzarella L., Wolf M. Quantum Tomography under Prior Information // Communications in Mathematical Physics. 2013. Vol. 318. Pp. 355–374. DOI: <http://doi.org/10.1007/s00220-013-1671-8>.
- [7] Cahill J., Casazza P., Peterson J., Woodland L. Phase retrieval by projections. URL: <https://arxiv.org/pdf/1305.6226.pdf>.
- [8] Xu Z. The minimal measurement number for low rank matrix recovery. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.ACHA.2017.01.005>.
- [9] Casazza P., Ghereishi D. Phase retrieval by projections in R^n requires $2n - 2$ projections. URL: <https://arxiv.org/abs/2012.10738v2>.
- [10] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. Москва: Мир, 1989. 666 с. URL: [https://dl.booksee.org/genesis/192000/422f69a9fb7edf390425b4a9c4a99b32/_as/\[Horn_R.,_Dzhonson_CH.\]_Matrichnuei_analiz\(BookSee.org\).pdf](https://dl.booksee.org/genesis/192000/422f69a9fb7edf390425b4a9c4a99b32/_as/[Horn_R.,_Dzhonson_CH.]_Matrichnuei_analiz(BookSee.org).pdf).



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-26-31

Submitted: 27.09.2022

Revised: 29.11.2022

Accepted: 05.12.2022

I.M. Izbiakov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: iliya-izbyakov@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3358-966X>

ABOUT SYSTEMS OF VECTORS AND SUBSPACES IN FINITE DIMENSIONAL SPACE RECOVERING VECTOR-SIGNAL²

²The work is performed under the development program of the Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2022-878).

ABSTRACT

The subject of this paper are the systems of vectors and subspaces in finite dimensional spaces admitting the recovery of an unknown vector-signal by modules of measurements. We analyze the relationship between the properties of recovery by modules of measurements and recovery by norms of projections and the properties of alternative completeness in Euclidean and unitary spaces. The theorem on ranks of one linear operator is considered, the result of which in some cases can be regarded as another criterion for the possibility to restore a vector-signal. As a result of this work, the equivalence of the alternative completeness property and the statement of the rank theorem for Euclidean space is proved. It is shown that the rank theorem in the real case can be extended to the systems of subspaces.

The questions about the minimum number of vectors admissible for reconstruction by modules of measurements are considered. The results available at the moment are presented, which are summarized in the form of a table for spaces of dimension less than 10. Also the known results to the question of the minimum number of subspaces admitting reconstruction by the norms of projections are briefly given.

Key words: recovery by measurement modules; recovery by projection norms; spectral theorem; alternative completeness of vector system; mapping injectivity; Hilbert — Schmidt scalar product; phase lift method; self-adjoint matrices.

Citation. Izbiakov I.M. About systems of vectors and subspaces in finite dimensional space recovering vector-signal. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* = *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 26–31. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-26-31>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Izbiakov I.M., 2022

Iliia M. Izbiakov — post-graduate student of the Department of Information Security, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Bahmanpour S., Cahill J., Casazza P.G., Jasper J., Woodland L.M. Phase retrieval and norm retrieval by vectors and projections. Available online: <https://arxiv.org/pdf/1409.8266.pdf>.
- [2] Bandeira A.S., Cahil J., Mixon D.G., Nelson A.A. Saving phase: Injectivity and stability for phase retrieval. Available online: <https://arxiv.org/pdf/1302.4618v2.pdf>.
- [3] Conca A., Edidin D., Hering M., Vinzant C. An algebraic characterization of injectivity in phase retrieval. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2014. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.acha.2014.06.005>.
- [4] Edidin D. Projections and Phase retrieval. Available online: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1506.00674>.
- [5] Vinzant C. A small frame and a certificate of its injectivity. In: *2015 International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA)*. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/SAMP TA.2015.7148879>.
- [6] Heinosaari T., Mazzarella L., Wolf M. Quantum Tomography under Prior Information. *Communications in Mathematical Physics*, 2013, vol. 318, pp. 355–374. DOI: <http://doi.org/10.1007/s00220-013-1671-8>.
- [7] Cahill J., Casazza P., Peterson J., Woodland L. Phase retrieval by projections. Available online: <https://arxiv.org/pdf/1305.6226.pdf>.
- [8] Xu Z. The minimal measurement number for low rank matrix recovery. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.ACHA.2017.01.005>.
- [9] Casazza P., Ghereishi D. Phase retrieval by projections in R^n requires $2n - 2$ projections. Available online: <https://arxiv.org/abs/2012.10738v2>.
- [10] Horn R., Johnson Ch. Matrix analysis. Moscow: Mir, 1989, 666 p. Available at: [https://dl.booksee.org/genesis/192000/422f69a9fb7edf390425b4a9c4a99b32/_as/\[Horn_R.,_Dzhonson_CH.\]_Matrichnuei_analiz\(BookSee.org\).pdf](https://dl.booksee.org/genesis/192000/422f69a9fb7edf390425b4a9c4a99b32/_as/[Horn_R.,_Dzhonson_CH.]_Matrichnuei_analiz(BookSee.org).pdf). (In Russ.)



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-32-39

УДК 517.928

Дата: поступления статьи: 12.09.2022
после рецензирования: 25.11.2022
принятия статьи: 05.12.2022**В.А. Соболев**Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация;
ФИЦ "Информатика и управление" РАН РФ, г. Москва, Российская Федерация
E-mail: v.sobolev@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7327-7340>

РЕДУКЦИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО СЛЕЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ШУМОВ¹

АННОТАЦИЯ

В статье метод декомпозиции, основанный на применении теории быстрых и медленных интегральных многообразий, применяется для анализа задачи оптимального слежения. Рассматривается сингулярно возмущенная задача оптимального слежения с заданной эталонной траекторией в случае неполной информации о векторе состояния при наличии случайных внешних возмущений.

Ключевые слова: сингулярные возмущения; интегральные многообразия; оптимальное слежение; редукция; асимптотическое разложение; дифференциальные уравнения; быстрые переменные; медленные переменные.

Цитирование. Соболев В.А. Редукция задачи оптимального слежения при наличии шумов // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2022. Т. 28, № 3–4. С. 32–39. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-32-39>.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Соболев В.А., 2022

Владимир Андреевич Соболев — доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Известно, что линейно-квадратичная задача слежения ставится следующим образом (см., например, [1]). Рассматривается управляемая система вида

$$\dot{X} = A(t)X + B(t)u + F(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

$$Y = C(t)X. \quad (2)$$

Здесь X — вектор состояния системы, вектор Y — вектор наблюдаемых параметров, u — вектор управляющих параметров, F — вектор внешних возмущений. Эталонное движение задается в явном виде $\xi = \xi(t)$, а функционал качества имеет вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[(C(t)X(t) - \xi(t))^T Q(t) (C(t)X(t) - \xi(t)) + u^T(t) R(t) u(t) \right] dt \quad (3)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 21-11-00202, <https://rscf.ru/project/21-11-00202>.

или

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[(Y(t) - \xi(t))^T Q(t) (Y(t) - \xi(t)) + u^T(t) R(t) u(t) \right] dt. \quad (4)$$

В дальнейшем будем предполагать, что все матричные функции, входящие в (1)–(3) непрерывно дифференцируемы при $t \in [t_0, t_1]$, тогда решение данной задачи дается следующей формулой для оптимального управления

$$u_{opt} = -R^{-1}B^T(Px + \chi).$$

Здесь P – решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{P} + PA + A^T P - PSP + M = 0, \quad P(t_1) = 0,$$

$S = BR^{-1}B^T$, $M = C^T Q C$, а χ – решение линейной дифференциальной системы

$$\dot{\chi} = -(A - SP)^T \chi + C^T Q \xi - PF = 0, \quad \chi(t_1) = 0.$$

Рассмотрим управляемую систему вида

$$\varepsilon \ddot{x} - A(t)x - H(t)\dot{x} = B(t)u + f(t).$$

$$y = C(t)x, \quad x(t_0) = x_{10}, \quad \dot{x}(t_0) = x_{20}.$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, эталонное движение задается функцией $\xi = \xi(t)$, а функционал качества имеет вид

$$J = \int_0^{t_1} \left[(C(t)x(t) - \xi(t))^T Q(t) (C(t)x(t) - \xi(t)) + u^T(t) R(t) u(t) \right] dt. \quad (5)$$

Полагая $\dot{x} = x_1$, приходим к задаче вида (1)–(3) при

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \varepsilon^{-1}A & \varepsilon^{-1}H \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon^{-1}B \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-2}S \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon^{-1}f \end{pmatrix}, \quad S = BR^{-1}B^T, \quad M = C^T Q C.$$

Представим P и χ в следующем виде:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & \varepsilon P_2 \\ \varepsilon P_2^T & \varepsilon P_3 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \varepsilon \chi_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда для матриц P_1, P_2, P_3 получается нелинейная система матричных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= -P_2 A - A^T P_2^T + P_2 S P_2^T - M_1 = F_1(P_1, P_2, t, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{P}_2 &= -P_1 - P_2 H - A^T P_3 + P_2 S P_3 = f(P_1, P_2, P_3, t, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{P}_3 &= -P_3 H - A_4^T P_3 + P_3 S P_3 - \varepsilon(P_2^T + P_2) = F_3(P_2, P_3, t, \varepsilon) \end{aligned} \quad (6)$$

с граничными условиями

$$P_1(t_1) = 0, \quad P_2(t_1) = 0, \quad P_3(t_1) = 0,$$

а система уравнений для χ_1 и χ_2 имеет вид

$$\dot{\chi}_1 = -(A - SP_2^T)^T \chi_2 + C_1^T Q \xi - P_2 f, \quad (7)$$

$$\varepsilon \dot{\chi}_2 = -\chi_1 - (H - SP_3)^T \chi_2 - P_3 f \quad (8)$$

с граничными условиями

$$\chi_1(t_1) = 0, \quad \chi_2(t_1) = 0.$$

Для анализа задач управления с сингулярными возмущениями обычно применяется метод пограничных функций Васильевой (см. обзоры [2–4]). В настоящей статье будет применен метод декомпозиции [5]. Суть метода декомпозиции состоит в следующем. При некоторых естественных предположениях о гладкости и нормальной гиперболичности сингулярно возмущенная система

$$\dot{X} = F(X, Y, t, \varepsilon), \quad \varepsilon \dot{Y} = G(X, Y, t, \varepsilon)$$

преобразованием

$$Y = Z + L(X, t, \varepsilon), \quad X + V + \varepsilon \Pi(V, Z, t, \varepsilon) \quad (\Pi(V, 0, t, \varepsilon) \equiv 0)$$

приводится к виду

$$\dot{V} = F(V, L(V, t, \varepsilon), \quad \varepsilon \dot{Z} = W((V, Z, t, \varepsilon) \quad (W(V, 0, t, \varepsilon) \equiv 0),$$

в котором первое уравнение не зависит от быстрой переменной, а решениями второго уравнения являются так называемые правые пограничные функции, для которых справедливы оценки типа $\|Z(t, \varepsilon)\| \leq C \exp(c(t - t_1)/\varepsilon)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ при не зависящих от малого параметра числах c и C ($0 < c$, $1 \leq C$). При этом L соответствует медленному интегральному многообразию исходной системы, а $\varepsilon \Pi$ — быстрому многообразию некоторой вспомогательной системы. При этом переменная V соответствует регулярной составляющей решения исходной системы, а переменная Z — погранслойной составляющей. Важно отметить, что если $Z = O(\varepsilon)$ при $t = t_1$, то и функция Z содержит в качестве множителя малый параметр. Матричная функция L удовлетворяет так называемому *уравнению инвариантности*

$$\varepsilon \frac{\partial L}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial L}{\partial X} F(X, L, t, \varepsilon) = G(X, L, t, \varepsilon).$$

Следует отметить, что применение в реальных системах управления управляющих воздействий с использованием пограничных функций далеко не всегда целесообразно, так как предполагает резкое изменение напряжения в цепях управления на очень коротком промежутке времени. С другой стороны, отказ от использования таких функций может незначительно сказываться на погрешности функционала качества. Ниже будет показано, что субоптимальное управление, не содержащее правых пограничных функций, приводит к погрешности порядка $O(\varepsilon^2)$ в функционале (5), что вполне приемлемо с практической точки зрения.

1. Оценка погрешности функционала

Для оценки погрешности при построении субоптимального управления функционал (3) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{t_f} \left[(C(t)x(t) - \xi(t))^T Q(t) (C(t)x(t) - \xi(t)) + u^T(t) R(t) u(t) \right] dt = \\ &= \int_0^{t_f} \left[(u + R^{-1} B^T(t) P(t) x(t) + R^{-1} B^T(t) \chi(t))^T R(t) (u + R^{-1} B^T(t) P(t) x(t) + R^{-1} B^T(t) \chi(t)) \right] dt + \\ &\quad + x^T(0) P(0) x(0) + 2x^T(0) \chi(0) + \kappa(0). \end{aligned}$$

Здесь

$$\dot{\kappa} = \chi^T S \chi - \xi^T Q \xi - 2f^T \chi$$

с условием на конце рассматриваемого промежутка $\kappa(t_f) = 0$, т. е.

$$\kappa(0) = - \int_0^{t_f} [\chi^T S \chi - \xi^T Q \xi - 2f^T \chi] dt.$$

Для доказательства этого факта достаточно использовать непосредственно проверяемое равенство

$$\begin{aligned} &(C(t)x(t) - \xi(t))^T Q(t) (C(t)x(t) - \xi(t)) + u^T(t) R(t) u(t) = \\ &= (u + R^{-1} B^T(t) P(t) x(t) + R^{-1} B^T(t) \chi(t))^T R(t) (u + R^{-1} B^T(t) P(t) x(t) + R^{-1} B^T(t) \chi(t)) - \\ &\quad - \frac{d}{dt} (x^T(t) P(t) x(t) + 2x^T(t) \chi(t) + \kappa(t)). \end{aligned}$$

Легко видеть, что минимальное значение J_{opt} определяется равенством

$$J_{opt} = x^T(0) P(0) x(0) + 2x^T(0) \chi(0) + \kappa(0).$$

Пусть каким-либо способом построено субоптимальное управление

$$u_s = -R^{-1}B^T(P_s x_s + \chi_s)$$

с соответствующими приближенными выражениями для вектора состояния (x_s), коэффициента усиления (P_s) и вектора χ (χ_s) (вместо индекса $subopt$ используется индекс s). Введем следующие обозначения:

$$\Delta x = x_s - x_{opt}, \quad \Delta P = P_s - P_{opt}, \quad \Delta \chi = \chi_s - \chi_{opt}, \quad \Delta J = J_s - J_{opt}.$$

Отсюда следует, что если вместо оптимального управления используется приближенное (субоптимальное) управление

$$u = -R^{-1}B^T(P_s x_s + \chi_s),$$

то возникающая при этом погрешность функционала качества ΔJ представима в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta J = J_s - J_{opt} = & \int_0^{t_f} [(R^{-1}B^T(\Delta P x_s + \Delta \chi))^T R(R^{-1}B^T(\Delta P x_s + \Delta \chi))] dt + \\ & + x_s^T(0)P_s(0)x_s(0) + 2x_s^T(0)\chi_s(0) + \kappa_s(0) - \\ & - [x_0^T(P_s(0) - \Delta P(0))x_0 + 2x_0^T(\chi_s(0) - \Delta \chi(0)) + \kappa_s(0) - \Delta \kappa_s(0)]. \end{aligned}$$

Для краткости аргументы у функций под знаком интеграла опущены.

Полагая $x_s(0) = x_0$ и используя выражение для κ , получаем

$$\begin{aligned} \Delta J = & \int_0^{t_f} (\Delta P x_s + \Delta \chi)^T S(\Delta P x_s + \Delta \chi) dt + \\ & + x_0^T \Delta P(0)x_0 + 2x_0^T \Delta \chi(0) + \int_0^{t_f} [2\chi^T S \Delta \chi - 2f^T \Delta \chi] dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Следует заметить, что полученная формула не связана с конкретным выбором приближений и может применяться для оценки погрешности при применении как асимптотических, так и численных методов приближенного анализа.

Если, например, рассмотреть случай регулярной зависимости матричных и векторных функций, входящих в (1), (2) и (3) от малого параметра, в предположении, что эти функции достаточное число раз дифференцируемы по своим аргументам, то можно применить эту формулу для оценки погрешности функционала при применении простейшего варианта метода малого параметра. При этом проявляется некоторое отличие от задач оптимального управления, связанное с зависимостью погрешности от $\Delta \chi$.

В рассматриваемом случае формула (9) с учетом выражений

$$\Delta P x_s = \begin{pmatrix} \Delta P_1 x_{1s} + \varepsilon \Delta P_2 x_{2s} \\ \varepsilon \Delta P_2 x_{1s} + \varepsilon \Delta P_3 x_{2s} \end{pmatrix}, \quad \Delta \chi = \begin{pmatrix} \Delta \chi_1 \\ \varepsilon \Delta \chi_2 \end{pmatrix}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta J = & \int_0^{t_f} \Delta_2^T S \Delta_2 dt + x_{10}^T \Delta P_1(0)x_{10} + \varepsilon(x_{20}^T \Delta P_2(0)^T x_{10} + x_{10}^T \Delta P_2(0)x_{20} + \\ & + x_{20}^T \Delta P_3(0)x_{20}) + 2x_{10}^T \Delta \chi_1(0) + 2\varepsilon x_{20}^T \Delta \chi_2(0) + 2 \int_0^{t_f} (\chi_2^T S \Delta \chi_2 - \varepsilon f^T \Delta \chi_2) dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что пренебрежение регулярными членами порядка $O(\varepsilon^2)$ и правыми пограничными функциями, содержащими в качестве множителя малый параметр, в представлении переменных P_1, P_2, P_3 и χ_1, χ_2 приводит к погрешности порядка $O(\varepsilon^2)$ в функционале качества.

2. Декомпозиция системы уравнений Риккати

Будем предполагать, что все собственные числа матрицы H на рассматриваемом отрезке имеют положительные вещественные части. Полагая в последних двух уравнениях системы матричных дифференциальных уравнений (6) малый параметр равным нулю, получим уравнения

$$0 = -P_1 - P_2 H - A^T P_3 + P_2 S P_3, \quad 0 = -P_3 H - H^T P_3 + P_3 S P_3.$$

Отсюда следует, что медленное интегральное многообразие этой системы имеет вид

$$P_2 = \Phi(P_1, t, \varepsilon) = -P_1 H^{-1} + \varepsilon \Phi_1(P_1, t) + \varepsilon^2 \dots, \quad P_3 = \varepsilon \Psi(P_1, t, \varepsilon) = \varepsilon \Psi_1(P_1, t) + \varepsilon^2 \dots$$

Приравнивая в соответствующих уравнениях инвариантности члены, содержащие множителем первую степень малого параметра, получим соотношения для определения матричных функций $\Phi_1(P_1, t)$

$$-F_1(P_1, -P_1 H^{-1}, t, 0) - P_1 \frac{d}{dt} (H^{-1}) = -\Phi_1 H - A^T \Psi_1 - P_1 H^{-1} S \Psi_1,$$

и $\Psi_1(P_1, t)$

$$0 = -\Psi_1 H - H^T \Psi_1 + P_1 H^{-1} + (P_1 H^{-1})^T. \quad (11)$$

Последнее равенство представляет собой однозначно разрешимое матричное уравнение Ляпунова. После подстановки найденного решения Ψ_1 в предыдущее уравнение матрица Φ_1 находится путем умножения на H^{-1} соответствующих слагаемых, т. е.

$$\Phi_1 = \left(F_1(P_1, -P_1 H^{-1}, t, 0) + P_1 \frac{d}{dt} (H^{-1}) - A^T \Psi_1 - P_1 H^{-1} S \Psi_1 \right) H^{-1}. \quad (12)$$

При необходимости аналогичным образом определяются соответствующие матричные коэффициенты при более высоких степенях малого параметра.

Важно отметить, что при $t = t_1$ матричные функции P_1, P_2, P_3 обращаются в нуль. Отсюда следует, что правые пограничные функции Z_2, Z_3 в представлении матриц P_2, P_3 должны содержать в качестве множителя малый параметр. Это означает, что если при построении закона управления пренебречь правыми пограничными функциями, то в силу формулы (10) погрешность функционала качества не превысит величину $O(\varepsilon^2)$.

3. Декомпозиция линейной системы уравнений

Обратимся к системе (7)–(8) и сначала рассмотрим соответствующую однородную систему, не содержащую правых пограничных функций Z_1, Z_2, Z_3 и членов порядка $o(\varepsilon)$ у регулярных матричных функций V_2, V_3 :

$$\dot{\chi}_1 = -(A - S V_2^T)^T \chi_2, \quad \varepsilon \dot{\chi}_2 = -\chi_1 - (H - V_3)^T \chi_2,$$

где $V_2 = \Phi(V_1, t, \varepsilon) = -V_1 H^{-1} + \varepsilon \Phi_1(V_1, t) + O(\varepsilon^2)$, $V_3 = \varepsilon \Psi(V_1, t, \varepsilon) = \varepsilon \Psi_1(V_1, t) + O(\varepsilon^2)$.

Для декомпозиции этой линейной системы можно применить известный метод приведения к блочно-диагональной форме. С этой целью сначала вводится новая быстрая переменная $y_2 = \chi_2 - l \chi_1$. Используемая в этой формуле матричная функция $l = l(t, \varepsilon)$ удовлетворяет несимметричному матричному дифференциальному уравнению Риккати

$$\varepsilon \dot{l} + \varepsilon l [-(A - S \Phi^T)^T l] = I - (H - \varepsilon \Psi S)^T l,$$

из которого она может быть легко найдена в виде разложения по степеням малого параметра

$$l = l_0(t) + \varepsilon l_1(t) + \varepsilon^2 \dots,$$

где

$$l_0 = -(H^T)^{-1}, \quad l_1 = (H^T)^{-1} \left[\frac{dl_0}{dt} - l_0 (A^T + (H^T)^{-1} V_1 S) l_0 - \Psi_1 S \right].$$

Для переменных χ_1, y_2 получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_1 &= [-(A - S \Phi^T)^T] (l \chi_1 + y_2), \\ \varepsilon \dot{y}_2 &= -[(H - \varepsilon \Psi S)^T + \varepsilon l (A - S \Phi^T)^T] y_2 \end{aligned}$$

или после выполнения транспонирования

$$\dot{\chi}_1 = [-(A^T - \Phi S)] (l \chi_1 + y_2),$$

$$\varepsilon \dot{y}_2 = -[(H^T - \varepsilon S \Psi) + \varepsilon l (A - \Phi S)] y_2.$$

На следующем шаге вводится новая медленная переменная $y_1 = \chi_1 - \varepsilon p y_2$. При этом матричная функция $p = p(t, \varepsilon)$ удовлетворяет линейному матричному дифференциальному уравнению

$$\varepsilon \dot{p} - p [(H^T - \varepsilon S \Psi) + \varepsilon l (A - \Phi S)] = -(A^T - \Phi S) - \varepsilon (A^T - \Phi S) l p,$$

из которого она может быть легко найдена в виде разложения по степеням малого параметра $p = p_0(t) + \varepsilon p_1(t) + \varepsilon^2 \dots$, где $p_0(t) = -(A^T - \Phi S)H^{-1}$.

В результате получаются две независимые подсистемы

$$\dot{y}_1 = [-(A^T - \Phi S)l]y_1,$$

$$\varepsilon \dot{y}_2 = -[(H^T - \varepsilon S\Psi) + \varepsilon l(A - \Phi S)]y_2.$$

Для матричных функций l и p , пренебрегая членами второго и более высоких порядков в разложении по степеням малого параметра, получаем следующие представления:

$$l = l_0 + \varepsilon l_1 + O(\varepsilon^2), \quad p = p_0 + O(\varepsilon).$$

Здесь

$$p_0 = -[A + SV_1 H^{-1}]^T (H^T)^{-1}.$$

Применение преобразования

$$y_2 = \chi_2 - l\chi_1, \quad y_1 = \chi_1 - \varepsilon p y_2 \quad (13)$$

к неоднородной системе (7), (8) приводит к уравнениям

$$\dot{y}_1 = [-(A + S\Phi(V_1, t, \varepsilon))^T l]y_1 + f_1 \quad (14)$$

и

$$\varepsilon \dot{y}_2 = -[(H - \varepsilon S\Psi_1)^T + \varepsilon l_0(A - S\Phi_0(t)^T)^T]y_2 + f_2.$$

Здесь

$$f_1 = (I + \varepsilon p_0 L_0)(C^T Q\xi - \Phi(V_1, t, \varepsilon)f) - p_0(-\varepsilon \Psi_1(V_1, t)f),$$

$$f_2 = -\varepsilon \Psi_1(V_1, t, \varepsilon)f - \varepsilon L_0(C^T Q\xi - \Phi_0(t)f).$$

В этих уравнениях и выражениях для функций f_1 и f_2 опущены правые пограничные функции Z_1, Z_2, Z_3 и члены порядка $o(\varepsilon)$ у регулярных функций. Принимая во внимание, что функция f_2 содержит малый параметр в качестве множителя, получаем следующее приближенное выражение для y_2 :

$$y_2 = -\varepsilon H^{-1} (\Psi_1(V_1, t)f - L_0(C_1^T Q\xi - \Phi_0(t)f)),$$

в котором учтены только регулярные члены порядка $O(\varepsilon)$, а регулярные члены более высоких порядков и правые пограничные функции, которые содержат в качестве множителя малый параметр, опущены. В рассматриваемом случае формула для оптимального управления принимает вид

$$u_{opt} = -R^{-1}B^T[P_2 x + P_3 \dot{x} + \chi_2].$$

Чтобы получить погрешность порядка $O(\varepsilon^2)$ при вычислении значения функционала качества для субоптимального управления, следует использовать приближенное выражение

$$P_2 = \Phi(V_1, t, \varepsilon) \simeq \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 = -V_1 H^{-1} + \varepsilon \Phi_1(V_1, t), \quad P_3 \simeq \varepsilon \Psi_1(V_1, t). \quad (15)$$

Что касается χ_2 , использование представления

$$\chi_2 = l y_1 + (I + \varepsilon l p) y_2,$$

которое вытекает из (13), и полученное выше выражение для y_2 позволяет применять следующее приближенное выражение:

$$\chi_2 = (l_0 + \varepsilon l_1) y_1 - \varepsilon H^{-1} (\Psi_1(V_1, t)f - L_0(C^T Q\xi - \Phi_0(t)f)).$$

Таким образом, система (6) имеет медленное интегральное многообразие, которое с точностью до членов порядка $O(\varepsilon)$ включительно описывается уравнениями (15), где Ψ_1 является решением уравнения Ляпунова (11), Φ_1 задается формулой (12), а матрица V_1 представляет собой решение матричного дифференциального уравнения

$$\dot{P}_1 = -P_2 A - A^T P_2^T + P_2 S P_2^T - M, \quad P_1(t_1) = 0,$$

в котором P_2 задается выражением (15). Через v_2 обозначим выражение

$$v_2 = (l_0 + \varepsilon l_1)v_1 - \varepsilon H^{-1} (\Psi_1(V_1, t)f - l_0(C_1^T Q\xi - \Phi_0(t)f)), \quad (16)$$

в котором в качестве v_1 следует взять решение уравнения (14) с граничным условием $y_1(t_1) = 0$.

Суммируя вышесказанное, приходим к следующему утверждению.

Теорема. Применение субоптимального управления

$$u_s = -R^{-1}B^T[V_2x + V_3\dot{x} + v_2],$$

где V_2 и V_3 заданы выражениями (15), а v_2 – выражением (16), приводит к погрешности порядка $O(\varepsilon^2)$ в функционале (5).

Выводы

В статье обсуждается возможность применения метода декомпозиции для понижения размерности задачи оптимального слежения с сингулярными и случайными возмущениями. Традиционные методы решения задач оптимального управления с сингулярными возмущениями для таких задач неприменимы, так как основываются на предположении о гладкости правых частей, которое входит в противоречие с наличием случайных возмущений. Метод декомпозиции позволяет избежать этой трудности и получить формулу для субоптимального управления.

Литература

- [1] Sontag E. Mathematical Control Theory: Deterministic Finite-Dimensional Systems. 2nd edition. New York: Springer-Verlag, Inc., 1998. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-0577-7>.
- [2] Васильева А.Б., Дмитриев М.Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники ВИНТИ. Сер.: Мат. анализ. 1982. Т. 20. С. 3–77. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/intm60>.
- [3] Дмитриев М.Г., Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика, 2006. № 1. С. 3–51. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15569476>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ncsjrz>.
- [4] Naidu D.S. Singular Perturbations and Time Scales in Control Theory and Applications: An Overview. // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series B: Applications & Algorithms. 2002. Vol. 9. Issue 2. Pp. 233–278. Available at: https://www.d.umn.edu/~dsnaidu/Naidu_Survey_DCDISJournal_2002.pdf.
- [5] Sobolev V.A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems // System and Control Letters. 1984. Vol. 5. Issue 3. P. 169–179. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0167-6911\(84\)80099-7](http://doi.org/10.1016/S0167-6911(84)80099-7).



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-32-39

Submitted: 12.09.2022

Revised: 25.11.2022

Accepted: 05.12.2022

V.A. Sobolev

Samara National Research University, Samara, Russian Federation; Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences (FRC CSC RAS), Moscow, Russian Federation
 E-mail: v.sobolev@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7327-7340>

REDUCTION OF THE OPTIMAL TRACKING PROBLEM IN THE PRESENCE OF NOISE²

²The work was carried out with the financial support of the Russian scientific fund within the framework of the scientific project № 21-11-00202, <https://rscf.ru/project/21-11-00202>.

ABSTRACT

In this paper, the decomposition method based on the theory of fast and slow integral manifolds is used to analyze the optimal tracking problem. We consider a singularly perturbed optimal tracking problem with a given reference trajectory in the case of incomplete information about the state vector in the presence of random external perturbations.

Key words: singular perturbations; integral manifolds; integral manifold; optimal tracking; asymptotic expansion; differential equations; fast variables; slow variables.

Citation. Sobolev V.A. Reduction of the optimal tracking problem in the presence of noise *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* = *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 32–39. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-32-39>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Sobolev V.A., 2022

Vladimir A. Sobolev — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Sontag E. Mathematical Control Theory: Deterministic Finite-Dimensional Systems. 2nd edition. New York: Springer-Verlag, Inc., 1998. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-0577-7>.
- [2] Vasil'eva A.B., Dmitriev M.G. Singular perturbations in optimal control problems. *Journal of Soviet Mathematics*, 1986, vol. 34, issue 4, pp. 1579–1629. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01262406>. EDN: <https://www.elibrary.ru/xorosl>. (In Russ.)
- [3] Dmitriev M.G., Kurina G.A. Singular perturbations in control problems. *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 1, pp. 1–43. DOI: <http://doi.org/10.1134/S0005117906010012>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ljogdl>. (in English; Russian original).
- [4] Naidu D.S. Singular Perturbations and Time Scales in Control Theory and Applications: An Overview. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series B: Applications & Algorithms*, 2002, vol. 9, issue 2, pp. 233–278. Available at: https://www.d.umn.edu/~dsnaidu/Naidu_Survey_DCDISJournal_2002.pdf.
- [5] Sobolev V.A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems. *System and Control Letters*, 1984, vol. 5, issue 3, pp. 169–179. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0167-6911\(84\)80099-7](http://doi.org/10.1016/S0167-6911(84)80099-7).

МЕХАНИКА MECHANICS



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-40-52

УДК 531.39

Дата: поступления статьи: 14.09.2022
после рецензирования: 22.11.2022
принятия статьи: 05.12.2022

П.Г. Великанов

Казанский (Приволжский) федеральный университет;
Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ,
г. Казань, Российская Федерация
E-mail: pvelikanov@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0845-2880>

Ю.П. Артюхин

Казанский (Приволжский) федеральный университет
г. Казань, Российская Федерация
E-mail: ArtukhinYP@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6243-9145>

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК. ЧАСТЬ II

АННОТАЦИЯ

Современное машиностроение порой ставит задачи по расчету тонкостенных конструкций со взаимосоключающими свойствами: с одной стороны, исследуемые конструкции должны сочетать в себе высокую прочность и надежность, а с другой — легкость и экономичность. Для обеспечения вышеперечисленных свойств представляется вполне оправданным использование в конструкциях ортотропных материалов и пластиков.

Во второй части статьи на примерах продемонстрированы дальнейшие возможности методики комплексного представления уравнений общей теории ортотропных оболочек (для изотропных оболочек сделано В.В. Новожиловым), которые позволили существенно сократить число неизвестных и порядок системы дифференциальных уравнений. Особенностью предложенной методики для ортотропных оболочек является появление комплексно-сопряженных неизвестных функций, которые в случае осесимметричной деформации обращаются в нуль, а в других случаях влиянием комплексно-сопряженной функции можно пренебречь.

Проверка правильности предложенной методики была продемонстрирована на пологой ортотропной сферической оболочке вращения под действием кольцевой нагрузки в условиях различного преобладания жесткости армирования волокон. В предельном случае были получены результаты и для изотропной оболочки.

Ключевые слова: механика; дифференциальные уравнения; ортотропные пластинки и оболочки; пологие оболочки вращения; осесимметричная деформация; уравнение и функции Бесселя; функция Ломмеля; гипергеометрические функции.

Цитирование. Великанов П.Г., Артюхин Ю.П. Общая теория ортотропных оболочек. Часть II // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2022. Т. 28, № 3–4. С. 40–52. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-40-52>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Великанов П.Г., Артюхин Ю.П., 2022

Пётр Геннадьевич Великанов — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Российская Федерация, г. Казань, ул. Кремлевская, 18; кафедра реактивных двигателей и энергетических установок, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ, 420111, Российская Федерация, г. Казань, ул. К. Маркса, 10.

Юрий Павлович Артюхин — доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Российская Федерация, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

1. Предварительные сведения

Комплексное представление уравнений общей теории изотропных оболочек впервые было сделано В.В. Новожиловым в [1]. Представление уравнений в комплексной форме позволило существенно упростить решение задачи: сократить вдвое число неизвестных и порядок системы дифференциальных уравнений. Попытка построения аналогичного комплексного представления исходных дифференциальных уравнений ортотропных оболочек натолкнулась на следующую трудность: появление комплексно-сопряженных неизвестных функций, что не позволило сократить число и порядок исходной системы дифференциальных уравнений. Несмотря на указанную трудность, эта запись позволяет более компактно представить уравнения, а в некоторых случаях имеется возможность вычислить комплексно-сопряженную функцию. В случае осесимметричной деформации эта функция обращается в нуль, а в других случаях влиянием комплексно-сопряженной функции можно пренебречь.

2. Постановка задачи

Рассмотрим кратко (более подробно приведено в первой части статьи) комплексное преобразование исходных уравнений общей теории ортотропных оболочек (более общее преобразование сделано Артюхиным Ю.П. для многослойной оболочки, составленной из произвольного числа ортотропных слоев [2], а также в [3]). Пусть тонкая ортотропная оболочка постоянной толщины испытывает упругие деформации, малые углы поворота и прогибы. Оси ортотропии параллельны координатным линиям кривизны α_1 , α_2 . Считаем справедливыми гипотезы Кирхгофа — Лява. Положительными направлениями для тангенциальных усилий (растяжения/сжатия и сдвига) T_j , S и моментов (изгибающих и крутящего) M_j , H считаются направления, принятые в монографии [1].

Из преобразованных уравнений равновесия и совместности деформаций следует аналогия [1]:

$$\begin{aligned} T_1 &\leftrightarrow \kappa_2; & T_2 &\leftrightarrow \kappa_1; & S &\leftrightarrow -\tau; \\ M_1 &\leftrightarrow -\varepsilon_2; & M_2 &\leftrightarrow -\varepsilon_1; & H &\leftrightarrow \frac{\omega}{2}, \end{aligned}$$

где ε_j , ω — тангенциальные, а κ_j , τ — изгибные деформации.

Согласно преобразованиям и введению комплексных усилий

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1 &= T_1 - i\mu\kappa_2, \quad (\overset{\leftarrow}{1}, \overset{\leftarrow}{2}); & \tilde{S} &= S + i\mu\tau; & i &= \sqrt{-1}; \\ \tilde{M}_1 &= M_1 + i\mu\varepsilon_2, \quad (\overset{\leftarrow}{1}, \overset{\leftarrow}{2}); & \tilde{H} &= H - i\mu(\omega/2); & \mu &= h^2 \sqrt{\frac{E_1 E_2}{12(1-\nu_1 \nu_2)}}, \\ \tilde{M}_1 &= ic(\tilde{T}_2 - \nu_2 \tilde{T}_1); & \tilde{M}_2 &= ic\delta(\tilde{T}_1 - \nu_1 \tilde{T}_2); \\ \tilde{H} &= -ic[\lambda \tilde{S} + (\varepsilon + \nu_2) \tilde{S}], & c &= h/K, \end{aligned}$$

где соотношения упругости для ортотропных оболочек имеют вид [4]:

$$\begin{aligned} T_1 &= B_1(\varepsilon_1 + \nu_2 \varepsilon_2), \quad (\overset{\leftarrow}{1}, \overset{\leftarrow}{2}); & S &= \tilde{G}h\omega; \\ M_1 &= D_1(\kappa_1 + \nu_2 \kappa_2), \quad (\overset{\leftarrow}{1}, \overset{\leftarrow}{2}); & H &= (\tilde{G}h^3/6)\tau, \end{aligned}$$

где $B_1 = \frac{E_1 h}{1-\nu_1 \nu_2}$, $D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)}$, $\tilde{G}$ — модуль сдвига; h — толщина; E_j , ν_j — модули упругости и коэффициенты Пуассона j -го направления; $\tilde{T}$, $\tilde{S}$ — комплексно-сопряженные величины, получим [2]:

$$\begin{aligned} L_1(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{S}) &+ \frac{ic}{R_1} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 (\lambda \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_1) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (\delta \tilde{T}_1 + \lambda \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_2) \right] = -A_1 A_2 q_1; \\ L_2(\tilde{T}_2, \tilde{T}_1, \tilde{S}) &+ \frac{ic}{R_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 (\delta \tilde{T}_1 + \lambda \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_2) - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (\lambda \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_1) \right] = -A_1 A_2 q_2; \\ \frac{\tilde{T}_1}{R_1} + \frac{\tilde{T}_2}{R_2} - \frac{ic}{A_1 A_2} &\left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 (\lambda \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_1) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (\delta \tilde{T}_1 + \lambda \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_2) \right] + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 (\delta \tilde{T}_1 + \lambda \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_2) - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (\lambda \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_1) \right] \right\} = q_3, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $L_1(T_1, T_2, S) = \frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2 T_2}{\partial \alpha_1}$; A_j — коэффициенты Ляме; R_j — радиусы кривизны; q_j , q_3 — касательные и нормальная нагрузки, а безразмерные коэффициенты δ , λ , ε , K полностью определяют упругие свойства материала:

$$\delta = \frac{E_2}{E_1}; \quad K = \sqrt{12(1 - \nu_1 \nu_2)} \delta; \quad \lambda = \frac{E_2}{4\tilde{G}} + \frac{\tilde{G}(1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1}; \quad \varepsilon = \frac{E_2}{4\tilde{G}} - \frac{\tilde{G}(1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1} - \nu_2.$$

Для изотропного материала эти параметры равны:

$$\delta = \lambda = 1; \quad \varepsilon = 0; \quad K = \sqrt{12(1 - \nu^2)}.$$

Если допустить, что для ортотропного материала между модулем сдвига и модулями упругости существует связь

$$\tilde{G} = \tilde{G}_0 = \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2(1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2})},$$

то $\delta = \lambda^2$; $\varepsilon = 0$; $K = \sqrt{12(1 - \nu_1 \nu_2)}\lambda$ и задача путем аффинного преобразования координат может быть сведена к задаче деформирования изотропной оболочки. В этом случае решение будет зависеть только от отношения модулей $\delta = E_2/E_1$. Такое решение может давать неплохие результаты, если сдвиговая деформация мало влияет на другие искомые характеристики интегрального типа.

3. Пологие оболочки

Рассмотрим изгиб пологой оболочки нормальной нагрузкой $q_3(\alpha_1, \alpha_2)$. В этом случае в первых двух уравнениях (2.1) можно пренебречь членами уравнения с множителями $1/R_j$ по сравнению с остальными (главными). Упрощенные таким образом два уравнения удовлетворим с помощью комплексной функции усилий [1]:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1 &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{1}{A_1^2 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \alpha_1}, \quad (\overleftarrow{1, 2}); \\ \tilde{S} &= \frac{1}{2} \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \alpha_1} \right) \right]; \quad \tilde{F} = F - i\mu w, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где F — вещественная функция усилий; w — прогиб.

Вводя усилия (3.1) в третье уравнение (2.1), получим:

$$\begin{aligned} \frac{ic}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \nabla_1^2 \tilde{F} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \nabla_2^2 \tilde{F} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (\nabla_1^2 \tilde{F} - \nabla_2^2 \tilde{F}) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (\nabla_2^2 \tilde{F} - \nabla_1^2 \tilde{F}) \right] + \varepsilon \nabla_3^4 \tilde{F} \right\} - D(\tilde{F}) = q_3, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 &= \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \lambda \left[\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + A_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \right] + [\overleftarrow{1, 2}] \right\}; \\ \nabla_2^2 &= \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \lambda \left[\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) + A_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) \right] + \delta [\overleftarrow{1, 2}] \right\}; \\ \nabla_3^4 &= \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right] - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} [\overleftarrow{1, 2}] \right\} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left\{ \overleftarrow{1, 2} \right\}; \\ D(\cdot) &= \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{R_2 A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{R_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

4. Осесимметричная деформация пологой сферической оболочки

Для решения многих задач теории круглых пластин, сферических и конических оболочек вращения эффективно используются гипергеометрические функции.

Плодотворность привлечения для указанной цели теории гипергеометрических функций объясняется тем, что разрешающие дифференциальные уравнения при определенных профилях пластин и законах изменения кривизны оболочек вращения, имеющих практическое значение, приводятся к хорошо изученным гипергеометрическим уравнениям. В то же время использование многочисленных соотношений между этими функциями дает возможность существенно улучшать решения: усиливать сходимость и сокращать число рядов, подлежащих суммированию — операции с успехом реализуемые, например, в пакете символьной математики WolframMathematica [6; 7]. Ниже приведены результаты по применению гипергеометрических функций в теории оболочек.

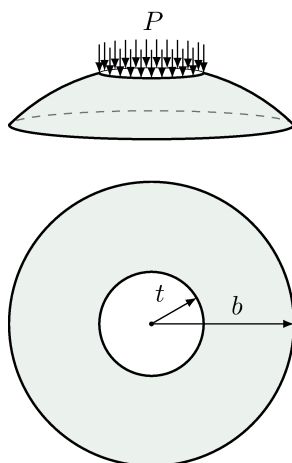


Рис. 4.1. Сферическая оболочка под действием сосредоточенной кольцевой нагрузки
 Fig. 4.1. Spherical shell under the action of concentrated annular load

4.1. Сферическая оболочка под действием сосредоточенной кольцевой нагрузки

Рассмотрим случай осесимметричной деформации пологой сферической оболочки под действием сосредоточенной кольцевой нагрузки вида [7] (рис. 4.1):

$$q_3 = -\frac{P}{2\pi\rho}\delta(\rho - t) = -q\delta(\rho - t),$$

где t — точка приложения кольцевой сосредоточенной нагрузки, а $\delta(\rho - t)$ обобщенная δ -функция Дирака.

Из уравнения равновесия в комплексной форме (3.2) в силу осевой симметрии задачи получим:

$$\frac{d^4\tilde{F}}{d\rho^4} + \frac{2}{\rho}\frac{d^3\tilde{F}}{d\rho^3} + \nu^2\left(-\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\tilde{F}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^3}\frac{d\tilde{F}}{d\rho}\right) + ia^2\left(\frac{d^2\tilde{F}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\tilde{F}}{d\rho}\right) = \frac{iP}{2\pi c\rho}\delta(\rho - t). \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) может быть приведено к виду:

$$\frac{d}{d\rho}[\rho(\Delta_\nu + ia^2)]\tilde{f} = \frac{iP}{2\pi c}\delta(\rho - t), \quad (4.2)$$

где дифференциальный оператор представим в виде:

$$\Delta_\nu = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{\nu^2}{\rho^2}; \quad \tilde{f} = \frac{d\tilde{F}}{d\rho}.$$

Однородное дифференциальное уравнение, которое ставится в соответствие неоднородному уравнению (4.2), есть не что иное, как дифференциальное уравнение Бесселя, решениями которого являются модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно $(I_\nu(i\sqrt{i}\rho), K(i\sqrt{i}\rho))$.

Проинтегрировав однородное уравнение, найдем решение уравнения вида:

$$(\Delta_\nu + ia^2)\tilde{f} = \frac{c}{\rho}. \quad (4.3)$$

Для получения фундаментальных решений линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами прекрасно себя зарекомендовал метод интегрального преобразования Ханкеля [8–10].

Трансформанта (изображение, образ) $\tilde{f}^*(s)$ функции (оригинала, прообраза) $\tilde{f}(\rho)$ интегрального преобразования Ханкеля определяется соотношением вида: $\tilde{f}^*(s) = \int_0^\infty \tilde{f}(\rho)\rho J_\nu(\rho s)d\rho$, где $J_\nu(z)$ — цилиндрическая функция Бесселя первого рода ν -го порядка.

Для восстановления оригиналов по известным трансформантам вводят в рассмотрение формулу обращения интегрального преобразования Ханкеля: $\tilde{f}(\rho) = \int_0^\infty \tilde{f}^*(s)sJ_\nu(\rho s)ds$.

Восстановление оригиналов по известным трансформантам осуществляем с помощью таблиц интегралов [10; 11].

Применив к (4.3) интегральное преобразование Ханкеля и воспользовавшись таблицами интегралов [10; 11], получим следующее выражение для трансформанты интегрального преобразования:

$$\tilde{f}^*(s) = -\frac{1}{s(s^2 - ia^2)}. \quad (4.4)$$

Применив к (4.4) формулу обращения интегрального преобразования Ханкеля и воспользовавшись таблицами интегралов [10; 11], после ряда преобразований, используя свойства Г-функций [8; 9], получим:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\rho) = & -\left\{ \frac{\rho}{(\nu^2 - 1)} {}_1F_2\left(\{1\}; \left\{\frac{3+\nu}{2}, \frac{3-\nu}{2}\right\}; -\frac{\rho^2 a^2}{4}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{\pi \rho^\nu a^{\nu-1} e^{3\pi i(\nu-1)/4}}{2^{\nu+1} \Gamma(\nu+1) \cos \frac{\pi\nu}{2}} {}_1F_2\left(\left\{\frac{\nu+1}{2}\right\}; \left\{\frac{\nu+1}{2}, \nu+1\right\}; -\frac{\rho^2 a^2}{4}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Аналогичная процедура в пакете символьной математики WolframMathematica [5; 6] дает оригинал интегрального преобразования Ханкеля следующего вида:

$$\tilde{f}(\rho) = -\left\{ \frac{\rho}{(\nu^2 - 1)} {}_1F_2\left(\{1\}; \left\{\frac{3+\nu}{2}, \frac{3-\nu}{2}\right\}; -\frac{\rho^2 a^2}{4}\right) + \frac{\pi (-1)^{1/4}}{2a \cos \frac{\pi\nu}{2}} I_\nu\left(-(-1)^{3/4} \rho a\right) \right\}, \quad (4.6)$$

где ${}_1F_2(\{a\}; \{\beta_1, \beta_2\}; \gamma)$ — частный случай обобщенного гипергеометрического ряда с параметрами 1 и 2; $\Gamma(x)$ — гамма-функция; $I_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода ν -го порядка.

В результате анализа полученных соотношений оказалось, что подчеркнутые члены уравнений в (4.5) и (4.6) с машинной точностью совпадают и, кроме того, являются решением однородного дифференциального уравнения, которое поставлено в соответствие неоднородному уравнению (4.2). В силу вышесказанного подчеркнутые члены уравнений из дальнейшего рассмотрения исключаем.

Введем обозначение:

$$\check{G}(\rho) = \frac{\rho}{(\nu^2 - 1)} {}_1F_2\left(\{1\}; \left\{\frac{3+\nu}{2}, \frac{3-\nu}{2}\right\}; -\frac{\rho^2 a^2}{4}\right). \quad (4.7)$$

Из [11] следует, что введенная в рассмотрение функция есть не что иное, как функция Ломмеля $S_{0,\nu}(i\sqrt{i}\rho a)$.

Таким образом, решение дифференциального уравнения (4.1) примет вид:

$$\tilde{F}(\rho) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \int I_\nu(i\sqrt{i}\rho a) d\rho + \tilde{C}_3 \int K_\nu(i\sqrt{i}\rho a) d\rho + \tilde{C}_4 \int \check{G}(\rho) d\rho, \quad (4.8)$$

где $\tilde{C}_j$, $(j = \overline{1,4})$ — произвольные комплексные постоянные.

Проинтегрировав уравнение (4.2) и применив интегральное преобразование Ханкеля, найдем его частное решение:

$$(\Delta_\nu + ia^2) \tilde{f} = \frac{iP}{2\pi c} \frac{H(\rho - t)}{\rho}, \quad (4.9)$$

где $H(\rho - t)$ — функция Хевисайда.

Следуя методике [12], предварительно найдем решение дифференциального уравнения следующего вида (фундаментальное решение):

$$(\Delta_\nu + ia^2) \Phi = \delta(\rho - \rho_0). \quad (4.10)$$

Применим к (4.10) интегральное преобразование Ханкеля, в результате чего получим следующее выражение для трансформанты:

$$\Phi^*(s) = -\frac{\rho_0 J_\nu(\rho_0 s)}{s^2 - ia^2}. \quad (4.11)$$

Применим к (4.11) формулу обращения интегрального преобразования Ханкеля:

$$\Phi(\rho, \rho_0) = -\rho_0 \int_0^\infty \frac{s J_\nu(\rho s) J_\nu(\rho_0 s)}{s^2 - ia^2} ds. \quad (4.12)$$

Интеграл в (4.12) является табличным [11] и имеет вид:

$$\int_0^\infty \frac{s J_\nu(\rho s) J_\nu(\rho_0 s)}{s^2 - ia^2} ds = \begin{cases} I_\nu(i\sqrt{i}\rho a) K_\nu(i\sqrt{i}\rho_0 a), & 0 < \rho < \rho_0; \\ I_\nu(i\sqrt{i}\rho_0 a) K_\nu(i\sqrt{i}\rho a), & 0 < \rho_0 < \rho. \end{cases} \quad (4.13)$$

В соответствии со свойством фундаментального решения для истинной нагрузки имеем следующее решение:

$$\tilde{f}_{\text{част}}(\rho, t) = \frac{iP}{2\pi c} \int_0^b \frac{H(\rho_0 - t)}{\rho_0} \Phi(\rho, \rho_0) \rho_0 d\rho_0 = \frac{iP}{2\pi c} \int_t^b \Phi(\rho, \rho_0) d\rho_0. \quad (4.14)$$

В области $\rho < t < \rho_0$, очевидно, нужно использовать верхнюю формулу в (4.13):

$$\tilde{f}_{\text{част}}(\rho, t) = -\frac{iP}{2\pi c} I_\nu(i\sqrt{i}\rho a) \int_t^b \rho_0 K_\nu(i\sqrt{i}\rho_0 a) d\rho_0. \quad (4.15)$$

В случае $\rho > t$ интеграл приходится разбивать на два (т. к. имеют место два варианта $t < \rho < \rho_0$ и $t < \rho_0 < \rho$) и использовать обе формулы соотношения (4.13):

$$\tilde{f}_{\text{част}}(\rho, t) = -\frac{iP}{2\pi c} \left(K_\nu(i\sqrt{i}\rho a) \int_t^\rho \rho_0 I_\nu(i\sqrt{i}\rho_0 a) d\rho_0 + I_\nu(i\sqrt{i}\rho a) \int_\rho^b \rho_0 K_\nu(i\sqrt{i}\rho_0 a) d\rho_0 \right). \quad (4.16)$$

Добавив к выражениям (4.15) и (4.16) слагаемое, только знаком отличающееся от (4.15), и интегрируя полученное выражение по переменной ρ , получим:

$$\tilde{F}_{\text{част}}(\rho, t) = -\frac{iP}{2\pi c} \begin{cases} 0, & \rho < t; \\ \int_t^\rho \left(K_\nu(i\sqrt{i}\rho a) \int_t^\rho \rho_0 I_\nu(i\sqrt{i}\rho_0 a) d\rho_0 - \right. \\ \left. - I_\nu(i\sqrt{i}\rho a) \int_t^\rho \rho_0 K_\nu(i\sqrt{i}\rho_0 a) d\rho_0 \right) d\rho, & \rho > t. \end{cases} \quad (4.17)$$

Очевидно, что во всей исследуемой области получим выражение вида:

$$\tilde{F}_{\text{част}}(\rho, t) = -\frac{iP}{2\pi c} \int_t^\rho \left(K_\nu(i\sqrt{i}\rho a) \int_t^\rho \rho_0 I_\nu(i\sqrt{i}\rho_0 a) d\rho_0 - \right. \\ \left. - I_\nu(i\sqrt{i}\rho a) \int_t^\rho \rho_0 K_\nu(i\sqrt{i}\rho_0 a) d\rho_0 \right) ds \cdot H(\rho - t). \quad (4.18)$$

В результате найдем следующее представление для общего решения неоднородного уравнения (4.1):

$$\tilde{F}(\rho, t) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \int I_\nu(i\sqrt{i}\rho a) d\rho + \tilde{C}_3 \int K_\nu(i\sqrt{i}\rho a) d\rho + \tilde{C}_4 \int \check{G}(\rho) d\rho + \tilde{F}_{\text{част}}(\rho, t). \quad (4.19)$$

При кривизне сферической оболочки вращения равной нулю (т. е. сферическая оболочка вырождается в круглую пластину) и отделении мнимой части общего решения уравнения (4.19) прогиб ортотропной пластины, находящейся под действием кольцевой сосредоточенной нагрузки P , при произвольных граничных условиях принимает вид:

$$w(\xi, \xi_0) = C_1 + C_2 \xi^{1+\nu} + C_3 \xi^{1-\nu} + C_4 \xi^2 + \\ + \frac{Pb^2}{4\pi\nu(\nu^2-1)\xi_0 D_1} [\nu \xi_0 (\xi_0^2 - \xi^2) + \xi_0^{2-\nu} \xi^{1+\nu} - \xi_0^{2+\nu} \xi^{1-\nu}] H(\xi - \xi_0); \quad \xi = \frac{\rho}{b}; \quad \xi_0 = \frac{t}{b}; \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (4.20)$$

который совпадает при $\xi_0 = \frac{t}{b} = 0$ с представлением, полученным в [13].

В случае приложения сосредоточенной нагрузки в полюсе сферической оболочки общее решение неоднородного уравнения (4.2) имеет вид (4.19) при $t = 0$.

Рассмотрим граничные условия, соответствующие скользящей заделке контура:

$$w = \frac{dw}{d\rho} = T_1 = 0 \quad \text{при } \rho = b, \quad (4.21)$$

которые можно сформулировать для искомой комплексной функции усилий следующим образом:

$$\tilde{F} = \frac{d\tilde{F}}{d\rho} = 0 \quad \text{при } \rho = b. \quad (4.22)$$

Кроме того, потребуем конечность искомых функций в центре:

$$\tilde{C}_3 = 0, \quad \tilde{C}_4 = 0. \quad (4.23)$$

Остальные постоянные определим из (4.21):

$$\tilde{C}_1 = \frac{iP}{2\pi c} \left[Q(b) - \frac{\check{G}(b)P_\nu(bai\sqrt{i})}{I_\nu(bai\sqrt{i})} \right]; \quad \tilde{C}_2 = \frac{iP\check{G}(b)}{2\pi c I_\nu(bai\sqrt{i})}; \\ Q(b) = \int \check{G}(\rho) d\rho \Big|_{\rho=b}; \quad P_\nu(bai\sqrt{i}) = \int I_\nu(\rho ai\sqrt{i}) d\rho \Big|_{\rho=b}. \quad (4.24)$$

В результате подстановки (4.24) в (4.19) получим следующее выражение:

$$\tilde{F}(\rho) = F - i\mu w = \frac{iP}{2\pi c} \left(Q(b) - \frac{\check{G}(b)P_\nu(bai\sqrt{i})}{I_\nu(bai\sqrt{i})} + \frac{\check{G}(b)}{I_\nu(bai\sqrt{i})} \int I_\nu(i\sqrt{i}\rho a) d\rho - \int \check{G}(\rho) d\rho \right); \\ w = \frac{1}{\mu} \text{Im}(\tilde{F}(\rho)). \quad (4.25)$$

В результате преобразований выражение для прогиба примет вид:

$$w = -\frac{P}{2\pi\mu c} \operatorname{Im} \left\{ i \left(\int_{\rho}^b \check{G}(\rho) d\rho + \frac{\check{G}(b)}{I_{\nu}(bai\sqrt{i})} \int_b^{\rho} I_{\nu}(i\sqrt{i}\rho a) d\rho \right) \right\}. \quad (4.26)$$

Входящая в (4.26) константа $\mu \cdot c = D_1$ — жесткость в меридиональном направлении.

Интегралы, входящие в (4.26), легко вычисляются через гипергеометрические функции.

Вводя обозначения $k = \frac{b^2}{Rh}$; $\xi = \frac{\rho}{b}$; $\bar{w} = \frac{w}{h}$; $\bar{P} = \frac{Pb^2}{E_1 h^4}$ и вычислив с помощью пакета символьной математики WolframMathematica [5; 6] входящие в (4.26) интегралы от гипергеометрических функций, которые также выражаются через гипергеометрические функции, получим выражение для распределения относительного прогиба $\bar{w}(\xi)$. Эпюра относительного прогиба под действием силы в полюсе на основе (4.26) вычисляется по следующей формуле:

$$\bar{w}(\xi) = -\frac{6(1-\nu_1\nu_2)\bar{P}}{\pi(n^2-1)} \operatorname{Re} \left\{ A \left[\xi^{n+1} {}_1F_2 \left(\frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2} (n+1); -\frac{i}{4} k_n^2 \xi^2 \right) - {}_1F_2 \left(\frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2} (n+1); -\frac{i}{4} k_n^2 \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[{}_2F_3 \left(1, 1; 2, \frac{3-n}{2}, \frac{3+n}{2}; -\frac{i}{4} k_n^2 \right) - \xi^2 {}_2F_3 \left(1, 1; 2, \frac{3-n}{2}, \frac{3+n}{2}; -\frac{i}{4} k_n^2 \xi^2 \right) \right] \right\}, \quad (4.26a)$$

где

$$A = \frac{a_1}{a_2}, \quad a_1 = \frac{k_n^n (1+i)^n 2^{(-3n/2)}}{\Gamma(n+1)} {}_1F_2 \left(1; \frac{3-n}{2}, \frac{3+n}{2}; -\frac{i}{4} k_n^2 \right), \quad a_2 = J_n(\sqrt{i} k_n).$$

Комплексные усилия и моменты могут быть найдены по формулам:

$$\tilde{T}_1 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \rho}; \quad \tilde{T}_2 = -\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \rho^2}; \quad \tilde{M}_1 = ic \left(\tilde{T}_2 - \nu_2 \tilde{T}_1 \right); \quad \tilde{M}_2 = ic \delta \left(\tilde{T}_1 - \nu_1 \tilde{T}_2 \right). \quad (4.27)$$

Подставив в (4.27) представление для комплексной функции усилий, получим:

$$\tilde{T}_1(\rho) = -\frac{iP}{2\pi c \rho} \left(\frac{\check{G}(b)}{I_{\nu}(bai\sqrt{i})} I_{\nu}(i\sqrt{i}\rho a) - \check{G}(\rho) \right); \\ \tilde{T}_2(\rho) = -\frac{iP}{2\pi c} \left(\frac{\check{G}(b)}{I_{\nu}(bai\sqrt{i})} \frac{dI_{\nu}(i\sqrt{i}\rho a)}{d\rho} - \frac{d\check{G}(\rho)}{d\rho} \right). \quad (4.28)$$

Осуществив отделение действительной и мнимой частей, получим:

$$M_1 = \operatorname{Re} \left(ic \left(\tilde{T}_2 - \nu_2 \tilde{T}_1 \right) \right); \quad M_2 = \operatorname{Re} \left(ic \delta \left(\tilde{T}_1 - \nu_1 \tilde{T}_2 \right) \right). \quad (4.29)$$

Введем в рассмотрение следующие безразмерные величины:

$$n = \frac{E_2}{E_1}; \quad k_n = \sqrt{k}^4 \sqrt{(1-\nu_1^2)n}. \quad (4.30)$$

Рассмотрим несколько композитных материалов (однонаправленные композиты на основе эпоксидной смолы) [14] с преобладающей жесткостью армирования волокон по радиусу:

- 1) углепластик (волокна AS);
- 2) стеклопластик (Е-волокна);
- 3) органопластик (кевлар-49);
- 4) углепластик (волокна IM6);
- 5) материал, по свойствам близкий к изотропному.

Механические характеристики приведенных материалов следующие:

- 1) $n = 0,064$, $\nu_1 = 0,3$, $\nu_2 = 0,019$;
- 2) $n = 0,235$, $\nu_1 = 0,26$, $\nu_2 = 0,061$;
- 3) $n = 0,072$, $\nu_1 = 0,33$, $\nu_2 = 0,024$;
- 4) $n = 0,056$, $\nu_1 = 0,32$, $\nu_2 = 0,018$;
- 5) $n = 0,98$, $\nu_1 = 0,3$, $\nu_2 = 0,294$.

Изменим направления армирования материалов. В этом случае необходимо заменить индексы $1 \leftrightarrow 2$.

В случае преобладающей жесткости армирования волокон по окружности получаем:

- 1) $n = 15,625$, $\nu_1 = 0,019$, $\nu_2 = 0,3$;
- 2) $n = 4,258$, $\nu_1 = 0,061$, $\nu_2 = 0,26$;
- 3) $n = 13,818$, $\nu_1 = 0,024$, $\nu_2 = 0,33$;
- 4) $n = 18,018$, $\nu_1 = 0,018$, $\nu_2 = 0,32$;
- 5) $n = 1,02$, $\nu_1 = 0,294$, $\nu_2 = 0,3$.

Исследуем распределения прогибов в пластинке (сферической оболочке с кривизной $k \rightarrow 0$) в зависимости от преобладающей жесткости волокон композитных материалов. Начнем со случая преобладающей жесткости волокон по радиусу. В табл. 4.1 приведены относительные прогибы в полюсе сферической оболочки $\bar{w}_{\max} = \frac{w(0)E_1 h^3}{R b^2}$ при $k \rightarrow 0$ для рассматриваемых материалов, вычисленные по формуле (4.26а).

Теперь рассмотрим случай преобладающей жесткости армирования волокон по окружности. В табл. 4.2 приведены относительные прогибы в полюсе сферической оболочки при $k \rightarrow 0$ для рассматриваемых материалов.

Таблица 4.1

Относительные прогибы в полюсе сферической оболочки при $k \rightarrow 0$ для рассматриваемых материалов с преобладающей жесткостью армирования волокон по радиусу

Table 4.1

Relative deflections at the pole of spherical shell at $k \rightarrow 0$ for considered materials with predominant hardness of fiber reinforcement along the radius

№ материала	n	$-\bar{w}_{\max}$	$-\bar{w}_{\max}$ изотропной пластинки
1	0,064	0,8386	$n = 1$
2	0,235	0,6163	$\bar{w} = \frac{3(1-\nu^2)}{4\pi}$ при $\nu = 0,3$
3	0,072	0,8238	
4	0,056	0,8523	
5	0,98	0,2221	0,2172

Таблица 4.2

Относительные прогибы в полюсе сферической оболочки при $k \rightarrow 0$ для рассматриваемых материалов с преобладающей жесткостью армирования волокон по окружности

Table 4.2

Relative deflections at the pole of a spherical shell at $k \rightarrow 0$ for the considered materials with a dominant stiffness fiber reinforcement along the radius

№ материала	n	$-\bar{w}_{\max}$	$-\bar{w}_{\max}$ изотропной пластинки
1	15,6	0,003435	$\bar{w} = \frac{3(1-\nu^2)}{4\pi}$ при $\nu = 0,3$
2	4,3	0,034000	
3	13,8	0,004315	
4	18,02	0,002625	
5	1,02	0,213300	
			0,2172

На рис. 4.2 пунктирной линией показана кривая распределения прогиба для материала, близкого к изотропному (материал № 5), а штрих-пунктирной — для материала № 2. Из рис. 4.2 следует, что для случая преобладающей жесткости армирования волокон, направленных по радиусу, наибольшую жесткость обеспечивает изотропный материал, а в случае криволинейной ортотропии — материал с максимальным n , то есть материал № 2.

На рис. 4.3 пунктирной линией показана кривая распределения прогиба для материала, близкого к изотропному (материал № 5), а непрерывная кривая с точками — для материала № 4. Из рис. 4.3 следует, что для случая преобладающей жесткости волокон, направленных по окружности, наибольшую жесткость обеспечивает криволинейно-ортотропный материал с максимальным n , то есть материал № 4.

В табл. 4.3 приведены результаты для оболочки при $k \neq 0$, вычисленные по формуле (4.26а) из материала № 5, близкого к изотропному, с преобладающей жесткостью армирования по радиусу в сравнении с результатами [15].

В таблице 4.4 приведены результаты для оболочки из материала № 5, близкого к изотропному, с преобладающей жесткостью армирования по окружности в сравнении с результатами [15].

Сравнение результатов в табл. 4.3 и 4.4 свидетельствует о достоверности формулы (4.26а).

На рис. 4.4 приведены графики распределения прогибов при $k = 10$ для материала № 2 при изменении направления армирования волокон. Непрерывная линия соответствует преобладающему армированию по радиусу, а пунктирная линия — по окружности.

Как и следовало ожидать, шпангоутное армирование улучшает жесткостные свойства конструкции в сравнении со стрингерным армированием.

На рис. 4.5 показано изменение максимального прогиба при смене направления армирования волокон для материала № 2 в зависимости от кривизны. Непрерывная линия соответствует преобладающему

армированию по радиусу, а пунктирная линия — по окружности. Видно, что в случае армирования по радиусу линия на рис. 4.5 является существенно нелинейной.

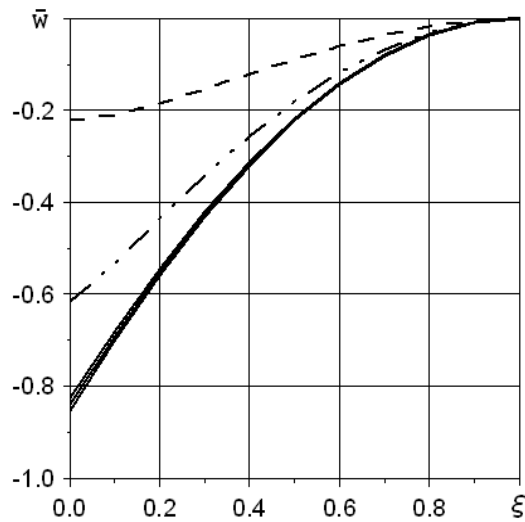


Рис. 4.2. Распределение относительного прогиба в полюсе сферической оболочки при $k \rightarrow 0$ для рассматриваемых материалов с преобладающей жесткостью армирования волокон по радиусу
Fig. 4.2. Relative deflection distribution in the pole of a spherical shell as $k \rightarrow 0$ for viewed materials with a predominant hardness of fiber reinforcement along the radius

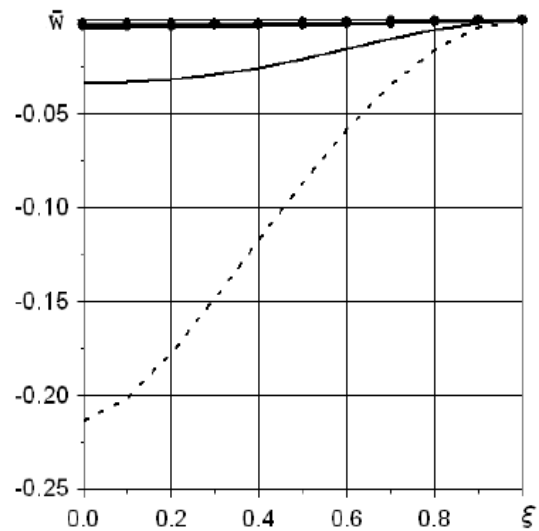


Рис. 4.3. Распределение относительного прогиба в полюсе сферической оболочки при $k \rightarrow 0$ для рассматриваемых материалов с преобладающей жесткостью армирования волокон по окружности
Fig. 4.3. Relative deflection distribution in the pole of a spherical shell as $k \rightarrow 0$ for viewed materials with a predominant hardness of fiber reinforcement around the circumference

Таблица 4.3

Прогибы в полюсе сферической оболочки при $k \neq 0$ для рассматриваемых материалов с преобладающей жесткостью армирования волокон по радиусу

Table 4.3

Deflections at the pole of a spherical shell at $k \neq 0$ for the considered materials with predominant stiffness of fiber reinforcement along the radius

$k = \frac{b^2}{Rh}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{P} = \frac{Pb^2}{E_1 h^4}$	0,375π					0,75π				
По предложенной методике при $n = 0,98$	0,250	0,221	0,187	0,155	0,128	0,214	0,182	0,156	0,137	0,121
Данные из [15] при $n = 1$	0,249	0,228	0,194	0,160	0,131	0,227	0,188	0,160	0,138	0,121

Таблица 4.4

Прогибы в полюсе сферической оболочки при $k \neq 0$ для рассматриваемых материалов с преобладающей жесткостью армирования волокон по окружности

Table 4.4

Deflections at the pole of a spherical shell at $k \neq 0$ for the considered materials with predominant stiffness of fiber reinforcement around the circumference

$k = \frac{b^2}{Rh}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{P} = \frac{Pb^2}{E_1 h^4}$	0,375π					0,75π				
По предложенной методике при $n = 1,02$	0,240	0,213	0,180	0,150	0,124	0,208	0,177	0,152	0,133	0,118
Данные из [15] при $n = 1$	0,249	0,228	0,194	0,160	0,131	0,227	0,188	0,160	0,138	0,121

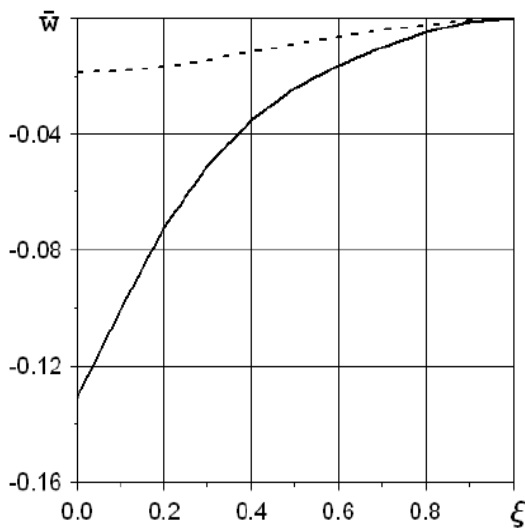


Рис. 4.4. Распределение относительных прогибов при $k = 10$ для материала № 2 при изменении направления армирования волокон
 Fig. 4.4. Relative deflection distribution at $k = 10$ for material No. 2 when changing the fiber reinforcement boards

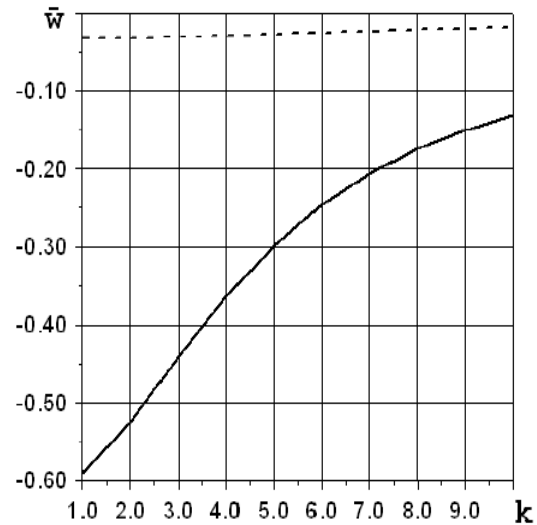


Рис. 4.5. Изменение максимального относительного прогиба при смене направления армирования волокон для материала № 2 в зависимости от кривизны
 Fig. 4.5. Change in the maximum relative deflection when changing the direction of fiber reinforcement for material No. 2 depending on the curvature

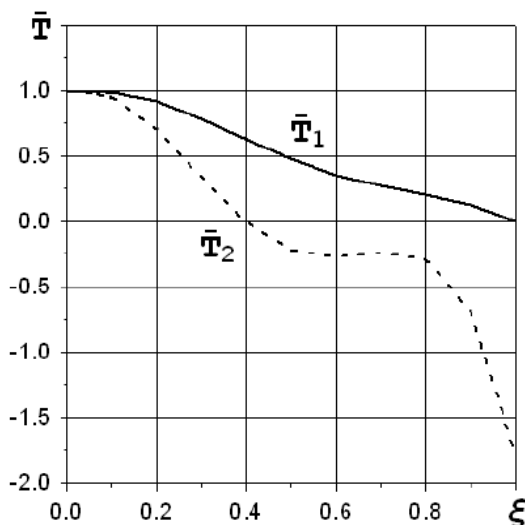


Рис. 4.6. Эпюры приведенных усилий в радиальном и окружном направлениях при $k = 10$ для материала № 2 (с преобладающей жесткостью армирования по окружности)
 Fig. 4.6. Diagrams of reduced forces in the radial and circumferential directions at $k = 10$ for material No. 2 (with the prevailing stiffness of the reinforcement along the circumference)

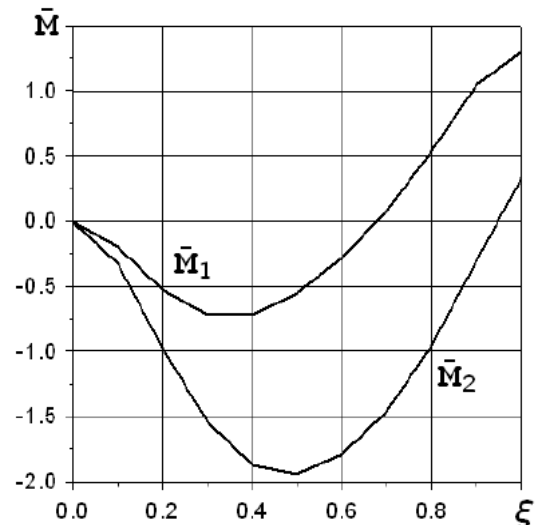


Рис. 4.7. Эпюры приведенных моментов в радиальном и окружном направлениях при $k = 10$ для материала № 2 (с преобладающей жесткостью армирования по окружности)
 Fig. 4.7. Diagrams of the reduced moments in the radial and circumferential directions at $k = 10$ for material No. 2 (with the prevailing stiffness of the reinforcement along the circumference)

Введем в рассмотрение безразмерные усилия и моменты

$$\bar{T}_i = \frac{2\pi c(n^2 - 1) T_i}{P}; \quad \bar{M}_i = \frac{2\pi(n^2 - 1) M_i}{P}; \quad i = 1, 2.$$

Для материала № 2 (с преобладающей жесткостью армирования по окружности) на рис. 4.6–4.7 построены эпюры усилий и моментов в радиальном и окружном направлениях при $k = 10$.

На рис. 4.8–4.9 для материала № 2 (с преобладающей жесткостью армирования по радиусу) построены эпюры усилий и моментов в радиальном и окружном направлениях при $k = 10$.

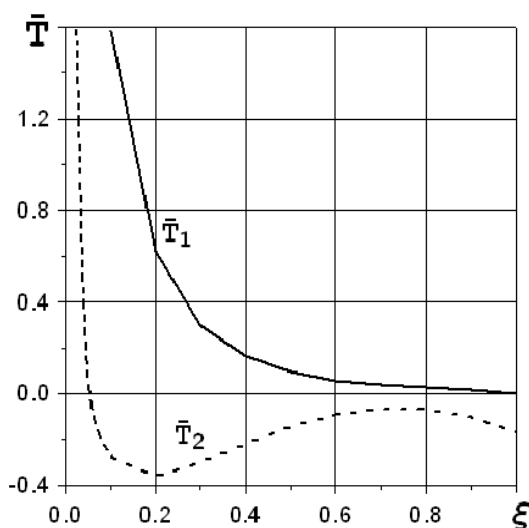


Рис. 4.8. Эпюры приведенных усилий в радиальном и окружном направлениях при $k = 10$ для материала № 2 (с преобладающей жесткостью армирования по радиусу)

Fig. 4.8. Diagrams of reduced forces in the radial and circumferential directions at $k = 10$ for material No. 2 (with the prevailing stiffness of the reinforcement along the radius)

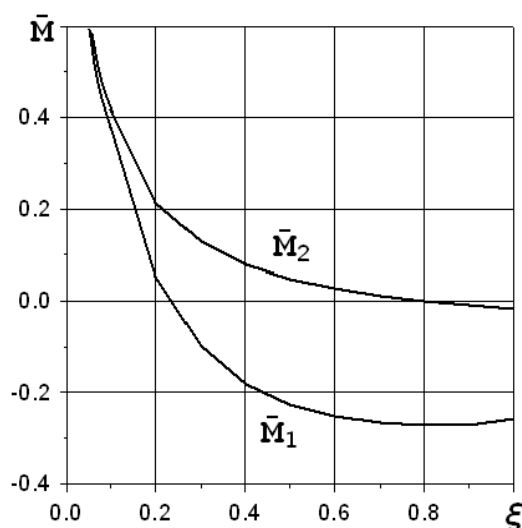


Рис. 4.9. Эпюры приведенных моментов в радиальном и окружном направлениях при $k = 10$ для материала № 2 (с преобладающей жесткостью армирования по радиусу)

Fig. 4.9. Diagrams of the reduced moments in the radial and circumferential directions at $k = 10$ for material No. 2 (with the prevailing stiffness of the reinforcement along the radius)

Из рис. 4.6–4.9 следует, что в оболочке с преобладающими жесткостными свойствами в меридиональном направлении над жесткостными свойствами в окружном направлении в полюсе наблюдается концентрация напряжений и величина их не ограничена; в обратном случае в окрестности приложенной нагрузки оболочка ведет себя как круглая криволинейно-ортотропная пластина, находящаяся в условиях чистого изгиба, причем «кольца жесткости», которыми обладает в этом случае оболочка, полностью гасят краевой эффект, не давая ему распространяться до полюса.

Выводы

В статье было продолжено исследование методики использования комплексного представления уравнений общей теории ортотропных оболочек, которая позволила в комплексной форме существенно сократить число неизвестных функций и порядок системы дифференциальных уравнений, даже несмотря на появление комплексно-сопряженных неизвестных функций. Несмотря на это, предложенная методика позволила более компактно представить уравнения, а в некоторых случаях появилась возможность даже вычислить комплексно-сопряженную функцию. В случае осесимметричной деформации эта функция обращается в нуль, а в других случаях влиянием комплексно-сопряженной функции можно пренебречь, поэтому для указанных случаев были исследованы пологие ортотропные сферические оболочки вращения под действием кольцевой нагрузки в условиях различного преобладания жесткости армирования волокон. В предельном случае были получены результаты и для изотропной оболочки.

Литература

- [1] Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Москва: Судпромгиз, 1962. 431 с. URL: <https://libcats.org/book/661745>.
- [2] Артюхин Ю.П. Расчет однослойных и многослойных ортотропных оболочек на локальные нагрузки // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во КГУ, 1966. Вып. 4. С. 91–110. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/kutpo593>.

- [3] Артюхин Ю.П., Великанов П.Г. Действие локальных нагрузок на ортотропную сферическую и коническую оболочки вращения // Аналитическая механика, устойчивость и управление движением: материалы Всероссийского семинара. Казань : Изд-во КГУ, 2008. С. 22-23. URL: https://repository.kpfu.ru/?p_id=9408#.
- [4] Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. Москва: Физматгиз, 1961. 384 с. URL: <https://libcats.org/book/438699>.
- [5] Артюхин Ю.П., Гурьянов Н.Г., Котляр Л.М. Система Математика 4.0 и ее приложения в механике: учеб. пособие. Казань: Казанское математическое общество. Изд-во КамПИ, 2002. 415 с. URL: https://repository.kpfu.ru/?p_id=53958.
- [6] Великанов П.Г. Основы работы в системе Mathematica: лабораторный практикум. Казань: Изд-во Казанского гос. техн. ун-та, 2010. 40 с. URL: https://elibs.kai.ru/_docs_file/806166/HTML/.
- [7] Артюхин Ю.П. Изгиб пологих ортотропных оболочек вращения силой, приложенной в полюсе // Исследования по теории пластин и оболочек, 1966. Вып. 5. С. 152-160. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/kutpo542>.
- [8] Бейтмен Г., Эрдеи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Москва: Наука, 1974. 295 с. URL: https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/BejtmEnErdeji_t2_1966ru.pdf.
- [9] Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. Москва: Иностран. лит., 1949. 779 с. URL: <http://ega-math.narod.ru/Books/Watson.htm>.
- [10] Снеддон И. Преобразования Фурье. Москва: Иностран. лит., 1955. 668 с. URL: <https://libcats.org/book/579038>.
- [11] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. Москва: Наука, 1971. 1108 с. URL: <http://www.vixri.ru/?p=991>.
- [12] Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Ортотропные пластины и пологие оболочки. Теория, методы решения краевых задач. Казань: КГУ, 2002. 112 с.
- [13] Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. Москва: ОГИЗ-Гостехиздат, 1947. 355 с. URL: <https://lib-bkm.ru/12625>.
- [14] Мэттьюз Ф., Роллингз Р. Композитные материалы. Механика и технология. Москва: Техносфера, 2004. 408 с. URL: <https://knigogid.ru/books/752928-kompozitnye-materialy-mehanika-i-tehnologiya>.
- [15] Корнишин М.С., Исанбаева Ф.С. Гибкие пластины и панели. Москва: Наука, 1968. 260 с.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-40-52

Submitted: 14.09.2022

Revised: 22.11.2022

Accepted: 05.12.2022

P.G. Velikanov

Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russian Federation;
Kazan National Research Technical University named after A.N.Tupolev-KAI, Kazan, Russian Federation
E-mail: pvelikanov@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0845-2880>

Y.P. Artyukhin

Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russian Federation
E-mail: ArtukhinYP@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6243-9145>

GENERAL THEORY OF ORTHOTROPIC SHELLS. PART II

ABSTRACT

Modern mechanical engineering sets the tasks of calculating thin-walled structures that simultaneously combine sometimes mutually exclusive properties: lightness and economy on the one hand and high strength and reliability on the other. In this regard, the use of orthotropic materials and plastics seems quite justified.

The article demonstrates the complex representation method of the equations of orthotropic shells general theory, which allowed in a complex form to significantly reduce the number of unknowns and the order of the system of differential equations. A feature of the proposed technique for orthotropic shells is the appearance of complex conjugate unknown functions. Despite this, the proposed technique allows for a more compact representation of the equations, and in some cases it is even possible to calculate a complex conjugate function. In the case of axisymmetric deformation, this function vanishes, and in other cases the influence of the complex conjugate function can be neglected.

Verification of the correctness of the proposed technique was demonstrated on a shallow orthotropic spherical shell of rotation under the action of a distributed load. In the limiting case, results were obtained for an isotropic shell as well.

Key words: mechanics; differential equations; orthotropic plates and shells; shallow shells of rotation; axisymmetric deformation; Bessel equation and functions; Lommel function; hypergeometric functions.

Citation. Velikanov P.G., Artyukhin Y.P. General theory of orthotropic shells. Part II. Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series, 2022, vol. 28, no.3–4, pp. 40–52. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-40-52>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Velikanov P.G., Artyukhin Y.P., 2022

Peter G. Velikanov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of Theoretical Mechanics, Kazan (Volga Region) Federal University, 18, Kremlevskaya Street, Kazan, 420008, Russian Federation; assistant professor of the Department of Jet Engines and Power Plants, Kazan National Research Technical University named after A.N.Tupolev-KAI, 10, K. Marx Street, Kazan, 420111, Russian Federation.

Yuri P. Artyukhin — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Theoretical Mechanics, Kazan (Volga Region) Federal University, 18, Kremlevskaya Street, Kazan, 420008, Russian Federation.

References

- [1] Novozhilov V.V. Theory of thin shells. Moscow: Sudpromgiz, 1962, 431 p. Available at: <https://libcats.org/book/661745>. (In Russ.)
- [2] Artyukhin Yu.P. Calculation of single-layer and multilayer orthotropic shells for local loads. *Issledovaniya po Teorii Plastin i Obolochek*, 1966, issue 4, pp. 91–110. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/kutpo593>. (In Russ.)
- [3] Artyukhin Y.P., Velikanov P.G. Effect of local loads on orthotropic spherical and conical shells of rotation. *Analytical mechanics, stability and motion control: materials of the all-Russian seminar*. Kazan: Izd-vo KGU, 2008, pp. 22–23. Available at: https://repository.kpfu.ru/?p_id=9408#. (In Russ.)
- [4] Ambartsumyan S.A. General theory of anisotropic shells. Moscow: Fizmatgiz, 1961, 384 p. Available at: <https://libcats.org/book/438699>. (In Russ.)
- [5] Artyukhin Y.P., Guryanov N.G., Kotlyar L.M. Mathematics 4.0 system and its applications in mechanics: textbook. Kazan: Kazanskoe matematicheskoe obshchestvo. Izd-vo KamPI, 2002, 415 p. Available at: https://repository.kpfu.ru/?p_id=53958. (In Russ.)
- [7] Velikanov P.G. Fundamentals of work in the Mathematica system: laboratory course. Kazan: Izd-vo Kazanskogo gos. tekhn. un-ta, 2010, 40 p. Available at: https://elibs.kai.ru/_docs_file/806166/HTML/. (In Russ.)
- [7] Artyukhin Yu.P. Bending of shallow orthotropic shells of revolution by a force applied at the pole. *Issledovaniya po Teorii Plastin i Obolochek*, 1966, issue 5, pp. 152–160. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/kutpo542>. (In Russ.)
- [8] Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. Volume 2. Moscow: Nauka, 1974, 295 p. Available at: https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/BejtmEnErdeji_t2_1966ru.pdf. (In Russ.)
- [9] Watson G.N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Part 1. Moscow: Inostr. lit-ra, 1949, 779 p. Available at: <http://ega-math.narod.ru/Books/Watson.htm>. (In Russ.)
- [10] Sneddon I. Fourier transforms. Moscow: Inostr. lit-ra, 1955, 668 p. Available at: <https://libcats.org/book/579038>. (In Russ.)
- [11] Gradstein I.S., Ryzhik I.M. Tables of integrals, sums of series and products. Moscow: Nauka, 1971, 1108 p. Available at: <http://www.vixri.ru/?p=991>. (In Russ.)
- [12] Guryanov N.G., Tyuleneva O.N. Orthotropic plates and flat shells. Theory, methods of solving boundary value problems. Kazan: KGU, 2002, 112 p. (In Russ.)
- [13] Lekhnitsky S.G. Anisotropic plates. Moscow: OGIZ-Gostekhizdat, 1947, 355 p. Available at: <https://lib-bkm.ru/12625>. (In Russ.)
- [10] Matthews F., Rollings R. Composite Materials. Mechanics and Technology. Moscow: Tekhnosfera, 2004, 408 p. Available at: <https://knigogid.ru/books/752928-kompozitnye-materialy-mehanika-i-tehnologiya>. (In Russ.)
- [11] Kornishin M.S., Isanbayeva F.S. Flexible plates and panels. Moscow: Nauka, 1968, 260 p. (In Russ.)



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-53-87

УДК 539.3

Дата: поступления статьи: 30.09.2022
после рецензирования: 16.11.2022
принятия статьи: 05.12.2022

С.А. Лычев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Российская Федерация
E-mail: lychevsa@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7590-1389>

К.Г. Койфман

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
г. Москва, Российская Федерация
E-mail: koifman.konstantin@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7891-9995>

ОТСЧЕТНАЯ ФОРМА ТЕЛ С КОНЕЧНЫМИ НЕСОВМЕСТНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ¹

АННОТАЦИЯ

В статье развиваются дифференциально-геометрические методы моделирования конечных несовместных деформаций гиперупругих твердых тел. Несовместность деформаций может быть вызвана, к примеру, неоднородными температурными полями и распределенными дефектами. Как следствие, возникают внутренние напряжения и искажение геометрической формы тела. Эти факторы определяют критические параметры современных высокоточных технологий, в частности, в технологиях аддитивного изготовления. В этой связи развитие методов их количественного описания является актуальной проблемой современной механики деформируемого твердого тела.

Применение методов дифференциальной геометрии основано на представлении тела в виде гладкого многообразия, снабженного метрикой и неевклидовой связностью. Такой подход позволяет интерпретировать тело как глобальную, свободную от напряжений форму и сформулировать физический отклик и материальные уравнения баланса относительно этой формы. В рамках геометрического метода деформации характеризуются вложениями неевклидовой формы в физическое пространство, которое по-прежнему считается евклидовым. Меры несовместности отождествляются с инвариантами аффинной связности — кручением, кривизной и неметричностью, а сама связность определяется типом физического процесса.

Ключевые слова: гиперупругость; несовместные деформации; остаточные напряжения; неевклидова геометрия; материальная метрика; материальная связность; кручение; кривизна; неметричность; метод подвижного репера.

Цитирование. Лычев С.А., Койфман К.Г. Отсчетная форма тел с конечными несовместными деформациями // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2022. Т. 28, № 3–4. С. 53–87. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-53-87>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Лычев С.А., Койфман К.Г., 2022

Сергей Александрович Лычев — доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории механики технологических процессов, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 119526, Российская Федерация, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1.

Константин Георгиевич Койфман — тьютор по математике, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 105005, Российская Федерация, г. Москва, 2-я Бауманская улица, д. 5.

¹Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00457).

Введение

В лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» Риман [1] впервые выдвинул идею n -мерного многообразия, снабженного метрическим тензором. Последний определяет на многообразии дифференциал расстояния между бесконечно близкими элементами, а также вводит на нем специфическое правило параллельного переноса. Спустя время, в конце XIX века, идея Римана нашла свое применение в физике и, в частности, в механике континуума. По-видимому, первым, кто применил неевклидову геометрию в теории упругости, был Бельтрами [2], который сформулировал линейные уравнения баланса в пространстве с неевклидовым метрическим тензором. Появление теории относительности инициировало дальнейшие исследования в механике континуума, в которых рассматривалось движение тела в плоском или искривленном пространстве-времени [3]. Следует отметить, что перенос классических положений механики континуума на релятивистский случай таит в себе ряд принципиальных трудностей, поскольку привычные понятия длины угла и времени зависят от наблюдателя. В частности, определение жесткого движения требует особого подхода, развитого в работах Борна [4; 5] и Герглотца [6] для случая специальной теории относительности и в работе Нордстрёма [7] для случая общей теории относительности. Таким образом, первоначально неевклидовой структурой снабжалось пространство, в котором наблюдалось движение деформируемого континуума.

Позже, в работах Билби [8] и Кондо [9–12] была предложена и реализована идея об использовании неевклидовой геометрии для моделирования нелинейно-упругого тела с остаточными напряжениями. Билби и Кондо предполагали физическое пространство евклидовым, а отсчетное состояние тела — неевклидовым. В последующих работах Нолла [13] и Вана [14] была построена математически строгая геометрическая теория тел с остаточными напряжениями, которая получила дальнейшее развитие в работах Можена [15], Марсдена [16] и Эпштейна [17; 18]. В настоящее время исследования, использующие неевклидово описание отсчетного состояния, образуют область, называемую геометрической механикой континуума. Современное состояние исследований в этом направлении отражено в работах зарубежных [19–22] и отечественных [23–26] школ.

Изучение астрофизических феноменов — аккреции массивных тел [27] и звездотрясений (starquakes) внешней оболочки нейтронных звезд [28] — привело к развитию релятивистской теории упругости, в которой как физическое пространство, так и отсчетное состояние моделируются неевклидовыми многообразиями [29; 30]. Причиной неевклидовости физического пространства являются наличие больших гравитирующих масс и необходимость в этой связи использовать положения общей теории относительности. Причиной же использования неевклидова отсчетного состояния является тот факт, что отсчетное состояние зависит от наблюдателя и то, что релятивистское упругое тело оказывается самонапряженным. В этом проявляется методологическое сходство релятивистской теории упругости и геометрической механики континуума.

Поскольку использование неевклидовых пространств для моделирования отсчетного состояния тела не является общепринятым в механике континуума, дадим необходимые комментарии. В классической теории упругости деформирование тела рассматривается относительно некоторого его привилегированного положения в физическом пространстве — отсчетной формы. Как правило, предполагается, что отсчетная форма состоит из представительных объемов, каждый из которых свободен от напряжений. В линейном приближении существование такой формы характеризуется условиями совместности Сен-Венана, а в нелинейном — равенством нулю тензора кривизны Римана, построенного относительно метрики, индуцированной на отсчетную форму из объемлющего евклидова пространства. Вместе с тем в начале XX века выяснилось, что отсчетная форма, свободная от напряжений, существует далеко не всегда. Теоретическое исследование условий совместности для многосвязных областей, проведенное Вайнгартеном [31] и Вольтерра [32], привело к примерам тел с остаточными напряжениями — дисторсиям Вольтерра.

Далее оказалось, что возникновение остаточных напряжений сопутствует реальному физическому процессу. Открытие периодической атомарной структуры кристаллических тел в 1912 году (эксперименты Лауэ) инициировало многочисленные исследования в физике кристаллов. Одной из проблем, над которой работали исследователи, являлось объяснение экспериментального значения предела текучести кристалла: теоретические вычисления, проведенные Френкелем [33] в 1926 году, дали значения предела текучести, существенно превышающие экспериментальные.

Для объяснения несовпадения теоретических вычислений с экспериментальными данными Орована [34], Тейлор [35; 36] и Поляни [37] в 1934 году независимо друг от друга предложили модель линейного кристаллического дефекта, называемого краевой дислокацией. Предположив, что каждый кристалл содержит большое количество дислокаций, Тейлор смог вычислить предел текучести как напряжение, необходимое для движения дислокации через упругое поле всех других дислокаций. Результат был в согласии с экспериментальными данными.

К середине XX века окончательно сформировалось представление о том, что тела с остаточными напряжениями существуют и предположение о существовании отсчетной формы, свободной от напряжений, является идеализацией. Одним из первых, кто указал на этот факт, был Эккарт [38]. Несколькоми годами позже Билби и Кондо предложили определять отсчетную форму в подходящем неевклидовом пространстве [8; 9]. В таком случае деформация интерпретируется как вложение неевклидова многообразия в евклидово физическое пространство — собственная деформация. Кондо показал, что такие собственные деформации полностью характеризуют поля дефектов как внутренних источников напряжений, которые, в свою очередь, могут быть определены правилом параллельного переноса в пространстве, вмещающем отсчетную форму. Они количественно характеризуются соответствующей кривизной и кручением аффинной связности.

В настоящей статье предлагается новый вариант построения неевклидовой отсчетной формы, который позволяет геометрически охарактеризовать несовместность деформаций несколькими альтернативными способами. Первый способ предполагает описание материального многообразия как риманова, кривизна связности на котором определяет меру несовместности деформаций. Второй способ задает на материальном многообразии плоское пространство с ненулевым кручением, инварианты которого также характеризуют меры несовместности деформаций. В рамках третьего способа несовместность определяется неметричностью пространства Вейля. Для задания специфической геометрии на материальном многообразии используются вычисления относительно некоторой напряженной промежуточной формы. Доказывается, что результат — связность и инварианты связности на материальном многообразии не зависят от выбора этой промежуточной формы.

В работе используются следующие обозначения. Символ $\text{Hom}(\mathcal{U}; \mathcal{V})$ обозначает векторное пространство всех линейных отображений $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, а символ $\text{End}(\mathcal{U}) := \text{Hom}(\mathcal{U}; \mathcal{U})$ — векторное пространство линейных операторов $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$. Пусть M — гладкое многообразие. Алгебра гладких функций $M \rightarrow \mathbb{R}$ на нем обозначается символом $C^\infty(M)$. Касательное пространство к M в точке p обозначается через $T_p M$ и в зависимости от ситуации рассматривается либо как класс эквивалентных кривых, либо как пространство дифференцирований скалярных функций. Кокасательное пространство, являющееся векторным пространством, дуальным к $T_p M$, обозначается символом $T_p^* M$. Символ $\text{Vec}(M)$ означает $C^\infty(M)$ -алгебру векторных полей на M . Если $E \rightarrow M$ — векторное расслоение, то $\text{Sec}(E)$ обозначает $C^\infty(M)$ -модуль всех его сечений (тензорных полей). Более подробно эти обозначения и связанная с ними техника изложены в руководствах [39–41].

Используется общее понятие структуры как упорядоченного набора, состоящего из множества — носителя структуры, и дополнительных элементов, характеризующих эту структуру. Таким образом, если X — множество, а Struct обозначает объекты, характеризующие структуру на X , то структура в целом записывается как (X, Struct) .

1. Тело и его формы

1.1. Физическое пространство

Геометрическая механика континуума основана на идее, что тело и физическое пространство могут быть формализованы в терминах гладких многообразий, снабженных специфическими метриками и аффинными связностями, а деформация — в виде композиции вложений тела в физическое пространство. Настоящая статья следует этой методологии. Для формализации процедуры построения неевклидовой отсчетной формы, являющейся основной целью настоящей работы, вначале уточним, что понимается под физическим пространством, вмещающим образы тела, и что понимается под самим телом.

Будем полагать, что $\mathcal{E}$ является евклидовым точечным пространством размерности 3, то есть структурой [42]

$$\mathcal{E} = (E, \mathcal{V}, \text{vec}, \cdot). \quad (1.1)$$

Здесь E — континуальное множество мест, $\mathcal{V} = (V, \mathbb{R}, +_V, \cdot_V)$ — трансляционное векторное пространство над $\mathbb{R}$, имеющее размерность 3, $\text{vec} : E \times E \rightarrow V$ — отображение, удовлетворяющее аксиомам:

(a) для любых точек $x, y, z \in E$ выполняется равенство

$$\text{vec}(x, y) + \text{vec}(y, z) = \text{vec}(x, z),$$

(b) для любой точки $x \in E$ и любого вектора $v \in \mathcal{V}$ существует единственная точка $y \in E$ такая, что $\text{vec}(x, y) = v$,

²В котором V — подлежащее множество, а $+_V : V \times V \rightarrow V$ и $\cdot_V : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ — операции сложения и умножения на скаляр соответственно.

$a(\cdot)$ — скалярное произведение на $\mathcal{V}$. Значение $\mathbf{v} = \text{vec}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ интерпретируется как вектор с началом в точке $\mathbf{x}$ и концом в точке $\mathbf{y}$.

Предположим, что фиксирован некоторый декартов репер $(\mathbf{o}, (\mathbf{i}_k)_{k=1}^3)$, где $\mathbf{o} \in \mathcal{E}$ — начало отсчета, а $(\mathbf{i}_k)_{k=1}^3$ — ортонормированный базис пространства $\mathcal{V}$. Тогда точке $\mathbf{o}$ соответствует поле радиус-векторов $\mathbf{p} : \mathbf{x} \mapsto \text{vec}(\mathbf{o}, \mathbf{x})$, а базис $(\mathbf{i}_k)_{k=1}^3$ позволяет определить координаты произвольной точки из E , которые полагаются равными координатам радиус-вектора этой точки.

Пара $(\mathbf{o}, (\mathbf{i}_k)_{k=1}^3)$ в дальнейшем ассоциируется с инерциальной системой отсчета (наличие абсолютного времени неявно предполагается) [43]. За счет операции сопоставления точкам их декартовых координат, осуществляемой парой $(\mathbf{o}, (\mathbf{i}_k)_{k=1}^3)$, на множестве E вводятся топология $\mathcal{T}_E$ и гладкая структура $\mathcal{D}_E$, индуцированные соответствующими топологией и атласом из $\mathbb{R}^3$. Тем самым приходим к структуре

$$\mathcal{E}_{\text{geom}} = (E, \mathcal{T}_E, \mathcal{D}_E, \mathbf{g}, \nabla, \epsilon) \quad (1.2)$$

трехмерного геометрического пространства над E . Здесь $\mathbf{g}$ — евклидова метрика, ∇ — евклидова связность, а ϵ — форма объема, согласованная с метрикой (тензор Леви-Чивита). Элементы $\mathbf{g}$, ∇ и ϵ структуры (1.2) выбраны раз и навсегда.

Структура (1.2) полностью определяется по структуре (1.1) и в этом смысле может быть названа производной по отношению к последней. Необходимость определения производной геометрической структуры связана с тем, что в дальнейшем предполагается рассматривать на E регионы и стирать с них геометрию, которая изначально индуцирована геометрией объемлющего пространства (1.2), для последующего определения на этих множествах геометрии более общего вида.

1.2. Тело и евклидовы формы

В рамках классической механики континуума под телом $\mathfrak{B}$ понимается гладкое многообразие меток, которые идентифицируют представительные объемы, наделенные дополнительными атрибутами — массой и зарядом [44; 45]. Поэтому $\mathfrak{B}$ является не просто чистым многообразием, а многообразием, снабженным некоторой мерой [46]. Вместе с тем, поскольку в настоящей работе рассматривается только кинематика самонапряженного тела, будем интерпретировать $\mathfrak{B}$ лишь как гладкое n -мерное многообразие, т. е. как структуру

$$\mathfrak{B} = (B, \mathcal{T}_B, \mathcal{D}_B), \quad (1.3)$$

в которой B — континуальное множество меток, $\mathcal{T}_B$ — топология на этом множестве [47, с. 20], а $\mathcal{D}_B$ — гладкая структура на B [39, с. 12–13]. Хотя в общем случае топология и гладкая структура на теле (1.3) могут быть произвольными, далее будем полагать, что они индуцированы топологией и гладкой структурой образа тела, реализованного в виде подмногообразия пространства (1.2). Заметим, что размерность тела n может принимать значения 1, 2 и 3. В соответствующем случае будем говорить о материальных кривых, материальных поверхностях и материальных телах. Для обозначения элементов $\mathfrak{B}$ используется фактурный шрифт: $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$.

Тело $\mathfrak{B}$ наблюдается лишь посредством *евклидовых форм*, то есть образов гладких вложений [39, с. 85] $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$ тела $\mathfrak{B}$ в евклидово физическое пространство $\mathcal{E}$. Прилагательное «евклидова» использовано здесь для того, чтобы подчеркнуть отличие этих образов тела от более общих, рассматриваемых в рамках неевклидовой геометрии. Следуя терминологии, принятой в механике континуума [44], любое вложение $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$ будем называть *конфигурацией*.

Каждая евклидова форма $\mathcal{S} = \varkappa(\mathfrak{B})$ рассматривается как некоторое подмножество физического многообразия $\mathcal{E}_{\text{geom}}$, из которого на $\mathcal{S}$ перенесены метрические свойства. В терминах структур последнее означает, что $\mathcal{S}$ является гладким вложенным n -мерным подмногообразием [39, с. 98] физического пространства $\mathcal{E}$ с индуцированной геометрией последнего:

$$\mathcal{S} = (S, \mathcal{T}_{E|S}, \mathcal{D}_{E|S}, \mathbf{g}|_S, \nabla|_S, \epsilon|_S), \quad (1.4)$$

где S — подлежащее множество формы, а вертикальная черта $\#|_S$ обозначает ограничение объекта $\#$ на множество S .

Элемент $\mathcal{T}_{E|S}$ структуры (1.4) является топологией на S , индуцированной из $\mathcal{E}_{\text{geom}}$ [47, с. 49], а класс $\mathcal{D}_{E|S}$ является гладкой структурой на S , порожденной атласом, состоящим из карт срезки (slice charts) [39, с. 101]. Поле $\mathbf{g}|_S$ определяет риманову метрику на S (в рамках классической дифференциальной геометрии ей соответствует первая основная фундаментальная форма) как обратный образ (pullback) [39, с. 320] $\mathbf{g}|_S := \iota_S^* \mathbf{g}$ физической метрики относительно канонической инъекции $\iota_S : S \hookrightarrow E$, определяемой формулой $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$. В свою очередь, $\nabla|_S$ есть связность Леви-Чивита [48, с. 122–123] на S , порожденная полем $\mathbf{g}|_S$. Наконец, поле $\epsilon|_S$ является формой объема на S , индуцированной формой объема ϵ физического пространства. Определение последнего поля довольно деликатно и зависит от размерности $n = \dim \mathfrak{B}$. Если $n = 3$, подобно физическому пространству, то многообразие $(S, \mathcal{T}_{E|S}, \mathcal{D}_{E|S})$

всегда ориентируемо, и его форма объема определяется через обратный образ $\epsilon|_S = \iota_S^* \epsilon$ [39, с. 383]. В случае же, когда $n < 3$, обратный образ 3-формы на n -мерное подмногообразие дает нуль-форму. Чтобы иметь возможность определить форму объема по римановой метрике [39, с. 389], необходимо наложить ограничение на тело $\mathfrak{B}$, потребовав, чтобы оно было ориентируемым многообразием. Тогда все его формы будут также ориентируемы. В дальнейшем это ограничение неявно подразумевается³.

Даже если размерность тела совпадает с размерностью физического пространства, то есть, когда $n = 3$, евклидова форма $\mathcal{S}$ может не совпадать со всем физическим пространством $\mathcal{E}$. Это означает, что соответствующая конфигурация κ не является обратимым отображением, поскольку не для каждого элемента $x \in \mathcal{E}$ имеется прообраз в $\mathfrak{B}$. Чтобы исправить ситуацию, достаточно воспользоваться отображением $\hat{\kappa} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{S}$, определенным равенством $\hat{\kappa}(\mathbf{p}) := \kappa(\mathbf{p})$, т. е. $\hat{\kappa}$ получено из κ сужением области прибытия на образ отображения. Действительно, это отображение является биекцией. Более того, оно является диффеоморфизмом.

Пусть $\kappa_R, \kappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$ — произвольные конфигурации, образами которых являются евклидовы формы $\mathcal{S}_R = \kappa_R(\mathfrak{B})$ и $\mathcal{S} = \kappa(\mathfrak{B})$. Определим отображения $\hat{\kappa}_R : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{S}_R$ и $\hat{\kappa} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{S}$. Тогда композиция $\gamma := \hat{\kappa} \circ \hat{\kappa}_R^{-1} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}$ характеризует переход от формы $\mathcal{S}_R$ к форме $\mathcal{S}$ и в этой связи называется *деформацией*. Соотношения между телом и его формами, конфигурациями и деформациями иллюстрируются на рис. 1.1.

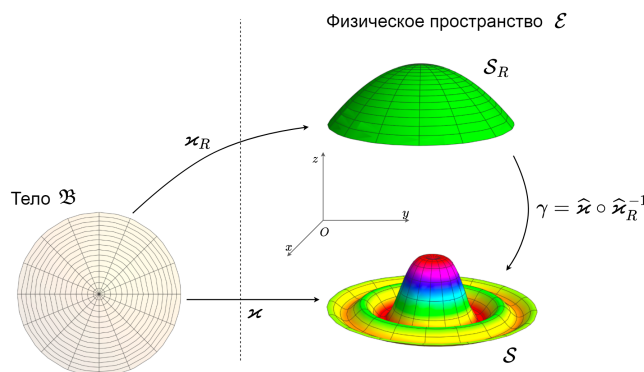


Рис. 1.1. Конфигурации и деформации
 Fig. 1.1. Configurations and deformations

1.3. Геометрическая структура над телом

Выбор привилегированной формы, геометрия которой в общем случае неевклидова, означает, что тело, будучи носителем этой формы, становится *геометрическим пространством*. Термин «геометрический» подчеркивает, что рассматриваются многообразия, на которых определены правило параллельного переноса и возможность измерять длины, т. е. все то, что позволяет использовать геометрический язык. Альтернативный термин — «пространство аффинной связности с метрикой» — в настоящей статье не употребляется в силу его громоздкости. Таким образом, структура (1.3) пополняется новыми элементами [26]:

$$\mathfrak{B}_{\text{geom}} = (B, \mathcal{T}_B, \mathcal{D}_B, \mathbf{G}, \nabla, \mu), \quad (1.5)$$

где $\mathbf{G}$ — риманова метрика, ∇ — аффинная связность, а μ — форма объема на B . Структура (1.5) является абстрактным представлением формы, свободной от напряжений; ее элементы $\mathbf{G}$, ∇ и μ зависят от физической природы несовместности деформаций. В частности, эти поля могут быть неравноправны: одни из них могут быть определены по другим либо по дополнительным физическим полям. Таблица 1.1 иллюстрирует эту ситуацию. Она содержит примеры геометрических пространств, обычно используемых в геометрической механике континуума [20; 21].

В табл. 1.1 столбец «Базисные поля» содержит поля, которые предписаны, исходя из тех или иных физических соображений. Эти поля не зависят от структуры геометрии. Последний столбец «Производные поля» содержит поля, которые получаются из базисных полей и, возможно, геометрических свойств гладких многообразий. Поясним соответствие между базисными и производными полями более подробно.

Если пространство риманово, то риманова метрика $\mathbf{G}$ является базисным полем. Другие поля из структуры (1.5) выражаются в терминах метрики: аффинная связность ∇ является связностью Леви-

³Тем самым исключаются многообразия вида ленты Мебиуса.

Таблица 1.1

Геометрические пространства над $\mathfrak{B}$

Table 1.1

Geometric spaces over $\mathfrak{B}$

Пространство	Структура	Базисн. поля	Произв. поля
Римана	$(B, \mathcal{D}_B, G, \nabla, dV)$	G	∇, dV
Вайценбока	$(B, \mathcal{D}_B, G, \nabla, \mu)$	H, μ	G, ∇
Вейля	$(B, \mathcal{D}_B, G, \nabla, \mu)$	G, ν, μ	∇

Чивита, а форма объема $\mu = dV$ определяется равенством $dV = \sqrt{\det G} dp^1 \wedge \dots \wedge dp^n$. В случае пространства Вайценбока заданы поле H обратимых линейных преобразований и форма объема μ . Тогда аффинная связность и метрика, являясь производными полями, порождаются полем H . Наконец, аффинная связность пространства Вейля определяется метрикой и 1-формой ν .

Геометрия пространств аффинной связности характеризуется тензорными полями кручения $\mathfrak{T}$, кривизны $\mathfrak{K}$ и неметричности $\mathfrak{Q}$. Их соответствия каждому пространству показаны в табл. 1.2, где символ $\circ$ указывает на то, что соответствующее поле всюду равно нулю, а $\bullet$ означает, что поле принимает ненулевые значения.

Таблица 1.2

Соответствие между геометриями и тензорными полями кручения, кривизны и неметричности

Table 1.2

Correspondence between geometries and tensorial fields of torsion, curvature and nonmetricity

Геометрия	Кручение ($\mathfrak{T}$)	Кривизна ($\mathfrak{K}$)	Неметричность ($\mathfrak{Q}$)
Римана	$\circ$	$\bullet$	$\circ$
Вайценбока	$\bullet$	$\circ$	$\circ$
Вейля	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$

1.4. Тело и неевклидовы формы

Рассмотрим более подробно выбор геометрии на теле $\mathfrak{B}$. Очевидным представляется способ, когда геометрия индуцируется из физического пространства $\mathcal{E}$ по некоторой конфигурации $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$ посредством обратных образов из евклидовой формы (1.4). В этом случае

$$G = \hat{\varkappa}^* g|_S, \quad \nabla = \hat{\varkappa}^* \nabla|_S, \quad \mu = \hat{\varkappa}^* \epsilon|_S,$$

где

$$\begin{aligned} G_p(u, v) &:= g(T_p \varkappa(u), T_p \varkappa(v)), \\ \nabla_u v &:= \hat{\varkappa}^* \{(\nabla|_S)_{\hat{\varkappa}_*(u)} \hat{\varkappa}_*(v)\}, \\ \mu_p(v_1, \dots, v_n) &:= \epsilon|_S(T_p \varkappa(v_1), \dots, T_p \varkappa(v_n)). \end{aligned}$$

Здесь $p \in \mathfrak{B}$ — произвольная точка тела, $u, v, v_1, \dots, v_n \in T_p \mathfrak{B}$ — произвольные касательные векторы [40, с. 22], $T_p \varkappa \in \text{Hom}(T_p \mathfrak{B}; \mathcal{V})$ — касательное отображение [40, с. 28] (используется отождествление $T_{\varkappa(p)} \mathcal{E} \cong \mathcal{V}$ по каноническому изоморфизму [39, с. 59]), а $\hat{\varkappa}^*$, $\hat{\varkappa}_*$ являются, соответственно, обратным и прямыми образами векторных полей [16, с. 67].

Рассмотренный выбор геометрии на теле соответствует случаю классической механики сплошной среды. В ней тело не играет никакой иной роли, кроме как множества меток, а геометрия на нем фиксирована и совпадает с геометрией любой из его евклидовых форм. Определим теперь неевклидову форму [25; 26]

$$S = (S, \mathcal{T}_S, \mathcal{D}_S, G_0, \nabla_0, \mu_0), \quad (1.6)$$

где $\mathcal{T}_S$ и $\mathcal{D}_S$ являются, соответственно, топологией и гладкой структурой на континуальном множестве S , а G_0, ∇_0, μ_0 — произвольными римановой метрикой, аффинной связностью и формой объема на n -мерном многообразии $(S, \mathcal{T}_S, \mathcal{D}_S)$. Хотя, с формальной точки зрения, множество S , топология $\mathcal{T}_S$ и гладкая структура $\mathcal{D}_S$ могут быть произвольными, следует иметь в виду, что каждая неевклидова форма может быть получена лишь по евклидовой (ведь только такая форма доступна наблюдениям). По этой причине ограничим общность рассуждений требованием, чтобы (см. формулу (1.4))

$$S \subset \mathcal{E}, \quad \mathcal{T}_S = \mathcal{T}_E|_S, \quad \text{и} \quad \mathcal{D}_S = \mathcal{D}_E|_S.$$

Геометрическая структура формы (1.6) может не иметь ничего общего с геометрией физического пространства. Для единообразия можно предположить, что любая такая форма является образом вложения $\varkappa_R : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}$, которое мы будем называть *обобщенной конфигурацией*, тела $\mathfrak{B}$ в некоторое неевклидово пространство $\mathbb{R}$, скажем, Римана. В этом случае тело может быть снабжено соответствующей геометрией по формулам

$$G = \widehat{\varkappa}_R^* G_0, \quad \nabla = \widehat{\varkappa}_R^* \nabla_0, \quad \mu = \widehat{\varkappa}_R^* \mu_0.$$

Геометрия формы S полностью определяется физической причиной несовместности, поэтому одно и то же многообразие меток может обладать разными геометриями. Как отмечалось ранее, тело становится геометрическим пространством и в рамках теоретических рассуждений само может быть рассмотрено как неевклидова форма [13; 14; 23].

Пусть $\varkappa_R : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}$ — обобщенная конфигурация и пусть $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$ — обычная конфигурация. Отображение $\lambda = \widehat{\varkappa} \circ \widehat{\varkappa}_R^{-1} : S \rightarrow \mathcal{S}$ из неевклидовой формы $S = \varkappa_R(\mathfrak{B})$ в евклидову форму $\mathcal{S} = \varkappa(\mathfrak{B})$ на уровне гладких структур⁴ неотлично от классической деформации. По этой причине будем называть λ *обобщенной деформацией*. Вместе с тем следует иметь в виду, что геометрические структуры над областью отправления и областью прибытия λ отличны друг от друга в целом. Это отличие проявляется в действиях обратного и прямого образов λ^* и λ_* . Действительно, первое отображение переводит элементы евклидовой структуры из формы $\mathcal{S}$ на форму S , а второе, наоборот, переводит элементы неевклидовой структуры из формы S на форму $\mathcal{S}$. Конечно, ограничиваясь сценой гладких многообразий, эти отображения всего лишь преобразуют поля.

В частном случае, когда геометрия формы S совпадает с евклидовой (или, если $n < 3$, — то с геометрией, индуцированной евклидовой геометрией объемлющего пространства), обобщенная деформация сводится к классической деформации. Следует лишь отождествить S с некоторым подмножеством евклидова пространства, а λ — с искажением соответствующей евклидовой формы в другую форму $\mathcal{S}$. В общем же случае, когда форма S неевклидова, можно вложить ее в евклидово пространство размерности большей, чем 3. Здесь под вложением понимается отображение в такое пространство, в котором геометрия S будет совпадать с геометрией, индуцированной из объемлющего пространства на образ вложения.

Изложенные геометрические идеи могут быть образно интерпретированы в случае размерности $n = 2$, которая соответствует криволинейной упругой мембране. Здесь возможны две точки зрения. Первая из них отвечает могущественному трехмерному наблюдателю в евклидовом пространстве: процесс деформации наблюдается как растяжение и изгиб мембраны в объемлющем пространстве. Вторая точка зрения более ограничительна. Следует отождествить себя с наблюдателем, пребывающим в двумерном мире с неевклидовой геометрией, образованной криволинейной формой мембраны. Геометрически это означает, что такой наблюдатель чувствует лишь внутреннюю геометрию поверхности, ассоциированной с мембраной. Именно второй подход позволяет дать описание «чистой» деформации, отбросив те «фиктивные» деформации, которые не влияют на состояние тела.

1.5. Пример неевклидовой формы

Проиллюстрируем геометрические идеи на частном примере, основанном на решении задачи об осесимметричной конечной деформации гиперупругой мембраны [49]. Рисунок 1.2 содержит некоторые результаты численных расчетов с использованием этого решения. Тело $\mathfrak{B}$ изображено в центре нижней части рисунка как открытый диск на евклидовой плоскости с нанесенной на нем координатной сеткой. Этим иллюстрируется, что тело имеет лишь структуру гладкого многообразия и что в рассматриваемом случае эта структура совместна с евклидовой. Физическое пространство, изображенное в правой верхней части рисунка, является двумерным евклидовым многообразием. Оно содержит две плоские евклидовы формы S_1 и S_2 , которые самонапряжены (как и любые другие). Эти формы ощущаются двумерным *физическим* наблюдателем.

Неевклидова отсчетная форма S_R тела, в которой все представительные объемы находятся в натуральном (т. е. в свободном от напряжений) состоянии, изображена в виде полусферы в левой верхней части рисунка. На нее нанесена сферическая сетка, и форма в целом помещена на сферу, представляющую сферическую (риманову) геометрию пространства, содержащего неевклидову форму. Такой образ может ощущаться трехмерным наблюдателем.

Изменение цветовых оттенков в плоскостях форм S_1 и S_2 показывает распределение накопленной упругой энергии, связанной с частными вложениями отсчетной формы в физическую плоскость. Все, что может увидеть двумерный физический наблюдатель, — это деформация $\gamma : S_1 \rightarrow S_2$ одной

⁴Можно представить себе, что у наблюдателя имеются различные «очки», которые позволяют акцентировать внимание на тех или иных подструктурах геометрического пространства. Самые слабые очки позволяют различать лишь гладкие структуры, а самые сильные — всю структуру в целом.

самонапряженной формы в другую. Для иллюстрации самонапряженной природы форм на плоскостях, перпендикулярных к ним, построены графики с распределениями главных напряжений Коши, T_1 , T_2 и накопленной упругой энергии W .

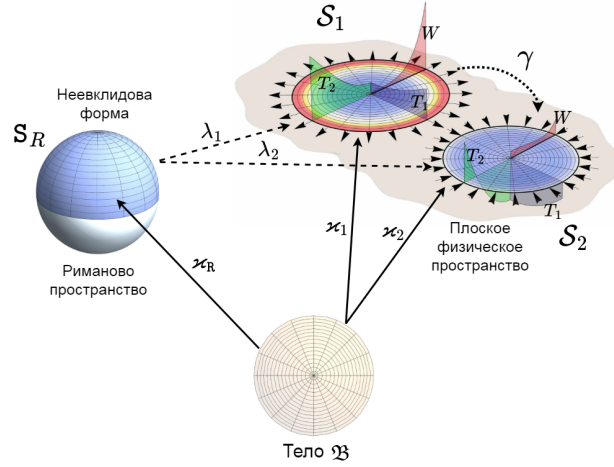


Рис. 1.2. Вложения неевклидовой отсчетной формы в плоское физическое пространство
 Fig. 1.2. Embeddings of non-Euclidean reference shape into planar physical space

Рисунок 1.2 основан на вычислениях, проведенных в соответствии со статьей [49]. Мембрана, отсчетная форма которой представляет собой полусферу, растягивается и уплотняется. Плотность упругой энергии мембраны полагается равной

$$W = W(\varphi), \quad W = \left(\lambda^2 + \mu^2 + \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} - 3 \right) + \alpha \left(\lambda^2 \mu^2 + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} - 3 \right),$$

что соответствует материалу Муни. Здесь функции $\varphi \mapsto \lambda(\varphi)$, $\varphi \mapsto \mu(\varphi)$ являются главными растяжениями, а α — материальной константой. Независимая переменная φ соответствует азимутальному углу. Результаты напряжений представлены выражениями (соответственно, радиальная и окружная компоненты напряжений)

$$T_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{1}{\lambda^3 \mu^3} \right) (1 + \alpha \mu^2), \quad T_2 = \left(\frac{\mu}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^3 \mu^3} \right) (1 + \alpha \lambda^2).$$

Замечание 1. Функции $\varphi \mapsto \lambda(\varphi)$ и $\varphi \mapsto \mu(\varphi)$ являются решениями системы двух нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{\lambda^2(\mu^2 - \lambda^2)(\lambda^2 \mu^2 + \alpha) + \lambda(\lambda - \mu \cos \varphi)(\lambda^4 \mu^2 - 3 - \alpha \mu^2(\lambda^4 \mu^2 + 1))}{\mu \sin \varphi (\lambda^4 \mu^2 + 3)(1 + \alpha \mu^2)}, \\ \mu' &= \frac{\lambda - \mu \cos \varphi}{\sin \varphi} \end{aligned}$$

с начальными условиями $\lambda(0) = \lambda_0$ и $\mu(0) = \mu_0$.

2. Синтезирование неевклидовой отсчетной формы

2.1. Гипотеза о локальной разгрузке

Натуральное состояние. Перейдем теперь к реализации идеи неевклидовой отсчетной формы. Для этого, в первую очередь, следует уточнить, что понимается под представительным объемом и его натуральным состоянием.

Пусть $\mathcal{S}_R$ — некоторая форма n -мерного тела $\mathfrak{B}$ ($n = 1, 2, 3$), наблюдаемая в эксперименте. Ее точки будем обозначать прописными символами X , Y и т. д. Будем полагать, что при $n < 3$ на форме $\mathcal{S}_R$ задана параметризация (например, для формы, топологически эквивалентной сфере, такая параметризация может быть задана с помощью азимутального и полярного углов). Предполагается, что материал тела простой и гиперупругий [44], т. е. отклик тела на деформацию $\gamma : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}$ в точке $X \in \mathcal{S}_R$ определяется значением плотности упругой энергии

$$w = W(X, \mathbf{F}_X; \mathbf{G}_R, \mathbf{G}). \quad (2.1)$$

Здесь $F_X = T_X \gamma \in \text{Hom}(T_X \mathcal{S}_R; T_{\gamma(X)} \mathcal{S})$ — касательное отображение [40, с. 28], которое, в соответствии с классическим аналогом, будем называть градиентом деформации⁵ в точке X , а G_R и G — метрические тензоры на формах $\mathcal{S}_R$ и $\mathcal{S}$, индуцированные метрикой физического пространства g на них. Представление (2.1) плотности упругой энергии является наиболее общим и предполагает независимую параметризацию отсчетной и актуальной форм. Возможны следующие частные случаи. 1. Параметризации воспроизводят координаты физического пространства. В этом случае $G_R = G = g$, а координатное представление отображения $T\gamma$ в точке задается некоторой числовой матрицей общего вида. 2. Параметризации согласованы таким образом, что координатное представление $T\gamma$ в любой точке совпадает с единичной матрицей. В последнем случае локальные базисы координатных представлений называются векторными базисами [50]. В дальнейшем зависимости от G_R и G не будут указаны явно.

Соотношение (2.1) задает плотность упругой энергии, т. е. энергию, отнесенную к единице объема формы $\mathcal{S}_R$. Однако само понятие единицы объема требует уточнений. Несмотря на то что с точки зрения математического формализма здесь можно говорить об инфинитезимальном элементе объема, физически мы не можем допустить возможность выбора сколь угодно малого элемента. Для выхода из этого противоречия мы принимаем гипотезу локального термостатического состояния [51], согласно которой представительный объем достаточно мал для того, чтобы считать его инфинитезимальным с точки зрения макроскопического описания, но в то же время достаточно велик для того, чтобы полагать его находящимся в состоянии термостатического равновесия. Принимая эту гипотезу, мы можем локально интерпретировать деформацию как линейное преобразование между соответствующими касательными слоями отсчетной и актуальной форм, то есть как касательное отображение $T_X \gamma$.

Под натуральным состоянием понимается некоторое привилегированное физическое состояние представительного объема. Свободное от напряжений состояние, когда тензор напряжений Коши равен нулю в рассматриваемой точке, может служить примером. С формальной точки зрения предполагается, что натуральное состояние характеризуется некоторым тензором S второго ранга.

Скажем, что деформация $\gamma^{(X_0)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}^{(X_0)}$ преобразует представительный объем, окружающий точку $X_0 \in \mathcal{S}_R$, в *натуральное* (или *единообразное*) *состояние*, если

$$\left. \frac{\partial W(X, F)}{\partial F} \right|_{F=T_Y \gamma^{(X_0)}|_{Y=X_0}} = S.$$

Используя уточненное понятие натурального состояния, теперь можно сформулировать гипотезу, на которой основана классическая механика деформируемого твердого тела: существует деформация $\gamma_0 : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}_0$ такая, что представительный объем, окружающий каждую точку $X \in \mathcal{S}_R$, преобразуется в натуральное состояние, представленное тензором S (одного для всех точек), то есть,

$$\forall X \in \mathcal{S}_R : \left. \frac{\partial W(X, F)}{\partial F} \right|_{F=T_X \gamma_0} = S.$$

Таким образом, евклидова форма $\mathcal{S}_0$ состоит из представительных объемов, каждый из которых находится в натуральном состоянии. Это — глобальная натуральная форма.

Формулировка гипотезы о локальной разгрузке. Заменим классическую гипотезу о существовании глобального натурального состояния гипотезой, которую будем называть *гипотезой локальной разгрузки* [24; 26]. Пусть S — тензор второго ранга, определяющий натуральное состояние представительного объема. Будем полагать, что существует семейство $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ деформаций $\gamma^{(X)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}^{(X)}$, каждая из которых, $\gamma^{(X)}$, преобразует представительный объем, окружающий точку X , в натуральное состояние, то есть

$$\forall X \in \mathcal{S}_R : \left. \frac{\partial W(X, F)}{\partial F} \right|_{F=T_Y \gamma^{(X)}|_{Y=X}} = S.$$

С экспериментальной точки зрения принятая гипотеза представляется вполне естественной: можно осуществить деформирование тестового образца таким образом, чтобы инфинитезимальная окрестность любой его фиксированной точки оказалась свободной от напряжений. Разумеется, для каждой точки нужно подобрать свою деформацию.

Гипотеза локальной разгрузки иллюстрируется на рис. 2.1 для некоторых трех точек X_1, X_2 и X_3 из формы $\mathcal{S}_R$. Предполагается, что тело является трехмерным многообразием. Ячейки каждого региона изображают представительные объемы; более темные соответствуют представительным объемам в натуральном состоянии. Отображения $\varkappa^{(X_i)} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}^{(X_i)}$, и $\gamma^{(X_i)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}^{(X_i)}$, $i = 1, 2, 3$, являются, соответственно, конфигурациями и деформациями.

⁵Если $n = 3$, то в силу естественных отождествлений $T_X \mathcal{S}_R \cong \mathcal{V}$ и $T_{\gamma(X)} \mathcal{S} \cong \mathcal{V}$ можно рассматривать F_X как линейное отображение $F_X \in \text{End}(\mathcal{V})$, соответствующее классическому градиенту деформации, то есть $F_X = \gamma'(X)$.

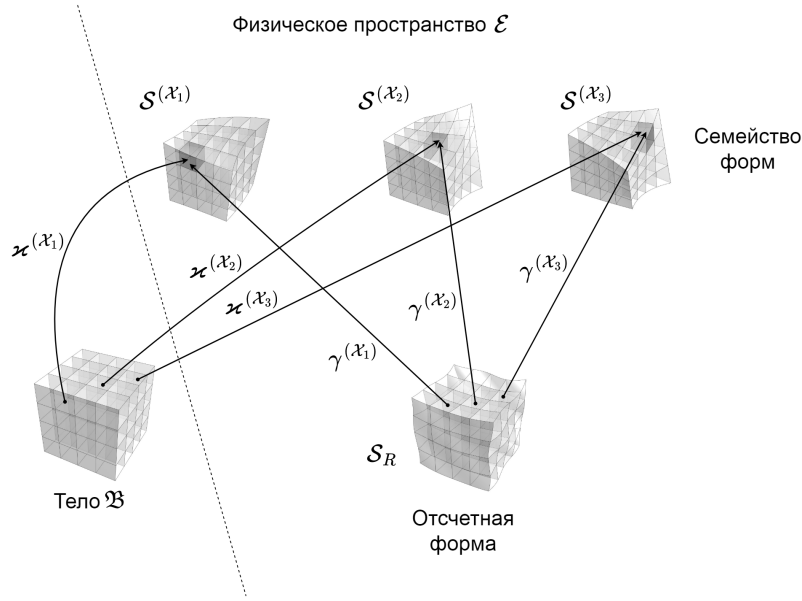


Рис. 2.1. Семейство локально-натуральных форм
 Fig. 2.1. Family of locally natural shapes

Для каждой точки $X \in S_R$ деформация $\gamma^{(X)} : S_R \rightarrow S^{(X)}$ определяет касательное отображение $\mathbf{F}^{(X)} = T\gamma^{(X)} : TS_R \rightarrow TS^{(X)}$. Если $Y \in S_R$ — некоторая точка, которая может не совпадать с X , то обратимое линейное отображение

$$\mathbf{F}^{(X)}|_Y = T_Y \gamma^{(X)} \in \text{Hom}(T_Y S_R; T_{\gamma^{(X)}(Y)} S^{(X)})$$

преобразует представительный объем, окружающий эту точку, в некоторое состояние. Заметим, что последнее не обязательно является натуральным. Вместе с тем, если $Y = X$, то отображение $\mathbf{F}^{(X)}|_{Y=X}$ преобразует представительный объем $T_X S_R$ в соответствующий объем, содержащийся в форме $S^{(X)}$, который на этот раз будет в натуральном состоянии.

Поле локальных деформаций. Предположим, что тело $\mathfrak{B}$ материально единообразно, то есть состоит из представительных объемов с одинаковыми физическими свойствами [13]. Последнее означает, что, будучи извлеченным из состава тела и приведенным в натуральное состояние, каждый такой представительный объем даст один и тот же отклик на одну и ту же деформацию. Общий для всех образ представительного объема в натуральном состоянии, следуя [18], назовем *архетипом*.

Для математической формализации архетипа ассоциируем с ним фиксированное семейство $(\mathbf{c}_A)_{A=1}^n$ попарно ортогональных векторов единичной длины. Здесь $n = \dim \mathfrak{B}$. С физической точки зрения элементы этого семейства определяют кристаллографические направления решетки идеального кристалла. Тогда прообраз семейства $(\mathbf{c}_A)_{A=1}^n$ в произвольно выделенном представительном объеме, находящемся в составе наблюдаемой формы S_R , будет некоторым семейством $(\mathbf{z}_A|_X)_{A=1}^n$, определяющим направления искаженной решетки кристалла. Здесь X — метка рассматриваемого представительного объема.

Преобразование $(\mathbf{z}_A|_X)_{A=1}^n \mapsto (\mathbf{c}_A)_{A=1}^n$ определяет деформацию представительного объема, переводящую его из текущего состояния в натуральное. Поскольку каждое из семейств $(\mathbf{c}_A)_{A=1}^n, (\mathbf{z}_A|_X)_{A=1}^n$ находится в векторном пространстве $\mathcal{V}$, то эту деформацию можно распространить на однозначно определенное линейное отображение $\mathbf{H}_X$, переводящее линейную оболочку, порождаемую репером $(\mathbf{z}_A|_X)_{A=1}^n$, в линейную оболочку, порождаемую репером $(\mathbf{c}_A)_{A=1}^n$. Первая линейная оболочка есть всего лишь касательное пространство $T_X S_R$. Для второй линейной оболочки будем использовать обозначение $\mathcal{U}$. Если через $\mathbf{g}_\mathcal{U}$ обозначить сужение евклидовой метрики $\mathbf{g}$ на $\mathcal{U}$, то окончательно под архетипом будем понимать евклидово векторное пространство $(\mathcal{U}, \mathbf{g}_\mathcal{U})$, где

$$\mathcal{U} \subset \mathcal{V} \quad \text{и} \quad \mathbf{g}_\mathcal{U} := \mathbf{g}|_\mathcal{U}.$$

Соответствующее линейное отображение $\mathbf{H}_X \in \text{Hom}(T_X S_R; \mathcal{U})$, в свою очередь, будем называть *локальной деформацией*.

Гипотезу локальной разгрузки в рамках свойства материального единообразия следует дополнить предположением, что для каждой точки $X \in S_R$ евклидово пространство $(T_{\gamma^{(X)}(X)} S^{(X)}, \mathbf{g}|_{S^{(X)}})$ *канониче-*

ски изометрично⁶ пространству $(\mathcal{U}, g_{\mathcal{U}})$. Производя, в соответствии с этим предположением, для каждой точки $X \in \mathcal{S}_R$ отождествление $T_{\gamma(X)(X)}\mathcal{S}^{(X)} \equiv \mathcal{U}$, приходим к линейному отображению

$$\mathbf{H}_X := \mathbf{F}^{(X)}|_{Y=X} \in \text{Hom}(T_X\mathcal{S}_R; \mathcal{U}), \quad (2.2)$$

которое представляет локальную деформацию. По построению, обратимое линейное отображение $\mathbf{H}_X$ преобразует представительный объем, окружающий точку X , в натуральное состояние.

В свою очередь, по отображениям $\mathbf{H}_X$ синтезируем глобальное поле следующим образом. Совместно с касательным расслоением $T\mathcal{S}_R$ определим тривиальное векторное расслоение над $\mathcal{S}_R$, типовым слоем которого будет $\mathcal{U}$, и обозначим это расслоение символом $T(\mathcal{S}_R, \mathcal{U})$. Таким образом, по построению $T(\mathcal{S}_R, \mathcal{U}) := \mathcal{S}_R \times \mathcal{U}$. Теперь определим новое отображение:

$$\mathbf{H} : T\mathcal{S}_R \rightarrow T(\mathcal{S}_R, \mathcal{U}), \quad \mathbf{H}(X, v) := (X, \mathbf{H}_X v). \quad (2.3)$$

Предполагается, что полученное отображение (2.3) гладко как отображение между многообразиями. В таком случае, согласно положениям общей теории векторных расслоений, оно является гомоморфизмом векторных расслоений [39, с. 261] над $\mathcal{S}_R$. Соответствующее отображение между базами этих расслоений является тождественным отображением. Будем называть отображение $\mathbf{H}$ *полем локальных деформаций* [26].

Если семейство $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ можно выбрать таким образом, что оно состоит из одного элемента $\gamma_0 : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}_0$, то образ $\gamma_0(\mathcal{S}_R)$ является глобальной натуральной формой тела $\mathfrak{B}$. В этом случае отображение $\mathbf{H}_X$ может быть отождествлено с касательным отображением $T_X\gamma_0$ для каждой точки $X \in \mathcal{S}_R$ и локальные деформации называются *совместными*. В противном случае, когда семейство деформаций не сводится к одному элементу, локальные деформации называются *несовместными*, то есть линейное отображение $\mathbf{H}_X$ не может быть выражено как касательное отображение к некоторой деформации, единой для всех X [13].

Замечание 2. Тот факт, что расслоение $T(\mathcal{S}_R, \mathcal{U})$ было выбрано тривиальным (т. е. тотальное пространство — цилиндр), а отображение $\mathbf{H}$ было определено формулой (2.3), несколько не умаляет общность дальнейших рассуждений, поскольку в них фигурируют лишь локальные деформации в точке.

Представления поля локальных деформаций. Поле локальных деформаций $\mathbf{H}$ имеет ряд альтернативных представлений. Действительно, во-первых, отображение $\mathbf{H}$, будучи синтезированным по линейным отображениям $\mathbf{H}_X \in \text{Hom}(T_X\mathcal{S}_R; \mathcal{U})$, индуцирует семейство $\{\mathbf{H}_X\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ линейных трансформаций. Предположим, в частности, что $n = 3$. Тогда $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ и $T_X\mathcal{S}_R \cong \mathcal{V}$ (канонический изоморфизм). По этой причине $\mathbf{H}_X \in \text{End}(\mathcal{V})$, и семейство $\{\mathbf{H}_X\}_{X \in \mathcal{S}_R}$, в свою очередь, сводится к гладкому полю $\mathbf{H} : \mathcal{S}_R \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$ линейных преобразований. В таком виде $\mathbf{H}$ используется в классической теории дефектов [52].

Пусть теперь $(X^A)_{A=1}^n$ — локальные координаты на многообразии $\mathcal{S}_R$ и пусть $(e_A)_{A=1}^n$ — некоторый базис $\mathcal{U}$. Тогда линейное отображение $\mathbf{H}_X$ имеет следующее диадное представление:

$$\mathbf{H}_X = H^A_B e_A \otimes dX^B|_X, \quad (2.4)$$

где $(dX^A)_{A=1}^n$ — поле координатных кореперов. Последнее представление может быть записано в следующей краткой форме:

$$\mathbf{H}_X = e_A \otimes H_X^A,$$

в которой

$$H_X^A = H^A_B dX^B|_X, \quad A = 1, \dots, n,$$

— совокупность 1-форм. Это означает, что вместо отображения (2.3) можно рассматривать n гладких полей 1-форм H^A , $A = 1, \dots, n$. Если базис $(e_A)_{A=1}^n$ фиксирован (например, соответствует положению кристаллографических осей в натуральном состоянии), то эти поля позволяют однозначно восстановить отображение $\mathbf{H}$.

Замечание об условиях совместности. С использованием дифференциальных форм совместность локальных деформаций сводится к следующему условию: должны существовать n гладких скалярных функций $\gamma^A : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathbb{R}$, $A = 1, \dots, n$, таких, что

$$H^A = d\gamma^A, \quad A = 1, \dots, n.$$

Здесь d — внешний дифференциал [39, с. 365]. Таким образом, необходимым (а в случае, когда форма $\mathcal{S}_R$ односвязна) и достаточным условием совместности деформаций являются равенства

$$dH^A = 0, \quad A = 1, \dots, n, \quad (2.5)$$

⁶То есть между этими пространствами существует биекция, не зависящая ни от какого выбора базиса, которая является изоморфизмом векторных пространств, сохраняющим скалярное произведение.

которым, в случае $n = 3$, соответствует классическое условие

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0}.$$

В общем случае, когда отсчетная форма неоднозначна (например, является полым шаром), достаточные условия могут быть также сформулированы, но равенств (2.5) уже недостаточно. Необходимо привлекать методы алгебраической топологии, что сделано, например, в работе [53].

2.2. Материальная метрика и связность

Стирание евклидовой геометрии из формы. Пусть поле (2.3) локальных деформаций известно. Тогда вместо использования континуального семейства $\{S^{(X)}\}_{X \in S_R}$ локально единообразных форм можно синтезировать новую глобально единообразную форму с неевклидовой геометрией. Для этого будем исходить из формы S_R и первым шагом «сотрем» с нее геометрию. Полученное многообразие будет обозначаться через M_R , то есть $M_R = (S_R, \mathcal{T}_E|_{S_R}, \mathcal{D}_E|_{S_R})$. В таком случае точки формы S_R становятся всего лишь точками многообразия и по этой причине, чтобы отличать многообразие M_R от геометрического пространства S_R , будем обозначать точки M_R символами вида X , Y и Z . Отличие структуры S_R от M_R можно подчеркнуть в явном виде, определив отображение (каноническую инъекцию) $\iota_{M_R} : M_R \hookrightarrow \mathcal{E}$, $X \mapsto X$. Здесь X обозначает точку из M_R , а символ X , обозначающий элемент S_R , представляет точно такую же точку, но рассматриваемую в пространстве $\mathcal{E}$.

После «стирания» геометрии с формы S_R касательные пространства к ней также изменяют свои атрибуты. Действительно, если $T_X S_R$ — касательное пространство к S_R , то оно автоматически снабжается скалярным произведением, индуцированным из евклидова векторного пространства $\mathcal{V}$, и, таким образом, рассматривается как подпространство последнего. Вместе с тем касательное пространство к M_R не имеет никакой дополнительной структуры. Чтобы подчеркнуть это, тензорные поля на M_R обозначаются как P , Q , и R . В частности, поле (2.3) обозначается символом H . В явном виде отображение $H : TM_R \rightarrow T(S_R, \mathcal{U})$ определяется равенством

$$H_X = \mathbf{H}_X \circ p_X,$$

где $X = \iota_{M_R}(X)$, а $p_X : T_X M_R \rightarrow \mathcal{V}$ изоморфизм на свой образ, такой, что

$$u = u^A \partial_A|_X \mapsto \mathbf{u} = p_X(u) = u^A \mathbf{e}_A|_X.$$

Таким образом, H играет точно такую же роль, как его евклидов аналог, поле локальных деформаций $\mathbf{H}$, но определен на многообразии, очищенном от какой-либо геометрии.

Замечание 3. *С общетеоретической точки зрения нет необходимости извлекать подлежащее многообразие из-под некоторой формы, поскольку общее для всех форм многообразие $\mathfrak{B}$ было определено заранее. Вместе с тем, особенно в частных задачах, можно явно описать лишь формы, поскольку только они наблюдаемы. Процедура «стирания» геометрии с формы есть фактически способ восстановить многообразие $\mathfrak{B}$ и затем построить на нем геометрию. Таким образом, в действительности речь по-прежнему идет о теле.*

Материальная метрика. Все, что имеется на данный момент, — поле H локальных деформаций. Оно трансформирует каждый представительный объем в натуральное состояние, где измерения проводятся посредством метрического тензора $\mathbf{g}_U$. Построим обратный образ этой метрики на многообразии M_R и, таким образом, снабдим инфинитезимальные волокна в M_R мерами, которые они имеют в натуральном состоянии. В явном виде определим тензорное поле $G \in \operatorname{Sec}(T^* M_R \otimes T^* M_R)$ равенством [13]:

$$\forall X \in M_R \forall u, v \in T_X M_R : G_X(u, v) := \mathbf{g}_U(H_X[u], H_X[v]). \quad (2.6)$$

Будем называть риманову метрику G *материальной метрикой*. В координатном репере, компоненты G имеют вид $G_{AB} = g_{CD} H^C_A H^D_B$, где H^A_B — коэффициенты разложения (2.4), имеющего в нынешних обозначениях вид $H_X = H^A_B \mathbf{e}_A \otimes dX^B|_X$, а $g_{CD} = \mathbf{e}_C \cdot \mathbf{e}_D$ — компоненты метрики $\mathbf{g}_U$.

К определению (2.6) материальной метрики можно подойти иным способом [23]. Рассмотрим семейство $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in S_R}$. По нему можно определить новое семейство $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in M_R}$, где отображения $\gamma^{(X)} : M_R \rightarrow \mathcal{E}$ связаны с деформациями $\gamma^{(X)} : S_R \rightarrow \mathcal{E}$ соотношениями $\gamma^{(X)} = \gamma^{(X)} \circ \iota_{M_R; S_R}$. Здесь $\iota_{M_R; S_R} : M_R \hookrightarrow S_R$ — каноническая инъекция, которая отображает точку X в ту же самую точку X , но в пространстве с геометрией.

Каждое отображение $\gamma^{(X)}$ определяет метрику $G^{(X)}$ как обратный образ, $G^{(X)} := (\gamma^{(X)})^* \mathbf{g}$:

$$\forall Y \in M_R \forall u, v \in T_Y M_R : G^{(X)}|_Y(u, v) := T_Y \gamma^{(X)}[u] \cdot T_Y \gamma^{(X)}[v].$$

Тензорное поле $G^{(X)}$ задает метрическую структуру на M_R , индуцированную из физического пространства. Теперь пусть G — тензорное поле второго ранга, такое, что $G : X \mapsto G^{(X)}|_X$. Это поле и есть в точности (2.6).

Таким образом, материальная метрика может быть синтезирована по семейству $\{G^{(x)}\}_{x \in M_R}$. Образно говоря, метрическая структура над M_R может быть получена путем перебора элементов семейства $\{S^{(x)}\}_{x \in S_R}$ и извлечения соответствующей метрической структуры (скалярного произведения) из каждого. Иными словами, различные метрические структуры синтезируются в одну глобальную, неевклидову, структуру.

Материальная связность. Синтезировав материальную метрику, приходим к структуре (M_R, G) риманова многообразия, которое почти является искомой глобально единообразной формой тела. Чтобы завершить построение этой формы, осталось добавить еще одну составляющую — аффинную связность. Действительно, чтобы записать уравнения баланса на M_R , равно как и отразить конкретную физическую природу несовместности, необходимо установить некоторое правило параллельного перенесения, которое как раз и определяется аффинной связностью. По определению, аффинная связность — это отображение $\nabla : \text{Vec}(M_R) \times \text{Vec}(M_R) \rightarrow \text{Vec}(M_R)$, $(u, v) \mapsto \nabla_u v$, которое удовлетворяет следующим аксиомам [54, 55]:

- (a) $\forall u, v, w \in \text{Vec}(M_R) : \nabla_{u+v} w = \nabla_u w + \nabla_v w;$
- (b) $\forall u, v \in \text{Vec}(M_R) \forall f \in C^\infty(M_R) : \nabla_{fu} v = f \nabla_u v;$
- (c) $\forall u, v, w \in \text{Vec}(M_R) : \nabla_u (v + w) = \nabla_u v + \nabla_u w;$
- (d) $\forall u, v \in \text{Vec}(M_R) \forall f \in C^\infty(M_R) : \nabla_u (fv) = f \nabla_u v + (uf)v.$

Здесь символ uf обозначает действие векторного поля u , рассматриваемого как дифференцирование, на скалярное поле f .

Пусть $(e_A)_{A=1}^n$ — локальный репер касательного расслоения TM_R , то есть совокупность гладких векторных полей $e_A : U \rightarrow TM_R$, $A = 1, \dots, n$, заданных на открытом множестве $U \subset M_R$, такая, что в каждой точке $x \in U$ упорядоченный набор $(e_A|_x)_{A=1}^n$ является базисом касательного пространства $T_x M_R$. Для любых $A, B = 1, \dots, n$, ковариантная производная $\nabla_{e_A} e_B$ является векторным полем, заданным на U . По этой причине ее тоже можно разложить по локальному реперу $(e_A)_{A=1}^n$: $\nabla_{e_A} e_B = \Gamma_{AB}^C e_C$. Коэффициенты разложения — n^3 скалярных полей $\Gamma_{AB}^C : U \rightarrow \mathbb{R}$ — называются коэффициентами связности. Если они известны, то для произвольных векторных полей $u = u^A e_A$ и $v = v^B e_B$, используя аксиомы связности, можно получить выражение

$$\nabla_u v = u^A (\nabla_{e_A} (v^C) + v^B \Gamma_{AB}^C) e_C$$

для ковариантной производной.

Для дальнейших рассуждений необходимо иметь общий закон преобразования коэффициентов связности. Пусть $(e_A)_{A=1}^n$ и $(\vartheta^A)_{A=1}^n$ — локальный репер и дуальный к нему корепер, определенные на открытом множестве $U \subset M_R$, которое одновременно является координатной областью некоторой карты. Предположим, что на том же множестве U определены другие локальный репер $(\tilde{e}_A)_{A=1}^n$ и корепер $(\tilde{\vartheta}^A)_{A=1}^n$, связанные с предыдущими репером и корепером гладким полем невырожденных $n \times n$ -матриц $\Omega = [\Omega_B^A] : U \rightarrow GL(n; \mathbb{R})$:

$$\tilde{e}_A = \Omega_A^B e_B, \quad \tilde{\vartheta}^A = \tilde{\Omega}^A_B \vartheta^B,$$

где $\tilde{\Omega} = [\tilde{\Omega}_B^A] = \Omega^{-1}$. Обозначим соответствующие коэффициенты связности через Γ_{AB}^C и $\tilde{\Gamma}_{AB}^C$, то есть

$$\nabla_{e_A} e_B = \Gamma_{AB}^C e_C, \quad \text{и} \quad \nabla_{\tilde{e}_A} \tilde{e}_B = \tilde{\Gamma}_{AB}^C \tilde{e}_C.$$

Если $(\partial_{x^A})_{A=1}^n$ — координатный репер на U , то $e_A = \Psi_A^B \partial_{x^B}$, где $\Psi = [\Psi_B^A] : U \rightarrow GL(n; \mathbb{R})$ — однозначно определенное гладкое поле $n \times n$ матриц. Тогда справедливо следующее соотношение [23]:

$$\tilde{\Gamma}_{BC}^A = \Gamma_{QR}^P \tilde{\Omega}_P^A \Omega_B^Q \Omega_C^R + \Psi_Q^R \tilde{\Omega}_P^A \Omega_B^Q \partial_{x^R} \Omega_C^P. \quad (2.7)$$

Формула (2.7) определяет закон преобразования коэффициентов связности в том случае, когда неголономный (т. е. некоординатный) репер заменяется на другой неголономный репер. Если же исходный репер $(e_A)_{A=1}^n$ является голономным, то есть $\Psi_B^A = \delta_B^A$, то соотношение (2.7) упрощается:

$$\tilde{\Gamma}_{BC}^A = \Gamma_{QR}^P \tilde{\Omega}_P^A \Omega_B^Q \Omega_C^R + \tilde{\Omega}_P^A \Omega_B^Q \partial_{x^Q} \Omega_C^P. \quad (2.8)$$

Наконец, когда оба локальных репера $(e_A)_{A=1}^n$ и $(\tilde{e}_A)_{A=1}^n$ голономны, то тогда речь идет о преобразовании координат. В таком случае $\Omega_B^A = \frac{\partial x^A}{\partial \tilde{x}^B}$, где координаты $(x^A)_{A=1}^n$ порождают репер $(e_A)_{A=1}^n$, а координаты $(\tilde{x}^A)_{A=1}^n$ порождают репер $(\tilde{e}_A)_{A=1}^n$. Выражение (2.8) сводится к соотношению

$$\tilde{\Gamma}_{BC}^A = \frac{\partial \tilde{x}^A}{\partial x^P} \frac{\partial x^Q}{\partial \tilde{x}^B} \frac{\partial x^R}{\partial \tilde{x}^C} \Gamma_{QR}^P + \frac{\partial \tilde{x}^A}{\partial x^P} \frac{\partial^2 x^P}{\partial \tilde{x}^B \partial \tilde{x}^C}. \quad (2.9)$$

Даже при $n = 3$ коэффициенты связности Γ^A_{BC} , равные нулю в декартовых координатах, могут быть отличны от нуля в криволинейных координатах. Вместе с тем в обоих случаях связность одна и та же — евклидова. По этой причине коэффициенты связности не подходят в качестве индикаторов неевклидовой природы пространства. Для этой цели используются тензорные поля кручения $\mathfrak{T} : \text{Vec}(M_R) \times \text{Vec}(M_R) \rightarrow \text{Vec}(M_R)$, кривизны $\mathfrak{K} : \text{Vec}(M_R) \times \text{Vec}(M_R) \times \text{Vec}(M_R) \rightarrow \text{Vec}(M_R)$ и неметричности $\mathfrak{Q} : \text{Vec}(M_R) \times \text{Vec}(M_R) \times \text{Vec}(M_R) \rightarrow C^\infty(M_R)$, определяемые, соответственно, формулами [48; 54; 56]

$$\mathfrak{T}(u, v) := \nabla_u v - \nabla_v u - [u, v]; \quad (2.10)$$

$$\mathfrak{K}(u, v)w := [\nabla_u, \nabla_v]w - \nabla_{[u, v]}w; \quad (2.11)$$

$$\mathfrak{Q}(u, v, w) := g(\nabla_u v, w) + g(v, \nabla_u w) - u[g(v, w)]. \quad (2.12)$$

Здесь⁷ $[u, v]$ и $[\nabla_u, \nabla_v]$ — коммутаторы,

$$[u, v] = u \circ v - v \circ u, \quad [\nabla_u, \nabla_v] = \nabla_u \circ \nabla_v - \nabla_v \circ \nabla_u,$$

а $u[g(v, w)]$ есть действие векторного поля u на скалярное поле $g(v, w)$. Евклидова геометрия характеризуется следующими значениями: $\mathfrak{T} = 0$, $\mathfrak{K} = 0$ и $\mathfrak{Q} = 0$.

Таким образом, приходим к структуре $\mathcal{S}_R = (M_R, G, \nabla)$, которая является неевклидовой глобально единообразной формой. Заметим, что в общем случае $\mathcal{S}_R \neq \mathcal{S}_R$, поскольку $g|_{\mathcal{S}_R} \neq G$ и $\nabla|_{\mathcal{S}_R} \neq \nabla$.

Обсудим более детально связь между неевклидовой формой $\mathcal{S}_R$ и непрерывным семейством $\{\mathcal{S}^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ локально единообразных форм, каждая из которых, $\mathcal{S}^{(X)}$, является образом «разгрузочной» деформации $\gamma^{(X)}$. Последнему семейству отвечает поле $\mathbf{H}$ локальных деформаций, значение которого в каждой точке $X \in \mathcal{S}_R$ является линейным отображением $\mathbf{H}_X$, преобразующим представительный объем, окружающий точку X , в единообразное состояние.

С геометрической точки зрения несовместность локальных деформаций означает, что связи, наложенные евклидовой геометрией на формы тела, являются слишком обременительными. В этом месте представляется удобным апеллировать к следующей образной интерпретации. Представительные объемы в единообразном состоянии — «элементарные параллелепипеды», как их часто изображают в монографиях по теории упругости, — являются частями различных представителей $\mathcal{S}^{(X)}$ семейства форм. Мысленно отделим каждый такой параллелепипед от остальной формы, что приводит к континуальной совокупности представительных объемов. Следуя Можену, будем называть такую совокупность «кристаллической отсчетной» [15]. Элементы кристаллической отсчетной геометрически несовместны: попытка собрать из них непрерывное тело приводит к несогласованным индивидуальным искажениям, и, таким образом, снова получается некоторая неединородная евклидова форма. Эту проблему можно решить, лишь освободив связи, наложенные евклидовой структурой на формы. Тогда кристаллическая отсчетная в своем объединении (без предварительных искажений) даст непрерывную область, вложенную в пространство с более общей геометрией, чем евклидова. Возвращаясь к семейству форм, получаем, что в этом случае локальная деформация может быть представлена в виде градиента вложения неевклидовой формы в евклидово физическое пространство.

Замечание 4. Следует отметить, что при работе с глобальной неевклидовой формой неявно используется исходное семейство локально единообразных форм $\{\mathcal{S}^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$. Действительно, например, при вычислении отклика в точке неевклидовой формы этот отклик на самом деле определяется относительно соответствующей формы из локально единообразного семейства форм. Далее, значения материальной метрики и связности также определяются по значениям соответствующих полей на определенной форме из семейства $\{\mathcal{S}^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$. Все, что дает неевклидова форма, — это возможность представить семейство форм в виде единой области.

2.3. Частные случаи материальной связности

Связность Леви-Чивита. Рассмотрим примеры материальных связностей. Первый пример — связность Леви-Чивита ∇^L [57], индуцируемая на многообразии M_R материальной метрикой (2.6). В этом случае коэффициенты связности в координатном репере $(\partial_A)_{i=1}^n$ представлены выражениями

$$\Gamma^C_{AB} = \frac{G^{CD}}{2} (\partial_A G_{DB} + \partial_B G_{AD} - \partial_D G_{AB}), \quad (2.13)$$

в которых $[G^{AB}] = [G_{AB}]^{-1}$ — матрица, обратная к матрице метрических коэффициентов $G_{AB} = G(\partial_A, \partial_B)$.

Связность ∇^L наделяет многообразие M_R геометрией, которая полностью характеризуется тензором кривизны Римана $\mathfrak{K}$ (2.11), поскольку кручение (2.10) и неметричность (2.12) связности Леви-Чивита

⁷При интерпретации векторных полей как дифференцирований алгебры $C^\infty(M)$ гладких функций.

равны нулю. Компоненты $\mathfrak{R}$ в координатном репере связаны с коэффициентами связности формулой

$$\mathfrak{R}^D_{ABC} = \partial_A \Gamma^D_{BC} - \partial_B \Gamma^D_{AC} + \Gamma^E_{BC} \Gamma^D_{AE} - \Gamma^E_{AC} \Gamma^D_{BE}. \quad (2.14)$$

Тензорное поле $\mathfrak{R}$, в свою очередь, определяет тензор кривизны Риччи $\text{Ric} \in \text{Sec}(T^*M_R \otimes T^*M_R)$, компоненты которого в координатном репере получаются при помощи свертки компонент кривизны Римана:

$$\text{Ric}_{AB} = \mathfrak{R}^C_{ACB}.$$

Являясь тензорным полем второго ранга на n -мерном многообразии, тензор Ric имеет в качестве одного из главных инвариантов след

$$\text{Scal} = G^{AB} \text{Ric}_{AB},$$

называемый скалярной кривизной.

Хотя в общем случае определение главных инвариантов тензора четвертого ранга является довольно сложной задачей, для малых размерностей, то есть, когда $n \leq 3$, можно полностью охарактеризовать геометрию отсчетной формы либо с помощью тензора Риччи ($n = 3$), либо посредством скалярной кривизны ($n = 2$). Действительно, определим следующую операцию, называемую произведением Кул-карни–Номидзу [48, с. 213]:

$$h \oslash k(w, x, y, z) := h(w, z)k(x, y) + h(x, y)k(w, z) - h(w, y)k(x, z) - h(x, z)k(w, y),$$

действующую над симметричными тензорами $h, k \in \text{Sec}(T^*M_R \otimes T^*M_R)$. Тогда для $n = 3$ будем иметь⁸ (см. [48, следствие 7.26])

$$\mathfrak{R}^b = \text{Ric} \oslash G - \frac{\text{Scal}}{4} G \oslash G,$$

а для $n = 2$, согласно [48, следствие 7.27], —

$$\mathfrak{R}^b = \frac{\text{Scal}}{4} G \oslash G.$$

Заметим, что для $n = 1$ справедливо равенство $\mathfrak{R}_{111}^1 = 0$.

Таким образом, если $n = 3$, то $\mathfrak{R} = 0$ тогда и только тогда, когда $\text{Ric} = 0$, а если $n = 2$, то $\mathfrak{R} = 0$ тогда и только тогда, когда $\text{Scal} = 0$. Это означает, что в соответствии с размерностью многообразия кривизна Риччи или скалярная кривизна полностью характеризуют несовместность локальных деформаций. Следует отметить, что в одномерном случае локальные деформации всегда совместны, поскольку кривизна всегда равна нулю.

Связность Вайценбока. Поскольку для каждой точки $X \in M_R$ линейное отображение $H_X : T_X M_R \rightarrow \mathcal{U}$ обратимо, можно определить отображение $H^{-1} : T(\mathcal{S}_R, \mathcal{U}) \rightarrow TM_R$, синтезированное из обратных отображений $H_X^{-1} : \mathcal{U} \rightarrow T_X M_R$. Далее, напомним, что архетип $\mathcal{U}$ снабжен скалярным произведением, индуцированным евклидовой метрикой. Тогда можно выбрать некоторый ортонормированный базис $(c_A)_{A=1}^n$ в $\mathcal{U}$, что позволяет определить специальное семейство $(z_A)_{A=1}^n$ векторных полей $z_A \in \text{Vec}(M_R)$ на M_R :

$$z_A := H^{-1}[c_A], \quad A = 1, \dots, n.$$

Являясь образами базисных векторов относительно невырожденного линейного отображения, векторы $(z_A|_X)_{A=1}^n$ образуют базис в каждой точке $X \in M_R$. Таким образом, семейство $(z_A)_{A=1}^n$ является репером (следуя Картану [58], этот репер обычно называют подвижным репером). Согласно диадному разложению $H^{-1} = [H^{-1}]^A_B \partial_A \otimes c^B$, где $(\partial_A)_{A=1}^n$ — координатный репер, приходим к эквивалентному представлению элементов подвижного репера: $z_A = [H^{-1}]^B_A \partial_B$.

Многообразие M_R снабжается такой связностью ∇^W , что

$$\nabla^W_{z_A} z_B = 0, \quad A, B \in \{1, \dots, n\}.$$

Будем называть ее *связностью Вайценбока* [59]. По построению, коэффициенты связности Вайценбока относительно репера $(z_A)_{A=1}^n$ равны нулю. Вместе с тем, если Γ^A_{BC} — коэффициенты связности ∇^W в координатном репере, то для них справедливы равенства

$$\Gamma^A_{BC} = -H^D_C \partial_X^B [H^{-1}]^A_D = [H^{-1}]^A_D \partial_X^B H^D_C, \quad (2.15)$$

являющиеся следствиями равенств (2.8), в которых нужно положить $\tilde{\Gamma}^A_{BC} = 0$ и $\mathcal{U} = [H^A_B]$.

Геометрия, устанавливаемая на многообразии M_R связностью ∇^W , полностью характеризуется тензором кручения $\mathfrak{T}$ (2.10), поскольку как тензор кривизны Римана (2.11), так и неметричность (2.12) связности ∇^W равны нулю. В координатном репере компоненты кручения имеют следующий вид:

$$\mathfrak{T}^A_{BC} = \Gamma^A_{BC} - \Gamma^A_{CB}. \quad (2.16)$$

⁸Символ $(\cdot)^b$ обозначает музыкальный изоморфизм (операцию «опускания» индексов) [39, с. 342].

Принимая во внимание выражения (2.15), приходим к альтернативному представлению компонент кручения:

$$\mathfrak{T}^A_{BC} = [\mathbf{H}^{-1}]^A_D \partial_{\mathbf{x}^B} \mathbf{H}^D_C - [\mathbf{H}^{-1}]^A_D \partial_{\mathbf{x}^C} \mathbf{H}^D_B.$$

В случае $n = 3$ часто бывает удобно (особенно, в континуальной теории дефектов) заменить тензор кручения на тензорное поле $\alpha \in \text{Sec}(TM_R \otimes TM_R)$, $\alpha = \alpha^{AB} \partial_{\mathbf{x}^A} \otimes \partial_{\mathbf{x}^B}$ с компонентами [44]

$$\alpha^{AB} = -\frac{1}{2} \epsilon^{ACD} \mathfrak{T}^B_{CD}. \quad (2.17)$$

Это поле принято называть тензором плотности дислокаций. Здесь ϵ — тензор Леви-Чивита с компонентами $\epsilon^{ABC} = \frac{e^{ABC}}{\sqrt{\det \mathbf{G}}}$, в которых $\det \mathbf{G}$ — определитель материальной метрики $\mathbf{G}$, а e^{ABC} — альтернатор⁹. Тензорное поле α может быть эквивалентно выбрано в качестве меры несовместности, поскольку $\mathfrak{T} = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$.

Связность Вейля. Рассмотрим последний частный случай материальной связности. Пусть $\nu \in \Omega^1(M_R)$ — произвольная 1-форма. Определим связность ∇^{Wl} условиями:

- (a) ∇^{Wl} симметрична, то есть $\mathfrak{T} = 0$,
- (b) $\nabla^{Wl}_u \mathbf{G} = \nu(u) \mathbf{G}$.

В частности, из условия (b) следует, что тензор неметричности (2.12) равен $\mathfrak{Q} = -\nu \otimes \mathbf{G}$. Связность ∇^{Wl} называется *связностью Вейля*, а 1-форма ν называется 1-формой Вейля [60].

В координатном репере компоненты $\mathfrak{Q}_{ABC}$ тензора неметричности $\mathfrak{Q}$ представлены равенствами $\mathfrak{Q}_{ABC} = -\nu_A \mathbf{G}_{BC}$. Поэтому коэффициенты связности Вейля имеют вид:

$$\Gamma^A_{BC} = \frac{\mathbf{G}^{AD}}{2} (\partial_B \mathbf{G}_{DC} + \partial_C \mathbf{G}_{DB} - \partial_D \mathbf{G}_{BC}) - \frac{1}{2} (\nu_B \delta^A_C + \nu_C \delta^A_B - \nu_D \mathbf{G}_{BC} \mathbf{G}^{AD}), \quad (2.18)$$

из которого следует, что связность Вейля полностью определена материальной метрикой $\mathbf{G}$ и 1-формой ν .

В общем случае кривизна связности Вейля отлична от нуля и в силу дополнительных слагаемых в (2.18), определяющих отклонение связности Вейля от связности Леви-Чивита, соответствующий тензор Риччи несимметричен. По этой причине, тензор Риччи может быть однозначно разложен в виде суммы нетривиальных симметричной и антисимметричной частей $\text{Ric}^{(\text{sym})}$ и $\text{Ric}^{(\text{asym})}$:

$$\text{Ric} = \text{Ric}^{(\text{sym})} + \text{Ric}^{(\text{asym})}.$$

Первое слагаемое разложения определяет скалярную кривизну Scal связности Вейля, а второе слагаемое связано с 1-формой Вейля соотношением [60]

$$\text{Ric}^{(\text{asym})} = d\nu,$$

где $d\nu$ — внешний дифференциал ковекторного поля (1-формы) ν , который в координатном представлении имеет вид

$$d\nu = \sum_{A < B} (\partial_A \nu_B - \partial_B \nu_A) d\mathbf{x}^A \wedge d\mathbf{x}^B.$$

Если форма Вейля является полным дифференциалом, т. е., когда $\nu = df$ для некоторой скалярной функции $f \in C^\infty(M_R)$, то $\text{Ric}^{(\text{asym})} = ddf = 0$ и тензор Риччи вновь оказывается симметричным. Обратное утверждение справедливо в следующей форме: если кривизна пространства Вейля равна нулю, то тогда $d\nu = 0$ и, следовательно, в случае односвязного многообразия M_R форма ν является полным дифференциалом.

2.4. Замена отсчетной формы

Неевклидова связность на форме $\mathcal{S}_R$, которая изначально предполагалась частью евклидова пространства, задавалась в два этапа. На первом этапе геометрия, индуцированная из физического пространства, «стиралась». При этом форма превращалась в гладкое многообразие M_R без какой-либо связности, определенной на нем. На втором этапе на подготовленном таким образом многообразии задавалась новая связность с помощью поля невырожденных линейных преобразований, роль которых выполняли локальные деформации $\mathbf{H}_X$. Для доказательства корректности определения связности требуется показать, что результат не зависит от выбора конкретной формы $\mathcal{S}_R$, то есть инварианты новой связности не должны зависеть от гладкого преобразования формы $\mathcal{S}_R$ в некоторую иную форму $\mathcal{S}'_R$ [26].

⁹Иными словами, $e^{ABC} = 1$, если (A, B, C) — четная перестановка, $e^{ABC} = -1$, если (A, B, C) — нечетная перестановка, и $e^{ABC} = 0$, если в тройке (A, B, C) хотя бы два элемента совпадают.

Пусть $\mathcal{S}_R$ и $\mathcal{S}'_R$ — произвольные евклидовы формы и пусть $\gamma : \mathcal{S}'_R \rightarrow \mathcal{S}_R$ — деформация, трансформирующая одну форму в другую. Обозначим через M_R и M'_R соответствующие подлежащие многообразия. Предположим, что поля $\mathbf{H} : T\mathcal{S}_R \rightarrow T(\mathcal{S}_R, \mathcal{U})$ и $\mathbf{H}' : T\mathcal{S}'_R \rightarrow T(\mathcal{S}_R, \mathcal{U})$ локальных деформаций связаны равенством: $\mathbf{H}' = \mathbf{H}\mathbf{F}$, где $\mathbf{F} = T\gamma : T\mathcal{S}'_R \rightarrow T\mathcal{S}_R$ — градиент деформации. С физической точки зрения это предположение означает, что разгрузка произвольного представительного объема из формы $\mathcal{S}'_R$ в натуральное состояние производится таким образом, что этот объем вначале преобразуется в соответствующий представительный объем из $\mathcal{S}_R$, а затем разгружается в натуральное состояние посредством $\mathbf{H}$. Далее будет показано, что в этом случае геометрии, построенные на соответствующих формах, совпадают.

Чтобы установить этот факт, рассмотрим преобразование тензорных полей, представляющих геометрии, под действием деформации как отображения $\gamma : M'_R \rightarrow M_R$ между многообразиями. Это преобразование производится в терминах операции обратного образа [39, с. 320], которая сохраняет геометрическую структуру. Если установить, что обратный образ тензорных полей, представляющих геометрию многообразия M_R , на многообразии M'_R совпадает с соответствующими полями, определенными на M'_R , то тогда этим будет показано, что рассматриваемые геометрии совпадают.

Пусть семейство $(X^A)_{A=1}^n$ представляет локальные координаты на M_R , и пусть семейство $(Y^A)_{A=1}^n$ соответствует локальным координатам на M'_R . В этих координатах имеют место следующие диадные представления для градиента деформации и обратного к нему отображения:

$$\mathbf{F} = F^A_B \partial_{X^A} \otimes dY^B \quad \text{и} \quad \mathbf{F}^{-1} = [F^{-1}]^A_B \partial_{Y^A} \otimes dX^B,$$

где $F^A_B = \frac{\partial X^A}{\partial Y^B}$ и $[F^{-1}]^A_B = \frac{\partial Y^A}{\partial X^B}$. Для дальнейших рассуждений удобно иметь явные формулы для компонент обратного образа. Пусть $\mathbf{P} \in \text{Sec}(TM_R \otimes TM_R)$, $\mathbf{Q} \in \text{Sec}(T^*M_R \otimes T^*M_R)$, $\mathbf{R} \in \text{Sec}(TM_R \otimes T^*M_R \otimes T^*M_R)$ и $\mathbf{S} \in \text{Sec}(TM_R \otimes T^*M_R \otimes T^*M_R \otimes T^*M_R)$ — произвольные тензорные поля. Тогда справедливы равенства:

$$(\gamma^*\mathbf{P})^{AB} = [F^{-1}]^A_C [F^{-1}]^B_D \mathbf{P}^{CD}|_{\gamma(\cdot)}, \quad (2.19)$$

$$(\gamma^*\mathbf{Q})_{AB} = F^C_A F^D_B \mathbf{Q}_{CD}|_{\gamma(\cdot)}, \quad (2.20)$$

$$(\gamma^*\mathbf{R})^A_{BC} = [F^{-1}]^A_D F^E_B F^F_C \mathbf{R}^D_{EF}|_{\gamma(\cdot)}, \quad (2.21)$$

$$(\gamma^*\mathbf{S})^A_{BCD} = [F^{-1}]^A_E F^F_B F^G_C F^H_D \mathbf{S}^E_{FGH}|_{\gamma(\cdot)}. \quad (2.22)$$

Все готово для следующего утверждения:

Теорема 1. Пусть $\mathcal{S}_R$ и $\mathcal{S}'_R$ — евклидовы формы тела $\mathfrak{B}$ с подлежащими многообразиями M_R и M'_R соответственно. Пусть $\gamma : \mathcal{S}'_R \rightarrow \mathcal{S}_R$ — соответствующая деформация и пусть $\mathbf{F} = T\gamma$ — ее градиент. Если поля $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}'$ локальных деформаций, определенные на формах $\mathcal{S}_R$ и $\mathcal{S}'_R$ соответственно, связаны между собой равенством $\mathbf{H}' = \mathbf{H}\mathbf{F}$, то имеют место следующие свойства:

- (а) Материальные метрики $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}'$, порожденные полями $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}'$ соответственно, связаны равенством $\mathbf{G}' = \gamma^*\mathbf{G}$.
- (б) В случае римановых геометрий, построенных по материальным метрикам $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}'$, справедливы равенства $\mathfrak{R}' = \gamma^*\mathfrak{R}$ между тензорами кривизны Римана, $\text{Ric}' = \gamma^*\text{Ric}$ между тензорами Риччи, и $\text{Scal}' = \text{Scal} \circ \gamma$ между скалярными кривизнами.
- (в) В случае геометрий Вайценбока, построенных по локальным деформациям $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}'$, имеется соотношение $\mathfrak{T}' = \gamma^*\mathfrak{T}$ между тензорами кручения. Если $n = 3$, то справедливо дополнительное соотношение $\alpha' = \gamma^*\alpha$ между тензорами плотности дислокаций.

Доказательство. Будем использовать введенные выше обозначения для локальных координат на многообразиях M_R и M'_R . Более того, пусть $(\mathbf{e}_A)_{A=1}^n$ — некоторый базис архетипа $\mathcal{U}$. Тогда имеет место диадное представление

$$\mathbf{H} = H^A_B \mathbf{e}_A \otimes dX^B$$

для поля $\mathbf{H}$, что влечет равенство

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H}\mathbf{F} = H^A_B F^B_C \mathbf{e}_A|_{\gamma(\cdot)} \otimes dY^C$$

для другого поля $\mathbf{H}'$.

(а) Определение (2.6) материальной метрики влечет, что

$$\mathbf{G}'_{AB} = \mathbf{G}'(\partial_{Y^A}, \partial_{Y^B}) = g_{CD} F^E_A F^F_B H^C_E H^D_F,$$

где $g_{CD} = \mathbf{e}_C \cdot \mathbf{e}_D$. Аналогично то же самое определение дает равенство

$$\mathbf{G}_{EF} = g_{CD} H^C_E H^D_F,$$

поэтому

$$G'_{AB} = F^E{}_A F^F{}_B G_{EF}|_{\gamma(\cdot)}.$$

Поскольку $G \in \text{Sec}(T^*M_R \otimes T^*M_R)$, выражение в правой части последнего равенства совпадает с координатным представлением (2.20) для обратного образа, где символ Q нужно заменить на G . Приходим к искомому равенству $G' = \gamma^*G$.

(b) Коэффициенты (2.13) связности Леви-Чивита, определенные на многообразии M'_R посредством метрики G' , равны

$$\Gamma'^K{}_{IJ} = \frac{G'^{KL}}{2} (\partial_{Y^I} G'_{JL} + \partial_{Y^J} G'_{IL} - \partial_{Y^L} G'_{IJ}),$$

где¹⁰

$$G'_{IJ} = F^C{}_I F^D{}_J G_{CD} \quad \text{и} \quad G'^{KL} = [F^{-1}]^K{}_S [F^{-1}]^L{}_P G^{SP}.$$

Используя свойство коммутативности смешанных частных производных, получаем

$$\partial_{Y^I} F^K{}_J = \frac{\partial^2 \chi^K}{\partial Y^I \partial Y^J} = \partial_{Y^J} F^K{}_I.$$

По этой причине

$$\begin{aligned} \Gamma'^K{}_{IJ} = \frac{G^{SP}}{2} & ([F^{-1}]^K{}_S F^C{}_J \partial_{Y^I} G_{CP} + [F^{-1}]^K{}_S F^C{}_I \partial_{Y^J} G_{CP} - \\ & - [F^{-1}]^K{}_S [F^{-1}]^L{}_P F^C{}_I F^D{}_J \partial_{Y^L} G_{CD}) + [F^{-1}]^K{}_S \partial_{Y^I} F^S{}_J. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\partial_{Y^I} G_{JK} = \partial_{Y^I} (G_{JK} \circ \gamma) = F^O{}_I \partial_{X^O} G_{CP},$$

приходим к равенству

$$\Gamma'^K{}_{IJ} = [F^{-1}]^K{}_S F^O{}_I F^C{}_J \Gamma^S{}_{OC}|_{\gamma(\cdot)} + [F^{-1}]^K{}_S \partial_{Y^I} F^S{}_J, \quad (2.23)$$

где скалярные поля $\Gamma^S{}_{OC}$ соответствуют коэффициентам связности Леви-Чивита на M_R , порожденным материальной метрикой G .

Отметим сходство полученного соотношения для коэффициентов связности на M'_R с законом преобразования (2.9) коэффициентов связности при замене координат. Действительно, с точностью до композиций с координатными отображениями деформацию γ можно рассматривать как замену локальных координат в M_R . Вместе с тем в рассматриваемом случае имеется большее, чем просто преобразование координат, поскольку формы также преобразуются. В этом причина, почему прямые соотношения между «штрихованными» и «нештрихованными» полями не могут быть получены без использования преобразования обратного образа.

Подставляя полученное соотношение (2.23) для коэффициентов связности в координатное представление (2.14) тензора кривизны, получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}'^T{}_{IJK} = \partial_{Y^I} \Gamma'^T{}_{JK} - \partial_{Y^J} \Gamma'^T{}_{IK} + \Gamma'^L{}_{JK} \Gamma'^T{}_{IL} - \Gamma'^L{}_{IK} \Gamma'^T{}_{JL} = \\ = \partial_{Y^I} ([F^{-1}]^T{}_S F^O{}_J F^C{}_K \Gamma^S{}_{OC} + [F^{-1}]^T{}_S \partial_{Y^J} F^S{}_K) - \partial_{Y^J} ([F^{-1}]^T{}_S F^O{}_I F^C{}_K \Gamma^S{}_{OC} + [F^{-1}]^T{}_S \partial_{Y^I} F^S{}_K) + \\ + ([F^{-1}]^L{}_S F^O{}_J F^C{}_K \Gamma^S{}_{OC} + [F^{-1}]^L{}_S \partial_{Y^I} F^S{}_K) ([F^{-1}]^T{}_B F^A{}_I F^D{}_L \Gamma^B{}_{AD} + [F^{-1}]^T{}_B \partial_{Y^I} F^B{}_L) - \\ - ([F^{-1}]^L{}_S F^O{}_I F^C{}_K \Gamma^S{}_{OC} + [F^{-1}]^L{}_S \partial_{Y^J} F^S{}_K) ([F^{-1}]^T{}_B F^A{}_J F^D{}_L \Gamma^B{}_{AD} + [F^{-1}]^T{}_B \partial_{Y^J} F^B{}_L). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Используя формулу

$$\partial_{Y^I} [F^{-1}]^M{}_L = -[F^{-1}]^M{}_N [F^{-1}]^K{}_L \partial_{Y^I} F^N{}_K,$$

которая вытекает из дифференцирования обеих частей соотношения $[F^{-1}]^M{}_N|_{\gamma(\cdot)} F^N{}_K = \delta^M_K$ по переменным Y^I , и равенство

$$\partial_{Y^I} \Gamma^S{}_{OC} = F^P{}_I \partial_{X^P} \Gamma^S{}_{OC},$$

которое следует из цепного правила дифференцирования, после сокращения соответствующих слагаемых из (2.24) получаем, что

$$\mathfrak{R}'^T{}_{IJK} = [F^{-1}]^T{}_S F^P{}_I F^O{}_J F^C{}_K \mathfrak{R}_{POC}^S|_{\gamma(\cdot)}.$$

Сравнивая полученное соотношение с формулой (2.22), в которой S следует заменить на $\mathfrak{R}$, приходим к выводу, что $\mathfrak{R}' = \gamma^*\mathfrak{R}$.

Для тензора кривизны Риччи имеем равенства

$$\text{Ric}'_{IK} = \mathfrak{R}'^L{}_{ILK} = F^P{}_I F^C{}_K \mathfrak{R}^S{}_{PSC} = F^P{}_I F^C{}_K \text{Ric}_{PC}|_{\gamma(\cdot)}.$$

¹⁰Здесь и далее в доказательстве «нештрихованные» поля (за исключением F) следует рассматривать с композицией $|\gamma(\cdot)$. Для экономии места последний символ опускается в промежуточных выкладках и появляется лишь в финальных выражениях.

Таким образом, приходим к соотношению

$$\text{Ric}'_{IK} = F^P{}_I F^C{}_K \text{Ric}_{PC}|_{\gamma(\cdot)}.$$

Поскольку $\text{Ric} \in \text{Sec}(T^*M_R \otimes T^*M_R)$, выражение в правой части полученного равенства совпадает с координатным представлением (2.20) обратного образа, в котором тензорное поле $\mathbf{Q}$ нужно заменить на Ric . Тем самым равенство $\text{Ric}' = \gamma^* \text{Ric}$ установлено.

Наконец, получим соотношение между скалярными кривизнами:

$$\text{Scal}' = G'^{AB} \text{Ric}'_{AB} = [F^{-1}]^A{}_S [F^{-1}]^B{}_P G^{SP} F^L{}_A F^M{}_B \text{Ric}_{LM}|_{\gamma(\cdot)} = G^{LM} \text{Ric}_{LM}|_{\gamma(\cdot)} = \text{Scal} \circ \gamma,$$

как и ожидалось.

(с) В этом случае имеются равенство $\mathbf{H} = \mathbf{H}^A{}_B \mathbf{c}_A \otimes d\mathbf{x}^B$ и соответствующее разложение $\mathbf{H}' = \mathbf{H}^A{}_B F^B{}_C \mathbf{c}_A \otimes d\mathbf{y}^C$. В координатном репере $(\partial_{y^A})_{A=1}^n$ коэффициенты (2.15) связности Вайценбока на многообразии M'_R представлены выражением $\Gamma'^I{}_{JK} = [\mathbf{H}'^{-1}]^I{}_C \partial_{y^J} \mathbf{H}'^C{}_K$. Здесь

$$\partial_{y^J} \mathbf{H}'^C{}_K = F^L{}_K F^M{}_J \partial_{x^M} \mathbf{H}^C{}_L + \mathbf{H}^C{}_L \partial_{y^J} F^L{}_K,$$

поскольку $\partial_{y^J} \mathbf{H}^C{}_L = F^M{}_J \partial_{x^M} \mathbf{H}^C{}_L$. Тогда приходим к формуле

$$\Gamma'^I{}_{JK} = [F^{-1}]^I{}_R F^L{}_K F^M{}_J \Gamma^R{}_{ML} + [F^{-1}]^I{}_R \partial_{y^J} F^R{}_K,$$

в которой $\Gamma^R{}_{ML}$ — коэффициенты связности Вайценбока на многообразии M_R . Соотношение (2.16) для компонент тензора кручения, таким образом, принимает вид

$$\mathfrak{T}'^I{}_{JK} = [F^{-1}]^I{}_R F^M{}_J F^L{}_K \mathfrak{T}^R{}_{ML}|_{\gamma(\cdot)}.$$

Сравнивая его с выражением (2.21), в котором $\mathbf{R}$ следует заменить на $\mathfrak{T}$, получаем $\mathfrak{T}' = \gamma^* \mathfrak{T}$.

Пусть $n = 3$. Компоненты тензора плотности дислокаций α' определены равенством (2.17): $\alpha'^{IJ} = -\frac{1}{2} \epsilon'^{IMN} \mathfrak{T}'^J{}_{MN}$, где $\epsilon'^{IMN} = \frac{e^{IMN}}{\sqrt{\det G'}}$. Определитель $\det G'$ связан с определителем $\det G$ по формуле $\det G' = \Delta^2 \det G$, в которой¹¹ $\Delta = \det F > 0$. Подставляя соотношения для $\mathfrak{T}'$ и $\det G'$ в α'^{IJ} , получаем

$$\alpha'^{IJ} = -\frac{1}{2} \frac{e^{IMN}}{\sqrt{\det G}} \frac{[F^{-1}]^J{}_R F^A{}_M F^B{}_N \mathfrak{T}^R{}_{AB}}{\Delta}. \quad (2.25)$$

Для того чтобы преобразовать полученное выражение к иному виду, вначале заметим, что $\mathfrak{T}^R{}_{AB} = \frac{1}{2} \mathfrak{T}^R{}_{SL} (\delta^S{}_A \delta^L{}_B - \delta^L{}_A \delta^S{}_B)$. Вместе с тем¹² $\delta^S{}_A \delta^L{}_B - \delta^L{}_A \delta^S{}_B = e_{TAB} e^{TSL}$, и тогда получаем соотношение $\mathfrak{T}^R{}_{AB} = \frac{1}{2} e_{TAB} e^{TSL} \mathfrak{T}^R{}_{SL}$. Учитывая его в (2.25) и принимая во внимание, что $[F^{-1}]^I{}_T = \frac{1}{2\Delta} e^{IMN} e_{tab} F^A{}_M F^B{}_N$, приходим к равенству

$$\alpha'^{IJ} = [F^{-1}]^I{}_T [F^{-1}]^J{}_R \alpha^{TR}|_{\gamma(\cdot)},$$

где α^{TR} — компоненты тензора плотности дислокаций $\alpha \in \text{Sec}(TM_R \otimes TM_R)$. Сравнивая полученное выражение с формулой (2.19), в которой $\mathbf{P}$ следует заменить на α , окончательно получаем, что $\alpha' = \gamma^* \alpha$. Этим теорема полностью доказана. $\square$

2.5. Конторсия связности

Как показано в разд. 2.3, на многообразии M_R можно построить различные материальные связности. Вместе с тем различие материальных связностей между собой приводит к различию соответствующих уравнений баланса массы и импульса, сформулированных относительно неевклидовой отсчетной формы $\mathbf{S}_R$ [23; 61]. В этой связи для сравнения уравнений баланса друг с другом целесообразно иметь меру отличия одной связности от другой. Эту меру можно задать следующим образом [26]. Предположим, что на многообразии M_R выбраны две связности ∇ и $\tilde{\nabla}$. Тогда разность

$$\mathfrak{K} = \nabla - \tilde{\nabla}, \quad (2.26)$$

по определению, характеризует отличие связности $\tilde{\nabla}$ от связности ∇ . Рассмотрим поле $\mathfrak{K}$ более детально.

Если $(\partial_A)_{A=1}^n$ — координатный репер на M_R , то ковариантные производные, определяемые связностями $\tilde{\nabla}$ и ∇ , представлены выражениями

$$\nabla_u \mathbf{v} = u^A (\partial_A v^B + v^C \Gamma^B{}_{AC}) \partial_B \quad \text{и} \quad \tilde{\nabla}_u \mathbf{v} = u^A (\partial_A v^B + v^C \tilde{\Gamma}^B{}_{AC}) \partial_B,$$

¹¹Предполагается, что деформация сохраняет ориентацию.

¹²Здесь e_{TAB} и e^{TSL} — альтернаторы.

в которых $u, v \in \text{Vec}(M_R)$ — произвольные векторные поля, а Γ^B_{AC} и $\tilde{\Gamma}^B_{AC}$ — коэффициенты связности. Поэтому для значения поля (2.26) на тех же векторах u, v справедливо равенство

$$\mathfrak{K}_u v = \nabla_u v - \tilde{\nabla}_u v = u^A v^C (\Gamma^B_{AC} - \tilde{\Gamma}^B_{AC}) \partial_B,$$

и поле $\mathfrak{K}$, таким образом, имеет следующее полиадное представление:

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^A_{BC} \partial_A \otimes dX^B \otimes dX^C, \quad \text{где } \mathfrak{K}^A_{BC} = \Gamma^A_{BC} - \tilde{\Gamma}^A_{BC}.$$

Заметим, что несмотря на то что аффинная связность не образует тензорного поля третьего ранга, разность между любыми двумя связностями, напротив, является тензорным полем [55]. По этой причине $\mathfrak{K}$ — тензорное поле третьего ранга: $\mathfrak{K} \in \text{Sec}(T^*M_R \otimes TM_R \otimes TM_R)$.

Используя поле $\mathfrak{K}$, можно связать кручения, кривизны и неметричности различных материальных связностей следующим образом. Тензор кручения $\mathfrak{T}$ (2.10) связности ∇ может быть выражен через тензор кручения $\tilde{\mathfrak{T}}$ второй связности $\tilde{\nabla}$ в соответствии с формулой

$$\mathfrak{T}(u, v) = \tilde{\mathfrak{T}}(u, v) + \mathfrak{K}_u v - \mathfrak{K}_v u,$$

при выводе которой использовалось равенство $\nabla_u v = \tilde{\nabla}_u v + \mathfrak{K}_u v$. В координатном репере

$$\mathfrak{T}^A_{BC} = \tilde{\mathfrak{T}}^A_{BC} + \mathfrak{K}^A_{BC} - \mathfrak{K}^A_{CB}.$$

Аналогично тензор кривизны Римана $\mathfrak{R}$ (2.11) связности ∇ может быть выражен через тензор кривизны $\tilde{\mathfrak{R}}$ связности $\tilde{\nabla}$ согласно соотношению

$$\mathfrak{R}(u, v) = \tilde{\mathfrak{R}}(u, v) + [\tilde{\nabla}_u, \mathfrak{K}_v] + [\mathfrak{K}_u, \tilde{\nabla}_v] - \mathfrak{K}_{[u, v]} + [\mathfrak{K}_u, \mathfrak{K}_v].$$

В координатном репере

$$\mathfrak{R}^D_{ABC} = \tilde{\mathfrak{R}}^D_{ABC} + \partial_A \mathfrak{K}^D_{BC} - \partial_B \mathfrak{K}^D_{AC} + \tilde{\Gamma}^L_{BC} \mathfrak{K}^D_{AL} + \mathfrak{K}^L_{BC} \tilde{\Gamma}^D_{AL} + \mathfrak{K}^L_{BC} \mathfrak{K}^D_{AL} - \tilde{\Gamma}^L_{AC} \mathfrak{K}^D_{BL} - \mathfrak{K}^L_{AC} \tilde{\Gamma}^D_{BL} - \mathfrak{K}^L_{AC} \mathfrak{K}^D_{BL}.$$

Наконец, тензор неметричности $\mathfrak{Q}$ (2.12) связности ∇ может быть выражен через тензор неметричности $\tilde{\mathfrak{Q}}$ связности $\tilde{\nabla}$ по формуле:

$$\mathfrak{Q}(u, v, w) = \tilde{\mathfrak{Q}}(u, v, w) + G(\mathfrak{K}_u v, w) + G(v, \mathfrak{K}_u w).$$

При ее выводе предполагалось, что материальная метрика G на геометрических пространствах (M_R, G, ∇) и $(M_R, G, \tilde{\nabla})$ одна и та же. В координатном репере

$$\mathfrak{Q}_{ABC} = \tilde{\mathfrak{Q}}_{ABC} + G_{CD} \mathfrak{K}^D_{AB} + G_{BD} \mathfrak{K}^D_{AC}.$$

Рассмотрим частный случай. Предположим, что на многообразии M_R фиксирована материальная метрика G (2.6), которая определяет связность Леви-Чивита $\tilde{\nabla}$. Коэффициенты этой связности в координатном репере $(\partial_A)_{A=1}^n$ представлены выражениями (2.13) $\tilde{\Gamma}^A_{BC} = \frac{G^{AD}}{2} (\partial_B G_{CD} + \partial_C G_{BD} - \partial_D G_{BC})$. Другую связность ∇ будем считать произвольной. Если $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{Q}$, соответственно, кручение (2.10) и неметричность (2.12) связности ∇ , то тогда справедлива следующая общая формула в координатном репере $(\partial_A)_{A=1}^n$ [23]:

$$\Gamma^A_{BC} = \tilde{\Gamma}^A_{BC} + \frac{G^{AD}}{2} (\mathfrak{T}_{DBC} + \mathfrak{T}_{CDB} + \mathfrak{T}_{BDC}) + \frac{G^{AD}}{2} (\mathfrak{Q}_{BCD} + \mathfrak{Q}_{CDB} - \mathfrak{Q}_{DBC}). \quad (2.27)$$

Отсюда вытекает соотношение для компонент тензора $\mathfrak{K}$:

$$\mathfrak{K}^A_{BC} = \frac{G^{AD}}{2} (\mathfrak{T}_{DBC} + \mathfrak{T}_{CDB} + \mathfrak{T}_{BDC}) + \frac{G^{AD}}{2} (\mathfrak{Q}_{BCD} + \mathfrak{Q}_{CDB} - \mathfrak{Q}_{DBC}). \quad (2.28)$$

Если связность ∇ является связностью Вайценбока, порожденной полем локальных деформаций $H = H^A_B c_A \otimes dX^B$, то $\mathfrak{Q} = 0$ и формула (2.28) принимает вид

$$\mathfrak{K}^A_{BC} = \frac{G^{AD}}{2} (\mathfrak{T}_{DBC} + \mathfrak{T}_{CDB} + \mathfrak{T}_{BDC}). \quad (2.29)$$

Таким образом, $\mathfrak{K}$ полностью определяется тензором кручения $\mathfrak{T}$ связности Вайценбока ∇ . По этой причине будем называть $\mathfrak{K}$ *тензором конторсии* [13]. С геометрической точки зрения отклонение связности Вайценбока от связности Леви-Чивита заключается в несогласованности малых элементов, на которые разбивается многообразие M_R в соответствии с той или иной его геометрией. Именно в случае связности Леви-Чивита эти элементы, пусть даже будучи малыми, обладают кривизной (пример — часть поверхности сферы), а в случае связности Вайценбока малые элементы представляют часть плоскости. Конторсия связности (2.29) определяет дополнительный изгиб плоского элемента с тем, чтобы он совпал с малым римановым элементом многообразия M_R .

Замечание 5. То, что соотношение для коэффициентов связности Вайценбока (получаемое из равенства (2.27) путем отбрасывания слагаемых с неметричностью) содержит в себе коэффициенты связности Леви-Чивита, может быть интерпретировано в рамках континуальной теории дефектов. Действительно, риманово пространство соответствует телу с дисклинациями, в то время как пространство Вайценбока соответствует телу с дислокациями. Вместе с тем, если в кристалле присутствуют дискретно распределенные дислокации, то они индуцируют дисклинации, которые расположены на концах линий дислокации [62]. В случае непрерывного распределения дефектов поля дислокаций и дисклинаций непрерывны и могут быть представлены совокупностью геометрических понятий: кривизна, кручение и неметричность. Математически это и означает, что связность Вайценбока содержит в некотором смысле связность Леви-Чивита.

Наконец, если связность ∇ является связностью Вейля, порожденной материальной метрикой G и полем 1-форм ν , то, согласно (2.18), тензорное поле $\mathfrak{K}$ представлено компонентами

$$\mathfrak{K}^A_{BC} = -\frac{1}{2}(\nu_B \delta^A_C + \nu_C \delta^A_B - \nu_D G_{BC} G^{AD}).$$

Из полученной формулы следует, что поле $\mathfrak{K}$ полностью определяется полем ковекторов ν . Поскольку кривизна связности Вейля может быть отлична от нуля, нет причин связывать отклонение связности Вейля от связности Леви-Чивита с геометрией малых элементов. Вместе с тем отличие двух связностей друг от друга может быть интерпретировано в терминах формы объема. Действительно, в случае риманова пространства форма объема $dV = \sqrt{\det G} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ ковариантно постоянна, т. е.

$$\nabla^L dV = 0.$$

В противоположность этому в случае связности Вейля риманова форма объема эволюционирует при параллельном перенесении, т. е.

$$\nabla^{Wl} dV \neq 0.$$

С физической точки зрения изменение римановой формы объема при переносе от точки к точке означает, что представительные объемы, составляющие тело, содержат точечные дефекты типа пор либо независимо от других элементарных объемов изменяются в силу химических реакций или тепловых процессов [21; 60]. В этой связи возникают «метрические аномалии» (по терминологии [63]), которые могут быть формализованы в виде отличной от нуля 1-формы Вейля ν .

Замечание 6. Существование различных способов задания материальной связности на теле приводит к проблеме формулировки критерия выбора одной из возможных связностей. По-видимому, в рамках теории простого материала, когда отклик тела зависит лишь от градиента первого порядка, такого критерия не существует [25; 64; 65]. Несмотря на отсутствие строго обоснования этого заключения, можно предложить следующий ход рассуждений. Несовместные деформации определяются полем H локальных деформаций, которое имеет n^2 компонент. Вместе с тем аффинная связность для своего полного определения требует задания n^3 коэффициентов связности. Таким образом, задание одного лишь поля локальных деформаций не дает достаточно данных для единственного определения материальной связности.

2.6. Физический смысл конторсии связности Вайценбока

Остановимся более подробно на связности Вайценбока. При этом будем полагать, что размерность тела равна размерности физического пространства, т. е. $n = 3$. Геометрия на многообразии M_R естественным образом индуцирует геометрию на теле $\mathfrak{B}$, поскольку многообразия M_R и $\mathfrak{B}$ топологически эквивалентны. В этой связи для полей связности и метрики на теле $\mathfrak{B}$, определяющих геометрию, будем использовать те же обозначения, что использовали для полей на M_R . В частности, на $\mathfrak{B}$ определено поле конторсии (2.29).

Имея дело с телом, вместо поля локальных деформаций H определим единообразную отсчетную [13] P , которая является полем $\mathfrak{B} \ni p \mapsto P_p \in \text{Hom}(T_p \mathfrak{B}; \mathcal{V})$ локальных конфигураций P_p . В свою очередь, каждая локальная конфигурация определяется равенством $P_p = T_p \mathfrak{K}^{(p)}$, где $\mathfrak{K}^{(p)} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$ — конфигурация, при которой инфинитезимальная окрестность точки p переходит в натуральное состояние. В явном виде, используя элементы семейства $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in S_R}$ и обозначая через $\mathfrak{K}_R$ конфигурацию, образом которой является форма S_R , получим

$$\mathfrak{K}^{(p)} = \gamma^{(\mathfrak{K}_R(p))} \circ \mathfrak{K}_R.$$

Тензору конторсии $\mathfrak{K}$ отвечает прямой образ $K : \mathfrak{B} \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$ в физическом пространстве $\mathcal{E}$ согласно следующей формуле:

$$Ku = P \mathfrak{K}_{p-1} u P^{-1} \quad (2.30)$$

для всех $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$. Будем называть поле $\mathbf{K}$ *конторсией* в смысле Нолла, поскольку оно соответствует полю $\mathbf{D}$, определенному в [13].

Для получения физической интерпретации поля конторсии рассмотрим частную единообразную отсчетную $\mathbf{P}$, для которой существует конфигурация $\mathfrak{K}$, удовлетворяющая следующему условию:

$$\mathbf{Q} = (T\mathfrak{K})\mathbf{P}^{-1} : \mathfrak{B} \ni \mathbf{p} \mapsto \mathbf{Q}_{\mathbf{p}} \in \mathbf{O}(3) \subset \text{End}(\mathcal{V}).$$

Иными словами, композиция полей $\mathbf{P}^{-1}$ и $T\mathfrak{K}$ есть не более, чем поле вращений в физическом пространстве $\mathcal{E}$. В этом случае действие конторсии по Ноллу $\mathbf{K}$ (2.30) дает выражение для производной¹³ $\mathbf{Q}$ [13]:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = -\mathbf{Q}^T(D_{\mathbf{P}}\mathbf{Q})\mathbf{u},$$

где $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$. С физической точки зрения последнее равенство может быть интерпретировано следующим образом: несовместность локальных деформаций возникает в силу несогласованности поворотов представительных объемов в физическом пространстве. Эта несогласованность ведет к невозможности собрать повернутые объемы в сплошное тело. Обратные вращения, которые делают подобную сборку возможной, определяются полем $\mathbf{Q}$. В свою очередь, темп изменения значений $\mathbf{Q}$ относительно пространственных сдвигов определяется конторсией по Ноллу $\mathbf{K}$.

2.7. Восстановление поля локальных деформаций по известным метрике и кручению

До сих пор поле локальных деформаций $\mathbf{H}$ предполагалось известным. По нему синтезировались метрика $\mathbf{G}$ и связность ∇ , определяющие геометрию отсчетной формы $\mathbf{S}_R$. Отклонение этой геометрии от евклидовой (а с физической точки зрения степень несовместности) определялось тензорными полями кручения, кривизны и неметричности. Рассмотрим теперь обратную задачу. Предположим, что известны: 1) материальная метрика $\mathbf{G}$ и 2) меры несовместности локальных деформаций. Поставим целью восстановить по этим данным поле $\mathbf{H}$. В дальнейших рассуждениях ограничимся случаем связности Вайценбока.

Пусть известны метрика $\mathbf{G}$ и тензорное поле третьего ранга $\mathfrak{T}$, которое ассоциируется с кручением связности Вайценбока (в частности, в координатном репере, $\mathfrak{T}^A_{BC} = -\mathfrak{T}^A_{CB}$). Используя поля $\mathbf{G}$ и $\mathfrak{T}$, из формулы (2.27) (в которой надо положить $\mathfrak{Q} = 0$) получаем значения полей Γ^A_{BC} — коэффициентов связности. В дальнейшем будем полагать эти поля известными.

Формула (2.15) влечет соотношения

$$\partial_B \mathbf{H}^D_C = \Gamma^A_{BC} \mathbf{H}^D_A, \quad B, C, D = 1, \dots, n, \quad (2.31)$$

которые образуют систему n^3 линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка относительно n^2 неизвестных $\mathbf{H}^A_B$ — компонент поля локальных деформаций. Поскольку число уравнений больше числа неизвестных, то для однозначного решения системы (2.31) должны выполняться некоторые условия интегрируемости. Эти условия вытекают из того, что функции $\mathbf{H}^A_B$ удовлетворяют равенствам $\partial_B \partial_L \mathbf{H}^D_C = \partial_L \partial_B \mathbf{H}^D_C$:

$$\partial_L (\Gamma^A_{BC} \mathbf{H}^D_A) = \partial_B (\Gamma^A_{LC} \mathbf{H}^D_A). \quad (2.32)$$

Используя правило дифференцирования произведения и равенства (2.31), из (2.32) получаем соотношения

$$\mathbf{H}^D_A \mathfrak{R}^A_{LBC} = 0,$$

где $\mathfrak{R}^A_{LBC}$ — компоненты тензора кривизны $\mathfrak{R}$. Таким образом, условия интегрируемости равносильны равенству

$$\mathfrak{R} = 0, \quad (2.33)$$

что геометрически очевидно: если Γ^A_{BC} — коэффициенты связности Вайценбока, то определяемая ими кривизна должна быть равна нулю [66].

Предположим, что условие (2.33) выполнено. Для интегрирования системы (2.31) зафиксируем некоторую точку $\mathbf{X}_0 \in M_R$ и выберем произвольную гладкую кривую¹⁴

$$\chi :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M_R, \quad \mathbf{x}^A = \chi^A(s), \quad A = 1, \dots, n$$

такую, что $\chi(0) = \mathbf{X}_0$. Домножая обе части (2.31) на компоненты $\dot{\chi}^B$ вектора скорости χ , получаем

$$\frac{d\mathbf{H}^D_C}{ds} = \Gamma^A_{BC} \dot{\chi}^B \mathbf{H}^D_A, \quad C, D = 1, \dots, n.$$

¹³Здесь $D_{\mathbf{P}}\psi = (T\psi) \circ \mathbf{P}^{-1}$ для произвольного поля $\psi : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{W}$, где $\mathcal{W}$ обозначает $\mathcal{E}$, $\mathcal{V}$, или $\text{End}(\mathcal{V})$.

¹⁴Поскольку M_R как всякое многообразие линейно связно, хотя бы одна такая кривая всегда имеется.

В матричном виде

$$\frac{dH}{ds} = H.P, \quad (2.34)$$

где $H = [H^A_B]$ — неизвестная матрица, а $P = [\Gamma^A_{BC} \dot{X}^B]$ — известная матрица коэффициентов. Таким образом, система (2.31) уравнений в частных производных преобразована к одному матричному обыкновенному дифференциальному уравнению (2.34) вдоль кривой χ . Решение этого уравнения может быть представлено в виде [67]

$$H = H_0 \cdot \Omega(s), \quad (2.35)$$

где $H_0 = H(0)$ — заданное значение матрицы H в точке X_0 , а $\Omega(s)$ — матрицант, представленный рядом

$$\Omega(s) = E + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0 < s_1 < \dots < s_n < s} \prod_{k=1}^n P(s_k) \prod_{k=1}^n ds_k, \quad (2.36)$$

в котором E — единичная матрица.

Таким образом, при условии (2.33) решение системы (2.31) не зависит от выбора кривой, соединяющей точки X_0 и X , и однозначно определяется соотношениями (2.35) и (2.36) с точностью до жесткого вращения.

3. Обобщенная деформация и ее градиент

3.1. Отображение уплотнения

Поскольку неевклидова единообразная форма $S_R = (M_R, G, \nabla)$ синтезируется относительно некоторой наблюдаемой евклидовой формы $S_R = (M_R, g|_S, \nabla|_S)$, можно ожидать, что формы S_R и S_R как специфические геометрические структуры над общим многообразием M_R связаны между собой посредством некоторого отображения. Действительно, вернемся к примеру криволинейной мембраны (раздел 1.5), формы которой изображены на рис. 1.2. Неевклидова отсчетная форма S_R мембраны является полусферой, в то время как евклидовы формы представлены регионами евклидовой плоскости. Одним из этих регионов является форма S_R . В рамках рис. 1.2 деформацию неевклидовой отсчетной формы S_R в некоторую евклидову форму S можно представить в виде двух последовательных трансформаций. В ходе первой трансформации полусфера «уплощается» на физическую плоскость таким образом, чтобы полученный плоский регион совпадал с S_R . Вторая трансформация преобразует евклидову форму S_R в евклидову форму S и является, таким образом, обычной евклидовой деформацией.

Обобщая пример с криволинейной мембраной на случай произвольного деформируемого твердого тела, определим отображение $\lambda_R : S_R \rightarrow S_R$, которое заменяет неевклидову геометрию над многообразием M_R на геометрию над тем же многообразием, индуцированную из физического пространства $\mathcal{E}$. В пределах гладких структур отображение λ_R является не чем иным, как тождественным отображением $\text{Id}_{M_R} : M_R \rightarrow M_R$ на общем для рассматриваемых геометрических пространств многообразии M_R . Вместе с тем относительно геометрических структур над этим многообразием λ_R не является тождественным отображением: оно преобразует каждую точку X неевклидовой формы с ее окрестностью и геометрией, индуцированной на эту окрестность, в ту же самую точку X с той же окрестностью, но геометрия которой индуцирована из объемлющего пространства $\mathcal{E}$. Будем называть отображение λ_R *отображением уплотнения* [26].

Для формальной интерпретации отображения уплотнения λ_R представляется уместным использовать подход теории категорий. Поскольку этот подход не является общепринятым в механике континуума, изложим его более детально. Произвольная категория Cat состоит из следующих двух совокупностей [68]:

- Класа $\text{Ob}(\text{Cat})$, элементы которого называются объектами категории Cat .
- Класа $\text{Hom}(\text{Cat})$, элементы которого называются морфизмами категории Cat .

Каждому морфизму $f \in \text{Hom}(\text{Cat})$ соответствует пара (X, Y) , состоящая из объектов X и Y . Первый из них называется объектом отправления, а второй — объектом прибытия морфизма¹⁵ f . Кроме того, для любых объектов $X, Y, Z \in \text{Ob}(\text{Cat})$ существует бинарная операция $\circ : \text{Hom}_{\text{Cat}}(X; Y) \times \text{Hom}_{\text{Cat}}(Y; Z) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Cat}}(X; Z)$, называемая композицией. Здесь символ $\text{Hom}_{\text{Cat}}(X; Y)$ обозначает класс всех морфизмов из Cat с объектом отправления X и объектом прибытия Y . Предполагается, что композиция удовлетворяет следующим двум аксиомам:

1. Ассоциативность: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

¹⁵В этом случае принято использовать обозначение $f : X \rightarrow Y$.

2. Существование нейтрального элемента: для любого объекта $X \in \text{Ob}(\text{Cat})$ существует морфизм $\text{Id}_X \in \text{Hom}_{\text{Cat}}(X; X)$, называемый тождественным морфизмом, такой, что $\text{Id}_Y \circ f = f \circ \text{Id}_X = f$ для любого $f \in \text{Hom}_{\text{Cat}}(X; Y)$.

Замечание 7. В определении категории используется терминология, принятая в аксиоматической теории множеств [69]. В рамках нее различаются множества и классы, где последние представляют структуру более общую, нежели множества, что позволяет избежать проблемы с известными противоречиями («множество всех множеств» и др.).

Замечание 8. В общем случае морфизм не является отображением в привычном понимании этого термина. Например, можно рассмотреть категорию, представленную частично упорядоченным множеством $(X, \leq)$. Объектами этой категории являются элементы множества X , а морфизмами — упорядоченные пары (x, y) :

$$x \rightarrow y \quad \text{если} \quad x \leq y.$$

Композиция двух морфизмов осуществляется удалением среднего элемента по аксиоме транзитивности отношения $\leq$, а тождественным морфизмом является пара (x, x) .

Таким образом, морфизм является обобщением понятия отображения. В работе используется более узкая интерпретация морфизма как отображения с некоторыми свойствами, одинаковыми для всех морфизмов рассматриваемой категории. Такое представление позволяет с единых позиций говорить, в частности, о стирании геометрических свойств, что будет рассмотрено далее.

Пусть C_1 и C_2 — произвольные категории. Функтором (ковариантным функтором) из C_1 в C_2 называется совокупность отображений (обычно обозначаемых одним и тем же символом $\mathcal{F}$) таких, что имеется отображение $\mathcal{F} : \text{Ob}(C_1) \rightarrow \text{Ob}(C_2)$ и для всех $X, Y \in \text{Ob}(C_1)$ имеется другое отображение $\mathcal{F} : \text{Hom}_{C_1}(X; Y) \rightarrow \text{Hom}_{C_2}(\mathcal{F}(X); \mathcal{F}(Y))$ такие, что

$$\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g), \quad \mathcal{F}(\text{Id}_X) = \text{Id}_{\mathcal{F}(X)},$$

для всех $f \in \text{Hom}_{C_1}(X; Y)$ и $g \in \text{Hom}_{C_1}(Y; Z)$. Весь функтор обозначается символом $\mathcal{F} : C_1 \rightarrow C_2$.

В рамках формализма теории категорий отображение уплощения можно охарактеризовать следующим образом. Пусть Geom — категория, объектами которой являются геометрические пространства¹⁶ (M, g, ∇) , а морфизмами которой являются гладкие отображения. Далее, пусть Diff — другая категория. Ее объектами являются гладкие многообразия, а морфизмами — гладкие отображения. Определим стирающий функтор $\mathcal{F} : \text{Geom} \rightarrow \text{Diff}$, который «стирает» информацию о геометрии подлежащего многообразия, т. е. если $f : (M_1, g_1, \nabla_1) \rightarrow (M_2, g_2, \nabla_2)$ — морфизм категории Geom , то $\mathcal{F}(f) : M_1 \rightarrow M_2$ является морфизмом категории Diff . Здесь морфизм f преобразует точки и подмножества одного геометрического пространства в точки и подмножества другого геометрического пространства, в то время как морфизм $\mathcal{F}(f)$ действует лишь на уровне подлежащих гладких многообразий. Тогда, используя стирающий функтор, определим отображение уплощения λ_R как морфизм $\lambda_R : (M_R, g, \nabla) \rightarrow (M_R, g|_{S_R}, \nabla|_{S_R})$, применение стирающего функтора к которому дает тождественный морфизм, то есть $\mathcal{F}(\lambda_R) = \text{Id}_{M_R} : M_R \rightarrow M_R$.

3.2. Обобщенная деформация

Использование неевклидовой формы позволяет определить кинематику самонапряженного тела подобно классическому подходу. Действительно, пусть S_R — неевклидова форма, рассматриваемая как образ вложения $\varkappa_R : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}$ тела $\mathfrak{B}$ в соответствующий неевклидов аналог $\mathbb{R}$ физического пространства¹⁷. Если $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$ — некоторая «евклидова» конфигурация, образ которой равен $\mathcal{S}$, то под обобщенной деформацией неевклидовой отсчетной формы S_R в евклидову актуальную форму $\mathcal{S}$ будем понимать композицию

$$\lambda := \varkappa \circ \varkappa_R^{-1} : S_R \rightarrow \mathcal{S}. \quad (3.1)$$

С другой стороны, используя отображение уплощения, можно представить такое же отображение λ как композицию

$$\lambda = \gamma \circ \lambda_R : S_R \rightarrow \mathcal{S}. \quad (3.2)$$

Здесь $\lambda_R : S_R \rightarrow \mathcal{S}_R$ — отображение уплощения, а $\gamma : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}$ — «евклидова» деформация. Таким образом, деформация неевклидовой отсчетной формы в евклидову актуальную форму состоит из уплощения неевклидовой формы, т. е. вложения в евклидово пространство $\mathcal{E}$, и последующей евклидовой деформации, которая преобразует формы в евклидовом пространстве.

¹⁶В упорядоченном наборе (M, g, ∇) первый элемент соответствует подлежащему многообразию, а g и ∇ есть, соответственно, метрика и связность на M .

¹⁷На рис. 1.2 пространству $\mathbb{R}$ соответствует сфера.

Соотношение (3.2) могло бы показаться тривиальной переформулировкой равенства (3.1), в которой λ_R — тождественное отображение. В действительности, с геометрической точки зрения это не так. Для уяснения обстоятельств, позволивших перейти к равенству (3.2), следует все отображения, составляющие композицию (3.1), рассматривать как морфизмы категории $\mathbf{Geom}$. Далее, вспомним, что евклидова форма $\mathcal{S}_R$ является образом евклидовой конфигурации $\varkappa_R : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$ (обратите внимание, здесь нижний индекс R , а не $\mathbb{R}$). Тогда, вставляя тождественный морфизм $\text{Id}_{\mathfrak{B}} = \widehat{\varkappa}_R^{-1} \circ \widehat{\varkappa}_R : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$ между отображениями $\widehat{\varkappa}_R^{-1}$ и $\widehat{\varkappa}$, получаем из (3.1) формулу (3.2):

$$\lambda = \widehat{\varkappa} \circ \widehat{\varkappa}_R^{-1} \circ \widehat{\varkappa}_R \circ \widehat{\varkappa}_R^{-1} = \gamma \circ \lambda_R,$$

где $\gamma = \widehat{\varkappa} \circ \widehat{\varkappa}_R^{-1} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}$ — деформация евклидовых форм, а $\lambda_R := \widehat{\varkappa}_R \circ \widehat{\varkappa}_R^{-1} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}_R$ — искомое отображение уплощения.

Таким образом, в рамках категории $\mathbf{Geom}$ отображение λ переводит неевклидово отсчетное состояние в актуальное евклидово напряженное состояние. Каждое из этих состояний формализуется в чисто геометрических терминах, а поля, характеризующие отсчетное и актуальное состояния, трансформируются друг в друга посредством операций прямого и обратного образов. Вместе с тем стирающий функтор $\mathcal{F}$, примененный к λ , дает морфизм категории $\mathbf{Diff}$, $\mathcal{F}(\lambda) : M_R \rightarrow M$, между подлежащими многообразиями форм, в рамках которого операции прямого и обратного образов пересчитывают лишь дифференциальные свойства полей на подлежащих многообразиях.

3.3. Координатное представление обобщенной деформации

Рассмотрим представление обобщенной деформации $\lambda : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}$ в локальных координатах. Хотя λ является гладким отображением многообразий и его координатное представление может быть рассмотрено с общих позиций теории гладких многообразий, имеется особенность, связанная с тем, что подструктуры M_R и M области определения $\mathcal{S}_R = (M_R, \mathbf{G}, \nabla)$ и области прибытия $\mathcal{S} = (M, \mathbf{g}|_{\mathcal{S}}, \nabla|_{\mathcal{S}})$ являются n -мерными подмногообразиями $\mathcal{E}$.

Для многообразия M_R существует семейство $\{(U_X^R, \varphi_X^R)\}_{X \in M_R}$ карт из максимального атласа пространства $\mathcal{E}$ такое, что [39, теорема 5.8]

- для любой точки $X \in M_R$ справедливо включение $X \in U_X^R$, и, таким образом, семейство $\{U_X^R\}_{X \in M_R}$ покрывает M_R ,
- пересечение $M_R \cap U_X^R$ является n -срезкой U_X^R .

Последнее условие означает, что для всякой точки $Y \in U_X^R$ образ $\varphi_X(Y)$ имеет нулевыми последние $3 - n$ координат¹⁸. Таким образом, семейство $\mathbb{A}_{M_R} = \{(M_R \cap U_X^R, \pi \circ \varphi_X^R|_{M_R \cap U_X^R})\}_{X \in M_R}$ является гладким атласом на M_R . Здесь $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$ — проекция на первые n координат. Отбрасывая повторяющиеся карты $(M_R \cap U_X^R, \pi \circ \varphi_X^R|_{M_R \cap U_X^R})$ и обозначая через $U_\alpha = M_R \cap U_X^R$, $\varphi_\alpha = \pi \circ \varphi_X^R|_{M_R \cap U_X^R}$, элементы оставшихся карт, окончательно приходим к следующему представлению для атласа $\mathbb{A}_{M_R}$: $\mathbb{A}_{M_R} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$. Хотя упоминание о гладкой структуре объемлющего пространства было стерто из этого атласа, следует иметь в виду, что на самом деле карты этого атласа были получены из карт физического пространства. Аналогичные рассуждения, примененные к многообразию M , дают атлас $\mathbb{A}_M = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in J}$.

Пусть теперь $X \in \mathcal{S}_R$ — некоторая точка неевклидовой формы. В силу непрерывности λ , существует пара карт (U, φ) и (V, ψ) из гладких структур $\mathcal{S}_R$ и $\mathcal{S}$ такая, что $X \in U$ и $\lambda(U) \subset V$. Тогда композиция

$$\tilde{\lambda} = \psi \circ \lambda \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V), \quad \tilde{\lambda} : (q^1, \dots, q^n) \mapsto (q^1, \dots, q^n), \quad (3.3)$$

соответствует координатному представлению λ в окрестности X . По определению, она является отображением между открытыми подмножествами $\mathbb{R}^n$.

3.4. Некоторые замечания о представлении реперов

Поскольку неевклидова форма $\mathcal{S}_R$ рассматривается как отдельное многообразие, приходится определять абстрактные координатный репер $(\partial_{q^A})_{A=1}^n$ и корепер $(dq^A)_{A=1}^n$, порожденные локальными координатами $(q^A)_{A=1}^n$. Иначе обстоит дело в случае евклидовой формы $\mathcal{S}$, поскольку она рассматривается как подпространство физического пространства $\mathcal{E}$.

Локальные координаты $(q^A)_{A=1}^n$ на $\mathcal{S}$ порождают абстрактные поля $(\partial_{q^A})_{A=1}^n$ и $(dq^A)_A^n$ координатного репера и корепера. С другой стороны, каноническая инъекция $\iota_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E}$ индуцирует касательное отображение $T\iota_{\mathcal{S}} : T\mathcal{S} \rightarrow T\mathcal{E}$, которое является инъективным линейным отображением на каждом

¹⁸Для трехмерного тела ($n = 3$) локальные координаты точек евклидовых форм полностью определяются тройками чисел.

касательном слое: $T_x \iota_S \in \text{Hom}(T_x \mathcal{S}; \mathcal{V})$. По этой причине касательное пространство $T_x \mathcal{S}$ может быть отождествлено с n -мерным векторным подпространством $\mathcal{V}$. В силу этого, полагаем $\mathbf{e}_A|_x := T_x \iota_S[\partial_{q^A}]$, что приводит к семейству $(\mathbf{e}_A)_{A=1}^n$ векторных полей $\mathbf{e}_A : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{V}$, касательных к $\mathcal{S}$. Это семейство есть не более чем образ абстрактного локального репера $(\partial_{q^A})_{A=1}^n$ при вложении многообразия M , подлежащего для $\mathcal{S}$, в физическое пространство.

3.5. Градиент обобщенной деформации

Если $\lambda : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}$ — обобщенная деформация и если $\mathbf{X} \in \mathcal{S}_R$ — некоторая точка отсчетной формы, то обобщение градиента евклидовой деформации представлено касательным отображением $T_{\mathbf{X}} \lambda \in \text{Hom}(T_{\mathbf{X}} \mathcal{S}_R; T_{\lambda(\mathbf{X})} \mathcal{S})$. Это — линейное отображение, которое в координатах $(q^A)_{A=1}^n$ и $(q^A)_{A=1}^n$ на формах $\mathcal{S}_R$ и $\mathcal{S}$, определенных в окрестностях $\mathbf{X}$ и $\lambda(\mathbf{X})$ соответственно, имеет следующее диадное представление:

$$T_{\mathbf{X}} \lambda = \left. \frac{\partial q^A}{\partial Q^B} \right|_{\mathbf{X}} \mathbf{e}_A \otimes dQ^B,$$

где $\frac{\partial q^A}{\partial Q^B}$ — частные производные координатного представления (3.3). Таким образом, приходим к семейству $\{T_{\mathbf{X}} \lambda\}_{\mathbf{X} \in \mathcal{S}_R}$ касательных отображений. По нему синтезируется глобальное касательное отображение $T\lambda : T\mathcal{S}_R \rightarrow T\mathcal{S}$, которое действует между касательными расслоениями $T\mathcal{S}_R$ и $T\mathcal{S}$.

Можно получить простейшее координатное представление для градиента $T\lambda$ обобщенной деформации, которое аналогично соответствующему представлению градиента евклидовой деформации, используемому в ряде монографий по теории упругости [50]. Это представление может быть получено путем переноса локальных координат из актуальной формы $\mathcal{S}$ на отсчетную $\mathcal{S}_R$ следующим способом.

Пусть $\mathbb{A}_{\mathcal{S}} = \{(V_{\beta}, \psi_{\beta})\}_{\beta \in J}$ — гладкий атлас на $\mathcal{S}$, индуцированный криволинейными координатами из $\mathcal{E}$. Здесь множество $V_{\beta} \subset \mathcal{S}$ открыто в $\mathcal{S}$, а вся совокупность $\{V_{\beta}\}_{\beta \in J}$ образует открытое покрытие $\mathcal{S}$. Более того, для любого $\beta \in J$ отображение

$$\psi_{\beta} : V_{\beta} \rightarrow O_{\beta}, \quad \psi_{\beta}(\mathbf{x}) = (q^1, \dots, q^n)$$

является гомеоморфизмом между V_{β} и открытым подмножеством O_{β} пространства $\mathbb{R}^n$.

Для каждого $\beta \in J$ положим

$$U_{\beta} = \lambda^{-1}(V_{\beta})$$

и

$$\varphi_{\beta} = \psi_{\beta} \circ \lambda|_{U_{\beta}} : U_{\beta} \rightarrow O_{\beta}.$$

Тогда $U_{\beta} \subset \mathcal{S}_R$ — открытое множество, семейство $\{U_{\beta}\}_{\beta \in J}$ образует покрытие $\mathcal{S}_R$, а φ_{β} — гомеоморфизм. Следовательно, совокупность $\mathbb{A}_{\mathcal{S}_R} = \{(U_{\beta}, \varphi_{\beta})\}_{\beta \in J}$ является гладким атласом на $\mathcal{S}_R$. Это означает, что точки из $\mathcal{S}_R$ и $\mathcal{S}$ характеризуются одинаковыми координатами $(q^A)_{A=1}^n$. Рисунок 3.1 иллюстрирует идею такой арифметизации $\mathcal{S}_R$.

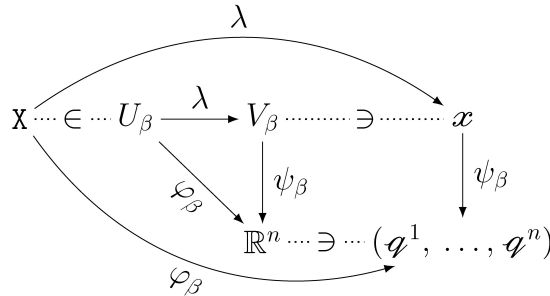


Рис. 3.1. Специальная арифметизация неевклидовой формы $\mathcal{S}_R$
 Fig. 3.1. Special arithmetization of non-Euclidean shape $\mathcal{S}_R$

Рассмотрим обобщенную деформацию λ в паре карт $(U_{\beta}, \varphi_{\beta})$ и $(V_{\beta}, \psi_{\beta})$:

$$\tilde{\lambda} = \psi_{\beta} \circ \lambda \circ \varphi_{\beta}^{-1}.$$

Раскрывая определение φ_{β} и принимая во внимание, что

$$\lambda \circ \hat{\lambda}^{-1}|_{V_{\beta}} = \iota_{V_{\beta}} : V_{\beta} \hookrightarrow \mathcal{S},$$

где $\iota_{V_{\beta}}$ — каноническая инъекция, получаем

$$\tilde{\lambda} = \psi_{\beta} \circ \iota_{V_{\beta}} \circ \psi_{\beta}^{-1} = \text{Id}_{O_{\beta}}.$$

Следовательно, координатное представление λ является тождественным отображением.

Пусть $(e_A)_{A=1}^n$ — поле локальных базисов, которое соответствует локальным координатам $(q^A)_{A=1}^n$ на $\mathcal{S}$, а $(\partial_{q^A})_{A=1}^n$ — локальный репер на $\mathcal{S}_R$, порожденный теми же локальными координатами $(q^A)_{A=1}^n$. Этим реперам соответствуют кореперы $(E^A)_{A=1}^n$ и $(dq^A)_{A=1}^n$. Поскольку относительно карт (U_β, φ_β) и (V_β, ψ_β) справедливо соотношение $\frac{\partial \lambda^A}{\partial q^B} = \delta_B^A$, то приходим к равенствам

$$T\lambda = \delta_B^A e_A \otimes dq^B = e_A \otimes dq^A.$$

Таким образом, матрица градиента в каждой точке неевклидовой формы совпадает с единичной матрицей.

3.6. Имплант

Главная линейная часть отображения λ_R в точке $X \in \mathcal{S}_R$ определяется касательным отображением, которое в настоящей работе обозначается через $K_X = T_X \lambda_R : T_X \mathcal{S}_R \rightarrow T_X \mathcal{S}$, где $X = \lambda_R(X)$. Следуя терминологии, используемой в монографии [18], будем называть отображение K_X *имплантом*. В локальных координатах имплант имеет следующее диадное представление:

$$K_X = \frac{\partial Q^A}{\partial q^B} E_A \otimes dq^B.$$

Здесь $(Q^A)_{A=1}^n$ — локальные координаты на неевклидовой форме $\mathcal{S}_R$, а $(q^A)_{A=1}^n$ — локальные координаты на евклидовой форме $\mathcal{S}_R$. Заметим, что хотя обе эти формы имеют одно и то же подлежащее многообразие M_R , локальные координаты на них могут быть выбраны различными. Семейство $(E_A)_{A=1}^n$ является полем локальных базисов на $\mathcal{S}_R$.

Поскольку по построению форма $\mathcal{S}_R$ глобально единообразна, имплант K_X преобразует инфинитезимальную единообразную окрестность точки X в инфинитезимальную неединую (в общем случае) окрестность точки $X = \lambda_R(X)$. Значит, имплант действует подобно обратному отображению к локальной деформации H_X , которая преобразует инфинитезимальную неединую окрестность в единообразную. Вместе с тем H_X^{-1} и K_X являются отображениями между разными евклидовыми векторными пространствами:

$$H_X^{-1} : (\mathcal{U}, g_U) \rightarrow (T_X M_R, g|_{M_R})$$

для обратного отображения к локальной деформации и

$$K_X : (T_X M_R, G_X) \rightarrow (T_X M_R, g|_{M_R}),$$

для импланта. В явном виде соотношение между имплантом и локальной деформацией может быть выражено как

$$H_X K_X = \tilde{I}_X,$$

где $\tilde{I}_X = e_A \otimes dq^A$ — изометрия. В этом диадном представлении семейство $(e_A)_{A=1}^n$ отвечает базису $\mathcal{U}$.

3.7. Сравнение с классическим подходом

Целесообразно сравнить подход, связанный с построением глобальной натуральной формы, со стандартными рассуждениями, в которых такая форма не используется. Классическая теория необратимых деформаций оперирует семейством $\{\mathcal{S}^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ евклидовых форм — образов разгрузочных деформаций $\gamma^{(X)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}^{(X)}$. Если $\mathcal{S}$ — актуальная форма, а $\gamma : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}$ — соответствующая деформация, то для каждой точки $X \in \mathcal{S}_R$ композиция

$$\chi^{(X)} = \gamma \circ [\gamma^{(X)}]^{-1} : \mathcal{S}^{(X)} \rightarrow \mathcal{S} \quad (3.4)$$

отвечает деформации, которая преобразует локально единообразную форму $\mathcal{S}^{(X)}$ в актуальную форму $\mathcal{S}$.

Переходя к касательному отображению в точке $Y \in \mathcal{S}_R$, получаем равенство

$$T_{\gamma^{(X)}(Y)} \chi^{(X)} = F_Y \circ T_{\gamma^{(X)}(Y)} [\gamma^{(X)}]^{-1} : T_{\gamma^{(X)}(Y)} \mathcal{S}^{(X)} \rightarrow T_{\gamma(Y)} \mathcal{S},$$

где $F_Y = T_Y \gamma$ — градиент деформации. Полагая теперь $Y = X$ и используя определение (2.2) локальной деформации, приходим к соотношению

$$D_X = F_X \circ H_X^{-1} : \mathcal{U} \rightarrow T_{\gamma(X)} \mathcal{S}. \quad (3.5)$$

Тензор D_X в левой части этой формулы определен как $D_X = T_{\gamma^{(X)}(Y)} \chi^{(X)}|_{Y=X}$. Будем называть его *полной дисторсией*.

Рассмотрим гиперупругое тело. Его отклик характеризуется плотностью упругой энергии (2.1), которую в рамках настоящих рассуждений можно представить следующей зависимостью:

$$w = W(X, D_X H_X).$$

Поскольку как форма $\mathcal{S}_R$, так и поле $\mathbf{H}$ фиксированы, можно положить

$$\widehat{W}(X, D_X) := W(X, D_X H_X),$$

и отклик принимает вид

$$w = \widehat{W}(X, D_X).$$

Таким образом, отклик был переопределен относительно семейства локально единообразных форм: аргументом отклика теперь является тензор полной дисторсии. Вместе с тем следует иметь в виду, что поле $\widehat{W}$ рассматривается на евклидовой «промежуточной» форме $\mathcal{S}_R$, которая в общем случае не единообразна.

Проведем то же самое рассуждение в рамках геометрического подхода. Соотношение (3.2) является аналогом для (3.4), а формула

$$T_X \lambda = F_X \circ K_X$$

служит аналогом для (3.5). Поскольку поля H_X^{-1} и K_X равны с точностью до изометрии $\tilde{I}_X$, можно считать тензоры D_X и $T_X \lambda$ также равными (что допустимо, ибо отклик инвариантен по отношению к изометрии). В этом случае¹⁹

$$w = \widehat{\widehat{W}}(X, T_X \lambda),$$

и отклик был переопределен относительно неевклидовой единообразной формы $\mathcal{S}_R$, т. е. полученная зависимость для отклика рассматривается не в точках самонапряженной евклидовой промежуточной формы $\mathcal{S}_R$, а в точках неевклидовой отсчетной формы.

Заключение

Дифференциально-геометрический язык может быть плодотворно использован для моделирования несовместных деформаций в твердых телах. Он позволяет, в частности, отказаться от явного использования семейства локально единообразных евклидовых форм, заменяя последнее одной неевклидовой единообразной формой. Благодаря такой замене удастся сохранить отсчетное описание состояния тела с несовместными деформациями, что дает, в свою очередь, возможность использовать привычную методологию нелинейной механики континуума.

Геометрия неевклидовой формы синтезируется на основе тензорного поля локальных деформаций (2.3), значение которого в каждой точке исходной формы является обратимым линейным оператором (2.2), переводящим представительный объем, окружающий эту точку, в натуральное состояние. Вместе с тем в классической литературе по теории дефектов (см., к примеру, [70]) отсутствует способ определения локальных деформаций, апеллирующий к некоторому эксперименту. Чтобы восполнить этот пробел, в работе развита идея локальной разгрузки.

Хотя риманова метрика на неевклидовой отсчетной форме однозначно восстанавливается по значениям поля локальных деформаций (формула (2.6)), для аффинной связности это не так. В работе рассмотрены различные способы синтеза материальной связности. Используя их, можно получить связность Леви-Чивита (с нулевыми кручением и неметричностью), связность Вайценбока (с нулевыми кривизной и неметричностью) и связность Вейля (с нулевым кручением). В рамках теории простых тел (т. е. тел, отклик которых характеризуется лишь первым градиентом деформации) при известном поле локальных деформаций $\mathbf{H}$ все эти связности совершенно равноправны и, по-видимому, нет никакого способа предпочесть одну связность другой, опираясь лишь на поле $\mathbf{H}$. Если же дополнительно известно, что в теле присутствуют дефекты определенного типа, то тогда удастся сделать однозначный выбор: связность Вайценбока соответствует непрерывному распределению дислокаций, связность Леви-Чивита характеризует тело с дисклинациями, а связность Вейля — тело с метрическими аномалиями.

Отличие одной связности от другой может быть охарактеризовано тензором конторсии (2.26), имеющим различный геометрический смысл для каждой пары материальных связностей. В настоящей работе в качестве одной из связностей выбиралась связность Леви-Чивита, которая сравнивалась с двумя другими связностями: Вайценбока и Вейля. Отличие связности Вайценбока от связности Леви-Чивита вызвано различными геометриями «в малом». В случае первой связности малый элемент тела является плоским, а в случае связности Леви-Чивита — искривленным.

¹⁹Заметим, что выполненные преобразования корректны в силу свойства локальности отклика.

В свою очередь, отличие связности Вейля от связности Леви-Чивита вызвано различным поведением римановой формы объема при ее параллельном переносе вдоль кривой на теле. Если на отсчетной форме задана связность Леви-Чивита, то форма объема ковариантно постоянна, т. е. не меняется при параллельном переносе. В случае связности Вейля это не так: форма объема эволюционирует при параллельном переносе вдоль кривой, что физически интерпретируется как наличие метрических аномалий (точечных дефектов, неоднородного поля температур).

Различие между тремя рассмотренными связностями несущественно в рамках функционала отклика, поскольку последний использует лишь метрическую информацию, которая одна и та же для всех связностей. Вместе с тем при формулировке уравнений баланса импульса в отсчетном описании появляются дополнительные слагаемые, которые могут быть интерпретированы как фиктивные силы, возникающие в силу наличия несовместных деформаций [26]. Для получения явного выражения этих фиктивных сил необходимо учесть контрсию, которая присутствует в выражениях для связностей Вайценбока и Вейля. Таким образом, связности Вайценбока и Вейля дают более полное описание несовместных деформаций, чем связность Леви-Чивита: вместе с метрическими данными они содержат информацию о пространственном расположении представительных объемов, что определяет дополнительную часть уравнений баланса импульса в отсчетном описании.

Процедура синтеза неевклидовой формы существенно опирается на выбор некоторой промежуточной формы, с которой стирается геометрия. Такой выбор неоднозначен и в общем случае может приводить к различным геометриям на теле. Вместе с тем при некоторых предположениях о связи полей локальных деформаций, соответствующих двум формам, геометрии на таких формах оказываются неразличимыми в том смысле, что соответствующие инварианты связностей отличаются на обратный образ.

Литература

- [1] Норден А.П. (ред.) Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. Москва: ГИТТЛ, 1956. 530 с. URL: <http://pyrkov-professor.ru/default.aspx?tabid=181&ArticleId=578>.
- [2] Capecchi D., Ruta G. Beltrami's continuum mechanics in non-Euclidean spaces // *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*. 2015. Vol. 15, Issue 1. Pp. 703–704. DOI: <http://doi.org/10.1002/pamm.201510341>.
- [3] Maugin G.A. *Continuum Mechanics Through the Twentieth Century: A Concise Historical Perspective*. Springer Dordrecht, 2013. XV, 314 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-94-007-6353-1>.
- [4] Born M. Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips // *Annalen der Physik*. 1909. Vol. 335, Issue 11, pp. 1–56. DOI: <http://doi.org/10.1002/andp.19093351102>.
- [5] Born M. Zur Kinematik des starren Körpers im System des Relativitätsprinzips // *Göttinger Nachrichten*. 1910. Vol. 2. Pp. 161–179. URL: https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN252457811_1910.
- [6] Herglotz G. Über die Mechanik des deformierbaren Körpers vom Standpunkte der Relativitätstheorie // *Annalen der Physik*. 1911. Vol. 341, Issue 13. Pp. 493–533. DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19113411303>.
- [7] Nordström G. De gravitatietheorie van Einstein en de mechanica van Herglotz // *Versl. Afdeeling Naturk.*. 1917. Vol. 25. Pp. 836–843.
- [8] Bilby B., Bullough R., Smith E. Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1955. Vol. 231, Issue 1185. Pp. 263–273. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.1955.0171>.
- [9] Kondo K. Non-Riemannian geometry of imperfect crystals from a macroscopic viewpoint. // In: Kondo K. (Ed.) *Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Science by Means of Geometry*, 1955. Vol. 1. Pp. 6–17. Division D-I, Gakujutsu Bunken Fukyo-Kai.
- [10] Kondo K. Geometry of elastic deformation and incompatibility // In: Kondo K. (Ed.) *Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Science by Means of Geometry*, 1955. Vol. 1. Pp. 5–17. Division C, Gakujutsu Bunken Fukyo-Kai.
- [11] Kondo K. Non-Riemannian and Finslerian approaches to the theory of yielding // *International Journal of Engineering Science*. 1963. Vol. 1, Issue 1. Pp. 71–88. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(63\)90025-9](https://doi.org/10.1016/0020-7225(63)90025-9).
- [12] Kondo K. On the analytical and physical foundations of the theory of dislocations and yielding by the differential geometry of continua // *International Journal of Engineering Science*. 1964. Vol. 2, Issue 3. Pp. 219–251. DOI: [http://doi.org/10.1016/0020-7225\(64\)90022-9](http://doi.org/10.1016/0020-7225(64)90022-9).
- [13] Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1967. Vol. 27. Issue 1. Pp. 1–32. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF00276433>.

- [14] Wang C.-C. On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1967. Vol. 27. Issue 1. Pp. 33–94. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF00276434>.
- [15] Maugin G.A. *Material inhomogeneities in elasticity*. New York: CRC Press, 1993. 292 p. DOI: <http://doi.org/10.1201/9781003059882>.
- [16] Marsden J.E., Hughes T.J. *Mathematical foundations of elasticity*. New York: Courier Corporation, 1994. 576 p. URL: https://authors.library.caltech.edu/25074/1/Mathematical_Foundations_of_Elasticity.pdf.
- [17] Epstein M. *The Geometrical Language of Continuum Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 312 pp. DOI: <http://doi.org/10.1017/cbo9780511762673>.
- [18] Epstein M., Elzanowski M. *Material inhomogeneities and their evolution: A geometric approach*. Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007. 261 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-540-72373-8>.
- [19] Ozakin A., Yavari A. A geometric theory of thermal stresses // *Journal of Mathematical Physics*. 2010. Vol. 51, Issue 3. P. 032902. DOI: <http://dx.doi.org/10.1063/1.3313537>.
- [20] Yavari A., Goriely A. Riemann–Cartan Geometry of Nonlinear Dislocation Mechanics // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 2012. Vol. 205, Issue 1. Pp. 59–118. DOI: <http://doi.org/10.1007/s00205-012-0500-0>.
- [21] Yavari A., Goriely A. Weyl geometry and the nonlinear mechanics of distributed point defects // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2012. Vol. 468, Issue 2148. Pp. 3902–3922. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.2012.0342>.
- [22] Sozio F., Yavari A. Nonlinear mechanics of accretion // *Journal of Nonlinear Science*. 2019. Vol. 29, № 4. Pp. 1813–1863. DOI: <http://doi.org/10.1007/s00332-019-09531-w>.
- [23] Lychev S., Koifman K. *Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics*. Berlin: De Gruyter, 2018. 350 p. DOI: <http://doi.org/10.1515/9783110563214>.
- [24] Lychev S.A., Kostin G.V., Lycheva T.N., Koifman K.G. Non-Euclidean Geometry and Defected Structure for Bodies with Variable Material Composition // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1250. P. 012035. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1250/1/012035>.
- [25] Lychev S.A., Koifman K.G. Material Affine Connections for Growing Solids // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020. Vol. 41, No. 10. Pp. 2034–2052. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1995080220100121>.
- [26] Lychev S. A., Koifman K. G. Contorsion of Material Connection in Growing Solids // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021. Vol. 42, No. 8. Pp. 1852–1875. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1995080221080187>.
- [27] Edgar R.G. A Review of Bondi-Hoyle-Lyttleton Accretion // *New Astronomy Reviews*. 2004. Vol. 48. Pp. 843–859. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.newar.2004.06.001>.
- [28] Lander S.K., Andersson N., Antonopoulou D., Watts A.L. Magnetically driven crustquakes in neutron stars // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2015. Vol. 449, Issue 2. Pp. 2047–2058. DOI: <http://doi.org/10.1093/mnras/stv432>.
- [29] Prasanna A. The Role of Space-Time Curvature in the Study of Plasma Processes Near Neutron Stars and Black Holes // *Bulletin of the Astronomical Society of India*, 1978. Vol. 6, Issue 88. URL: https://www.researchgate.net/publication/234299037_The_Role_of_Space-Time_Curvature_in_the_Study_of_Plasma_Processes_Near_Neutron_Stars_and_Black_Holes.
- [30] Epstein M., Burton D.A., Tucker R. Relativistic anelasticity // *Classical and Quantum Gravity*. 2006. Vol. 23, No. 10. Pp. 3545–3571. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/23/10/020>.
- [31] Weingarten J. Sulle superficie di discontinuità nella teoria della elasticità dei corpi solidi // *Rend. Lincei, Serie 5a*, 1901. Vol. X. Pp. 57–60. URL: <https://zbmath.org/32.0799.01>.
- [32] Volterra V. Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes // *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 1907. 3-e série, Vol. 24. Pp. 401–517. DOI: <http://doi.org/10.24033/asens.583>.
- [33] Frenkel J. Zur Theorie der Elastizitätsgrenze und der Festigkeit kristallinischer Körper // *Zeitschrift für Physik*, 1926. Vol. 37, No. 7-8. Pp. 572–609. DOI: <http://doi.org/10.1007/bf01397292>.
- [34] Orowan E. Zur Kristallplastizität. I // *Zeitschrift für Physik*, 1934. Vol. 89, No. 9-10. Pp. 605–613. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF01341478>.
- [35] Taylor G.I. The Mechanism of Plastic Deformation of Crystals. Part I. Theoretical // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1934. Vol. 145, Issue 855. Pp. 362–387. DOI: <http://doi.org/10.1098/RSPA.1934.0106>.
- [36] Taylor G.I. The Mechanism of Plastic Deformation of Crystals. Part II. Comparison with Observations // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1934. Vol. 145, Issue 855. Pp. 388–404. DOI: <http://doi.org/10.1098/RSPA.1934.0107>.
- [37] Polanyi M. Über eine Art Gitterstörung, die einen Kristall plastisch machen könnte // *Zeitschrift für Physik*, 1934. Vol. 89, No. 9-10. Pp. 660–664. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF01341481>.

- [38] Eckart C. The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and anelasticity // *Physical Review*, 1948. Vol. 73. Issue 4. Pp. 373–382. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRev.73.373>.
- [39] Lee J.M. *Introduction to Smooth Manifolds*. New York: Springer, 2012. URL: <http://sites.math.washington.edu/lee/Books/ISM>.
- [40] Rudolph G., Schmidt M. *Differential Geometry and Mathematical Physics. Part I. Manifolds, Lie Groups and Hamiltonian Systems*. New York: Springer Science+Business Media Dordrecht, 2013. 762 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-94-007-5345-7>.
- [41] Постников М.М. *Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра*. Москва: URSS, 2017. 400 с. URL: <http://alexandr4784.narod.ru/pmmgeo2.html>.
- [42] Постников М.М. *Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия*. Москва: URSS, 2017. 416 с. URL: <http://alexandr4784.narod.ru/pmmgeo1.html>.
- [43] Honerkamp J., Römer H. *Theoretical Physics: A Classical Approach*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1993. Available at: <https://books.google.ru/books?id=TXn1CAAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=ru#v=onepage&q&f=false>.
- [44] Truesdell C., Noll W. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Antman S.S. (Ed.). New York: Springer Science & Business Media, 2004. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-662-10388-3>.
- [45] Gurtin M.E., Fried E., Anand L. *The mechanics and thermodynamics of continua*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 718 p. DOI: <http://doi.org/10.1017/cbo9780511762956>.
- [46] Noll W. The Foundations of Classical Mechanics in the Light of Recent Advances in Continuum Mechanics // In: *The Foundations of Mechanics and Thermodynamics*. Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 31–47. DOI: http://doi.org/10.1007/978-3-642-65817-4_2.
- [47] Lee J.M. *Introduction to Topological Manifolds*. New York: Springer, 2011. URL: https://archive.org/details/springer_10.1007-978-0-387-22727-6.
- [48] Lee J.M. *Introduction to Riemannian Manifolds*. Cham: Springer, 2018. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-319-91755-9>.
- [49] Yang W.H., Feng W.W. On Axisymmetrical Deformations of Nonlinear Membranes // *Journal of Applied Mechanics*, 1970. Vol. 37, Issue 4. Pp. 1002–1011. DOI: <http://doi.org/10.1115/1.3408651>.
- [50] Лурье А.И. *Нелинейная теория упругости*. Москва: Наука, 1980. 512 с. URL: <https://libcats.org/book/449646>.
- [51] Жермен П. *Курс механики сплошных сред*. Москва: Высшая школа, 1983. 248 с. URL: <https://libcats.org/book/757877>.
- [52] Teodosiu C. *Elastic Models of Crystal Defects*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1982. 336 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-662-11634-0>.
- [53] Yavari A. Compatibility Equations of Nonlinear Elasticity for Non-Simply-Connected Bodies // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2013. Vol. 209. Pp. 237–253. DOI: <http://doi.org/10.1007/S00205-013-0621-0>.
- [54] Постников М.М. *Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия*. Москва: Факториал, 1998. 496 с. URL: <http://alexandr4784.narod.ru/pmm52.html>.
- [55] Chern S.S., Chen W.H., Lam K.S. *Lectures on Differential Geometry*. Singapore: World Scientific Publishing, 1999. 356 p. DOI: <https://doi.org/10.1142/3812>.
- [56] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия: Методы и приложения*. Москва: Наука, 1986. 760 с. URL: <http://alexandr4784.narod.ru/dubrovinn.html>.
- [57] Levi-Civita T. Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana // *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1916. Vol. 42, Issue 1. Pp. 173–204. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF03014898>.
- [58] Картан Э. *Пространства аффинной, проективной и конформной связности*. Казань: Изд-во Казанского университета, 1962. 210 с. URL: <https://libcats.org/book/444677>.
- [59] Fernandez O.E., Bloch A.M. The Weitzenböck Connection and Time Reparameterization in Nonholonomic Mechanics // *Journal of Mathematical Physics*, 2011. Vol. 52, Issue 1. P. 012901. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.3525798>.
- [60] Dhas B., Srinivasa A., Roy D. A Weyl geometric model for thermo-mechanics of solids with metrical defects // *arXiv*, 2019. DOI: <http://doi.org/10.48550/arXiv.1904.06956>.
- [61] Saa A. Volume-forms and minimal action principles in affine manifolds // *Journal of Geometry and Physics*, 1995. Vol. 15, Issue 2. Pp. 102–108. DOI: [http://doi.org/10.1016/0393-0440\(94\)00006-P](http://doi.org/10.1016/0393-0440(94)00006-P).
- [62] Miri M., Rivier N. Continuum elasticity with topological defects, including dislocations and extra-matter // *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2002. Vol. 35, Number 7. Pp. 1727–1739. DOI: <http://doi.org/10.1088/0305-4470/35/7/317>.
- [63] Roychowdhury A., Gupta A. Non-metric Connection and Metric Anomalies in Materially Uniform Elastic Solids // *Journal of Elasticity*, 2017. Vol. 126. Pp. 1–26. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10659-016-9578-1>.

- [64] Le K.C., Stumpf H. On the determination of the crystal reference in nonlinear continuum theory of dislocations // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1996. Vol. 452, Issue 1945. Pp. 359–371. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.1996.0019>.
- [65] Le K.C., Stumpf H. Nonlinear continuum theory of dislocations // International Journal of Engineering Science, 1996. Vol. 34, Issue 3. Pp. 339–358. DOI: [http://doi.org/10.1016/0020-7225\(95\)00092-5](http://doi.org/10.1016/0020-7225(95)00092-5).
- [66] Le K.C., Stumpf H. Strain measures, integrability condition and frame indifference in the theory of oriented media // International Journal of Solids and Structures, 1998. Vol. 35, Issues 9–10. Pp. 783–798. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00087-5](http://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00087-5).
- [67] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1966. 576 с. URL: <https://studfile.net/preview/4067051>.
- [68] Маклейн С. Категории для работающего математика. Москва: Физматлит, 2004. 154 с. URL: <https://djvu.online/file/LMm0QFShaD5Lq>.
- [69] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. Москва: Наука, 1971. 322 с. URL: <https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Mendelson1971ru.pdf>.
- [70] Крёнер Э. Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. Москва: Мир, 1965. 103 с. URL: <https://libcats.org/book/789336>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-53-87

Submitted: 30.09.2022

Revised: 16.11.2022

Accepted: 05.12.2022

S.A. Lychev

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation.

E-mail: lychevsa@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7590-1389>

K.G. Koifman

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

E-mail: koifman.konstantin@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7891-9995>

Reference shape of bodies with finite incompatible deformations

ABSTRACT

The work develops differential-geometric methods for modeling of finite incompatible deformations of hyperelastic solids. Deformation incompatibility can be caused, for example, by inhomogeneous temperature fields and distributed defects. As a result, residual stresses and distortion of geometric shape of the body occur. These factors determine the critical parameters of modern high-precision technologies, in particular, in additive manufacturing technologies. In this regard, the development of methods for their quantitative description is an urgent problem of modern solid mechanics.

The application of methods of differential geometry is based on the representation of a body as a smooth manifold equipped with a metric and a non-Euclidean connection. This approach allows one to interpret the body as a global stress-free shape and to formulate the physical response and material balance equations with respect to this shape. Within the framework of the geometric method, deformations are characterized by embeddings of non-Euclidean shape into physical space, which is still considered to be Euclidean. Measures of incompatibility are identified with the invariants of the affine connection, namely, torsion, curvature, and nonmetricity, and the connection itself is determined by the type of physical process.

Key words: hyperelasticity; incompatible deformations; residual stresses; non-Euclidean geometry; material metric; material connection; torsion; curvature; nonmetricity; moving frame method.

Citation. Lychev S.A., Koifman K.G. Reference shape of bodies with finite incompatible deformations. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 53–87. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-53-87>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Lychev S.A., Koifman K.G., 2022

Sergey A. Lychev — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, leading researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, bldg. 1, 101, Vernadsky Avenue, Moscow, 119526, Russian Federation.

Konstantin G. Koifman — tutor in mathematics, Bauman Moscow State Technical University, 5, 2nd Baumanskaya Street, Moscow, 105005, Russian Federation.

References

- [1] Norden A.P. (Ed.) On foundations of geometry. Collection of classical works on Lobachevsky geometry and development of its ideas. Moscow: GITTL, 1956, 530 p. Available at: <http://pyrkov-professor.ru/default.aspx?tabid=181&ArticleId=578>. (In Russ.)
- [2] Capecchi D., Ruta G. Beltrami's continuum mechanics in non-Euclidean spaces. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, vol. 15, issue 1, pp. 703–704. DOI: <http://doi.org/10.1002/pamm.201510341>.
- [3] Maugin G.A. *Continuum Mechanics Through the Twentieth Century: A Concise Historical Perspective*. Springer Dordrecht, 2013, XV, 314 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-94-007-6353-1>.
- [4] Born M. Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips. *Annalen der Physik*, 1909, vol. 335, issue 11, pp. 1–56. DOI: <http://doi.org/10.1002/andp.19093351102>.
- [5] Born M. Zur Kinematik des starren Körpers im System des Relativitätsprinzips. *Göttinger Nachrichten*, 1910, vol. 2, pp. 161–179. Available at: https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN252457811_1910.
- [6] Herglotz G. Über die Mechanik des deformierbaren Körpers vom Standpunkte der Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 1911, vol. 341, issue 13, pp. 493–533. DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19113411303>.
- [7] Nordström G. De gravitatietheorie van Einstein en de mechanica van Herglotz. *Versl. Afdeeling Naturk.*, 1917, vol. 25, pp. 836–843.
- [8] Bilby B., Bullough R., Smith E. Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1955, vol. 231, issue 1185, pp. 263–273. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.1955.0171>.
- [9] Kondo K. Non-Riemannian geometry of imperfect crystals from a macroscopic viewpoint. In: *Kondo K. (Ed.) Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Science by Means of Geometry*, 1955, vol. 1, pp. 6–17. Division D-I, Gakujutsu Bunken Fukyo-Kai.
- [10] Kondo K. Geometry of elastic deformation and incompatibility. In: *Kondo K. (Ed.) Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Science by Means of Geometry*, 1955, vol. 1, pp. 5–17. Division C, Gakujutsu Bunken Fukyo-Kai.
- [11] Kondo K. Non-Riemannian and Finslerian approaches to the theory of yielding. *International Journal of Engineering Science*, 1963, vol. 1, issue 1, pp. 71–88. DOI: [http://doi.org/10.1016/0020-7225\(63\)90025-9](http://doi.org/10.1016/0020-7225(63)90025-9).
- [12] Kondo K. On the analytical and physical foundations of the theory of dislocations and yielding by the differential geometry of continua. *International Journal of Engineering Science*, 1964, vol. 2, issue 3, pp. 219–251. DOI: [http://doi.org/10.1016/0020-7225\(64\)90022-9](http://doi.org/10.1016/0020-7225(64)90022-9).
- [13] Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1967, vol. 27, issue 1, pp. 1–32. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF00276433>.
- [14] Wang C.-C. On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1967, vol. 27, no. 1, pp. 33–94. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF00276434>.
- [15] Maugin G.A. *Material inhomogeneities in elasticity*. New York: CRC Press, 1993, 292 p. DOI: <http://doi.org/10.1201/9781003059882>.
- [16] Marsden J.E., Hughes T.J. *Mathematical foundations of elasticity*. New York: Courier Corporation, 1994. 576 p. Available at: https://authors.library.caltech.edu/25074/1/Mathematical_Foundations_of_Elasticity.pdf.
- [17] Epstein M. *The Geometrical Language of Continuum Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010, 312 pp. DOI: <http://doi.org/10.1017/cbo9780511762673>.
- [18] Epstein M., Elzanowski M. *Material inhomogeneities and their evolution: A geometric approach*. Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007. 261 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-540-72373-8>.
- [19] Ozakin A., Yavari A. A geometric theory of thermal stresses. *Journal of Mathematical Physics*, 2010, vol. 51, issue 3, p. 032902. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.3313537>.
- [20] Yavari A., Goriely A. Riemann–Cartan Geometry of Nonlinear Dislocation Mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2012, vol. 205, issue 1, pp. 59–118. DOI: <http://doi.org/10.1007/s00205-012-0500-0>.
- [21] Yavari A., Goriely A. Weyl geometry and the nonlinear mechanics of distributed point defects. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2012, vol. 468, issue 2148, pp. 3902–3922. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.2012.0342>.

- [22] Sozio F., Yavari A. Nonlinear mechanics of accretion. *Journal of Nonlinear Science*, 2019, vol. 29, no. 4, pp. 1813–1863. DOI: <http://doi.org/10.1007/s00332-019-09531-w>.
- [23] Lychev S., Koifman K. Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics. Berlin: De Gruyter, 2018. 350 p. DOI: <http://doi.org/10.1515/9783110563214>.
- [24] Lychev S.A., Kostin G.V., Lycheva T.N., Koifman K.G. Non-Euclidean Geometry and Defected Structure for Bodies with Variable Material Composition. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1250, p. 012035. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1250/1/012035>.
- [25] Lychev S.A., Koifman K.G. Material Affine Connections for Growing Solids. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, vol. 41, no. 10, pp. 2034–2052. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1995080220100121>.
- [26] Lychev S.A., Koifman K.G. Contorsion of Material Connection in Growing Solids. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, vol. 42, no. 8, pp. 1852–1875. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1995080221080187>.
- [27] Edgar R.G. A Review of Bondi-Hoyle-Lyttleton Accretion. *New Astronomy Reviews*, 2004, vol. 48, pp. 843–859. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.newar.2004.06.001>.
- [28] Lander S.K., Andersson N., Antonopoulou D., Watts A.L. Magnetically driven crustquakes in neutron stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2015, vol. 449, issue 2, pp. 2047–2058. DOI: <http://doi.org/10.1093/mnras/stv432>.
- [29] Prasanna A. The Role of Space-Time Curvature in the Study of Plasma Processes Near Neutron Stars and Black Holes. *Bulletin of the Astronomical Society of India*, 1978, vol. 6, issue 88. Available at: https://www.researchgate.net/publication/234299037_The_Role_of_Space-Time_Curvature_in_the_Study_of_Plasma_Processes_Near_Neutron_Stars_and_Black_Holes.
- [30] Epstein M., Burton D.A., Tucker R. Relativistic anelasticity. *Classical and Quantum Gravity*, 2006, vol. 23, no. 10, pp. 3545–3571. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/23/10/020>.
- [31] Weingarten J. Sulle superficie di discontinuità nella teoria della elasticità dei corpi solidi. *Accademie dei Lincei, Rendiconte, V. Serie*, 1901, vol. X, pp. 57–60. Available at: <https://zbmath.org/32.0799.01>.
- [32] Volterra V. Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 1907, 3e série, vol. 24, pp. 401–517. DOI: <http://doi.org/10.24033/asens.583>.
- [33] Frenkel J. Zur Theorie der Elastizitätsgrenze und der Festigkeit kristallinischer Körper. *Zeitschrift für Physik*, 1926, vol. 37, no. 7-8, pp. 572–609. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF01397292>.
- [34] Orowan E. Zur Kristallplastizität. I. *Zeitschrift für Physik*, 1934, vol. 89, no. 9-10, pp. 605–613. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF01341478>.
- [35] Taylor G.I. The Mechanism of Plastic Deformation of Crystals. Part I. Theoretical. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1934, vol. 145, issue 855, pp. 362–387. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.1934.0106>.
- [36] Taylor G.I. The Mechanism of Plastic Deformation of Crystals. Part II. Comparison with Observations. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1934, vol. 145, issue 855, pp. 388–404. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.1934.0107>.
- [37] Polanyi M. Über eine Art Gitterstörung, die einen Kristall plastisch machen könnte. *Zeitschrift für Physik*, 1934, vol. 89, no. 9-10, pp. 660–664. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF01341481>.
- [38] Eckart C. The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and anelasticity. *Physical Review*, 1948, vol. 73, issue 4, pp. 373–382. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRev.73.373>.
- [39] Lee J.M. Introduction to Smooth Manifolds. New York: Springer, 2012. Available at: <http://sites.math.washington.edu/~lee/Books/ISM>.
- [40] Rudolph G., Schmidt M. Differential Geometry and Mathematical Physics. Part I. Manifolds, Lie Groups and Hamiltonian Systems. New York: Springer Science+Business Media Dordrecht, 2013. 762 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-94-007-5345-7>.
- [41] Postnikov M.M. Lectures on geometry. Semester II. Linear algebra. Moscow: URSS, 2017, 400 p. Available at: <http://alexandr4784.narod.ru/pmmgeo2.html>. (In Russ.)
- [42] Postnikov M.M. Lectures on geometry. Semester I. Analytical algebra. Moscow: URSS, 2017, 416 p. Available at: <http://alexandr4784.narod.ru/pmmgeo1.html>. (In Russ.)
- [43] Honerkamp J., Römer H. Theoretical Physics: A Classical Approach. Berlin, Heidelberg: Springer, 1993. 572 p. Available at: <https://books.google.ru/books?id=TXn1CAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=ru#v=onepage&q&f=false>.
- [44] Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. New York: Springer Science & Business Media, 2004. 602 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-662-10388-3>.
- [45] Gurtin M.E., Fried E., Anand L. The mechanics and thermodynamics of continua. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 718 p. DOI: <http://doi.org/10.1017/cbo9780511762956>.

- [46] Noll W. The Foundations of Classical Mechanics in the Light of Recent Advances in Continuum Mechanics. In: *The Foundations of Mechanics and Thermodynamics*. Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 31–47. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-65817-4_2.
- [47] Lee J.M. Introduction to Topological Manifolds. New York: Springer, 2011. Available at: https://archive.org/details/springer_10.1007-978-0-387-22727-6.
- [48] Lee J.M. Introduction to Riemannian Manifolds. Cham: Springer, 2018. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-319-91755-9>.
- [49] Yang W.H., Feng W.W. On Axisymmetrical Deformations of Nonlinear Membranes. *Journal of Applied Mechanics*, 1970, vol. 37, issue 4, pp. 1002–1011. DOI: <http://doi.org/10.1115/1.3408651>.
- [50] Lurie A.I. Non-linear theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1980. 512 p. Available at: <https://libcats.org/book/449646>. (In Russ.)
- [51] Germain P. Cours de mécanique des milieux continus. Tome I. Théorie générale. Paris: Masson, 1973. 400 p. Available at: <https://libcats.org/book/757877>.
- [52] Teodosiu C. Elastic Models of Crystal Defects. Berlin, Heidelberg: Springer, 1982. 336 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-662-11634-0>.
- [53] Yavari A. Compatibility Equations of Nonlinear Elasticity for Non-Simply-Connected Bodies. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2013, vol. 209, pp. 237–253. DOI: <http://doi.org/10.1007/s00205-013-0621-0>.
- [54] Postnikov M.M. Lectures on geometry. Semester V: Riemannian geometry. Moscow: Faktorial, 1998, 496 p. Available at: <http://alexandr4784.narod.ru/pmm52.html>. (In Russ.)
- [55] Chern S.S., Chen W.H., Lam K.S. Lectures on Differential Geometry. Singapore: World Scientific Publishing, 1999. 356 p. DOI: <https://doi.org/10.1142/3812>.
- [56] Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. Modern geometry: methods and applications. Moscow: Nauka, 1986, 760 p. Available at: <http://alexandr4784.narod.ru/dubrovin.html>. (In Russ.)
- [57] Levi-Civita T. Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884–1940)*, 1916, vol. 42, issue 1, pp. 173–204. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF03014898>.
- [58] Kartan E. Spaces of affine, projective and conformal connection. Kazan: Izd-vo Kazanskogo universiteta, 1962, 210 p. Available at: <https://libcats.org/book/444677>. (In Russ.)
- [59] Fernandez O.E., Bloch A.M. The Weitzenböck Connection and Time Reparameterization in Nonholonomic Mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, 2011, vol. 52, issue 1, p. 012901. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.3525798>.
- [60] Dhas B., Srinivasa A., Roy D. A WEeyl geometric model for thermo-mechanics of solids with metrical defects. *arXiv*, 2019. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1904.06956>.
- [61] Saa A. Volume-forms and minimal action principles in affine manifolds. *Journal of Geometry and Physics*, 1995, vol. 15, no. 2, pp. 102–108. DOI: [http://doi.org/10.1016/0393-0440\(94\)00006-P](http://doi.org/10.1016/0393-0440(94)00006-P).
- [62] Miri M., Rivier N. Continuum elasticity with topological defects, including dislocations and extra-matter. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2002, volume 35, number 7, pp. 1727–1739. DOI: <http://doi.org/10.1088/0305-4470/35/7/317>.
- [63] Roychowdhury A., Gupta A. Non-metric Connection and Metric Anomalies in Materially Uniform Elastic Solids. *Journal of Elasticity*, 2017, vol. 126, pp. 1–26. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10659-016-9578-1>.
- [64] Le K.C., Stumpf H. On the determination of the crystal reference in nonlinear continuum theory of dislocations. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1996, vol. 452, issue 1945, pp. 359–371. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.1996.0019>.
- [65] Le K. C., Stumpf H. Nonlinear continuum theory of dislocations. *International Journal of Engineering Science*, 1996, vol. 34, issue 3, pp. 339–358. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7225\(95\)00092-5](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7225(95)00092-5).
- [66] Le K.C., Stumpf H. Strain measures, integrability condition and frame indifference in the theory of oriented media. *International Journal of Solids and Structures*, 1998, vol. 35, issues 9–10, pp. 783–798. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00087-5](http://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00087-5).
- [67] Gantmacher F.R. The Theory of Matrices. Moscow: Nauka, 1966, 576 p. Available at: <https://studfile.net/preview/4067051/>. (In Russ.)
- [68] Mac Lane S. Categories for the Working Mathematician. Moscow: Fizmatlit, 2004, 154 p. Available at: <https://djvu.online/file/LMm0QFShaD5Lq>.
- [69] Mendelson E. Introduction to Mathematical Logic. Moscow: Nauka, 1971, 322 p. Available at: <https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Mendelson1971ru.pdf>. (In Russ.)
- [70] Kröner E. Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1960, vol. 4, issue 4, pp. 18–334. Available at: <https://libcats.org/book/789336>. (In Russ.)



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-88-104

УДК 539.42

Дата: поступления статьи: 12.09.2022
после рецензирования: 08.11.2022
принятия статьи: 05.12.2022

Д.М. Петрова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: petrova_darya96@mail.ru ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0666-9878>

А.В. Миронов

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: mironov.sv@ssau.ru. ORCID: <http://orcid.org/000-0002-0666-9878>

А.А. Буханько

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: abukhanko@mail.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2074-7422>

Р.М. Жаббаров

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: zhabbarov.rm@ssau.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9340-8512>

К ВОПРОСУ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО И ЧИСЛЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА М. УИЛЬЯМСА

АННОТАЦИЯ

В статье определяются поля напряжений вблизи кончиков математических разрезов в изотропной линейно-упругой пластине с двумя горизонтальными коллинеарными трещинами, лежащими на одной прямой, разной длины с помощью двух подходов – экспериментального, основывающегося на методе цифровой фотомеханики, и численного, опирающегося на вычисления методом конечных элементов. Для представления поля напряжений у кончика разреза применяется многочленный ряд Уильямса – каноническое представление поля у вершины математического разреза двумерной задачи теории упругости для изотропных сред. Главная идея исследования заключается в учете регулярных (неособых) слагаемых ряда и анализе их воздействия на целостное описание поля напряжений в непосредственной близости вершины разреза. В работе были сохранены и определены первые пятнадцать коэффициентов ряда Макса Уильямса в соответствии с экспериментальными картинками изохроматических полос и конечно-элементным моделированием. Для извлечения коэффициентов ряда М. Уильямса использовался переопределенный метод, предназначенный для решения систем алгебраических уравнений, число которых существенно больше неизвестных – амплитудных множителей. Продемонстрировано влияние неособых слагаемых ряда Уильямса при обработке экспериментальной картины интерференционных полос. Установлено, что сохранение слагаемых высокого порядка малости позволяет расширить область, примыкающую к кончику трещины, из которой можно выбирать экспериментальные точки. Конечно-элементное исследование проведено в системе инженерного анализа SIMULIA Abaqus, в которой воспроизведены экспериментальные образцы, испытанные в натурном эксперименте. Показано, что результаты, полученные двумя методами, хорошо согласуются друг с другом.

Ключевые слова: метод цифровой фотоупругости; изохроматические полосы; метод конечных элементов; многопараметрическое асимптотическое разложение Уильямса у кончика трещины; переопределенный метод.

Цитирование. Петрова Д.М., Миронов А.В., Буханько А.А., Жаббаров Р.М. К вопросу экспериментального и численного определения коэффициентов многопараметрического ряда М. Уильямса // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2022. Т. 28, № 3–4. С. 88–104. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-88-104>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Петрова Д.М., Миронов А.В., Буханько А.А., Жаббаров Р.М., 2022

Дарья Михайловна Петрова — аспирант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Александр Владимирович Миронов — аспирант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Анастасия Андреевна Буханько — исполнительный директор Естественного института, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Рамиль Муратович Жаббаров — ассистент кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

1. Предварительные сведения

Количественные характеристики напряжений и перемещений в полном поле в конструкционных материалах имеют жизненно важное значение для решения различных инженерных задач, где распределения напряжений и деформаций определяют разрушение и неустойчивость материалов и элементов конструкций [1–8]. Оценка и прогнозирование безопасности и срока службы металлических конструкций, таких как лопасти авиационных двигателей и ракетные снаряды, также требуют полного понимания распределения напряжений и деформаций вокруг внутренних дефектов в элементах конструкций. Кроме того, оптимальная конструкция фотоэлектрических компонентов, которая включает в себя уменьшение интерференции вызванного напряжением двулучепреломления в оптических волокнах, зависит от остаточного напряжения, на которое влияет распределение внутренних перемещений материалов. Для определения напряжений и смещений в полном поле были разработаны различные экспериментально-механические методы, такие как методы фотоупругости, муара, спекл-интерферометрии, голографической интерферометрии и корреляции цифровых изображений [5]. Основываясь на интерференционной полосе, вызванной временным двулучепреломлением прозрачных материалов, техника фотоупругости позволяет определять напряжение полного поля в тестируемых моделях. Методы муара, включая геометрический муар, муаровую интерференцию и методы выборки муара, были разработаны для измерения полей смещения путем анализа муаровых полос. Для корреляции цифровых изображений полное смещение поля может быть рассчитано путем отслеживания изменения пространственного положения спеклов. Для измерения полей напряжений была предложена фотоупругость, а для определения полей смещения были разработаны методы корреляции муара и цифровых изображений. Метод фотоупругости является одним из классических методов для исследования напряжений и деформаций в твердых деформируемых телах [1–17]. Исследования напряжений методом фотоупругости начались еще в прошлом веке [1–4]. Метод постоянно совершенствуется и не теряет своей актуальности [5–17]. Можно даже утверждать, что сегодня метод фотоупругости переживает этап возрождения, ибо количество работ, посвященных результатам, значительно увеличилось. Одна из последних работ К. Рамеша [5] посвящена современному применению фотоупругости в разных областях естествознания, инженерии, медицины и биологии, широким возможностям этого метода. В [5] автор показал, что метод фотоупругости дает простое решение задач, которые довольно сложно решить численно. Многие современные работы посвящены технологии проведения экспериментов на фотоупругость и распознаванию полученных картин изохром [9–11]. Более того, именно метод фотоупругости, по всей видимости, стал первым методом, который активно используется и апробируется при восстановлении интерференционных картин методами машинного обучения и в целом искусственного интеллекта. Поэтому с точки зрения развития методов построения искус-

ственных изображений изохроматических полос еще более важными и актуальными становятся задачи извлечения информации из экспериментальных изображений.

В механике хрупкого разрушения одним из направлений современных исследований является определение поля напряжений у вершины трещины, поскольку компоненты напряжений входят в критерии хрупкого разрушения, определяющие прочность, живучесть и целостность конструкций. Для воссоздания составляющих напряжений в теории и на практике особенно часто используется асимптотическое представление поля напряжений Макса Уильямса [12–17]:

$$\sigma_{ij}(r, \vartheta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l^m r^{\frac{l}{2}-1} \tilde{\sigma}_{m,ij}^{(l)}(\vartheta), \quad (1.1)$$

где r, θ – полярные координаты с полюсом в исследуемой вершине трещины (рис. 1.1).

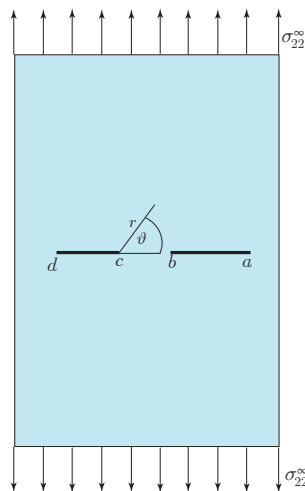


Рис. 1.1. Схематичное изображение исследуемого образца с двумя коллинеарными трещинами, лежащими на одной прямой

Fig. 1.1. Scheme of the studied specimen with two collinear cracks lying on one straight line

В вышеприведенном асимптотическом представлении Уильямса (1.1) необходимо определять неизвестные коэффициенты поля напряжений у вершины трещины. Даже нахождение первого коэффициента ряда – масштабного множителя многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса $a_1^1 = K_I/\sqrt{2\pi}$ – коэффициента интенсивности напряжений (КИН) является предметом широких исследований [12–13]. Многими авторами отмечается, что одной из важных задач при определении КИН посредством фотоупругости является установление подходящей области перед вершиной трещины для сбора данных. В [12] метод цифровой фотоупругости использовался для нахождения коэффициента интенсивности напряжений для упругого образца с жестким включением. Эксперименты проводятся с двумя конфигурациями образцов. В одном из образцов жесткое включение ориентировано вертикально, по направлению нагрузки, а в другом – под заданным углом, наклонно. Переопределенный метод (метод наименьших квадратов) использовался для решения уравнений относительно амплитудных (масштабных) коэффициентов разложения М. Уильямса. В исследовании [13] было выведено несколько зависимостей для коэффициента интенсивности напряжений. Данные зависимости были получены в результате эксперимента, где наблюдалось распространение гидравлической трещины через ортогональный разрыв в слоистых образованиях с использованием фотоупругих, прозрачных, деформируемых и вязкоупругих характеристик желатина.

Долгое время в критерий разрушения входил только коэффициент интенсивности напряжений, но в последние двадцать лет было определено, что его недостаточно на сравнительно больших расстояниях от вершины трещины (при расширении окрестности кончика трещины) [14–23]. В статье [14] метод фотоупругости использовался для оценки коэффициентов разложения М. Уильямса вблизи вершин вырезов и надрезов. Было изучено влияние размеров и углов раствора выреза на напряженное состояние элементов. В работе [17] были найдены коэффициенты разложения Уильямса методом фотоупругости и методом конечных элементов. Было показано, что полученные значения хорошо согласуются друг с другом и соответствуют значениям, полученным с помощью аналитических методов. В [17] была исследована пластина с одной центральной горизонтальной трещиной. Для обработки изображений изохроматических полос, полученных в ходе эксперимента, было разработано приложение на языке Java, которое позволяет определить наиболее темные точки на изохромах и реализовать переопределенный

метод для вычисления коэффициента интенсивности напряжений, Т-напряжения и коэффициентов более высокого порядка методом фотоупругости. Удержание высших приближений позволяет дать более аккуратную и строгую оценку полей напряжений, деформаций и смещений вблизи вершины трещины и сделать обширнее область применимости разложения в ряд М. Уильямса.

Наряду с методом фотоупругости для получения коэффициентов разложения М. Уильямса в работе [17] использован метод конечных элементов (МКЭ), который получил особое развитие и распространение среди методов численного анализа в настоящее время [18–23]. В [22] МКЭ применяется для определения коэффициентов асимптотического поля у вершины трещины в анизотропном теле. В данной работе дано точное решение задачи о нахождении параметров механики разрушения у вершины трещины для бесконечной пластины с центральной трещиной. В [23] предлагается алгоритм определения коэффициентов мультипараметрического асимптотического степенного ряда Уильямса в полудисках с надрезом. Исследовались образцы с разными углами надреза для моделирования смешанного нагружения. Алгоритм решения основан на технике метода конечных элементов и переопределенном методе, который также использовался для оценки масштабных множителей, полученных из фотоупругого эксперимента. В [24] МКЭ используется для нахождения коэффициента интенсивности напряжений и Т-напряжения. В [24] предлагается переопределенный метод для образцов с трещинами, находящихся в разных режимах нагрузки (нормальный отрыв, поперечный сдвиг или смешанное нагружение). Тело с трещиной подвергается воздействию статической или динамической нагрузки. В развитом методе координаты узлов и значения напряжений в узлах вокруг вершины трещины, полученные с помощью метода конечных элементов (FEM) или расширенного метода конечных элементов (XFEM), вводятся в асимптотическое разложение Уильямса. Затем составляется переопределенная система уравнений, и оптимальное решение достигается путем решения этих уравнений с использованием метода наименьших квадратов. Для проверки точности данного метода исследуются различные конфигурации тел с трещинами (плоские образцы с двумя боковыми надрезами). Полученные коэффициенты интенсивности напряжений и Т-напряжения зависят от количества и расположения узлов, выбранных вокруг вершины трещины, и сетки вокруг вершины трещины. Результаты показывают, что предложенный метод достаточно прост и удобен для получения первых двух коэффициентов ряда Уильямса при статическом или динамическом нагружении. Удовлетворительные результаты достигаются в том случае, когда координаты и компоненты напряжения узлов вокруг вершины трещины выбраны достаточно точно. Предложенный метод также может быть использован для расчета коэффициентов разложения Уильямса более высокого порядка. Несомненно, высшие приближения ряда Уильямса значительно влияют на содержательное описание полей у кончика дефекта.

В настоящей статье коэффициенты разложения М. Уильямса определялись методом фотоупругости и методом конечных элементов. В качестве объекта исследования была выбрана пластина с двумя горизонтальными коллинеарными трещинами, лежащими на одной прямой, разной длины. Используемая техника вычисления амплитудных множителей решения, представляемого в рядах, базируется на подходе, описанном в [8] и [16], где дано описание разработанного приложения для автоматического извлечения экспериментальных точек из изображений, получаемых методом цифровой фотоупругости. Однако акцент в настоящей работе делается на сравнении теоретического, экспериментального и численного решения для тонкой пластины с двумя разрезами. Показано, что сочетание техники фотоупругости и конечно-элементного подхода позволяет реконструировать ряд Уильямса, дающий аналитическое описание полей напряжений вблизи кончика трещины. Особый фокус внимания сосредоточен на определении коэффициентов мультипараметрического ряда Уильямса и на эффекте влияния неособых членов ряда на целостное и содержательное описание полей у кончика разреза. На основе экспериментальных результатов с использованием программного обеспечения, осуществляющего метод конечных элементов, приводятся две численные модели. Численные результаты для поля напряжений хорошо согласуются с фотоупругим экспериментом, который подтверждает проведенный численный анализ.

2. Многопараметрическое асимптотическое разложение Уильямса вблизи вершины трещины

Все многообразие задач о трещинах отображается в коэффициентах a_i^m , определение которых составляет важную научную проблему. В настоящей работе определены коэффициенты полного асимптотического разложения М. Уильямса методом фотоупругости и МКЭ. В линейной механике разрушения широко известны канонические классические формальные асимптотические разложения составляющих тензора напряжений, ассоциированные с близлежащей окрестностью вершины трещины ($r \rightarrow 0$) в изотропной линейно-упругой среде [25]. Введем полярную систему координат с полюсом в вершине трещины. В полярных координатах решение многопараметрического асимптотического разложения Уильямса

имеет вид [25]:

$$\sigma_{ij}(r, \vartheta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^{+\infty} a_l^m r^{l/2-1} \tilde{\sigma}_{m,ij}^{(l)}(\vartheta), \quad (2.1)$$

где индекс m связан с комбинированным типом деформирования, индекс m равен значению 1 для идеального нормального отрыва и значению 2 для совершенного поперечного сдвига; факторы a_l^m связаны с геометрической конфигурацией и нагрузками; $\tilde{\sigma}_{m,ij}^{(k)}(\vartheta)$ – угловые функции, зависящие от решения краевой задачи для тела с трещинами и вида нагружения. Коэффициенты ряда Уильямса a_1^1 и a_1^2 получили название коэффициентов интенсивности напряжений, второе слагаемое ряда $a_1^2 \tilde{\sigma}_{1,11}^{(2)}$ носит название Т-напряжений и определяется соотношениями

$$a_1^1 = K_I / \sqrt{2\pi}, \quad a_1^2 = -K_{II} / \sqrt{2\pi}, \quad T = a_2^1 \tilde{\sigma}_{1,11}^{(2)}. \quad (2.2)$$

Известны аналитические выражения для собственных функций, зависящих от полярного угла ϑ [26]: для совершенного нормального отрыва

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{1,11}^{(l)}(\vartheta) &= l \left[\left(2 + l/2 + (-1)^l \right) \cos(l/2 - 1) \vartheta - (l/2 - 1) \cos(l/2 - 3) \vartheta \right] / 2, \\ \tilde{\sigma}_{1,22}^{(l)}(\vartheta) &= l \left[\left(2 - l/2 - (-1)^l \right) \cos(l/2 - 1) \vartheta + (l/2 - 1) \cos(l/2 - 3) \vartheta \right] / 2, \\ \tilde{\sigma}_{1,12}^{(l)}(\vartheta) &= l \left[- \left(2 + l/2 + (-1)^l \right) \sin(l/2 - 1) \vartheta - (l/2 - 1) \sin(l/2 - 3) \vartheta \right] / 2; \end{aligned} \quad (2.3)$$

для совершенного поперечного сдвига

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{2,11}^{(l)}(\vartheta) &= -l \left[\left(2 + l/2 - (-1)^l \right) \sin(l/2 - 1) \vartheta - (l/2 - 1) \sin(l/2 - 3) \vartheta \right] / 2, \\ \tilde{\sigma}_{2,22}^{(l)}(\vartheta) &= -l \left[\left(2 - l/2 + (-1)^l \right) \sin(l/2 - 1) \vartheta + (l/2 - 1) \sin(l/2 - 3) \vartheta \right] / 2, \\ \tilde{\sigma}_{2,12}^{(l)}(\vartheta) &= l \left[- \left(l/2 - (-1)^l \right) \cos(l/2 - 1) \vartheta + (l/2 - 1) \cos(l/2 - 3) \vartheta \right] / 2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В вышеупомянутых формулах l – порядковый номер слагаемого ряда Уильямса (1.1).

3. Определение коэффициентов ряда Уильямса методом фотоупругости

Полученное в эксперименте на полярископе изображение изохром связано с напряженным состоянием [27]:

$$n_1 - n_0 = C_1 \sigma_1 + C_2 (\sigma_2 + \sigma_3), \quad (3.1)$$

$$n_2 - n_0 = C_1 \sigma_2 + C_2 (\sigma_3 + \sigma_1), \quad (3.2)$$

$$n_3 - n_0 = C_1 \sigma_3 + C_2 (\sigma_1 + \sigma_2), \quad (3.3)$$

где C_1 и C_2 – оптические коэффициенты напряжений; n_1 , n_2 и n_3 – главные показатели преломления; n_0 – первоначальный показатель преломления в ненапряженном изотропном теле.

Из равенств (3.1) – (3.3) следует, что:

$$n_1 - n_2 = (C_1 - C_2) (\sigma_1 - \sigma_2). \quad (3.4)$$

Поскольку справедливо равенство

$$n = (n_1 - n_2) \frac{t}{\lambda} = (C_1 - C_2) (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{t}{\lambda}, \quad (3.5)$$

где t – длина оптического пути, в некоторых случаях равная толщине образца. Качественная зависимость между разностью главных напряжений и порядком изохроматических полос, установленная эмпирически, предписывается общеизвестным законом Вертгейма:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N f_s}{t}, \quad (3.6)$$

где приняты классические обозначения N – порядок интерференционной полосы, t – толщина модели, а σ_1 , σ_2 – главные напряжения в модели. Величина f_s носит название цены полосы материала.

Для плоской задачи главные напряжения равны:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2}{4} + \sigma_{12}^2}, \quad (3.7)$$

где σ_{11} , σ_{12} и σ_{22} — компоненты тензора напряжений.

Подставив выражения для главных напряжений (3.7) в закон Вертгейма, с использованием распределения Уильямса, в общем случае образуется переопределенная система нелинейных алгебраических уравнений относительно искомых амплитудных факторов (множителей) $a_1^1, a_2^1, \dots, a_M^1$, где число уравнений, определяемое количеством взятых экспериментальных точек, в значительной степени больше, чем число факторов, подлежащих определению. Для нахождения приближенного решения этой системы уравнений использовался переопределенный метод, описанный в [28].

В соответствии с концепцией переопределенного метода вводится функция g_k , которая для k -й точки определяется следующим образом:

$$g_k = \frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})_k^2}{2} + (\sigma_{12})_k^2 - \left(\frac{N_k f_s}{h} \right)_k^2. \quad (3.8)$$

Далее функция g_k раскладывается в ряд Тейлора, в котором сохраняется только линейное относительно Δa_k^1 слагаемое:

$$(g_k)_{i+1} = \frac{\partial g_k}{\partial a_1^1} (\Delta a_1^1)_i + \frac{\partial g_k}{\partial a_2^1} (\Delta a_2^1)_i + \dots + \frac{\partial g_k}{\partial a_M^1} (\Delta a_M^1)_i, \quad (3.9)$$

где i — номер текущей итерации, $\Delta(a_j^1)_i$ — разности между амплитудными (масштабными) множителями:

$$(\Delta a_j^1)_i = (a_j^1)_{i+1} - (a_j^1)_i. \quad (3.10)$$

Здесь учитываются M коэффициентов многопараметрического асимптотического ряда М. Уильямса. Итерации проводятся до выполнения условия $(g_k)_{i+1} = 0$ с наперед заданной точностью (в настоящей работе принимается, что это требование выполняется с точностью 10^{-6}).

Таким образом, линеаризация системы уравнений, следующей из закона Вертгейма, приводит к системе линейных уравнений:

$$-(g_k)_i + \frac{\partial g_k}{\partial a_1^1} (\Delta a_1^1)_i + \frac{\partial g_k}{\partial a_2^1} (\Delta a_2^1)_i + \dots + \frac{\partial g_k}{\partial a_M^1} (\Delta a_M^1)_i = 0. \quad (3.11)$$

Решением системы уравнений (3.11) являются необходимые масштабные множители. Частные производные, фигурирующие в системе, определяются из следующего уравнения:

$$\frac{\partial g_k}{\partial a_m^1} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22})_k \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_m^1} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial a_m^1} \right)_k + 2 \left(\sigma_{12} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial a_m^1} \right)_k. \quad (3.12)$$

Вычисления завершаются, когда каждый элемент матрицы поправок $(\Delta a_j^1)_i$ будет равен 0 с наперед заданной точностью.

При проведении вычислений был произведен тщательный анализ большой последовательности экспериментов на тарировочных дисках, с помощью которых определялась цена полосы материала, и на образцах прямоугольной формы с двумя горизонтальными трещинами, лежащими на одной прямой, путем техники метода цифровой фотоупругости, реализованной на проекционно-поляризационной установке ППУ-7 (рис. 3.1).

В процессе выполнения эксперимента образцы с двумя трещинами испытывались при разных амплитудах нагружения. На рис. 3.2–3.4 изображены полученные картины изохроматических полос.

Для проведения эксперимента на фотоупругость были выбраны 100 точек на изохроматической полосе четвертого порядка и 70 точек на изохроматической полосе пятого порядка при амплитуде нагружений 175 кг. На основании координат этих точек и номера изохроматических полос, которым принадлежат данные точки, были получены первые пятнадцать коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения Уильямса для образца с двумя горизонтальными коллинеарными трещинами разной длины (табл. 3.1–3.4).

4. Численный эксперимент

Численный эксперимент основан на конечно-элементном расчете напряженно-деформированного состояния и поля смещений в образце с трещиной с использованием переопределенного метода. Для нахождения коэффициентов мультипараметрического асимптотического разложения Уильямса проведен ряд



Рис. 3.1. Экспериментальная поляризационно-проекционная установка ППУ-7
Fig. 3.1. Experimental setup

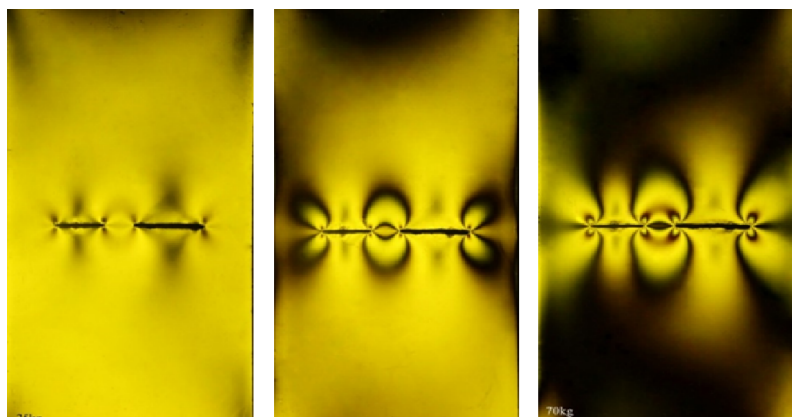


Рис. 3.2. Опытные результаты: снимки интерференционных (изохроматических) полос в пластинах с двумя горизонтальными коллинеарными трещинами различной длины (25, 50 и 70 кг)
Fig. 3.2. Patterns of isochromatic fringes in plates with two horizontal collinear cracks of different lengths (25, 50 and 70 kg)

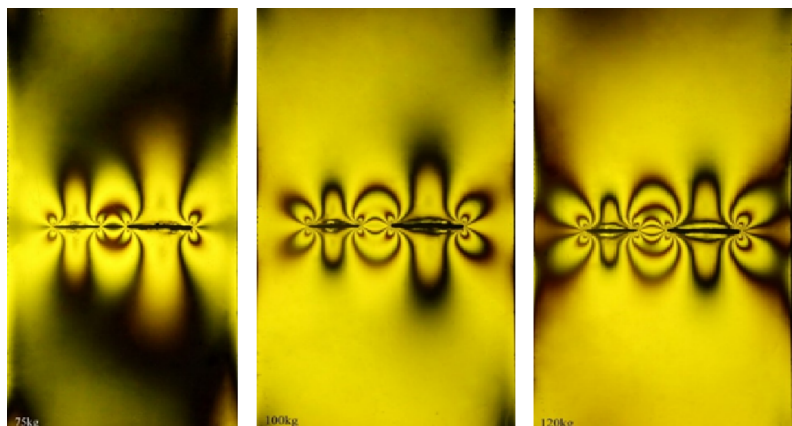


Рис. 3.3. Опытные результаты: снимки интерференционных (изохроматических) полос в пластинах с двумя горизонтальными коллинеарными трещинами различной длины (75, 100 и 120 кг)
Fig. 3.3. Patterns of isochromatic fringes in plates with two horizontal collinear cracks of different lengths (75, 100 and 120 kg)

вычислительных экспериментов с использованием пакета SIMULIA Abaqus для заданного образца. Модель пластины с трещинами была разбита на 6002 сингулярных элемента. Создание и моделирование трещины в конечно-элементном пакете проводилось методом контурного интеграла, что является более трудоемким по сравнению с расширенным методом конечного элемента и требует использования сингулярных конечных элементов, но позволяет получить в выходных данных наряду с распределением компонент тензора напряжений, полями перемещений и деформаций КИН и T -напряжения (T -stress).

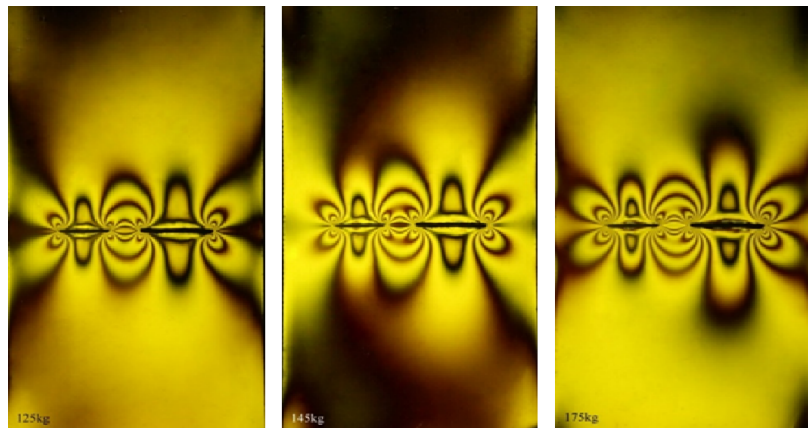


Рис. 3.4. Опытные результаты: снимки интерференционных (изохроматических) полос в пластинах с двумя горизонтальными коллинеарными трещинами различной длины (125, 145 и 175 кг)
 Fig. 3.4. Patterns of isochromatic fringes in plates with two horizontal collinear cracks of different lengths (125, 145 and 175 kg)

Таблица 3.1

Амплитудные множители, определенные из фотомеханического эксперимента
 и конечно-элементного решения у вершины трещины $z = a$

Table 3.1

Amplitude factors obtained from the photoelasticity method and FEM computation near the crack tip $z = a$

Коэффициент	Фотоупругость	МКЭ-решение	Относительная погрешность, %
a_1^1	$4.4262 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$	$4.42629 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$	0
a_2^1	-1.8067 MPa	-1.80678 MPa	0
a_3^1	$1.5105 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-1/2}$	$1.51813 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-1/2}$	0.5
a_4^1	$-0.0863 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-1}$	$-0.08692 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-1}$	0.6
a_5^1	$-0.2761 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-3/2}$	$-0.27833 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-3/2}$	0.8
a_6^1	$-0.0026 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-2}$	$-0.00264 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-2}$	0.9
a_7^1	$-0.1020 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-5/2}$	$-0.10304 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-5/2}$	1.0
a_8^1	$0.0018 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-3}$	$0.00185 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-3}$	1.25
a_9^1	$-0.0466 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-7/2}$	$-0.04731 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-7/2}$	1.50
a_{10}^1	$0.0265 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-4}$	$0.02703 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-4}$	1.71
a_{11}^1	$0.0236 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-9/2}$	$0.02409 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-9/2}$	1.9
a_{12}^1	$-0.0023 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-5}$	$-0.00244 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-5}$	2.0
a_{13}^1	$-0.0127 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-11/2}$	$-0.01303 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-11/2}$	2.3
a_{14}^1	$0.0089 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-6}$	$0.009921 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-6}$	2.71
a_{15}^1	$0.0071 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-13/2}$	$0.00735 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-13/2}$	2.9

Для извлечения необходимых данных был смоделирован путь в виде окружности, вдоль которого выбирались значения компонент тензора напряжений. Начало координат было задано в вершине трещины.

Определение коэффициентов членов асимптотического ряда Уильямса выполнялось с использованием метода регрессии на основе наименьших квадратов, известного как переопределенный метод, для которого в качестве входных данных используются значения компонент тензора напряжений в узлах сетки, полученные численно в программном обеспечении SIMULIA Abaqus. Можно представить многопараметрическое асимптотическое решение Уильямса (1.1)–(2.4) в матричной форме как

$$\sigma = CA, \quad (4.1)$$

где σ — вектор-строка компонент тензора напряжений для каждой экспериментальной точки, A — вектор-столбец амплитудных масштабных множителей, которые необходимо найти.

Для каждой экспериментальной точки записываются значения трех компонент тензора напряжений σ_{11}, σ_{12} и σ_{22} . Если в конечно-элементном расчете были получены данные для N экспериментальных точек, то количество элементов матрицы σ будет равно $N \times 3$. Количество элементов матрицы A равно

Таблица 3.2

Амплитудные множители, определенные из фотомеханического эксперимента
и конечно-элементного решения у вершины трещины $z = b$

Table 3.2

Amplitude factors obtained from the photoelasticity method and FEM computation near
the crack tip $z = b$

Коэффициент	Фотоупругость	МКЭ-решение	Относительная погрешность, %
a_1^1	4.5500 $MPa \cdot m^{1/2}$	4.45500 $MPa \cdot m^{1/2}$	0
a_2^1	-1.7702 MPa	-1.77024 MPa	0
a_3^1	2.0081 $MPa \cdot m^{-1/2}$	2.01056 $MPa \cdot m^{-1/2}$	0.12
a_4^1	0.0116 $MPa \cdot m^{-1}$	0.01169 $MPa \cdot m^{-1}$	0.8
a_5^1	0.2820 $MPa \cdot m^{-3/2}$	0.28370 $MPa \cdot m^{-3/2}$	0.6
a_6^1	0.2832 $MPa \cdot m^{-2}$	0.28581 $MPa \cdot m^{-2}$	0.88
a_7^1	0.7477 $MPa \cdot m^{-5/2}$	0.75447 $MPa \cdot m^{-5/2}$	0.9
a_8^1	-0.3012 $MPa \cdot m^{-3}$	-0.30441 $MPa \cdot m^{-3}$	1.05
a_9^1	0.7587 $MPa \cdot m^{-7/2}$	0.76782 $MPa \cdot m^{-7/2}$	1.19
a_{10}^1	0.4395 $MPa \cdot m^{-4}$	0.44531 $MPa \cdot m^{-4}$	1.30
a_{11}^1	1.0493 $MPa \cdot m^{-9/2}$	1.06528 $MPa \cdot m^{-9/2}$	1.50
a_{12}^1	-1.1982 $MPa \cdot m^{-5}$	-1.22131 $MPa \cdot m^{-5}$	1.89
a_{13}^1	1.3450 $MPa \cdot m^{-11/2}$	1.37393 $MPa \cdot m^{-11/2}$	2.1
a_{14}^1	1.6348 $MPa \cdot m^{-6}$	1.68021 $MPa \cdot m^{-6}$	2.70
a_{15}^1	1.8398 $MPa \cdot m^{-13/2}$	1.89672 $MPa \cdot m^{-13/2}$	2.9

Таблица 3.3

Амплитудные множители, определенные из фотомеханического эксперимента
и конечно-элементного решения у вершины трещины $z = c$

Table 3.3

Amplitude factors obtained from the photoelasticity method and FEM computation near
the crack tip $z = c$

Коэффициент	Фотоупругость	МКЭ-решение	Относительная погрешность, %
a_1^1	4.0036 $MPa \cdot m^{1/2}$	4.00364 $MPa \cdot m^{1/2}$	0
a_2^1	-1.7544 MPa	-1.75448 MPa	0
a_3^1	2.4757 $MPa \cdot m^{-1/2}$	2.48688 $MPa \cdot m^{-1/2}$	0.45
a_4^1	0.00094 $MPa \cdot m^{-1}$	0.00095 $MPa \cdot m^{-1}$	0.55
a_5^1	0.2568 $MPa \cdot m^{-3/2}$	0.25916 $MPa \cdot m^{-3/2}$	0.9
a_6^1	0.0836 $MPa \cdot m^{-2}$	0.08445 $MPa \cdot m^{-2}$	0.92
a_7^1	1.0292 $MPa \cdot m^{-5/2}$	1.04073 $MPa \cdot m^{-5/2}$	1.0
a_8^1	-0.2580 $MPa \cdot m^{-3}$	-0.26106 $MPa \cdot m^{-3}$	1.15
a_9^1	0.0.8143 $MPa \cdot m^{-7/2}$	0.82621 $MPa \cdot m^{-7/2}$	1.43
a_{10}^1	0.4723 $MPa \cdot m^{-4}$	0.48034 $MPa \cdot m^{-4}$	1.66
a_{11}^1	1.3023 $MPa \cdot m^{-9/2}$	1.32765 $MPa \cdot m^{-9/2}$	1.91
a_{12}^1	-1.3962 $MPa \cdot m^{-5}$	-1.42471 $MPa \cdot m^{-5}$	2.0
a_{13}^1	1.4984 $MPa \cdot m^{-11/2}$	1.53212 $MPa \cdot m^{-11/2}$	2.2
a_{14}^1	1.6262 $MPa \cdot m^{-6}$	1.67113 $MPa \cdot m^{-6}$	2.69
a_{15}^1	2.1748 $MPa \cdot m^{-13/2}$	2.23745 $MPa \cdot m^{-13/2}$	2.8

количеству коэффициентов ряда Уильямса, которые необходимо найти (K), тогда матрица C будет иметь размерность $3N \times K$.

Решение (4.1) в замкнутой форме для неизвестного вектора-строки параметров механики разрушения A может быть записано как псевдообратная матрица C :

$$A = (C^T C)^{-1} C^T \sigma. \quad (4.2)$$

В работах проведен двумерный конечно-элементный анализ для пластины размером 80×80 см. Длина левой трещины равна 1 см, а правой — 2 см, расстояние между трещинами равно 1.5 см (рис. 1.1).

Таблица 3.4

Амплитудные множители, определенные из фотомеханического эксперимента
и конечно-элементного решения у вершины трещины $z = d$

Table 3.4

Amplitude factors obtained from the photoelasticity method and FEM computation near
the crack tip $z = d$

Коэффициент	Фотоупругость	МКЭ-решение	Относительная погрешность, %
a_1^1	$3.7689 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$	$3.76892 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$	0
a_2^1	-1.7567 MPa	-1.75677 MPa	0
a_3^1	$1.7574 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-1/2}$	$1.76345 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-1/2}$	0.34
a_4^1	$-0.0060 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-1}$	$-0.00611 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-1}$	0.52
a_5^1	$-0.4694 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-3/2}$	$-0.47290 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-3/2}$	0.73
a_6^1	$-0.0021 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-2}$	$-0.00221 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-2}$	0.91
a_7^1	$0.2481 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-5/2}$	$0.25090 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-5/2}$	1.1
a_8^1	$0.00529 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-3}$	$0.00536 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-3}$	1.22
a_9^1	$-0.1596 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-7/2}$	$-0.16193 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-7/2}$	1.44
a_{10}^1	$0.0200 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-4}$	$0.02044 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-4}$	1.67
a_{11}^1	$0.1126 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-9/2}$	$0.11485 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-9/2}$	1.88
a_{12}^1	$-0.0013 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-5}$	$-0.00133 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-5}$	2.1
a_{13}^1	$-0.0844 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-11/2}$	$-0.08637 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-11/2}$	2.2
a_{14}^1	$0.00812 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-6}$	$0.00831 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-6}$	2.28
a_{15}^1	$0.0065 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-13/2}$	$0.00677 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{-13/2}$	2.7

Размеры пластины много больше размеров дефектов, значит влиянием границ пластины на параметры механики разрушения вблизи вершины трещины можно пренебречь. Рекомендуется достигать сходимости сетки вблизи вершин трещин с помощью 73 или 146 элементов по окружности. Вблизи вершин трещин сетка разбивалась на 20 элементов по радиальному направлению и 73 элемента по окружности (рис. 4.1). На рис. 4.2–4.4 показаны распределения компонент напряжений при расчете пластины с двумя горизонтальными коллинеарными трещинами разной длины.

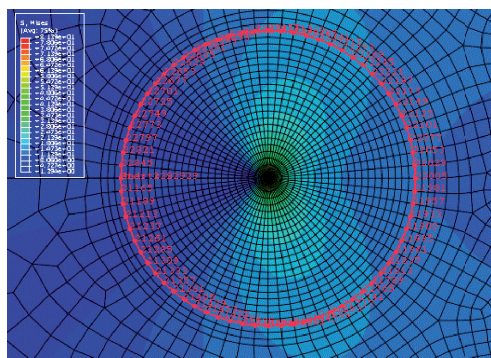


Рис. 4.1. Распределение напряжений по Мизесу
 Fig. 4.1. Von Mises stress distribution

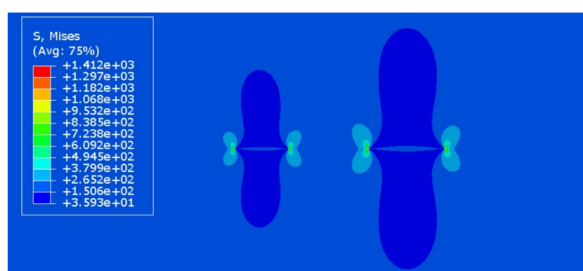


Рис. 4.2. Распределение напряжений по Мизесу
 Fig. 4.2. Von Mises stress distribution

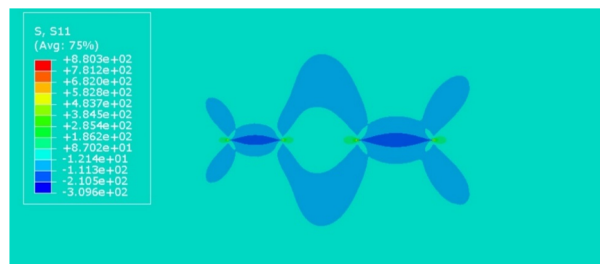


Рис. 4.3. Распределение компоненты напряжений σ_{11}
 Fig. 4.3. Distribution of stress components σ_{11}

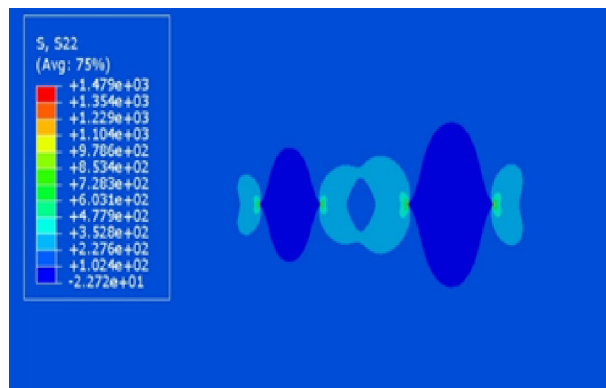


Рис. 4.4. Распределение компоненты напряжений σ_{22}
 Fig. 4.4. Distribution of stress components σ_{22}

Проведена серия численных экспериментов с различным числом концентрических окружностей, на каждой из которых выбирались 73 точки. Радиусы окружностей, на которых расположены экспериментальные точки, варьировались от 0.05 до 0.25 см. Из конечно-элементного анализа получены значения трех компонент тензора напряжений для каждой точки, принадлежащей концентрическим окружностям. Далее, полученный большой массив данных (от 219 до 1095) использовался для вычисления пятнадцати коэффициентов слагаемых более высокого порядка малости в мультипараметрическом асимптотическом разложении М. Уильямса. Основным принципом переопределенного метода является использование большого количества данных для расчета параметров в окрестности каждой вершины трещины. Для этого формируется алгебраическая система уравнений, в которой количество уравнений существенно больше, чем количество неизвестных. В этом случае полученная система уравнений является переопределенной. В большинстве численных экспериментов использовалась одна концентрическая окружность, для которой были записаны по 3 компоненты тензора напряжений для каждой из 73 экспериментальных точек. В системе (4.1) решалось 219 уравнений относительно 15 неизвестных. Полученные значения показаны в табл. 4.1–4.4.

Таблица 4.1

Сравнение аналитического и численного решений у вершины $z = a$

Table 4.1

Comparison of analytic and numeric solutions near the crack tip $z = a$

Коэффициент ряда	Аналитическое решение	МКЭ решение	Относительная погрешность, %
a_1^1	71.55840 $MPa \cdot cm^{1/2}$	71.55840 $MPa \cdot cm^{1/2}$	0
a_2^1	-25.00000 MPa	-25.00000 MPa	0
a_3^1	17.67463 $MPa \cdot cm^{-1/2}$	17.62161 $MPa \cdot cm^{-1/2}$	0.3
a_5^1	-2.23521 $MPa \cdot cm^{-3/2}$	-2.21733 $MPa \cdot cm^{-3/2}$	0.8
a_7^1	0.56546 $MPa \cdot cm^{-5/2}$	0.55924 $MPa \cdot cm^{-5/2}$	1.1
a_9^1	-0.17800 $MPa \cdot cm^{-7/2}$	-0.17533 $MPa \cdot cm^{-7/2}$	1.5
a_{11}^1	0.06251 $MPa \cdot cm^{-9/2}$	0.06138 $MPa \cdot cm^{-9/2}$	1.8
a_{13}^1	-0.02346 $MPa \cdot cm^{-11/2}$	-0.02294 $MPa \cdot cm^{-11/2}$	2.2
a_{15}^1	0.009212 $MPa \cdot cm^{-13/2}$	0.00898 $MPa \cdot cm^{-13/2}$	2.8

Таблица 4.2

Сравнение аналитического и численного решений у вершины $z = b$

Table 4.2

Comparison of analytic and numeric solutions near the crack tip $z = b$

Коэффициент ряда	Аналитическое решение	МКЭ решение	Относительная погрешность, %
a_1^1	72.43794 $MPa \cdot cm^{1/2}$	72.43794 $MPa \cdot cm^{1/2}$	0
a_2^1	-25.00000 MPa	-25.00000 MPa	0
a_3^1	19.01297 $MPa \cdot cm^{-1/2}$	18.99396 $MPa \cdot cm^{-1/2}$	0.3
a_5^1	-1.55756 $MPa \cdot cm^{-3/2}$	-1.55336 $MPa \cdot cm^{-3/2}$	0.10
a_7^1	0.91703 $MPa \cdot cm^{-5/2}$	0.91245 $MPa \cdot cm^{-5/2}$	0.27
a_9^1	0.02212 $MPa \cdot cm^{-7/2}$	0.02195 $MPa \cdot cm^{-7/2}$	0.50
a_{11}^1	0.16985 $MPa \cdot cm^{-9/2}$	0.16816 $MPa \cdot cm^{-9/2}$	0.77
a_{13}^1	0.03820 $MPa \cdot cm^{-11/2}$	0.03767 $MPa \cdot cm^{-11/2}$	1.4
a_{15}^1	0.043733 $MPa \cdot cm^{-13/2}$	0.04285 $MPa \cdot cm^{-13/2}$	2.0

Таблица 4.3

Сравнение аналитического и численного решений у вершины $z = c$

Table 4.3

Comparison of analytic and numeric solutions near the crack tip $z = c$

Коэффициент ряда	Аналитическое решение	МКЭ решение	Относительная погрешность, %
a_1^1	53.84721 $MPa \cdot cm^{1/2}$	53.84721 $MPa \cdot cm^{1/2}$	0
a_2^1	-25.00000 MPa	-25.00000 MPa	0
a_3^1	28.66835 $MPa \cdot cm^{-1/2}$	28.61102 $MPa \cdot cm^{-1/2}$	0.2
a_5^1	-5.03256 $MPa \cdot cm^{-3/2}$	-5.00740 $MPa \cdot cm^{-3/2}$	0.5
a_7^1	3.96717 $MPa \cdot cm^{-5/2}$	3.92750 $MPa \cdot cm^{-5/2}$	1
a_9^1	-1.68655 $MPa \cdot cm^{-7/2}$	-1.66293 $MPa \cdot cm^{-7/2}$	1.4
a_{11}^1	1.61810 $MPa \cdot cm^{-9/2}$	1.59059 $MPa \cdot cm^{-9/2}$	1.7
a_{13}^1	-0.97566 $MPa \cdot cm^{-11/2}$	-0.95615 $MPa \cdot cm^{-11/2}$	2.0
a_{15}^1	0.90005 $MPa \cdot cm^{-13/2}$	0.87935 $MPa \cdot cm^{-13/2}$	2.3

Таблица 4.4

Сравнение аналитического и численного решений у вершины $z = d$

Table 4.4

Comparison of analytic and numeric solutions near the crack tip $z = d$

Коэффициент ряда	Аналитическое решение	МКЭ решение	Относительная погрешность, %
a_1^1	52.65806 $MPa \cdot cm^{1/2}$	52.65806 $MPa \cdot cm^{1/2}$	0
a_2^1	-25.00000 MPa	-25.00000 MPa	0
a_3^1	25.51513 $MPa \cdot cm^{-1/2}$	25.47176 $MPa \cdot cm^{-1/2}$	0.17
a_5^1	-6.73471 $MPa \cdot cm^{-3/2}$	-6.71855 $MPa \cdot cm^{-3/2}$	0.24
a_7^1	3.43893 $MPa \cdot cm^{-5/2}$	3.42138 $MPa \cdot cm^{-5/2}$	0.51
a_9^1	-2.15383 $MPa \cdot cm^{-7/2}$	-2.13833 $MPa \cdot cm^{-7/2}$	0.72
a_{11}^1	1.50218 $MPa \cdot cm^{-9/2}$	1.48791 $MPa \cdot cm^{-9/2}$	0.95
a_{13}^1	-1.12190 $MPa \cdot cm^{-11/2}$	-1.10922 $MPa \cdot cm^{-11/2}$	1.13
a_{15}^1	0.87852 $MPa \cdot cm^{-13/2}$	0.86183 $MPa \cdot cm^{-13/2}$	1.9

Заключение

В настоящей статье посредством техники метода цифровой фотоупругости и конечно-элементного моделирования вычислены коэффициенты мультипараметрического асимптотического степенного разложения Макса Уильямса поля напряжений в вершинах двух горизонтальных трещин в поле одноосного

растяжения. В решении Макса Уильямса сохранены регулярные (неособые в окрестности кончика трещины) слагаемые, что способствует:

1) получению более точной оценки составляющих тензоров напряжений, деформаций и вектора перемещений и целостному описанию полей в зоне, охватывающей кончик трещины;

2) расширению области, в которой работает асимптотическое представление М. Уильямса. Сохранение неособых слагаемых дает возможность выбирать больше точек из экспериментальной картины и использовать их для вычисления параметров механики хрупкого разрушения (коэффициентов интенсивности напряжений для обеих мод деформирования, T -напряжений и коэффициентов регулярных вблизи кончика разреза слагаемых ряда Уильямса).

Ценность данного исследования заключается в сопоставлении аналитического решения задачи и конечно-элементного расчета для достаточно большой пластины по сравнению с длинами трещины. Расчет показал, что коэффициенты ряда Уильямса, полученные с помощью двух различных подходов, находятся в хорошем соответствии друг с другом. Поэтому конечно-элементное решение может быть использовано для восстановления коэффициентов ряда, представляющего поля у вершины трещины.

В высокофункциональном и многоцелевом пакете SIMULIA Abaqus осуществлен широкий цикл конечно-элементных вычислений механических полей в пластинах с двумя горизонтальными коллинеарными трещинами разной длины, лежащих на одной прямой, разных конфигураций – для пластины большего размера по сравнению с длинами трещин и пластины, идентичной использованной в натурном эксперименте. Рассчитав напряженно-деформированное состояние, можно определить коэффициенты мультипараметрического асимптотического разложения М. Уильямса, в котором сохранены пятнадцать слагаемых. Иными словами, из конечно-элементного решения извлечены коэффициенты регулярных слагаемых мультипараметрического асимптотического разложения.

Произведена обработка данных эксперимента, проведенного с помощью метода фотоупругости. В статье показано, что разработанный алгоритм позволяет найти факторы асимптотического разложения с высокой точностью, включая коэффициенты неособых слагаемых. Цифровая фотоупругость в сочетании с аналитическими математическими моделями, описывающими поля вершин трещин, позволила экспериментально определить характеризующие параметры, включая коэффициент интенсивности напряжений, T -напряжение и амплитудные множители слагаемых более высокого порядка малости и лучше понять их роль в механизмах, приводящих к росту трещин.

Для целостного описания полей напряжений у кончика трещины в рассмотренной конфигурации необходимо всестороннее изучение влияния геометрических параметров модели на коэффициенты ряда Уильямса. Поэтому направлениями дальнейших исследований будут рассмотрение взаимного изменения длин трещины и расстояния между ними, а также анализ наклонных коллинеарных трещин, лежащих на одной прямой и не принадлежащих одной прямой.

Литература

- [1] Александров А.Я., Ахметзянов М.Х. Поляризациино-оптические методы механики деформируемого тела. Москва: Наука, 1973. 576 с. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35626697>. EDN: <https://www.elibrary.ru/xzsbbsp>.
- [2] Дюрелли А., Райли У. Введение в фотомеханику: Поляризац.-оптич. методы. Москва: Мир, 1970, 484 с.
- [3] Фрохт М.М. Фотоупругость. Поляризациино-оптический метод исследования напряжений. Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1948, Т. 1, 432 с. URL: https://vk.com/doc323168506_508549622?hash=uRSNaqnVAT2qYzY5KbEUPHArR2TkrIL6YBrYXQg40KP&dl=uXdZJQ3zOJ8S06w9fC70jUa9kfWqV7BKIOBa0EwMz4w.
- [4] Фрохт М.М. Фотоупругость. Поляризациино-оптический метод исследования напряжений. Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1950, Т. 2. 432 с.
- [5] Ramesh K., Sasikumar S. Digital photoelasticity: Recent developments and diverse applications // Optics and Lasers in Engineering. 2020. Vol. 135. P. 106186. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2020.106186>.
- [6] Belova O.N., Stepanova L.V. Photoelastic evaluation of stress fields and coefficients of multi-parameter asymptotic expansion of the crack-tip stress field // Procedia Structural Integrity. 2021. Vol. 32. P. 32–41. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.prostr.2021.09.006>.
- [7] Stepanova L., Belova O.N. An Over-deterministic Method Based on Atomistic Stress Fields: Higher Order Terms of the Williams power expansion // Procedia Structural Integrity. 2021. Vol. 39. P. 748–760. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.03.149>.
- [8] Степанова Л.В. Экспериментальное и конечно-элементное определение коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Часть II // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического

- университета. Механика. 2021. № 1. С. 72–85. DOI: <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.1.08>. EDN: <https://www.elibrary.ru/lezhqh>.
- [9] Ramesh K., Pandey A. An improved normalization technique for white light photoelasticity // Optics and Lasers in Engineering. 2018. Vol. 109. Pp. 7–16. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2018.05.004>.
- [10] Sasikumar S., Ramesh K. Applicability of colour transfer techniques in Twelve fringe photoelasticity (TFP) // Optics and Lasers in Engineering. 2020. Vol. 127. P. 105963. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2019.105963>.
- [11] Ren Z., Xie H., Ju Y. Quantification of photoelastic fringe orders using polarized light camera and continuous loading // Optics and Lasers in Engineering. 2020. Vol. 134. P. 106263. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2020.106263>.
- [12] Jobin T.M., Khaderi S.N., Ramji M. Experimental evaluation of the strain intensity factor at the inclusion tip using digital photoelasticity // Optics and Lasers in Engineering. 2020. Vol. 126. P. 105855. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2019.105855>.
- [13] Ham S., Kwon T. Photoelastic observation of toughness-dominant hydraulic fracture propagation across an orthogonal discontinuity in soft, viscoelastic layered formations // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2020. Vol. 134. P. 104438. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijrmms.2020.104438>.
- [14] Tabanyukhova M.V. Photoelastic analysis of the stressed state of a flat element with geometrical stress concentrators (cutout and cuts) // Key Engineering Material. 2020. Vol. 827. Pp. 330–335. DOI: <http://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.827.330>.
- [15] Жаббаров Р.М., Степанова Л.В. Сравнительный анализ полей напряжений у вершины трещины и боковых надрезов, полученных с помощью усеченных разложений Уильямса // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2021. Т. 27, № 4. С. 30–67. DOI 10.18287/2541-7525-2021-27-4-30-67.
- [16] Степанова Л.В. Экспериментальное и конечно-элементное определение коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Часть I // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 4. С. 237–249. DOI: <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.20>. EDN: <https://www.elibrary.ru/edwnlr>.
- [17] Zhabbarov R.M., Stepanova L.V. Experimental evaluation of coefficients of multi-parameter asymptotic expansion of the crack-tip stress field using digital photoelasticity // Procedia Structural Integrity. 2020. Vol. 28. Pp. 1774–1780. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.prostr.2020.10.154>.
- [18] Nejati M., Ghouli S., Ayatollahi M.R. Crack tip asymptotic field and K-dominant region for anisotropic semi-circular bend specimen // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2020. Vol. 109. P. 102640. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2020.102640>.
- [19] Степанова Л.В., Белова О.Н., Туркова В.А. Определение коэффициентов разложения М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины с помощью метода цифровой фотоупругости и метода конечных элементов // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2019. Т. 25, № 3. С. 62–82. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-62-82>. EDN: <https://www.elibrary.ru/bogzpu>. % – EDN BOGZPU. Stepanova L.V., Belova O.N., Turkova V.A. Determination of the expansion coefficients of M. Williams of the stress field at the crack tip using the digital photoelasticity method and the finite element method // Bulletin of Samara University. Natural science series. 2019. Vol. 25. №. 3. Pp. 62 – 82.(in Russian)
- [20] Stepanova L.V., Dolgikh V.S. Assessment of the SIF, T-stress and higher-order coefficient values of the cracked specimens with two interacting cracks or notches under mixed mode loadings by digital photoelasticity method // AIP Conference Proceedings, 2021. Vol. 2371. P. 020013. DOI: <http://doi.org/10.1063/5.0059578>. EDN: <https://www.elibrary.ru/sgyupt>.
- [21] Li Y., Zheng K. Crack tip asymptotic field coefficients analyses based on extended finite element method using over-deterministic displacement field fitting method // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2021. Vol. 113. P. 102971. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2021.102971>.
- [22] Aytollahi M.R., Nejati M., Ghouli S. The finite element over-deterministic method to calculate the coefficients of crack tip asymptotic fields in anisotropic planes // Engineering Fracture Mechanics. 2020. Vol. 2371. P. 106982. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.106982>.
- [23] Stepanova L.V. The algorithm for the determination of the Williams asymptotic expansion coefficients for notched semidisks using the photoelasticity method and finite element method // AIP Conference Proceedings. 2020. Vol. 2216. P. 020013. DOI: <http://doi.org/10.1063/5.0003506>.
- [24] Hou C., Wang Z., Jin X., Ji X., Fan X. Determination of SIFs and T-stress using an over-deterministic method based on stress fields: Static and dynamic // Engineering Fracture Mechanics. 2021. Vol. 242. P. 107455. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.107455>.
- [25] Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack // Journal of Applied Mechanics. 1957. Vol. 24. P. 109–114. URL: <https://authors.library.caltech.edu/47558/1/382747.pdf>.

- [26] Hello G., Mabrouk B., Roelandt J. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // International Journal of Solids and Structures. 2011. Vol. 49. Issues (3–4). P. 556–566. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024>.
- [27] Максвелл Дж.К. Трактат об электричестве и магнетизме. В 2 т. Т. II. Москва: Наука, 1989, 434 с. URL: <https://libcats.org/book/505217>.
- [28] Ramesh K., Gupta S., Kelkar A. A. Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity – revisited // Engineering Fracture Mechanics. 1997. Vol. 56. № 1. Pp. 25–41, 43–45. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0013-7944\(96\)00098-7](http://doi.org/10.1016/S0013-7944(96)00098-7).
- [29] Belova O.N., Stepanova L.V. Computational and experimental identification of coefficients of the Williams series expansion by considering higher order terms in the cracked specimens through digital image analysis // Procedia Structural Integrity. 2022. Vol. 40, Pp. 46–60. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.04.006>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-88-104

Submitted: 12.09.2022

Revised: 08.11.2022

Accepted: 05.12.2022

D.M. Petrova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: petrova_darya96@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0666-9878>

A.V. Mironov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: mironov.sv@ssau.ru ORCID: <http://orcid.org/000-0002-0666-9878>

A.A. Buchanko

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: abukhanko@mail.ru ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2074-7422>

R.M. Zhabbarov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: zhabbarov.rm@ssau.ru ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9340-8512>

TO THE SCRUTINY OF THE EXPERIENTIAL AND COMPUTATIONAL ELICITATION OF FACTORS OF THE WILLIAMS MULTI-PARAMETER EXPANSION

ABSTRACT

The article defines stress fields near the tips of mathematical cracks in an isotropic linearly elastic plate with two horizontal collinear cracks lying on a straight line of different lengths under the uniaxial tensile condition, using two approaches - experimental, based on the method of digital photomechanics, and numerical, based on finite element calculations. To represent the stress field at the tip of the section, the Williams polynomial series is used - the canonical representation of the field at the top of the mathematical section of a two-dimensional problem of elasticity theory for isotropic media. The main idea of the current study is to take into consideration the regular (non-singular) terms of the series and analyze their impact on the holistic description of the stress field in the immediate vicinity of the top of the section. The first fifteen coefficients of the Max Williams series were preserved and determined in accordance with experimental patterns of isochromatic bands and finite element modeling. To extract the coefficients of the Williams series used a redefined method designed to solve systems of algebraic equations, the number of which is significantly greater than the unknown - amplitude multipliers. The influence of the non-singular terms of the Williams series on the processing of the experimental pattern of interference fringes is demonstrated. It is validated that the preservation of the terms of a high order of smallness makes it possible to expand the area adjacent to the tip of the crack, from which experimental points can be selected. The finite element study was carried out in the SIMULIA Abaqus engineering analysis system, in which experimental samples tested in a full-scale experiment were reproduced. It is revealed that the results obtained by the two methods are in good agreement with each other.

Key words: digital photoelasticity; finite element method; Williams multiparameter asymptotic expansion; over-deterministic method.

Citation. Petrova D.M., Mironov A.V., Buchanko A.A., Zhabbarov R.M. To the scrutiny of the experiential and computational elicitation of factors of the Williams multi-parameter expansion. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* = *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 88–104. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-88-104>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Petrova D.M., Mironov A.V., Buchanko A.A., Zhabbarov R.M., 2022

Darya M. Petrova — postgraduate student of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Alexandr V. Mironov — postgraduate student of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Anastasiya A. Buchanko — executive director of Natural Sciences' Institute, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Ramil M. Zhabbarov — assistant professor of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Aleksandrov A.Y., Akhmetzyanov M.K. Polarization-optical methods of deformable body mechanics. Moscow: Nauka, 1973, 576 p. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35626697>. EDN: <https://www.elibrary.ru/xzsbps>. (In Russ.)
- [2] Durelli A., Riley W. Introduction to photomechanics: Polarization-optical methods. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall Publ., 1965, 402 p.
- [3] Frocht M.M. Photoelasticity. Polarization-optical method for studying stresses. Moscow; Leningrad: Gostekhizdat, 1948, Vol. 1, 432 p. Available at: https://vk.com/doc323168506_508549622?hash=uRSNaqNVAT2qYzY5KbEUPHAR2TkrIL6YBrYXQg40KP&dl=uXdZJQ3zOJ8S06w9fC70jUa9kfWqV7BKlOBa0EwMz4w. (In Russ.)
- [4] Frocht M.M. Photoelasticity. Polarization-optical method for studying stresses. Moscow; Leningrad: Gostekhizdat, 1950, vol. 2, 432 p. (In Russ.)
- [5] Ramesh K., Sasikumar S. Digital photoelasticity: Recent developments and diverse applications. *Optics and Lasers in Engineering*, 2020, vol. 135, p. 106186. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2020.106186>.
- [6] Belova O.N., Stepanova L.V. Photoelastic evaluation of stress fields and coefficients of multi-parameter asymptotic expansion of the crack-tip stress field. *Procedia Structural Integrity*, 2021, vol. 32, pp. 32–41. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.prostr.2021.09.006>.
- [7] Stepanova L., Belova O. An Over-deterministic Method Based on Atomistic Stress Fields: Higher Order Terms of the Williams power expansion. *Procedia Structural Integrity*, 2021, vol. 39, pp. 748–760. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.03.149>.
- [8] Stepanova L.V. Experimental determination and finite element analysis of coefficients of the multi-parameter Williams series expansion in the vicinity of the crack tip in linear elastic materials. Part II. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, №1, pp. 72–85. DOI: <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.1.08>. EDN: <https://www.elibrary.ru/lezhqh>. (In Russ.)
- [9] Ramesh K., Pandey A. An improved normalization technique for white light photoelasticity. *Optics and Lasers in Engineering*, 2018, vol. 109, pp. 7–16. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2018.05.004>.
- [10] Sasikumar S., Ramesh K. Applicability of colour transfer techniques in Twelve fringe photoelasticity (TFP). *Optics and Lasers in Engineering*, 2020, vol. 127, p. 105963. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2019.105963>.
- [11] Ren Z., Xie H., Ju Y. Quantification of photoelastic fringe orders using polarized light camera and continuous loading. *Optics and Lasers in Engineering*, 2020, vol. 134, p. 106263. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2020.106263>.
- [12] Jobin T.M., Khaderi S.N., Ramji M. Experimental evaluation of the strain intensity factor at the inclusion tip using digital photoelasticity. *Optics and Lasers in Engineering*, 2020, vol. 126, p. 105855. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2019.105855>.
- [13] Ham S., Kwon T. Photoelastic observation of toughness-dominant hydraulic fracture propagation across an orthogonal discontinuity in soft, viscoelastic layered formations. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2020, vol. 134, p. 104438. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijrmms.2020.104438>.

- [14] Tabanyukhova M.V. Photoelastic analysis of the stressed state of a flat element with geometrical stress concentrators (cutout and cuts). *Key Engineering Material*, 2020, vol. 827, pp. 330–335. DOI: <http://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.827.330>.
- [15] Zhabbarov R.M., Stepanova L.V. Comparative analysis of stress state in the vicinity of the crack-tips and notches using truncated Williams series expansion. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 30–67. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-4-30-67>. (In Russ.)
- [16] Stepanova L.V. Experimental determination and finite element analysis of coefficients of the multi-parameter Williams series expansion in the vicinity of the crack tip in linear elastic materials. Part I. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 4, pp. 237–249. DOI: <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.20>. EDN: <https://www.elibrary.ru/edwnlr>. (In Russ.)
- [17] Zhabbarov R.M., Stepanova L.V. Experimental evaluation of coefficients of multi-parameter asymptotic expansion of the crack-tip stress field using digital photoelasticity. *Procedia Structural Integrity*, 2020, vol. 28, pp. 1774–1780. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.prostr.2020.10.154>.
- [18] Nejati M., Ghouli S., Ayatollahi M.R. Crack tip asymptotic field and K-dominant region for anisotropic semi-circular bend specimen. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2020, vol. 109, p. 102640. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2020.102640>.
- [19] Stepanova L.V., Belova O.N., Turkova V.A. Determination of the Williams series expansion's coefficients using digital photoelasticity method and finite element method. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2019, vol. 25, №3, pp. 62–82. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-62-82>. EDN: <https://www.elibrary.ru/bogzpu>. (In Russ.)
- [20] Stepanova L.V., Dolgikh V.S. Assessment of the SIF, T-stress and higher-order coefficient values of the cracked specimens with two interacting cracks or notches under mixed mode loadings by digital photoelasticity method. *AIP Conference Proceedings*, 2021, vol. 2371, p. 020013. DOI: <http://doi.org/10.1063/5.0059578>. EDN: <https://www.elibrary.ru/sgyupt>.
- [21] Li Y., Zheng K. Crack tip asymptotic field coefficients analyses based on extended finite element method using over-deterministic displacement field fitting method. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2021, vol. 113, p. 102971. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2021.102971>.
- [22] Aytollahi M.R., Nejati M., Ghouli S. The finite element over-deterministic method to calculate the coefficients of crack tip asymptotic fields. in anisotropic planes. *Engineering Fracture Mechanics*, 2020, vol. 231, p. 106982. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.106982>.
- [23] Stepanova L.V. The algorithm for the determination of the Williams asymptotic expansion coefficients for notched semidisks using the photoelasticity method and finite element method. *AIP Conference Proceedings*, 2020, vol. 2216, issue 1, p. 020013. DOI: <http://doi.org/10.1063/5.0003506>.
- [24] Hou C., Wang Z., Jin X., Ji X., Fan X. Determination of SIFs and T-stress using an over-deterministic method based on stress fields: Static and dynamic. *Engineering Fracture Mechanics*, 2021, vol. 242, p. 107455. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.107455>.
- [25] Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, 1957, vol. 24, pp. 109–114. Available at: <https://authors.library.caltech.edu/47558/1/382747.pdf>.
- [26] Hello G., Mabrouk B., Roelandt J. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, vol. 49, issues (3–4), pp. 556–566. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024>.
- [27] Maxwell J.C. A Treatise on Electricity and Magnetism. In two volumes. Volume II. Moscow: Nauka, 1989, 434 p. Available at: <https://libcats.org/book/505217>. (In Russ.)
- [28] Ramesh K., Gupta S., Kelkar A.A. Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity – revisited. *Engineering Fracture Mechanics*, 1997, vol. 56, issue 1, pp. 25–41, 43–45. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0013-7944\(96\)00098-7](http://doi.org/10.1016/S0013-7944(96)00098-7).
- [29] Belova O.N., Stepanova L.V. Computational and experimental identification of coefficients of the Williams series expansion by considering higher order terms in the cracked specimens through digital image analysis. *Procedia Structural Integrity*, 2022, vol. 40, pp. 46–60. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.04.006>.



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-105-110

УДК 539.4

Дата: поступления статьи: 12.09.2022
после рецензирования: 08.11.2022
принятия статьи: 05.12.2022

К.А. Хвостунков

Московский государственный университет

имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

E-mail: khvostunkov@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3749-0678>

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РАЗРУШЕНИЯ СЛОЕВ ДВУСЛОЙНОЙ БАЛКИ ПРИ ТРЕХТОЧЕЧНОМ НАГРУЖЕНИИ¹

АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается хрупкое разрушение двухслойной балки в условиях трехточечного нагружения в зависимости от рассматриваемых параметров — различных пропорций толщин, модулей Юнга и прочностей обоих слоев. На основании уравнений равновесия сил и моментов выводятся зависимости положения нейтральной оси балки, ее кривизны и определяются области параметров, при которых разрушение начинается ранее в слое, к которому прилагается нагрузка, чем во внешнем противоположном нагрузке слое.

Ключевые слова: двухслойная балка; трехточечное нагружение; хрупкое разрушение; предельные напряжения.

Цитирование. Хвостунков К.А. Последовательность начала разрушения слоев двухслойной балки при трехточечном нагружении // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2022. Т. 28, № 3–4. С. 105–110. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-105-110>.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Хвостунков К.А., 2022

Кирилл Анатольевич Хвостунков — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории пластичности, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы 1, ГСП-1.

1. Предварительные сведения

Среди множества различных технологий проектирования, расчета и создания слоистых композитов [1; 2] активно развивается методика, основанная на технологии самораспространяющегося высокотемпературного синтеза (СВС). Возможность создавать высокопрочные, устойчивые ко внешним воздействиям слоистые материалы различных пропорций, упругих, прочностных, геометрических, структурных характеристик [3–7] нуждается в предварительном определении наиболее оптимальных их соотношений для решения возможных задач промышленности, а также для корректной трактовки результатов экспериментальных исследований создаваемых материалов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения S из двух слоев различной толщины из упругих однородных материалов в условиях трехточечного нагружения. Нижний слой, противоположный

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 221900040, <https://rscf.ru/project/22-19-00040/>.

стороне приложения нагрузки P , обозначим индексом 1, а верхний слой — индексом 2. Толщина слоев и их пропорции могут быть различными, но сумма толщин равна фиксированной величине толщины балки b .

Направим ось x горизонтально вдоль оси балки, а y — ортогонально оси x вверх по толщине. Ось z направлена ортогонально плоскости xy по ширине a балки (рис. 1), L — расстояние между опорами при трехточечном нагружении, h — толщина нижнего слоя, $b - h$ — толщина верхнего слоя. Технология изготовления слоистых композитов методом СВС приводит к тому, что зона разделения слоев представляет собой диффузионную прослойку толщины Δ .

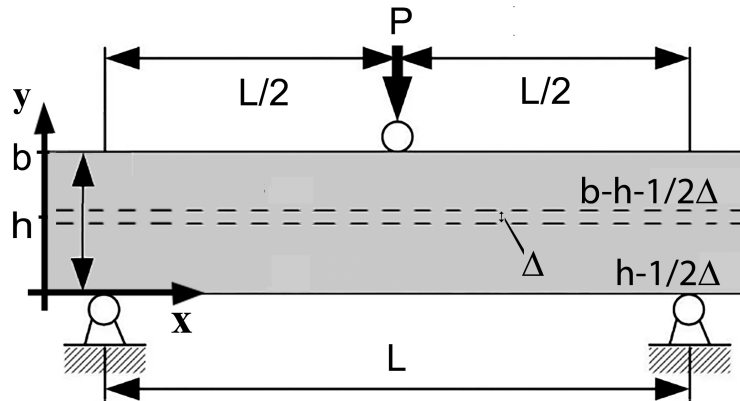


Рис. 1. Схема двухслойной балки с диффузионной прослойкой

Fig. 1. Scheme of a two-layer beam with a diffusion layer

Для выбранной системы координат рассмотрим нормальные компоненты $\sigma(x, y)$ упругих напряжений по сечению в точке x , ортогональному нейтральной оси, координата которой $y_0(x)$. $E(y)$ — модуль Юнга, $\kappa(x)$ — кривизна нейтральной оси. Изменением напряжений по координате z пренебрегаем. Также полагаем, что отношение расстояния между опорами к толщине балки достаточно велико, чтобы не учитывать влияние касательных компонент напряжений.

Введем три параметра двухслойности — отношение модуля Юнга нижнего слоя к верхнему $\gamma = E_1/E_2$, отношение толщины нижнего слоя ко всей толщине балки $\eta = h/b$ и отношение пределов прочности на растяжение нижнего слоя к верхнему $\lambda = \sigma_1^*/\sigma_2^*$.

Требуется определить область параметров двухслойности γ, η, λ , в которой хрупкое разрушение будет начинаться в верхнем слое раньше, чем в нижнем.

3. Решение задачи

В силу особой жесткости получаемых СВС материалов уместно будет решать задачу в рамках гипотезы плоских сечений. Также положим, что в диффузионной прослойке упругие свойства изменяются линейно от материала 1 до материала 2, тогда

$$\sigma(x, y) = \kappa(x)E(y)(y_0 - y), \quad E(y) = \begin{cases} E_2, & y \in (h + 1/2\Delta, b], \\ 1/2(E_1 + E_2) + (E_2 - E_1) \frac{(y-h)}{\Delta}, & y \in [h - 1/2\Delta, h + 1/2\Delta], \\ E_1, & y \in [0, h - 1/2\Delta]. \end{cases} \quad (1)$$

Введем безразмерные координаты и параметры:

$$\chi = \frac{x}{L}, \psi = \frac{y}{b}, \xi = \frac{y_0}{b}, \delta = \frac{\Delta}{b}, l = \frac{L}{b}, p = \frac{P}{2E_2ab} = \frac{1}{2E_2} \frac{P}{S}. \quad (2)$$

Запишем систему уравнений равновесия продольных сил и моментов (здесь и далее для продольной координаты $\chi \in [0, 1/2]$)

$$\int_0^{\eta-1/2\delta} \gamma(\xi - \psi) d\psi + \int_{\eta-1/2\delta}^{\eta+1/2\delta} \frac{2(1-\gamma)(\psi - \eta) + (1+\gamma)\delta}{2\delta} (\xi - \psi) d\psi + \int_{\eta+1/2\delta}^1 (\xi - \psi) d\psi = 0,$$

$$\int_0^{\eta-1/2\delta} \gamma(\xi - \psi)^2 d\psi + \int_{\eta-1/2\delta}^{\eta+1/2\delta} \frac{2(1-\gamma)(\psi - \eta) + (1+\gamma)\delta}{2\delta} (\xi - \psi)^2 d\psi + \int_{\eta+1/2\delta}^1 (\xi - \psi)^2 d\psi = \frac{pl\chi}{\kappa(\chi)}.$$

Из уравнения равновесия сил получаем координату нейтральной оси

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{1 + \eta^2(\gamma - 1)}{1 + \eta(\gamma - 1)} + \frac{1}{24} \delta^2 \frac{(\gamma - 1)}{1 + \eta(\gamma - 1)}. \quad (3)$$

Рассмотрим, как расположена нейтральная ось относительно разделительной зоны. Это повлияет на вид уравнений равновесия. Случай, когда нейтральная ось совпадает с диффузионной прослойкой, имеет вид

$$\xi = \eta, \quad \eta \in [0, 1], \quad \frac{1}{2} \frac{\eta^2(\gamma - 1) + 1 + \alpha}{1 + \eta(\gamma - 1)} = \eta, \quad \alpha = \frac{1}{12}(\gamma - 1)\delta^2, \\ \eta = \frac{\sqrt{\gamma(\alpha + 1) - \alpha - 1}}{(\gamma - 1)} \approx \frac{1}{1 + \sqrt{\gamma}}, \quad \alpha \ll 1.$$

Мы получили условие на толщину слоев относительно модулей упругости, когда нейтральная ось находится на границе раздела

$$\eta = \frac{1}{1 + \sqrt{\gamma}}. \quad (4)$$

Из уравнения равновесия моментов выражаем кривизну:

$$\kappa(\chi) = \frac{pl}{f(\gamma, \eta, \delta)} \chi, \quad (5) \\ f(\gamma, \eta, \delta) = \frac{1}{2} \frac{(\gamma + (\gamma - 1)(\gamma\eta^4 - (\eta - 1)^4))}{1 + \eta(\gamma - 1)} + \frac{\delta^2}{8} \frac{(\gamma - 1)(\gamma\eta^2 - (\eta - 1)^2)}{(1 + \eta(\gamma - 1))} - \frac{5\delta^4}{576} \frac{(\gamma - 1)^2}{(1 + \eta(\gamma - 1))}.$$

Подставляя (5) в (1), получаем

$$\sigma(\chi, \psi) = \begin{cases} E_2 \kappa(\chi)(\xi - \eta), & \psi \in (\eta + 1/2\delta, 1], \\ E_2 \kappa(\chi) \left(\frac{(1+\gamma)}{2} + (\gamma - 1) \frac{(\psi - \eta)}{\delta} \right) (\xi - \psi), & \psi \in [\eta - 1/2\delta, \eta + 1/2\delta], \\ E_2 \kappa(\chi)(\xi - \psi), & \psi \in [0, \eta - 1/2\delta]. \end{cases}$$

В силу линейного распределения, максимум будет достигнут либо на нижнем крае верхнего слоя 2

$$\sigma_{m2}(\gamma, \eta) = \frac{1}{8} \frac{l}{f} \left(\frac{1 + \eta^2(\gamma - 1)}{1 + \eta(\gamma - 1)} + \frac{1}{12} \delta^2 \frac{\gamma - 1}{1 + \eta(\gamma - 1)} - 2(\eta + 1/2\delta) \right) \frac{P}{S}, \quad (6)$$

либо на нижнем крае нижнего слоя 1

$$\sigma_{m1}(\gamma, \eta) = \frac{\gamma}{8} \frac{l}{f} \left(\frac{1 + \eta^2(\gamma - 1)}{1 + \eta(\gamma - 1)} + \frac{1}{12} \delta^2 \frac{\gamma - 1}{1 + \eta(\gamma - 1)} \right) \frac{P}{S}. \quad (7)$$

При существенной малости толщины диффузионного слоя ($\delta \ll 10^{-6}$) мы в дальнейших выкладках пренебрежем им и будем использовать следующие равенства:

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{1 + \eta^2(\gamma - 1)}{1 + \eta(\gamma - 1)}, \quad \kappa(\chi) = 3l \frac{1 + \eta(\gamma - 1)}{\gamma + (\gamma - 1)(\gamma\eta^4 - (\eta - 1)^4)} \chi \frac{P}{E_2 S}.$$

В этом случае максимальное напряжение в центральном сечении балки на противоположном точке приложения силы крае балки будет в верхнем слое:

$$\sigma_{m2}(\gamma, \eta) = \frac{3}{2} l \frac{((1 - \eta)^2 - \gamma\eta^2)}{\gamma + (\gamma - 1)(\gamma\eta^4 - (\eta - 1)^4)} \frac{P}{S}.$$

Максимальное напряжение в нижнем слое:

$$\sigma_{m1}(\gamma, \eta) = \frac{3}{2} l \gamma \frac{1 + \eta^2(\gamma - 1)}{\gamma + (\gamma - 1)(\gamma\eta^4 - (\eta - 1)^4)} \frac{P}{S}.$$

Факт того, что напряжения в верхнем слое 2 достигают максимума раньше в нижнем слое 1, не означает того, что там начнется разрушение. Необходимо ввести сравнение прочностей этих слоев. Получаем условие начала разрушения в верхнем слое 2 ранее нижнего слоя 1

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{m1}}{\sigma_{m2}} = \frac{\gamma(1+\eta^2(\gamma-1))}{((1-\eta)^2-\gamma\eta^2)} < \lambda = \frac{\sigma_1^*}{\sigma_2^*}, \\ \eta < \xi = \frac{1}{2} \frac{1+\eta^2(\gamma-1)}{1+\eta(\gamma-1)}, \end{cases} \quad (8)$$

Область параметров двухслойности γ, η от λ , для которых максимальное напряжение достигает предела прочности на нижнем крае ранее верхнего слоя, а не нижнего, задается совокупностью неравенств, следующих из (8):

$$\begin{cases} (\gamma + \lambda)(\gamma - 1)\eta^2 + 2\lambda\eta + \gamma - \lambda < 0, \\ (\gamma - 1)\eta^2 + 2\eta - 1 < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Учитывая положительность параметров, мы получаем зависимость параметров двухслойности γ, η, λ , при которых максимальное напряжение достигает предела прочности на нижнем крае ранее верхнего слоя, а не нижнего:

$$\begin{cases} \frac{\gamma(1+\eta^2(\gamma-1))}{((1-\eta)^2-\gamma\eta^2)} < \lambda \\ \eta < \frac{1}{1+\sqrt{\gamma}} \end{cases}$$

4. Пример определения области параметров, соответствующих началу разрушения балки с края верхнего слоя

Рассмотрим случай $\gamma = 1$, то есть оба слоя с одинаковыми модулями Юнга. Мы определим зависимость параметров двухслойности γ, η , при которых максимальное напряжение достигается на нижнем крае ранее верхнего слоя, а не нижнего:

$$\frac{1}{1-2\eta} < \lambda, \quad 0 < \eta < \frac{1}{2}$$

$$\sigma_{m2} = \frac{3}{2} l (1-2\eta) \frac{P}{S}$$

В результате для $\gamma = 1$ получена область (на рис. 2. закрашена серым), в которой разрушение начнется в верхнем слое ранее, чем в нижнем:

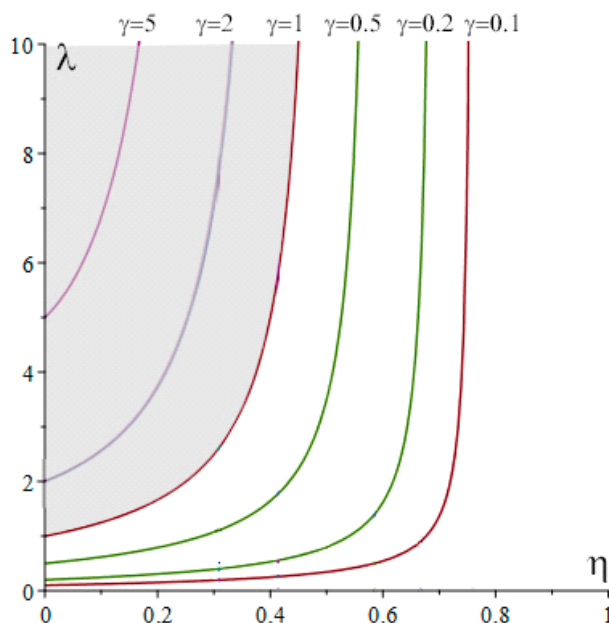


Рис. 2. Зоны разрушения при $\gamma = 1$

Fig. 2. Fracture zones $\gamma = 1$

Выводы

Мы получили возможность заранее прогнозировать, какой слой, исходя из конкретных параметров двухслойности, запустит механизм хрупкого разрушения. Соответственно зависимость внешней нагрузки от прочности вида материала слоев стоит рассматривать в соотношениях (6) и (7).

Литература

- [1] Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания. Новосибирск: Наука, 2001. 288 с. URL: <https://libcats.org/book/438700>; <https://elibrary.ru/item.asp?id=21107452>. EDN: <https://elibrary.ru/rtxgkt>.

- [2] Vasiliev V.V., Morozov E.V. Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements. Elsevier, 2013. 832 p. URL: https://books.google.ru/books?id=T1gRGmoJ9ecC&printsec=frontcover&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false.
- [3] Bazhin P.M., Konstantinov A.S., Chizhikov A.P., Pazniak A.I., Kostitsyna E.V., Prokopets A.D., Stolin A.M. Laminated cermet composite materials: The main production methods, structural features and properties (review) // Ceramics International. 2021. Vol. 47, Issue 2. P. 1513–1525. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ceramint.2020.08.292>.
- [4] Bazhina A., Konstantinov A., Chizhikov A., Bazhin P., Stolin A., Avdeeva V. Structure and mechanical characteristics of a layered composite material based on TiB/TiAl/Ti // Ceramics International. 2022. Vol. 48, Issue 10. P. 14295–14300. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ceramint.2022.01.318>.
- [5] Prokopets A.D., Bazhin P.M., Konstantinov A.S., Chizhikov A.P., Antipov M.S., Avdeeva V.V. Structural features of layered composite material TiB₂/TiAl/Ti6Al4V obtained by unrestricted SHS-compression // Materials Letters. 2021. Vol. 300. P. 130165. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.matlet.2021.130165>.
- [6] Прокопец А.Д., Константинов А.С., Чижилов А.П., Бажин П.М., Столин А.М. Закономерности формирования структуры градиентных композиционных материалов на основе MAX-фазы Ti₃AlC₂ на титане // Неорганические материалы. 2020. Т. 56, № 10. С. 1145–1150. DOI: <http://doi.org/10.31857/S0002337X20100127>. EDN: <https://elibrary.ru/xjftmu>.
- [7] Бажин П.М., Столин А.М., Константинов А.С., Чижилов А.П., Прокопец А.Д., Алымов М.И. Особенности строения слоистых композиционных материалов на основе боридов титана, полученных методом свободного СВС-сжатия // Доклады Академии наук. 2019. Т. 488, № 3. С. 263–266. DOI: <http://doi.org/10.31857/S0869-56524883263-266>. EDN: <https://elibrary.ru/cssyxo>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-105-110

Submitted: 12.09.2022

Revised: 08.11.2022

Accepted: 05.12.2022

K.A. Khvostunkov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

E-mail: khvostunkov@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3749-0678>

FRACTURE INITIATION SEQUENCE OF DOUBLE-LAYER BEAM LAYERS UNDER THREE-POINT LOADING

ABSTRACT

The article deals with brittle failure of a two-layer beam under three-point loading conditions depending on the parameters under consideration — different proportions of thicknesses, Young's moduli and strengths of both layers. Based on the equations of force and moment equilibrium, the dependences of the position of the beam neutral axis and its curvature are derived and the regions of parameters are determined, at which the failure begins earlier in the layer to which the load is applied than in the outer opposite layer to the load.

Key words: two-layer beam; three-point loading; brittle fracture; ultimate stresses.

Citation. Khvostunkov K.A. Fracture initiation sequence of double-layer beam plies under three-point loading. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* = *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 105–110. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-105-110>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

© Khvostunkov K.A., 2022

Kirill A. Khvostunkov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of Theory Plasticity, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Main Building, 1, Leninskiye Gory, GSP-1, Moscow, 119991, Russian Federation.

References

- [1] Andreev A.N., Nemirovsky Y.V. Multilayer anisotropic shells and plates: bending, stability, vibrations. Novosibirsk: Nauka, 2001, 288 p. Available at: <https://libcats.org/book/438700>; <https://elibrary.ru/item.asp?id=21107452>. EDN: <https://elibrary.ru/rtxgkt>. (In Russ.)
- [2] Vasiliev V.V., Morozov E.V. Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements. Elsevier, 2013. 832 p. Available at: https://books.google.ru/books?id=T1gRGmoJ9ecC&printsec=frontcover&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false.
- [3] Bazhin P.M., Konstantinov A.S., Chizhikov A.P., Pazniak A.I., Kostitsyna E.V., Prokopets A.D., Stolin A.M. Laminated cermet composite materials: The main production methods, structural features and properties (review). *Ceramics International*, 2021, vol. 47, issue 2, pp. 1513–1525. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ceramint.2020.08.292>.
- [4] Bazhina A., Konstantinov A., Chizhikov A., Bazhin P., Stolin A., Avdeeva V. Structure and mechanical characteristics of a layered composite material based on TiB/TiAl/Ti. *Ceramics International*, 2022, vol. 48, issue 10, pp. 14295–14300. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ceramint.2022.01.318>.
- [5] Prokopets A.D., Bazhin P.M., Konstantinov A.S., Chizhikov A.P., Antipov M.S., Avdeeva V.V. Structural features of layered composite material TiB₂/TiAl/Ti₆Al₄V obtained by unrestricted SHS-compression. *Materials Letters*, 2021, vol. 300, p. 130165. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.matlet.2021.130165>.
- [6] Prokopets A.D., Konstantinov A.S., Chizhikov A.P., Bazhin P.M., Stolin A.M. General trends of structure formation in graded composite materials based on Ti₃AlC₂ MAX-phase on titanium. *Inorganic Materials*, 2020, vol. 56, no. 10, pp. 1087–1091. DOI: <https://doi.org/10.1134/S002016852010012X>. EDN: <https://elibrary.ru/lelksm>. (In English; original in Russian).
- [7] Bazhin P.M., Stolin A.M., Konstantinov A.S., Chizhikov A.P., Prokopets A.D., Alymov M.I. Structural features of titanium boride-based layered composite materials produced by free SHS compression. *Doklady Chemistry*, 2019, vol. 488, no. 1, pp. 246–248. DOI: <http://doi.org/10.1134/S0012500819090039>. EDN: <https://elibrary.ru/gxuqpa>. (In English: original in Russian).

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

Журнал "Вестник Самарского университета. Естественная серия" издается с 1995 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Самарским университетом с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде. Электронная версия журнала размещается на сайте Самарского университета по адресу <http://vestnik.samsu.ru> <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>. Все статьи проходят проверку в программе "Антиплагиат".

В журнале "Вестник Самарского университета. Естественная серия" печатаются оригинальные научные результаты из различных областей естествознания по профилю базы данных zbMath, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала.

Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Самарскому университету. Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи должны сопровождаться направлением организации, в которой выполнена работа. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимает редколлегия журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию. Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работы придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронная (e-mail: nvestnik@ssau.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы (без формул), список авторов, представленный в алфавитном порядке, с указанием места работы и его адреса с индексом, адресов электронной почты каждого из них, звания, должности, ORCID на русском и английском языках; аннотацию не менее 100 слов на русском и английском языках, которая дается перед основным текстом; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной классификации (УДК), необходимо представить ключевые слова на русском и английском языках.

4. Объем статьи не должен превышать 15–25 страниц, иллюстрированного не более чем 5 рисунками и 5 таблицами. Базовый размер шрифта — 10 пунктов. Опубликование работ, не соответствующих этим ограничениям, возможно только после специального решения редколлегии журнала.

5. Подписи к рисункам должны размещаться снизу от рисунка и должны содержать их краткое описание и, возможно, объяснение использованных символов и условных обозначений.

6. Указатель таблицы должен быть размещен справа сверху от таблицы. Заголовок таблицы (как и сама таблица) должен быть отцентрирован по ширине основного текста.

7. Нумерация рисунков и таблиц должна быть пораздельной по тексту статьи. Не допускается размещать в тексте рисунки и таблицы до появления на них ссылки в тексте.

8. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы $\text{\LaTeX}$ с использованием стиля `samgu.cls`. Стиль `samgu.cls` и пример оформления статьи можно найти на сайте Самарского государственного университета (адрес указан выше). Использование других реализаций $\text{\TeX}$ крайне нежелательно. Подготовка электронной версии статьи с помощью других средств должна быть заранее согласована с редакцией. Иллюстративный материал (рисунки, таблицы, диаграммы) готовится стандартными средствами $\text{\LaTeX}$. Рисунки могут быть также подготовлены в любом графическом редакторе и предоставлены в формате EPS. Электронные представления фотографий допускаются только в форматах EPS или TIFF с разрешением не менее 600 dpi. В случае использования нестандартных стилевых файлов автор обязан предоставить редакции необходимые стилевые файлы. Изменения стандартных стилевых файлов недопустимы.

9. При подготовке электронного варианта статьи следует принимать во внимание следующие рекомендации:

а) при наборе статьи необходимо различать следующие знаки препинания и контрольные последовательности, им соответствующие: одинарный дефис ("—"), двойной дефис ("==")¹, тройной дефис ("===")². Одинарный дефис используют в составных словах; двойной дефис рекомендуется для указания диапазона чисел и "двойных" фамилий; тройной дефис означает тире;

б) допустимо использование только обратных кавычек ("") с помощью контрольной последовательности `\textquotedblright`;

в) недопустимо нахождения рядом двух и более закрывающих или открывающих скобок одного вида. Рекомендуется внимательно относиться к балансу скобок;

г) допускается использование следующих команд переключения шрифтов: `\rm`, `\it`, `\bf`, `\sl` и стандартных шрифтов семейства AMS с использованием следующих команд переключения шрифтов `\mathbf`, `\mathcal`, `\mathfrak`. Использование других шрифтов должно быть согласовано с редакцией журнала;

д) на графиках должна быть нанесена сетка (желательно квадратная) с обозначением делений. Рекомендуемый размер рисунков — 11–15 см по горизонтали и 5–15 см по вертикали. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках и за подобием шрифтов. Надписи, загромождающие рисунки, должны

¹Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash--`

²Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash---`

быть заменены цифрами или буквенными обозначениями и внесены в подрисуночные подписи. Сами подрисуночные подписи должны быть, по возможности, краткими. Редакция оставляет за собой право требовать от автора более качественного выполнения графического материала;

е) для математических обозначений рекомендуется употреблять, по возможности, стандартные и наиболее простые символы. Не следует применять индексы из букв русского алфавита. Векторы и тензоры выполняются жирным шрифтом. Вместо одинаковых повторяющихся блоков в формулах желательно использовать их сокращенные обозначения;

ж) при нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой. Рекомендуется двойная нумерация: первая цифра — номер раздела статьи, вторая цифра после точки — номер формулы внутри раздела. Номер должен стоять справа от формулы. Не следует нумеровать формулы, на которые нет ссылок в тексте;

з) теоремы, леммы, примеры, утверждения и т.п. выполняются обычным шрифтом; их заголовки даются жирным шрифтом;

и) список литературы составляется по порядку цитирования, располагается в конце статьи на русском и английском языках (не менее 10 пунктов). Для книг сообщается следующая информация: фамилии и инициалы авторов, полное название книги, издательство, год издания и количество страниц; для статей в сборниках и журналах — фамилии и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала (сборника) полностью или, если есть стандартное сокращение, сокращенно, полная информация об издании (серия, том, номер, выпуск, год), номера начальной и конечной страниц статьи;

к) ссылки на иностранные источники (включая переведенные на русский язык статьи и книги) даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются в случае перевода на русский язык с указанием названия и выходных данных перевода.

Цитирование осуществляется командой \cite с соответствующей меткой. Ссылки на неопубликованные работы недопустимы.

Невыполнение авторами перечисленных выше правил может повлечь за собой задержку с опубликованием работы.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию и даты ее принятия. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией журнала.

Редакция журнала