



**САМАРСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

Самарский национальный
исследовательский университет
имени академика С.П. Королёва



ВЕСТНИК

САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ СЕРИЯ

VESTNIK

OF SAMARA UNIVERSITY

NATURAL SCIENCE SERIES

ISSN 2541-7525 Print
ISSN 2712-8954 Online

ТОМ 30 • №4 • 2024 ГОД

ISSN 2541-7525 Print
ISSN 2712-8954 Online
Подписной индекс 80307

**ВЕСТНИК
САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ СЕРИЯ**

**VESTNIK
OF SAMARA UNIVERSITY
NATURAL SCIENCE SERIES**

- *Математика*
- *Механика*
- *Математические
методы
в естественных
науках*
- *Физика*
- *Информационно-
вычислительные
системы*

ТОМ 30 • № 4 • 2024 ГОД

УЧРЕДИТЕЛЬ И ИЗДАТЕЛЬ ЖУРНАЛА

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»
(Самарский университет)

eLIBRARY.RU РИНЦ ВИНТИ ULRICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet

Все статьи по тематике международной базы данных zbMATH считаются включенными в Перечень ведущих научных журналов Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки РФ

Журнал издаётся с 1995 г. под названием «Вестник Самарского государственного университета», с 2016 г. — «Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series»

Выходит 4 раза в год Т. 30, № 4, 2024

Главный редактор:

А.Б. Прокофьев, д-р тех. наук, доц., зав. кафедрой теории двигателей летательных аппаратов имени В.П. Лукачева, первый проректор — проректор по научно-исследовательской работе (Самара, Самарский университет, РФ)

Заместители главного редактора:

С.В. Асташкин, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой функционального анализа и теории функций (Самара, Самарский университет, РФ)

Л.В. Степанова, д-р физ.-мат. наук, доц., зав. кафедрой математического моделирования в механике (Самара, Самарский университет, РФ)

Ответственный секретарь:

М.А. Лихобабенко, канд. физ.-мат. наук

Лит. редактирование, корректура

Т.А. Мурзиновой

Компьютерная верстка, макет

М.А. Лихобабенко

Выпускающий редактор

Т.А. Мурзинова

Информация на английском языке

М.С. Стрельникова

Издатель и учредитель: Самарский университет

Адрес издателя и учредителя:

443086, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, Московское шоссе, 34.

Центр периодических изданий Самарского университета

Адрес редакции: 443011, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

E-mail: nvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Периодическое печатное издание, журнал, зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций, регистрационный номер серии ПИ № ФС 77-67328 от 05.10.2016

Подписной индекс в Объединенном интернет-каталоге «Пресса России» 80307

ISSN 2541-7525 Print

ISSN 2712-8954 Online

Авторские статьи не обязательно отражают мнение издателя.

0+

Цена свободная

Подписано в печать 25.12.2024. Дата выхода в свет 05.02.2025
Формат 60 × 84/8.

Бумага офсетная. Печать оперативная.

Печ. л. 20.

Тираж 200 экз. (первый завод — 30 экз.). Заказ №

Отпечатано в типографии Самарского университета
443086, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, Московское шоссе, 34.

www: <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Редакционная коллегия:

В.Н. Аязов, д-р физ.-мат. наук, директор (Самарский филиал Физического института им. П.Н. Лебедева РАН, Самара, РФ), профессор кафедры физики (Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, РФ)

В.Э. Видельман, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой экспериментальной механики и конструкционного материаловедения, директор Центра экспериментальной механики (Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, РФ)

А.В. Горюхов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры общей и теоретической физики (Самарский университет, Самара, РФ)

А.М. Зюзин, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой экспериментальной физики (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, РФ)

В.В. Иважник, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры оптики и спектроскопии (Самарский университет, Самара, РФ)

А.И. Кожанов, д-р физ.-мат. наук, проф., ведущий научный сотрудник лаборатории теории функций (Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, РФ)

М.А. Лёган, д-р тех. наук, доц., проф. кафедры прочности летательных аппаратов (Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, РФ)

С.А. Лычев, д-р физ.-мат. наук, доц., ведущий научный сотрудник лаборатории Механики технологических процессов (Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, РФ)

Константин Панкрашкин, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры математики (Университет Париж-юг 11, Орсе, Франция)

А.Н. Панов, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой алгебры и геометрии (Самарский университет, Самара, РФ)

Давиде М. Прозертио, д-р химии, проф. кафедры химии (Миланский университет, Милан, Италия)

Л.С. Пулькина, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры дифференциальных уравнений и теории управления (Самарский университет, Самара, РФ)

С.Г. Пятков, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой высшей математики; ведущий научный сотрудник (Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, РФ; Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, РФ)

В.В. Ревин, д-р биол. наук, проф., декан факультета биотехнологии и биологии, зав. кафедрой биотехнологии, биоинженерии и биохимии (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, РФ)

В.А. Салеев, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой общей и теоретической физики (Самарский университет, Самара, РФ)

В.А. Соболев, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры дифференциальных уравнений и теории управления (Самарский университет, Самара, РФ)

П.А. Терезин, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры теории функций и стохастического анализа (Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, РФ)

К.В. Устинов, д-р физ.-мат. наук, доц., ведущий научный сотрудник лаборатории Геомеханики (Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, РФ)

А.И. Хромов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры прикладной математики и информатики (Комсомольский-на-Амуре государственный университет, Комсомольск-на-Амуре, РФ)

© Самарский университет, 2024

ISSN 2541-7525 Print
ISSN 2712-8954 Online
Subscription Index 80307

**VESTNIK
SAMARSKOGO UNIVERSITETA
ESTESTVENNONAUCHNAYA SERIYA**

**VESTNIK
OF SAMARA UNIVERSITY
NATURAL SCIENCE SERIES**

- *Mechanics*
- *Mechanics*
- *Mathematical
Methods
in Natural
Sciences*
- *Physics*
- *Informatics
and Computer
Science*

VOL. 30 • № 4 • 2024

JOURNAL FOUNDER AND PUBLISHER
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
«Samara National Research University»
(Samara University)

eLIBRARY.RU RSCI VINITI ULRICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet
All articles on the subject of an international database zbMATH seemed to be included in the list of leading scientific journals of the Higher Attestation Committee at the Ministry of Education and Science of the Russian Federation
The journal is published since 1995 under the title Vestnik of Samara State University, since 2016 —
"Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya Seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series"
It is published 4 times a year V. 30, № 4, 2024

Chief editor:

A.B. Prokofiev, Dr. of Engineering Sci., associate professor, head of the Department of Theory of Aircraft Engines named after V.P. Lukacheva, first vice-rector — vice-rector for research (Samara, Samara National Research University, RF)

Deputy chief editors:

S.V. Astashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Functional Analysis and Function Theory (Samara, Samara National Research University, RF)

L.V. Stepanova, Dr. of Phys.-Math. Sci., associate prof., head of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics (Samara, Samara National Research University, RF)

Executive editor:

M.A. Likhobabenko, Cand. of Phys.-Math. Sci.

Literary editing, proofreading

T.A. Murzinova

Computer makeup, dummy

M.A. Likhobabenko

Executive editor

T.A. Murzinova

Information in English

M.S. Strelnikov

Publisher and Founder: Samara National Research University

Address publisher and founder:

34, Moskovskoye shosse,

Samara, 443086, Samara region, Russian Federation.

Centre of Periodical Publications of Samara University

Address of editorial staff: 1, Akademika Pavlova Street, Samara, 443011, Samara region, Russian Federation.

E-mail: nvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Certificate of registration of means of mass media **Пн № ФС 77-67328** dated 05.10.2016, issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media.

Subscription Index in the United catalog of Internet «Press of Russia» 80307

ISSN 2541-7525 Print

ISSN 2712-8954 Online

Author's articles do not necessarily reflect the views of the publisher.

0+

Price free

Passed for printing 25.12.2024. Date of publication 05.02.2025

Format 60 × 84/8.

Litho paper. Instant print.

Print. sheets 20.

Circulation 200 copies (first printing – 30 copies).

Order №

Printed on the printing house of Samara University

34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Samara region, Russian Federation

www: <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Editorial board:

V.N. Azyazov, Dr. of Phys.-Math. Sci., head (Samara Branch of the Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Samara, Russia), prof. of the Department of Physics (Samara National Research University, Samara, RF)

V.E. Videlman, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Experimental Mechanics and Engineering Materials Science, head of the Center of Experimental Mechanics (Perm National Research Polytechnic University, Perm, RF)

A.V. Gorokhov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of General and Theoretical Physics (Samara National Research University, Samara, RF)

A.M. Zyuzin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Experimental Physics (Ogarev Mordovia National University, Saransk, RF)

V.V. Ivakhnik, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Optics and Spectroscopy (Samara National Research University, Samara, RF)

A.I. Kozhanov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., leading research worker of the Laboratory of the Theory of Functions (Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian branch of the RAS, Novosibirsk, RF)

M.A. Legan, Dr. of Engineering Sci., associate prof., prof. of the Department of Strength of Flying Machines (Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, RF)

S.A. Lychev, Dr. of Phys.-Math. Sci., associate professor, leading research worker at the Laboratory of Mechanics of Technological Processes (Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Science, Moscow, RF)

Konstantin Pankrashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. of the Department of Mathematics (University of Paris-Sud 11, Orsay, France)

A.N. Panov, Dr. of Phys.-Math. Sci., professor, head of the Department of Algebra and Geometry (Samara National Research University, Samara, RF)

Davide M. Proserpio, Dr. of Chemistry, prof. of the Department of Chemistry (University of Milan, Milan, Italy)

L.S. Pulkina, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Differential Equations and Control Theory (Samara National University, Samara, RF)

S.G. Pyatkov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Higher Mathematics; leading research worker (Yugra State University, Khanty-Mansiysk, RF; Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian branch of the RAS, Novosibirsk, RF)

V.V. Revin, Dr. Degree in Biology, prof., dean of the Faculty of Biotechnology and Biology, head of the Department of Biotechnology, Bioengineering and Biochemistry (Ogarev Mordovia National Research University, Saransk, RF)

V.A. Saleev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of General and Theoretical Physics (Samara National Research University, Samara, RF)

V.A. Sobolev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Differential Equations and Control Theory (Samara National Research University, Samara, RF)

P.A. Terekhin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Function Theory and Stochastic Analysis (Saratov State University, Saratov, RF)

K.B. Ustinov, Dr. of Phys.-Math. Sci., associate professor, leading research worker at the Laboratory of Geomechanics (Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Science, Moscow, RF)

A.I. Khromov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Applied Mathematics and Informatics (Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-on-Amur, RF)

© Samara University, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

- Кармоков М.М., Нахушева Ф.М., Геккиева С.Х.** Краевые задачи для разрывно-нагруженных параболических уравнений 7

Механика

- Бахарева Ю.Н.** Многопараметрические представления поля напряжений у вершины трещины антиплоского сдвига 18
- Дигилов А.В., Лычев С.А.** Решение уравнений Фешля – фон Кармана для квадратных пластин 26
- Калабухов В.Н.** К вопросу разработки глушителей шума реактивной струи 46
- Койфман К.Г., Лычев С.А.** Нелинейные уравнения деформирования гибких пластин ... 53
- Сергеев Р.Н.** Экспериментальная оценка определения среднего размера спеклов 84

Математические методы в естественных науках

- Артур М.Х., Рыжова Е.А., Ярославкина Е.Е.** Численное моделирование температурного поля нефтепровода для теплового метода измерения толщины парафиновых отложений с учетом движения нефти 92
- Касперович А.М., Шевелев А.П., Гильманов А.Я.** Неизотермическая математическая модель блокирования техногенных трещин 101

Физика

- Алимов Л.Э., Карпишков А.В., Салеев В.А.** Ассоциативное рождение J/ψ -мезонов и прямых фотонов в подходе реджезации партонов 116
- Салеев В.А., Шиляев К.К.** Рождение J/ψ в подходе пересуммирования мягких глюонов и нерелятивистской КХД 133

Информационно-вычислительные системы

- Ветров И.А., Подтопелный В.В.** Особенности использования марковских процессов принятия решений при моделировании атак на системы искусственного интеллекта 147

CONTENTS

Mathematics

- Karmokov M.M., Nakhusheva F.M., Gekkieva S.Kh.** Boundary value problems for discontinuously loaded parabolic equations..... **7**

Mechanics

- Bakhareva Yu.N.** Multiparametric presentation of the crack-tip fields in the vicinity of longitudinal shear crack **18**
Digilov A.V., Lychev S.A. Solution of the Föppl – von Kármán equations for square plates **26**
Kalabukhov V.N. Experience in developing jet noise silencers **46**
Koifman K.G., Lychev S.A. Nonlinear equations of flexible plates deformations **53**
Sergeev R.N. Experimental assessment of determining the average size of speckles **84**

Mathematical Methods in Natural Sciences

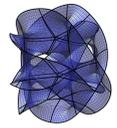
- Artur M.Kh., Ryzhova E.A., Yaroslavkina E.E.** Numerical simulation of the oil pipeline temperature field for the thermal method of measuring the thickness of paraffin deposits taken into account of oil movement..... **92**
Kasperovich A.M., Shevelev A.P., Gilmanov A.Ya. Non-isothermal mathematical model of blocking technogenic fractures **101**

Physics

- Alimov L.E., Karpishkov A.V., Saleev V.A.** Associated production of J/ψ and direct photon in the parton Reggeization approach..... **116**
Saleev V.A., Shilyaev K.K. Production of J/ψ within the Soft Gluon Resummation Approach and Nonrelativistic QCD **133**

Informatics and Computer Science

- Vetrov I.A., Podtopelny V.V.** Features of using Markov decision-making processes when modeling attacks on artificial intelligence systems..... **147**



Краевые задачи для разрывно-нагруженных параболических уравнений

Кармоков¹ М.М. , Нахушева¹ Ф.М. , Гекжиева² С.Х. 

¹ Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х.М. Бербекова, г. Нальчик, Российская Федерация; mkarmokov@yandex.ru (М.М.); fatima-nakhusheva@mail.ru (Ф.М.);

² Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, г. Нальчик, Российская Федерация; gekkieva_s@mail.ru (С.Х.);

Поступила: 11.09.2024

Рассмотрена: 18.10.2024

Принята: 25.11.2024

Научная статья



Аннотация. В статье рассматриваются краевые задачи для разрывно-нагруженного параболического уравнения с оператором дробного интегродифференцирования Римана – Лиувилля с переменными коэффициентами. Доказана однозначная разрешимость задачи Коши – Дирихле для разрывно-нагруженного параболического уравнения дробного порядка. В работе также исследуются вопросы существования и единственности решения первой краевой задачи для разрывно-нагруженного уравнения параболического типа. Методом функции Грина, используя свойства фундаментального решения соответствующего однородного уравнения, а также предполагая, что коэффициенты уравнения ограничены, непрерывны и удовлетворяют условию Гельдера, оставаясь неотрицательными, показано, что решение задачи сводится к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Ключевые слова: краевые задачи; параболические уравнения; задача Коши – Дирихле; оператор дробного интегродифференцирования; первая краевая задача; функция Грина; нагруженное уравнение; регулярное решение.

Введение

Как известно, исследование математических моделей физико-биологических фрактальных процессов и связанных с ними задач, таких как задачи прогноза и регулирования уровня грунтовых вод, содержания влаги и соли в почвогрунтах на мелиорируемой территории и др., приводит к качественно новому классу дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, получивших название нагруженных уравнений. В связи с этим исследование этих уравнений представляет большой как теоретический, так и практический интерес.

В монографии А.М. Нахушева [1] приведена подробная библиография по нагруженным уравнениям, в том числе по различным применениям нагруженных уравнений, как методу исследования задач математической биологии, математической физики, математического моделирования нелокальных процессов и явлений, механики сплошных сред с памятью.

Данная работа посвящена исследованию краевых задач для разрывно-нагруженных параболических уравнений с дробной производной.

В полосе $H = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}, 0 < t < T\}$ евклидовой плоскости независимых переменных x и t рассмотрим разрывно-нагруженное уравнение

$$Lu = \sum_{j=1}^{n_k} a_j^k(x, t) D_{0t}^{\alpha_j^k} K_j^k(x, t) u(x_j^k, t), \quad T_k < t \leq T_{k+1}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} k &= 0, 1, \dots, N, \quad 0 = T_0 < T_1 < \dots < T_N = T, \\ \alpha_{n_k}^k &< \alpha_{n_{k-1}}^k < \dots < \alpha_1^k = \alpha_k, \quad 0 < x_1^k < x_2^k < \dots < x_{n_k}^k < l, \\ Lu &= a(x, t) u_{xx} + b(x, t) u_x + c(x, t) u - u_t, \end{aligned}$$

$D_{0t}^{\alpha_j}$ — оператор дробного интегродифференцирования порядка α_j [2].

Уравнение (1) относится к классу уравнений, предложенных в [3]. Работы [4; 5] посвящены локальным и нелокальным краевым задачам для нагруженных параболических уравнений. Нелокальные краевые задачи для линейных параболических уравнений рассматривались также в работах [6; 7]. В работе [8] методом функции Грина исследована смешанная краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности. Краевые задачи для уравнений в частных производных дробного порядка, включая диффузионно-волновые уравнения, рассмотрены в монографии [9]. В исследовании [10] получены решения краевых задач для нагруженного диффузионно-волнового уравнения с дробной производной. Среди более поздних отметим работу [11], в которой доказана однозначная разрешимость в пространстве Соболева нелокальной задачи с интегральными условиями для параболического уравнения, а также работы [12; 13], посвященные исследованию разрешимости нелинейных обратных задач для параболических уравнений, в том числе вырождающихся. Численному решению первой краевой задачи для нагруженного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами посвящены работы [14; 15].

1. Основные результаты

1.1. Задача Коши – Дирихле

Пусть $a(x, t) \geq \mu > 0$, коэффициенты a, b, c, a_j^k, K_j^k в области H ограничены, непрерывны; a, b, c удовлетворяют условиям Гельдера по переменной x , а $a(x, t)$ и по переменной t . Пусть далее

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Решением задачи (1), (2) будем называть функцию $u(x, t)$, непрерывную и ограниченную в H , удовлетворяющую уравнению (1) и условию (2).

Теорема 1.1. Пусть $\varphi(x)$ – непрерывная и ограниченная во всем пространстве \mathbb{R} функция и $\alpha^k < \frac{1}{2}$. Тогда в слое H существует единственное решение задачи Коши – Дирихле для уравнения (1) с начальным условием (2).

Доказательство. Не нарушая общности, рассмотрим задачу для $N = 2$. Введем обозначения:

$$H_1 = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}, 0 < t < T_1\},$$

$$H_2 = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}, T_1 < t < T\}.$$

Известно [16], что фундаментальное решение $Z(x, t; \xi, \tau)$ уравнения $Lu = 0$ имеет вид

$$Z(x, t; \xi, \tau) = W(x, t; \xi, \tau) + \int_{\tau}^t d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} W(x, t; \xi_1, \tau_1) \Phi(\xi_1, \tau_1; \xi, \tau) d\xi_1,$$

где

$$W(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)a(\xi, \tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a(\xi, \tau)(t-\tau)}}$$

– фундаментальное решение, а $\Phi(x, t; \xi, \tau)$ однозначно определяется из интегрального уравнения

$$\Phi(x, t; \xi, \tau) = L_{x,t} [W(x, t; \xi, \tau)] + \int_{\tau}^t d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} L_{x,t} [W(x, t; \xi_1, \tau_1)] \Phi(\xi_1, \tau_1; \xi, \tau) d\xi_1.$$

Здесь

$$L_{x,t} [W(x, t; \xi, \tau)] = [a(x, t) - a(\xi, \tau)] \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, t; \xi, \tau) + b(x, t) \frac{\partial}{\partial x} W(x, t; \xi, \tau) + c(x, t) W(x, t; \xi, \tau).$$

Пусть существует решение $u(x, t)$ задачи (1), (2), непрерывное, ограниченное и имеющее дробные производные порядка $\alpha^k < 1/2$. Пусть далее $f_i^k(t) = u(x_i^k, t)$, $i = 1, 2, \dots, n_k$, $k = 0, 1$. Будем искать решение задачи (1), (2) сначала в H_1 .

Принимая во внимание свойства фундаментального решения $Z(x, t; \xi, \tau)$ уравнения $Lu = 0$, нетрудно заметить, что функция $u(x, t)$ связана с $f_i^0(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n_0$) и начальной функцией $\varphi(x)$ следующим образом:

$$u(x, t) = - \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} Z(x, t; \xi, \tau) \sum_{i=1}^{n_0} a_i^0(\xi, \tau) D_{0\tau}^{\alpha_i^0} K_i^0(\xi, \tau) f_i(\tau) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} Z(x, t; \xi, 0) \varphi(\xi) d\xi. \tag{3}$$

Введем новую функцию $Z_0(x, t; \xi, \tau)$, определенную формулой

$$Z_0(x, t; \xi, \tau) = (t - \tau)^{1/2} Z(x, t; \xi, \tau).$$

Так как

$$|Z(x, t; \xi, \tau)| < c_1 (t - \tau)^{-1/2} e^{-\frac{\mu_1(x - \xi)^2}{(t - \tau)}},$$

где c_1 и μ_1 — положительные постоянные, то $Z_0(x, t; \xi, \tau)$ — непрерывная функция.

Рассмотрим интеграл

$$J = \int_0^t (t - \tau)^{-1/2} Z_j^0(x, t; \xi, \tau) D_{0\tau}^{\alpha_j^0} K_j^0(\xi, \tau) f_j^0(\tau) d\tau,$$

где

$$Z_j^0(x, t; \xi, \tau) = a_j^0(\xi, \tau) Z_0(x, t; \xi, \tau)$$

и по повторяющемуся индексу $j = 1, 2, \dots, n_0$ подразумевается суммирование.

При $\alpha_j^0 < 0$

$$J = \frac{1}{\Gamma(-\alpha_j^0)} \int_0^t f_j^0(\tau_1) K_j^0(\xi, \tau_1) (\tau - \tau_1)^{-\alpha_j^0 - 1} d\tau_1 \int_t^\tau Z_j^0(x, t; \xi, \tau) (t - \tau_1)^{-1/2} d\tau.$$

Введем новую переменную y :

$$\tau = \tau_1 + (t - \tau_1) y.$$

Тогда

$$d\tau = (t - \tau_1) dy, \quad y = \frac{\tau - \tau_1}{t - \tau_1}, \quad 1 - y = \frac{t - \tau}{t - \tau_1}.$$

Учитывая последние соотношения при $\alpha_j^0 < 0$, имеем

$$J = \frac{1}{\Gamma(-\alpha_j^0)} \int_0^t K_j^0(\xi, \tau_1) f_j(\tau_1) (t - \tau_1)^{-\alpha_j^0 - 1/2} d\tau_1 \times$$

$$\times \int_0^1 Z_i^0 [(x, t; \xi, \tau_1 + (t - \tau_1) y)] y^{-1-\alpha_j^0} (1 - y)^{-1/2} dy.$$

Точно так же при $0 < \alpha_j^0 < \frac{1}{2}$

$$J = -\frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_j)} \int_0^t K_j^0(\xi, \tau_1) f_j(\tau_1) d\tau_1 \frac{d}{d\tau_1} (t - \tau_1)^{1/2-\alpha_j^0} d\tau_1 \times \\ \times \int_0^1 Z_i^0 [(x, t; \xi, \tau_1 + (t - \tau_1) y)] y^{-\alpha_j^0} (1 - y)^{-1/2} dy.$$

Введем обозначения

$$F^0(x, t) = - \int_{-\infty}^{\infty} Z(x, t; \xi, 0) \varphi(\xi), \\ N_j^0(x, t, \tau) = -\frac{1}{\Gamma(-\alpha_j^0)} \int_0^t K_j^0(\xi, \tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \times \\ \times \int_0^1 Z [(x, t; \xi, \tau_1 + (t - \tau_1) y)] y^{-1-\alpha_j^0} (1 - y)^{-1/2} dy \quad \text{при } \alpha_j^0 < 0$$

и

$$N_j^0(x, t, \tau) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_j)} \int_0^t K_j^0(\xi, \tau_1) d\tau_1 \frac{d}{d\tau_1} (t - \tau_1)^{1/2-\alpha_j^0} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \times \\ \times \int_0^1 Z_j [(x, t; \xi, \tau_1 + (t - \tau_1) y)] y^{-\alpha_j^0} (1 - y)^{-1/2} dy \quad \text{при } \alpha_j^0 > 0.$$

Пользуясь этими обозначениями, перепишем (3) в виде

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{N_j^0(x, t, \tau)}{(t - \tau)^{\alpha_j^0+1/2}} f_j^0(\tau) d\tau + F^0(x, t). \quad (4)$$

Из (4) при $x = x_i^0, i = 1, 2, \dots, n_0$ имеем

$$f_i^0(t) = \int_0^t \frac{N_j^0(x_i, t, \tau)}{(t - \tau)^{\alpha_j^0+1/2}} f_j^0(\tau) d\tau + F^0(x_i^0, t), \quad (5)$$

где по индексу i подразумевается суммирование от 1 до n_0 .

При $\alpha^0 < \frac{1}{2}$ система (5) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода, стало быть, она обусловленно и однозначно разрешима.

Таким образом, единственное решение задачи (1), (2) в H_1 задается формулой (4), где $f_1^0, f_2^0, \dots, f_{n_0}^0$ – решения системы (5). Это решение непрерывно и ограничено.

Учитывая, что $u(x, T_1)$ также непрерывна и ограничена во всем пространстве \mathbb{R} , в слое H_2 имеем следующую связь $u(x, t)$ с $f_j^1(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n_1$) и $u(x, T_1)$:

$$u(x, t) = - \int_{T_1}^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} Z(x, t; \xi, \tau) \sum_{j=1}^{n_1} d_j^1(\xi, \tau) D_{0\tau}^{\alpha_j^1}(\xi, \tau) f_j^1(t) d\xi +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} Z(x, t; \xi, T_1) u(\xi, T_1) d\xi. \tag{6}$$

Единственное ограниченное решение $u(x, t)$ в слое H_2 задачи (1), (2) определяется соотношением (6), где $f_j^1(t)$ находятся из системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода вида

$$f_i^1(t) = \int_{T_1}^t \frac{N_j^1(x_i, t, \tau)}{(t - \tau)^{\alpha_j^1 + 1/2}} f_i^1(\tau) d\tau + F^1(x_1, t),$$

где $N_j^1(x, t, \tau)$ и $F^1(x_1, t)$ — непрерывные функции, определяемые так же, как в слое H_1 . Теорема доказана.

1.2. Первая краевая задача

Рассмотрим теперь для уравнения (1) в области $D = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ первую краевую задачу

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x) \quad \text{при } x \in I, \\ u(x, t)|_{\Gamma} &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $I = (0, l)$, $\Gamma = \{x = 0, 0 < t \leq T\} \cup \{x = l, 0 < t \leq T\}$.

Решением первой краевой задачи (1)–(7) будем называть функцию $u(x, t)$, непрерывную в D , регулярную в $D_i = \{(x, t) : 0 < x < l, T_{i-1} < t < T_i\}$, ($i = 1, 2, \dots, N$), удовлетворяющую условиям (7):

Пусть:

I) коэффициенты $a(x, t)$, $b(x, t)$, $c(x, t)$ в \bar{D} удовлетворяют неравенствам:

$$a(x, t) \geq \lambda_0 > 0,$$

$$|a(x', t) - a(x, t)| \leq A |x' - x|^\lambda,$$

$$|b(x', t) - b(x, t)| \leq A |x' - x|^\lambda,$$

$$|c(x', t) - c(x, t)| \leq A |x' - x|^\lambda,$$

$$|a(x, t') - a(x, t)| \leq A |t' - t|^\lambda,$$

где A , λ_0 и λ — некоторые положительные постоянные.

II) $a_j^k(x, t)$, $j = 1, 2, \dots, n_k$, $k = 0, 1, \dots, N$ непрерывны в \bar{D} по совокупности переменных x, t и удовлетворяют по условию Гельдера, а $K_j^k(x, t)$ непрерывны в \bar{D} .

III) $\varphi(x)$ непрерывна и ограничена на I .

IV) $\alpha^k < 1/2$.

Теорема 1.2. Задача (1), (7) при предположениях I–IV однозначно разрешима.

Доказательство. Рассмотрим задачу для $N = 2$.

Известно [17], что функцией Грина краевой задачи (7) для уравнения $Lu = 0$ называется функция $G(x, t; \xi, \tau)$, которая определена и непрерывна по всем аргументам при $(x, \xi) \in (0, l)$, $0 < \tau < t < T_1$ и имеет вид

$$G(x, t; \xi, \tau) = Z(x, t; \xi, \tau) - \Psi(x, t; \xi, \tau),$$

где $\Psi(x, t; \xi, \tau)$ обладает следующими свойствами:

а) $L_{x,t}[\Psi(x, t; \xi, \tau)] = 0$ для $x, \xi \in I$, $0 \leq \tau < t \leq T_1$;

б) $\Psi(x, t; \xi, \tau) = Z(x, t; \xi, \tau)$ для $\xi \in D$, $(x, t) \in \Gamma$, $0 \leq \tau < t \leq T_1$;

в) $\lim_{t \rightarrow \tau+0} \Psi(x, t; \xi, \tau) = 0$ для $(x, \xi) \in I$.

Для функции $G(x, t; \xi, \tau)$ имеет место оценка [17]:

$$|G(x, t; \xi, \tau)| < C_2(t - \tau)^{-1/2} e^{-\mu_2 \frac{(x-\xi)}{(t-\tau)}}, \tag{8}$$

где μ_2, C_2 — некоторые положительные постоянные.

Пусть существует решение $u(x, t)$ задачи (1), (2), непрерывное в D_1 и имеющее дробную производную порядка $\alpha < 1/2$.

Пусть далее

$$g_i^k(t) = u(x_i^k, t), \quad i = 1, 2, \dots, n_k, \quad k = 0, 1.$$

Будем искать решение задачи (1), (2) сначала в D_1 .

Как известно [17], решение первой краевой задачи (7) для уравнения

$$Lu = f(x, t)$$

в \bar{D}_1 имеет вид

$$u(x, t) = - \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi + \int_0^l G(x, t; \xi, 0) \varphi(\xi) d\xi.$$

Следовательно, при наших предположениях, функция $u(x, t)$ связана с $g_i^0(t), i = 1, 2, \dots, n_0$ и начальной функцией $\varphi(x, t)$ следующим образом:

$$u(x, t) = - \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, t; \xi, \tau) \sum_{j=1}^{n_0} a_j^0(\xi, \tau) D_{0\tau}^{\alpha_j^0} K_j^0(\xi, \tau) u(x_j^0, \tau) d\xi + \int_0^l \varphi(\xi) G(x, t; \xi, \tau) d\xi. \tag{9}$$

Введем новую функцию $G_0(x, t; \xi, \tau)$:

$$G_0(x, t; \xi, \tau) = (t - \tau)^{1/2} G(x, t; \xi, \tau).$$

Из (8) имеем

$$|G_0(x, t; \xi, \tau)| < C_2 e^{-\frac{\mu_2(x-\xi)^2}{t-\tau}}.$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^t (t - \tau)^{-1/2} G_i^0(x, t; \xi, \tau) D_{0\tau}^{\alpha_j^0} K_j^0(\xi, \tau) g_j^0(\tau) d\tau,$$

где

$$G_j^0(x, t; \xi, \tau) = a_j^0(\xi, \tau) G_0(x, t; \xi, \tau),$$

а по повторяющемуся индексу $j = 1, 2, \dots$ подразумевается суммирование.

При $\alpha_j^0 < 0$ имеем

$$I = \frac{1}{\Gamma(-\alpha_j^0)} \int_0^t K_j^0(\xi, \tau_1) g_j^0(\tau_1) (t - \tau_1)^{-\alpha_j^0 - 1/2} d\tau_1 \times \int_0^1 G_i^0(x, t; \xi, \tau_1 + (t - \tau_1)y) y^{-1-\alpha_j^0} (1 - y)^{-1/2} dy,$$

а при $0 < \alpha_j^0 < \frac{1}{2}$

$$I = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_j^0)} \int_0^t K_j^0(\xi, \tau_1) g_i(\tau_1) d\tau_1 \frac{d}{d\tau_1} (t - \tau_1)^{1/2 - \alpha_j^0} \times \\ \times \int_0^1 G_i^0[(x, t; \xi, \tau_1 + (t - \tau_1)y)] y^{-1 - \alpha_j^0} (1 - y)^{-1/2} dy.$$

Введем обозначения:

$$F^0(x, t) = \int_0^l \varphi(\xi) G(x, t; \xi, 0) d\xi, \\ N_j^0(x, t, \tau) = -\frac{1}{\Gamma(-\alpha_j^0)} \int_0^t K_j^0(\xi, \tau_1) d\tau_1 \times \\ \times \int_0^l d\xi \int_0^1 G_j^0[(x, t; \xi, \tau_1 + (t - \tau_1)y)] y^{-1 - \alpha_j^0} (1 - y)^{-1/2} dy \quad \text{при } \alpha_j < 0$$

и

$$N_j^0(x, t, \tau) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_j^0)} \int_0^t K_j^0(\xi, \tau_1) d\tau_1 (t - \tau_1)^{\frac{1}{2} - \alpha_j^0} \times \\ \times \int_0^l d\xi \int_0^1 G_i[(x, t; \xi, \tau_1 + (t - \tau_1)y)] y^{-\alpha_j^0} (1 - y)^{-1/2} dy.$$

С учетом этих обозначений (9) принимает вид

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{N_j(x, t, \tau)}{(t - \tau)^{\alpha_j^0 + 1/2}} g_j^0(\tau) d\tau + F^0(x, t). \tag{10}$$

Из (10) при $x = x_i^0$ $i = 1, 2, \dots, n_0$ имеем

$$g_i^0(t) = \int_0^t \frac{N_j(x_i, t, \tau)}{(t - \tau)^{\alpha_j^0 + 1/2}} g_j^0(\tau) d\tau + F^0(x_i^0, t). \tag{11}$$

При $\alpha^0 < \frac{1}{2}$ система (11) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода, ядра которых имеют слабую особенность. Стало быть, она безусловно и однозначно разрешима.

Таким образом, единственное решение задачи (1), (7) в области D_1 задается формулой (10), где $g_1^0, g_2^0, \dots, g_{n_0}^0$ — решение системы (11). Это решение непрерывно и регулярно. Учитывая, что $u(x, T_1)$ также непрерывна и ограничена на I , в D_2 имеем следующую связь:

$$u(x, t) = - \int_{-T_1}^t d\tau \int_0^l G(x, t; \xi, \tau) \sum_{i=1}^{n_1} a_j^1(\xi, \tau) D_{0\tau}^{\alpha_j^1}(\xi, \tau) \times \\ \times f_i^1(\tau) d\xi + \int_0^l G(x, t; \xi, T_1) u(\xi, T_1) d\xi, \quad t > T_1. \tag{12}$$

Единственное решение $u(x, t)$ в области D_2 задачи (1), (7) определяется соотношением (12), где $g_i^1(t)$ находятся из системы интегральных уравнений

$$f_i^1(t) = \int_0^t \frac{N_j(x_i, t, \tau)}{(t - \tau)^{\alpha_j^0 + 1/2}} f_j^1(\tau) d\tau + F^1(x_i, t),$$

где $N_j^1(x_i, t, \tau)$ и $F^1(x_i, t)$ — непрерывные функции, определяемые так же, как области D_1 .

Заключение

Таким образом, в данной работе доказана однозначная разрешимость задачи Коши – Дирихле, исследованы вопросы существования и единственности решения первой краевой задачи для разрывно-нагруженного параболического уравнения дробного порядка.

Полученные результаты важны для развития теории краевых задач для уравнений в частных производных дробного порядка, в том числе нагруженных уравнений параболического типа, а также математического моделирования различных процессов и систем с распределенными параметрами, имеющих фрактальную пространственно-временную структуру.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Цитирование. Кармоков М.М., Нахушева Ф.М., Геккиева С.Х. Краевые задачи для разрывно-нагруженных параболических уравнений // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 4. С. 7–17. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-7-17.

© Кармоков М.М., Нахушева Ф.М., Геккиева С.Х., 2024

Мухамед Мацевич Кармоков (mkarmokov@yandex.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х.М. Бербекова, 360004, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

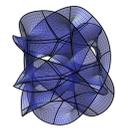
Фатима Мухамедовна Нахушева (fatima-nakhushева@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х.М. Бербекова, 360004, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

Сажинат Хасановна Геккиева (gekkieva_s@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела вычислительных методов, Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а.

Литература

- [1] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. Москва: Наука, 2012. 232 с. URL: <https://djvu.online/file/GKTM9Py0MW2jl>; <https://elibrary.ru/item.asp?id=20886619>. EDN: <https://elibrary.ru/rpbpqz>.
- [2] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. Москва: Высшая школа, 1995. 301 с. URL: <https://djvu.online/file/vpPGn035lVZDw>; <https://elibrary.ru/item.asp?id=17961016>. EDN: <https://elibrary.ru/pdbbnb>.
- [3] Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 103–108. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17962290>. EDN: <https://elibrary.ru/pdbujb>.

- [4] Кармоков М.М. Локальные и нелокальные краевые задачи для разрывно-нагруженных параболических уравнений: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Нальчик, 1991. 87 с.
- [5] Кармоков М.М., Нахушева Ф.М., Абрегов М.Х. Краевая задача для нагруженного параболического уравнения дробного порядка // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2024. № 1 (117). С. 69–77. DOI: <https://doi.org/10.35330/1991-6639-2024-26-1-69-77>. EDN: <https://elibrary.ru/mpqwls>.
- [6] Кожанов А.И. Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений // Сибирский журнал индустриальной математики. 2004. Т. 7, № 1 (17). С. 51–60. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9484458>. EDN: <https://elibrary.ru/hzogql>.
- [7] Кожанов А.И. О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2004. № 30. С. 63–69. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=8819437>. EDN: <https://elibrary.ru/hkzxbd>.
- [8] Дикинов Х.Ж., Кереев А.А., Нахушев А.М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 177–179. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17873091>. EDN: <https://elibrary.ru/pbdavt>.
- [9] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. Москва: Наука, 2005. 199 с. URL: <https://libcats.org/book/729565>.
- [10] Геккиева С.Х. Смешанные краевые задачи для нагруженного диффузионно-волнового уравнения // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. 2016. № 6 (227). Вып. 42. С. 32–35. URL: <http://dspace.bsuedu.ru/handle/123456789/59383>.
- [11] Бейлин А.Б., Богатов А.В., Пулькина Л.С. Задача с нелокальными условиями для одномерного параболического уравнения // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2022. Т. 26, № 2. С. 380–395. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1904>. EDN: <https://www.elibrary.ru/USPHOK>.
- [12] Кожанов А.И., Ашурова Г.Р. Параболические уравнения с вырождением и неизвестным коэффициентом // Математические заметки СВФУ. 2024. Т. 31, № 1. С. 56–69. DOI: <https://doi.org/10.25587/2411-9326-2024-1-56-69>. EDN: <https://elibrary.ru/ndfvwu>.
- [13] Богатов А.В., Пулькина Л.С. Разрешимость обратной коэффициентной задачи с интегральным переопределением для одномерного параболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2022. Т. 28, № 3–4. С. 7–17. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-7-17>.
- [14] Нахушева Ф.М., Лафишева М.М., Кармоков М.М., Джанкулаева М.А. Численный метод решения краевой задачи для параболического уравнения с дробной производной по времени с сосредоточенной теплоемкостью // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2018. № 5 (85). С. 34–43. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=36394362>. EDN: <https://elibrary.ru/vlmusb>.
- [15] Бештоков М.Х., Водахова В.А., Исакова М.М. Приближенное решение первой краевой задачи для нагруженного уравнения теплопроводности // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2023. Т. 26, № 4. С. 5–17. DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.4.1>. EDN: <https://elibrary.ru/cosaev>.
- [16] Pogorzelski W. Etude de la solution fondamentale de l'équation parabolique // Ricerche di Matematica. 1956. Vol. 5. P. 25–57. URL: <https://zbmath.org/0072.10301>.
- [17] Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи математических наук. 1962. Т. 17, № 3 (105). С. 31–46. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/rm6495>.



Boundary value problems for discontinuously loaded parabolic equations

Karmokov¹ M.M. , Nakhusheva¹ F.M. , Gekkieva² S.Kh. 

¹ Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Nalchik, Russian Federation; mkarmokov@yandex.ru (M.M.); fatima-nakhusheva@mail.ru (F.M.);

² Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS, Nalchik, Russian Federation; gekkieva_s@mail.ru (S.Kh.);

Received: 11.09.2024

Revised: 18.10.2024

Accepted: 25.11.2024

Scientific article



Abstract. The article deals with boundary value problems for a discontinuously loaded parabolic equation with a Riemann – Liouville fractional integro-differentiation operator with variable coefficients. The unambiguous solvability of the Cauchy – Dirichlet problem for a discontinuously loaded parabolic equation of fractional order is proved. The paper also examines the existence and uniqueness of the solution of the first boundary value problem for a discontinuously loaded parabolic equation. Using the method of the Green function, using the properties of the fundamental solution of the corresponding homogeneous equation, as well as assuming that the coefficients of the equation are bounded, continuous and satisfy the Helder condition, while remaining non-negative, it is shown that the solution of the problem is reduced to a system of Volterra integral equations of the second kind.

Key words: boundary value problems; parabolic equations; Cauchy – Dirichlet problem; fractional integro differentiation operator; first boundary value problem; Green’s function; loaded equation; regular solution.

Information about the conflict of interests: the authors and reviewers declared no conflicts of interest.

Citation. Karmokov M.M., Nakhusheva F.M., Gekkieva S.Kh. Boundary value problems for discontinuously loaded parabolic equations. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 7–17. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-7-17. (In Russ.)

© Karmokov M.M., Nakhusheva F.M., Gekkieva S.Kh., 2024

Mukhamed M. Karmokov (mkarmokov@yandex.ru) – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, 173, Chernyshevskogo Street, Nalchik, 360004, Russian Federation.

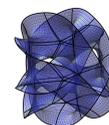
Fatima M. Nakhusheva (fatima-nakhusheva@mail.ru) – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, 173, Chernyshevskogo Street, Nalchik, 360004, Russian Federation.

Sakinat Kh. Gekkieva (gekkieva_s@mail.ru) – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, leading researcher of the Department of Computational Methods, Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS, 89a, Shortanova Street, Nalchik, 360000, Russian Federation.

References

- [1] Nakhushev A.M. Loaded equations and their application. Moscow: Nauka, 2012, 232 p. Available at: <https://djvu.online/file/GKTM9Py0MW2jl>; <https://elibrary.ru/item.asp?id=20886619>. EDN: <https://elibrary.ru/rpbpqz>. (In Russ.)

- [2] Nakhushev A.M. Equations of mathematical biology. Moscow: Vysshaya shkola, 1995, 301 p. Available at: <https://djuv.online/file/vpPGn035lVZDw>; <https://elibrary.ru/item.asp?id=17961016>. EDN: <https://elibrary.ru/pdbbnb>. (In Russ.)
- [3] Nakhushev A.M. The Darboux problem for a certain degenerate second order loaded integrodifferential equation. *Differential equations*, 1976, vol. 12, no. 1, pp. 103–108. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17962290>. EDN: <https://elibrary.ru/pdbujb>. (In Russ.)
- [4] Karmokov M.M. Local and non-local boundary value problems for discontinuously loaded parabolic equations: Candidate's of Physical and Mathematical Sciences thesis. Nalchik, 1991, 87 p. (In Russ.)
- [5] Karmokov M.M., Nakhusheva F.M., Abregov M.Kh. Boundary value problem for loaded parabolic equations of fractional order. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS*, 2024, no. 1 (117), pp. 69–77. DOI: <https://doi.org/10.35330/1991-6639-2024-26-1-69-77>. EDN: <https://elibrary.ru/mpqqls>. (In Russ.)
- [6] Kozhanov A.I. Time-non-local boundary value problem for linear parabolic equations. *Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki = Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2004. vol. 7, no. 1 (17), pp. 51–60. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9484458>. EDN: <https://elibrary.ru/hzogql>. (In Russ.)
- [7] Kozhanov A.I. On the solvability of a boundary-value problem with a non-local boundary condition for linear parabolic equations. *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2004, no. 30, pp. 63–69. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=8819437>. EDN: <https://elibrary.ru/hkzxbd>. (In Russ.)
- [8] Dikinov Kh.Zh., Kerefov A.A., Nakhushev A.M. On a boundary value problem for the loaded equation of thermal conductivity. *Differential Equations*, 1976, vol. 12, no. 1, pp. 177–179. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17873091>. EDN: <https://elibrary.ru/pbdavt>. (In Russ.)
- [9] Pskhu A.V. Partial differential equations of fractional order. Moscow: Nauka, 2005, 199 p. Available at: <https://libcats.org/book/729565>. (In Russ.)
- [10] Gekkieva S.Kh. Mixed boundary value problems for the loaded diffusion-wave equation. *Research Bulletin of Belgorod State University. Mathematics. Physics*, 2016, no. 6 (227), issue 42, pp. 32–35. Available at: <http://dspace.bsuedu.ru/handle/123456789/59383>. (In Russ.)
- [11] Beylin A.B., Bogatov A.V., Pulkina L.S. A problem with nonlocal conditions for a one-dimensional parabolic equation. *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2022, vol. 26, no. 2, pp. 380–395. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1904>. EDN: <https://www.elibrary.ru/USPHOK>. (In Russ.)
- [12] Kozhanov A.I., Ashurova G.R. Parabolic equations with degeneracy and unknown coefficient. *Mathematical Notes of NEFU*, 2024, vol. 31, no. 1, pp. 56–69. DOI: <https://doi.org/10.25587/2411-9326-2024-1-56-69>. EDN: <https://elibrary.ru/ndfvwu>. (In Russ.)
- [13] Bogatov A.V., Pulkina L.S. On solvability of the inverse problem for the one-dimensional parabolic equation with unknown time-dependent coefficient under integral observation. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 7–17. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-7-17>. (In Russ.)
- [14] Nakhusheva F.M., Lafisheva M.M., Karmokov M.M., Dzhankulaeva M.A. Numerical method for solving the local problem for a parabolic equation with a fractive derivative in time with a mediated heat capacity. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS*, 2018, no. 5 (85), pp. 34–43. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=36394362>. EDN: <https://elibrary.ru/vlmusb>. (In Russ.)
- [15] Beshtokov M.Kh., Vodakhova V.A., Isakova M.M. Approximate solution of the first boundary value problem for the loaded heat conduction equation. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie [Mathematical Physics and Computer Simulation]*, 2023, vol. 26, no. 4, pp. 5–17. DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.4.1>. EDN: <https://elibrary.ru/cosaev>. (In Russ.)
- [16] Pogorzelski W. Etude de la solution fondamentale de l'équation parabolique. *Ricerche di Matematica*, 1956, vol. 5, pp. 25–57. Available at: <https://zbmath.org/0072.10301>
- [17] Il'in A.M., Kalashnikov A.S., Oleinik O.A. Linear equations of the second order of parabolic type. *Russian Mathematical Surveys*, 1962, vol. 17, issue 3, pp. 31–46. DOI: <https://doi.org/10.1070/RM1962v017n03ABEH004115>. (In English; original in Russ.)



Многопараметрические представления поля напряжений у вершины трещины антиплоского сдвига

Бажарева Ю.Н. 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация; bakhareva.yun@ssau.ru;

Поступила: 17.10.2024

Рассмотрена: 23.11.2024

Принята: 25.11.2024

Научная статья



Аннотация. Статья посвящена изучению поля напряжений у вершины трещины продольного сдвига на основе многопараметрического асимптотического представления поля напряжений у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Выполненный асимптотический анализ полей у вершины трещины продольного сдвига является естественным продолжением исследований, проведенных для многопараметрических полей напряжений у вершин трещин нормального отрыва и поперечного сдвига, а также смешанного нагружения. Несмотря на простоту анализа вклада высших приближений в общее представление поля напряжений у вершины трещины типа III, многокоэффициентные представления поля напряжений вблизи данного типа трещин освещены ранее не были. Показано, что приближения высших порядков должны обязательно учитываться для аккуратного представления поля напряжений и расширения области действия асимптотических разложений. Установлено, что чем больше расстояние от вершины трещины, тем больше слагаемых ряда необходимо сохранять вблизи кончика трещины.

Ключевые слова: трещина продольного (антиплоского сдвига); многопараметрические разложения; линейно-упругий материал; асимптотическое разложение; точное решение; высшие приближения.

Введение. Об асимптотическом представлении полей напряжений у вершины трещины

Уильямс [1] аналитически продемонстрировал существование особенностей в полях напряжений вокруг вершин трещин и углов из нескольких материалов, которые могут быть смоделированы как геометрические и/или материальные неоднородности клиньев из композитного материала. Асимптотическое решение поля напряжений в особой точке получается из основных дифференциальных уравнений упругости в частных производных с использованием метода разделения переменных (разложения по собственным функциям). Решение обычно записывается в виде ряда степенных функций в радиальной координате, исходящей из особой точки. Собственные значения, полученные в результате процедуры решения, определяют показатели степени. Собственные функции описывают угловое изменение напряжений. Собственные значения и функции асимптотического решения для композитного клина зависят от его геометрии и свойств материала. Получены многочисленные аналитические решения порядка сингулярности напряжений и полей напряжений для различных комбинаций материалов и геометрических форм.

В настоящее время в механике хрупкого разрушения сформировалось устойчивое понимание важности и необходимости учета слагаемых в асимптотических разложениях, описывающих поля напряжений, деформаций и перемещений вблизи вершины трещины [2–18].

Целью данной работы является определение коэффициентов сингулярного, T напряжений и следующих слагаемых поля напряжений у вершины трещины антиплоского сдвига в линейно-упругом материале. Влияние членов более высокого порядка на поле напряжений в

пластине с трещинами при антиплоском нагружении может быть важным в некоторых инженерных приложениях. Члены более высокого порядка особенно важны для сопоставления экспериментальных результатов, полученных с помощью цифровой корреляции изображений (DIC), с теоретическим ближним полем для определения коэффициентов интенсивности напряжений. Усеченный ряд Вильямса может быть спроецирован непосредственно на измеряемое поле для определения положения вершины трещины и коэффициентов интенсивности напряжений.

1. Методы теории функции комплексного переменного

Решение краевой задачи об антиплоском сдвиге пространства с полубесконечной трещиной продольного сдвига можно получить с помощью методов теории функции комплексного переменного. Перемещение, как хорошо известно [19], является вещественной частью функции

$$u_3 = \operatorname{Re}[\varphi(z)]. \tag{1}$$

Напряжения в задаче антиплоского сдвига представляются соотношениями

$$\sigma_{13} - i\sigma_{23} = \mu\varphi'(z), \tag{2}$$

где голоморфная функция $\varphi'(z)$ определяется равенством

$$\mu\varphi'(z) = -\frac{i}{\pi\sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\tau(x_1)}{z - x_1} \sqrt{a^2 - x_1^2} dx_1. \tag{3}$$

В случае действия постоянной нагрузки τ^∞ последнее соотношение принимает вид

$$\mu\varphi'(z) = \frac{i\tau^\infty}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left\{ \sqrt{z^2 - a^2} - z \right\} = -\frac{iz\tau^\infty}{\sqrt{z^2 - a^2}} + i\tau^\infty. \tag{4}$$

Разложим комплексный потенциал в ряд в окрестности правой вершины $z = a$:

$$\mu\varphi'(z) = -\frac{i\tau^\infty}{\sqrt{z - a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{2^{3n+1/2}(2n-1)n!a^{n-1/2}} (z - a)^n + i\tau^\infty, \tag{5}$$

где было использовано разложение [2]:

$$\frac{d^n}{dz^n} \left[\frac{z}{(z+a)^{1/2}} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{2^{3n+1/2}(2n-1)n!a^{n-1/2}}. \tag{6}$$

Следует отметить, что (4) – решение вспомогательной задачи о нагружении пластины с центральной трещиной (сдвиговое деформирование касательными напряжениями, приложенными на разрезе):

$$\sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = -\tau^\infty \quad \text{при} \quad x_2 = 0, \quad |x_1| \leq a. \tag{7}$$

Поэтому решение исходной задачи о сдвиговом деформировании пластины со свободными краями разреза имеет вид

$$\mu\varphi'(z) = -\frac{i\tau^\infty}{\sqrt{z - a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{2^{3n+1/2}(2n-1)(n!)^2 a^{n-1/2}} (z - a)^n. \tag{8}$$

Полагая в (8) $z - a = re^{i\theta}$, с помощью соотношений (2) можно получить выражения для компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{13} = \tau^\infty \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n-1/2} \sin(n-1/2)\theta, \quad \sigma_{23} = \tau^\infty \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n-1/2} \cos(n-1/2)\theta, \tag{9}$$

где приняты обозначения

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{2^{3n+1/2}(2n-1)(n!)^2 a^{n-1/2}}. \tag{10}$$

2. Анализ вклада высших приближений в общее представление поля напряжений

На следующем этапе построим угловые распределения компонент тензора напряжений, определяемые различным числом слагаемых в рядах (9). На рис. 2.1–2.6 показаны угловые распределения напряжений у вершины трещины, полученные с удержанием различного числа слагаемых. Из графиков отчетливо видно, что высшие приближения играют существенную роль в описании поля напряжений в окрестности вершины трещины антиплоского сдвига.

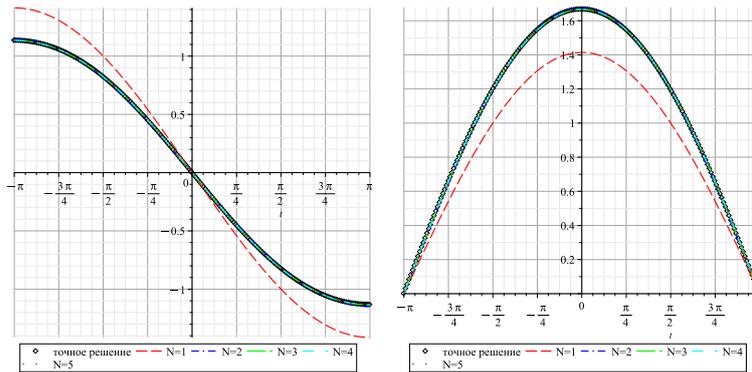


Рис. 2.1. Угловые распределения напряжений (1 — различное число удерживаемых слагаемых, см. рис. здесь и далее) у вершины трещины: σ_{13} (слева) и σ_{23} (справа)

Fig. 2.1. Angular dependences of the stress components (1): σ_{13} (left) и σ_{23} (right)

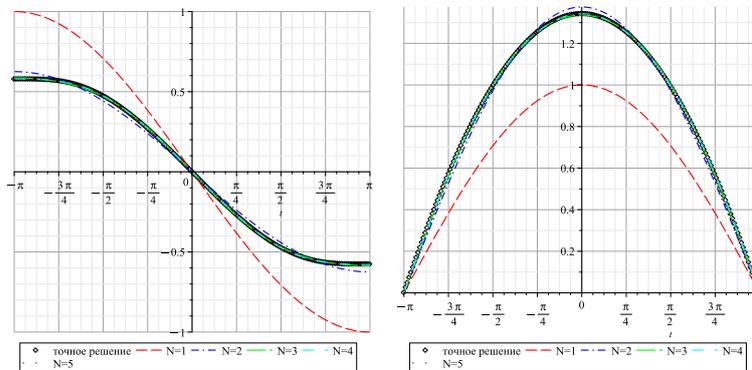


Рис. 2.2. Угловые распределения напряжений (2) у вершины трещины: σ_{13} (слева) и σ_{23} (справа)

Fig. 2.2. Angular dependences of the stress components (2): σ_{13} (left) и σ_{23} (right)

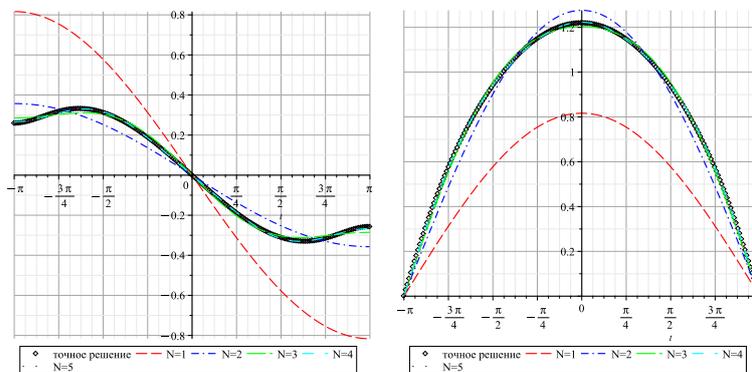


Рис. 2.3. Угловые распределения напряжений (3) у вершины трещины: σ_{13} (слева) и σ_{23} (справа)

Fig. 2.3. Angular dependences of the stress components (3): σ_{13} (left) и σ_{23} (right)

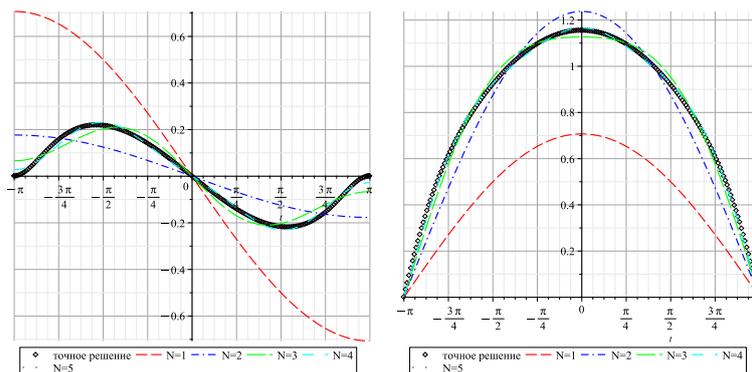


Рис. 2.4. Угловые распределения напряжений (4) у вершины трещины: σ_{13} (слева) и σ_{23} (справа)
 Fig. 2.4. Angular dependences of the stress components (4): σ_{13} (left) и σ_{23} (right)

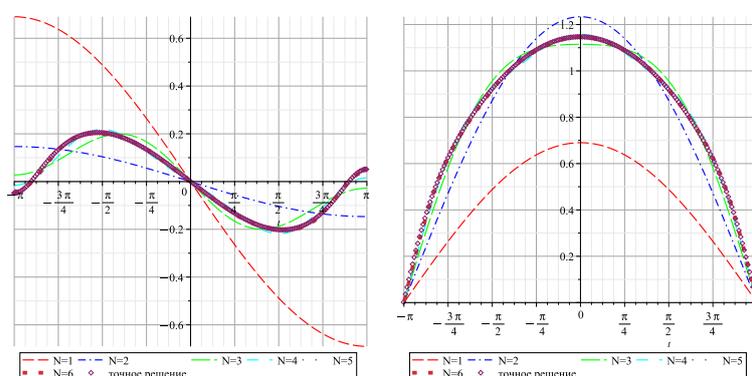


Рис. 2.5. Угловые распределения напряжений (5) у вершины трещины: σ_{13} (слева) и σ_{23} (справа)
 Fig. 2.5. Angular dependences of the stress components (5): σ_{13} (left) и σ_{23} (right)

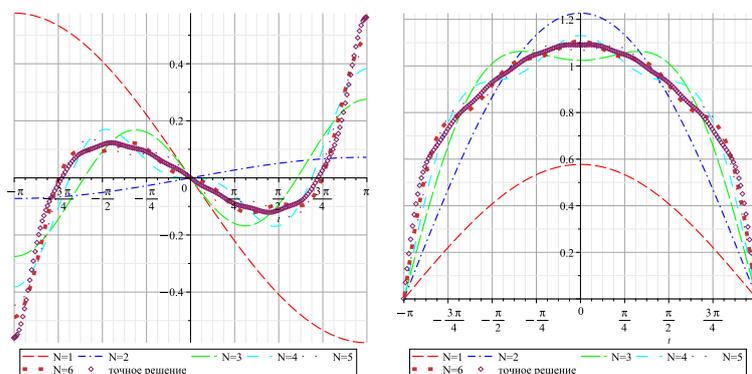


Рис. 2.6. Угловые распределения напряжений (6) у вершины трещины: σ_{13} (слева) и σ_{23} (справа)
 Fig. 2.6. Angular dependences of the stress components (6): σ_{13} (left) и σ_{23} (right)

Выводы

В статье проведен асимптотический анализ вклада высших приближений в рядах, представляющих компоненты тензора напряжений у вершины трещины антиплоского сдвига. Показано, что высшие приближения необходимо учитывать в описании поля напряжений у вершины трещины антиплоского сдвига. Анализируя полученные представления, можно сделать вывод, что при удалении от вершины трещины необходимо удерживать большее количество слагаемых в разложении М. Уильямса. В задаче о трещине антиплоского сдвига для достижения заданного порядка точности требуется меньшее количество слагаемых по сравнению с трещинами нормального отрыва и поперечного сдвига. Так, для трещины антиплоского сдвига, точность 10^{-6}

на расстоянии $0,25a$ достигается при удерживании 6 слагаемых, а на расстоянии $1,25a$ для достижения того же значения точности необходимо удерживать 22 слагаемых, в то же время для трещины нормального отрыва в тех же условиях требуется удерживать 8 и 29 слагаемых соответственно.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Цитирование. Бахарева Ю.Н. Многопараметрические представления поля напряжений у вершины трещины антиплоского сдвига // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 4. С. 18–25. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-18-25.

© Бахарева Ю.Н., 2024

Юлия Николаевна Бахарева (bakhareva.yun@ssau.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Литература

- [1] Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack // Journal of Applied Mechanics. 1957. Vol. 24, issue 1. P. 109–114. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4011454>.
- [2] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // International Journal of Solids and Structures. 2012. Vol. 49, issues 3–4. P. 556–566. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024>.
- [3] Hello G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanford solutions // International Journal of Solids and Structures. 2018. Vol. 144–145. P. 265–275. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012>.
- [4] Zhu F., Ji X., He P., Zheng B., Zhang K. On the stress singularity at crack tip in elasticity // Results in Physics. 2019. Vol. 13. P. 102210. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2019.102210>.
- [5] Krepl O., Klusak J. Multi-parameter average strain energy density factor criterion applied on the sharp material inclusion problem // Procedia Structural Integrity. 2018. Vol. 13. P. 1279–1284. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2018.12.261>.
- [6] Moazzami M., Ayatollahi M.R., Chamani H.R., Guagliano Vergani L. Determination of higher order stress terms in cracked Brazilian disc specimen under mode I loading using digital image correlation technique // Optic and Laser Technology. 2018. Vol. 107. P. 344–352. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2018.06.010>.
- [7] Karihaloo B.L., Xiao Q.Z. Asymptotic crack tip fields in linear and nonlinear materials and their role in crack propagation // Физическая мезомеханика. 2018. Т. 21, № 6. С. 23–35. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1029959919010053>.
- [8] Berto F., Lazzarin P. Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches // Materials Science and Engineering: R: Reports. 2014. Vol. 75. P. 1–48. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mser.2013.11.001>.
- [9] Malikova L. Multi-parameter fracture criteria for the estimation of crack propagation direction applied to a mixed-mode geometry // Engineering Fracture Mechanics. 2015. Vol. 143. P. 32–46. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.06.029>.

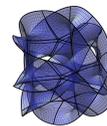
- [10] Malikova L., Vesely V., Seitzl S. Crack propagation direction in a mixed mode geometry estimated via multi-parameter fracture criteria // *International Journal of Fatigue*. 2016. Vol. 89. P. 99–107. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.01.010>.
- [11] Stepanova L.V. Asymptotics of stresses and strain rates near the tip of a transverse shear crack in a material whose behavior is described by a fractional-linear law // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2009. Vol. 50, № 1. P. 137–146. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10808-009-0019-9>.
- [12] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Multi-parameter description of the crack-tip stress field: Analytic determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium // *International Journal of Solids and Structures*. 2016. Vol. 100–101. P. 11–28. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.06.032>.
- [13] Vesely V., Sobek J., Seitzl S. Multi-parameter approximation of the stress field in a cracked body in the more distant surrounding of the crack tip // *International Journal of Fatigue*. 2016. Vol. 89. P. 20–35. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.02.016>.
- [14] Stepanova L.V., Adylina E.M. Stress-strain state in the vicinity of a crack tip under mixed loading // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2014. Vol. 55, № 5. P. 885–895. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894414050186>.
- [15] Stepanova L.V., Yakovleva E.M. Asymptotic stress field in the vicinity of a mixed-mode crack under plane stress conditions for a power-law hardening material // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2015. Vol. 10, № 3. P. 367–393. DOI: <http://dx.doi.org/10.2140/jomms.2015.10.367>.
- [16] Stepanova L.V., Mushankova K.A. Atomistic and continuum Ascertainment of The crack tip stress fields in anisotropic elastic cubic media // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2024. Vol. 133. P. 104613. DOI: [10.1016/j.tafmec.2024.104613](https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2024.104613).
- [17] Мушанкова К.А., Степанова Л.В. Определение коэффициентов асимптотического ряда для полей напряжений на основании молекулярно-динамических вычислений // *Прикладная механика и техническая физика*. 2024. DOI: <https://doi.org/10.15372/PMTF202415537>. EDN: <https://www.elibrary.ru/juunnu>.
- [18] Анисимов Г.С., Степанова Л.В. Экспериментальное определение полей у вершины трещины: метод голографической интерферометрии и метод корреляции цифровых изображений // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2024. № 3. С. 39–56. DOI: <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2024.3.03>.
- [19] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 708 с. URL: <https://klex.ru/1fa4?ysclid=m5qsu4dvcj256999603>.

DOI: [10.18287/2541-7525-2024-30-4-18-25](https://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-4-18-25)

Multiparametric presentation of the crack-tip fields in the vicinity of longitudinal shear crack

Bakhareva Yu.N. 

Samara National Research University, Samara, Russian Federation; bakhareva.yun@ssau.ru;



Received: 17.10.2024

Revised: 23.11.2024

Accepted: 25.11.2024

Scientific article



Abstract. The article is devoted to the study of the stress field at the tip of a longitudinal shear crack based on a multiparametric asymptotic representation of the stress field at the crack tip in a linearly elastic isotropic material. The performed asymptotic analysis of the fields at the tip of a longitudinal shear crack is a natural continuation of the studies conducted for multiparametric stress fields at the tips of cracks of normal separation and transverse shear, as well as mixed loading. Despite the simplicity of analyzing the contribution of higher approximations to the general representation of the stress field at the tip of a type III crack, multicoefficient representations of the stress field near this type of crack have not been previously studied. It is shown that higher-order approximations must necessarily be taken into account for 1) accurate representation of the stress field and 2) expansion of the range of asymptotic expansions. It has been found that the greater the distance from the crack tip, the more components of the series must be stored near the crack tip.

Key words: longitudinal (antiplane shear) crack; multiparametric expansion; linearly elastic material; asymptotic presentation; exact solution; higher order terms.

Information about the conflict of interests: the author and reviewers declared no conflicts of interest.

Citation. Bakhareva Yu.N. Multiparametric presentation of the crack-tip fields in the vicinity of longitudinal shear crack. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 18–25. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-18-25. (In Russ.)

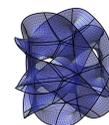
© Bakhareva Yu.N., 2024

Yulia N. Bakhareva (bakhareva.yun@ssau.ru) – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, 1957, vol. 24, issue 1, pp. 109–114. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4011454>.
- [2] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, vol. 49, issues 3–4, pp. 556–566. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024>.
- [3] Hello G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanford solutions. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, vols. 144–145, pp. 265–275. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012>.
- [4] Zhu F., Ji X., He P., Zheng B., Zhang K. On the stress singularity at crack tip in elasticity. *Results in Physics*, 2019, vol. 13, p. 102210. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2019.102210>.
- [5] Krepl O., Klusak J. Multi-parameter average strain energy density factor criterion applied on the sharp material inclusion problem. *Procedia Structural Integrity*, 2018, vol. 13, pp. 1279–1284. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2018.12.261>.
- [6] Moazzami M., Ayatollahi M.R., Chamani H.R., Guagliano Vergani L. Determination of higher order stress terms in cracked Brazilian disc specimen under mode I loading using digital image correlation technique. *Optic and Laser Technology*, 2018, vol. 107, pp. 344–352. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2018.06.010>.

- [7] Karihaloo B.L., Xiao Q.Z. Asymptotic crack tip fields in linear and nonlinear materials and their role in crack propagation. *Physical Mesomechanics*, 2018, vol. 21, issue 6, pp. 23–35. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1029959919010053>.
- [8] Berto F., Lazzarin P. Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches. *Materials Science and Engineering: R: Reports*, 2014, vol. 75, pp. 1–48. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mser.2013.11.001>.
- [9] Malikova L. Multi-parameter fracture criteria for the estimation of crack propagation direction applied to a mixed-mode geometry. *Engineering Fracture Mechanics*, 2015, vol. 143, pp. 32–46. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.06.029>.
- [10] Malikova L., Vesely V., Seitl S. Crack propagation direction in a mixed mode geometry estimated via multi-parameter fracture criteria. *International Journal of Fatigue*, 2016, vol. 89, pp. 99–107. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.01.010>.
- [11] Stepanova L.V. Asymptotics of stresses and strain rates near the tip of a transverse shear crack in a material whose behavior is described by a fractional-linear law. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2009, vol. 50, no. 1, pp. 137–146. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10808-009-0019-9>.
- [12] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Multi-parameter description of the crack-tip stress field: Analytic determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structures*, 2016, vol. 100–101, pp. 11–28. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.06.032>.
- [13] Vesely V., Sobek J., Seitl S. Multi-parameter approximation of the stress field in a cracked body in the more distant surrounding of the crack tip. *International Journal of Fatigue*, 2016, vol. 89, pp. 20–35. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.02.016>.
- [14] Stepanova L.V., Adylina E.M. Stress-strain state in the vicinity of a crack tip under mixed loading. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, vol. 55, no. 5, pp. 885–895. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894414050186>.
- [15] Stepanova L.V., Yakovleva E.M. Asymptotic stress field in the vicinity of a mixed-mode crack under plane stress conditions for a power-law hardening material. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2015, vol. 10, no. 3, pp. 367–393. DOI: <http://dx.doi.org/10.2140/jomms.2015.10.367>.
- [16] Stepanova L.V., Mushankova K.A. Atomistic and Continuum Ascertainment of the Crack Tip Stress Fields in Anisotropic Elastic Cubic Media. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2024, vol. 133, p. 104613. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2024.104613>.
- [17] Mushankova K.A., Stepanova L.V. Determination of asymptotic series coefficients for stress fields based on molecular dynamics calculations. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2024. DOI: <https://doi.org/10.15372/PMTF202415537>. EDN: <https://www.elibrary.ru/juunnu>.
- [18] Anisimov G.S., Stepanova L.V. Experimental determination of crack-tip fields: holographic interferometry method and digital image correlation method. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2024, no. 3, pp. 39–56. DOI: <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2024.3.03>. (In Russ.)
- [19] Muskhelishvili N.I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1966, 708 p. Available at: <https://klex.ru/1fa4?ysclid=m5qsu4dvcj256999603>. (In Russ.)



Решение уравнений Фешля – фон Кармана для квадратных пластин

Дигилов А.В. , Лычев С.А. 

Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлунского РАН, г. Москва, Российская Федерация;
digilov@ipmnet.ru (А.В.); lychevsa@mail.ru (С.А.);

Поступила: 10.10.2024

Рассмотрена: 20.11.2024

Принята: 25.11.2024

Научная статья



Аннотация. В статье развит подход к построению решений уравнений Фешля – фон Кармана для квадратных пластин, основанный на прямой алгебраизации краевой задачи. Решение получено в виде разложения по базису в пространстве квадратно-интегрируемых функций. Для задания такого базиса использована система собственных функций линейного самосопряженного оператора. Коэффициенты разложения определяются методом редукции из бесконечномерной системы кубических уравнений. Это позволяет рассматривать предложенное решение как нелинейное обобщение классического метода Галеркина.

Ключевые слова: квадратные пластины; уравнения Фешля – фон Кармана; конечные деформации; нелинейные уравнения.

Введение

В настоящее время для анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) гибких пластин широко используют нелинейные уравнения Фешля – фон Кармана, полученные для мембран Августом Фешлем в 1907 году [1] и обобщенные на случай конечной изгибной жесткости Теодором фон Карманом [2]:

$$D\nabla^2\nabla^2w - hL(w, \phi) = p, \quad \nabla^2\nabla^2\phi + \frac{E}{2}L(w, w) = 0. \quad (1)$$

Здесь h – толщина пластины; E – модуль Юнга ее материала; $p(x, y)$ – функция трансверсальной нагрузки, приложенной к поверхности пластины; D – цилиндрическая жесткость пластины, определяемая через h , E и коэффициент Пуассона ν :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Символы $\nabla^2\nabla^2$ и L обозначают, соответственно, бигармонический оператор и оператор типа Монжа – Ампера:

$$\nabla^2\nabla^2f = \frac{\partial^4f}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4f}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4f}{\partial y^4}, \quad L(f, g) = \frac{\partial^2f}{\partial x^2}\frac{\partial^2g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2f}{\partial y^2}\frac{\partial^2g}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2f}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2g}{\partial x\partial y}. \quad (2)$$

Искомая функция $w(x, y)$ характеризует прогиб срединной плоскости пластины, а $\phi(x, y)$ – функция напряжений Эри, связанная с компонентами тензора напряжений следующими соотношениями:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}. \quad (3)$$

В работе предлагается обобщение метода решения уравнений (1), развитого в статье [3], на случай приложения к квадратной пластине нагрузки, симметричной относительно средних линий пластины, но не ее диагоналей, т. е. такой, что:

$$p(x, y) = p(-x, y), \quad p(x, y) = p(x, -y), \quad p(x, y) \neq p(y, x).$$

Рассматриваемая задача является связующим звеном между задачами об изгибе квадратной и прямоугольной пластин и позволяет продемонстрировать основные принципы расчета пластин для неполовностью симметричного случая, не вводя в рассмотрение параметр, связанный с соотношением сторон пластины.

Подробный литературный обзор, посвященный решениям уравнений Фешля–фон Кармана для круглых и прямоугольных пластин, можно найти в статьях [3–8]; здесь же упомянем лишь некоторые работы, связанные с применением метода Галеркина.

По-видимому, первая попытка решения уравнений Фешля–фон Кармана методом Галеркина была предпринята Д.Ю. Пановым [9]. Ямаки [10] получил решение динамического аналога уравнений Фешля–фон Кармана для прямоугольной пластины с помощью одночленного метода Галеркина. В работе [11] уравнения Фешля–фон Кармана для прямоугольной пластины сводились к одному кубическому уравнению с помощью биортогональных разложений по функциям Крылова–Дункана. Для каждого набора краевых условий рассматривались две возможности: все края свободны от напряжений или все края неподвижны. Этот метод наиболее близок к методу, развиваемому в [3] и в настоящей статье. Аналогичный метод алгебраизации системы уравнений Фешля–фон Кармана был представлен в статьях [12; 13]. В работе [14] этот метод был дополнен явным выражением для матрицы, обратной к матрице Галеркина, что позволило получить решение более эффективно. В последнее время активно развивается метод вейвлет-Галеркина [15; 16], основанный на разложении искомых функций по базису вейвлетов.

1. Постановка задачи

Рассматривается изгиб тонкой пластины с толщиной h , выполненной из линейно-упругого материала с модулями E и ν , под действием поля нормальных сил с интенсивностью $p(x, y)$. Пластина занимает квадратную область

$$\Omega = (-a, a) \times (-a, a) \subset \mathbb{R}^2$$

с границей

$$\partial\Omega = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2,$$

где $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ соответствуют двум парам противоположащих сторон:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= (\{-a\} \times [-a, a]) \cup (\{a\} \times [-a, a]), \\ \mathcal{E}_2 &= ([-a, a] \times \{-a\}) \cup ([-a, a] \times \{a\}). \end{aligned}$$

Для того чтобы сформулировать краевую задачу, необходимо дополнить уравнения конечного изгиба пластины (1) подходящими краевыми условиями на границах $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$. Краевые условия для гибких пластин обычно разделяют на два набора, ассоциированные с изгибом пластины и плоским НДС. В качестве первого набора в настоящей статье выбраны условия жесткого защемления всего граничного контура пластины:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{\mathcal{E}_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{\mathcal{E}_2} = 0, \quad w|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4}$$

а в качестве второго – условия скользящей заделки:

$$u|_{\mathcal{E}_1} = 0, \quad v|_{\mathcal{E}_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right|_{\partial\Omega} = 0. \tag{5}$$

Здесь $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – функции перемещений точек пластины в ее плоскости. Они не входят в уравнения (1) в явном виде, поэтому для решения краевой задачи (1), (4), (5) необходимо выразить их через искомые функции w, ϕ . Это можно сделать с помощью формулы Чезаро, связывающей векторы перемещений \mathbf{u} и поворотов $\boldsymbol{\omega}$ с тензором малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ [17]:

$$\mathbf{u}_M = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \int_{M_0}^M [\boldsymbol{\varepsilon} + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_M) \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})] d\mathbf{x}. \tag{6}$$

Здесь вектор перемещений \mathbf{u} , как это принято в теории Кармана, определен с учетом кинематических гипотез Кирхгофа:

$$\mathbf{u} = \left(u - z \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(v - z \frac{\partial w}{\partial y} \right) \mathbf{j} + w \mathbf{k}.$$

Таким образом, для того чтобы связать вектор перемещений \mathbf{u} с функцией Эри ϕ , необходимо выразить тензор малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ через тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$. Особенность теории Кармана состоит в наличии нескольких упрощающих гипотез, которые позволяют использовать лишь закон состояния Сен-Венана–Кирхгофа [18; 19]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \mathbf{E}^* + \frac{\nu E}{1-\nu^2} (\text{tr} \mathbf{E}^*) \mathbf{I}, \quad (7)$$

где \mathbf{E}^* – редуцированный тензор деформаций Грина–Сен-Венана:

$$\mathbf{E}^* = \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} (\nabla w) \otimes (\nabla w) = \frac{1}{2} \left[\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} + (\nabla w) \otimes (\nabla w) \right]. \quad (8)$$

Подставляя соотношение (8) в формулу Чезаро (6), можно получить

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_M = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \\ + \int_{M_0}^M \left\{ \mathbf{E}^* - \frac{1}{2} (\nabla w) \otimes (\nabla w) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_M) \times \left[\nabla \times \left(\mathbf{E}^* - \frac{1}{2} (\nabla w) \otimes (\nabla w) \right) \right] \right\} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (9)$$

Эта формула может быть значительно упрощена, если выбрать подходящий путь интегрирования. Учитывая, что перемещения и повороты всей пластины определяются с точностью до аддитивной постоянной, любая ее точка может быть зафиксирована. Кроме того, если функция трансверсальной нагрузки четная или нечетная по обеим координатам, то центр пластины будет смещаться вертикально, не сдвигаясь в плоскости пластины. Далее для простоты будем считать, что функция нагрузки p и, как следствие, искомые функции w , ϕ четные по обеим координатам (остальные случаи симметрии рассматриваются аналогично):

$$\{w, \phi, p\} \subset \mathcal{F}_s = \{f \in \mathcal{L}^2(\Omega) : f(x, y) = f(-x, y), f(x, y) = f(x, -y)\}. \quad (10)$$

Кроме того, ограничим класс рассматриваемых функций p , w , ϕ только лишь квадратично-интегрируемыми. Это позволит разложить их по ортонормированной системе функций и свести краевую задачу к системе кубических уравнений.

С учетом четности функции поперечной нагрузки (10) перемещения u на границе \mathcal{E}_1 могут быть вычислены следующим образом:

$$u|_{x=\pm a} = \int_0^{\pm a} \left(E_{xx}^* - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx.$$

Подстановка соотношений (7) и (3) в эту формулу приводит к искомому равенству

$$u|_{x=\pm a} = \int_0^{\pm a} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{E}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0. \quad (11)$$

Выражение для перемещений v на границе \mathcal{E}_2 может быть записано аналогично, если заменить в (11) переменную x на y и функцию u на v .

Теперь можно перейти к окончательной формулировке краевой задачи. Но прежде удобно ввести безразмерные переменные:

$$\tilde{x} := \frac{x}{a}, \quad \tilde{y} := \frac{y}{a}, \quad \tilde{z} := \frac{z}{h}, \quad \tilde{w} := \frac{w}{h}, \quad \tilde{\phi} := \frac{\phi h}{D}, \quad \tilde{p} := \frac{pa^4}{Dh}.$$

В новых переменных уравнения Фепля – фон Кармана (1) и соответствующие краевые условия могут быть записаны следующим образом:

$$\tilde{\nabla}^2 \tilde{\nabla}^2 \tilde{w} - \tilde{L}(\tilde{w}, \tilde{\phi}) = \tilde{p}, \quad \tilde{\nabla}^2 \tilde{\nabla}^2 \tilde{\phi} + \kappa \tilde{L}(\tilde{w}, \tilde{w}) = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=\pm 1} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{y}=\pm 1} = 0, \quad \tilde{w} \Big|_{\tilde{x}=\pm 1} = 0, \quad \tilde{w} \Big|_{\tilde{y}=\pm 1} = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{x}=\pm 1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{y}=\pm 1} = 0, \tag{14}$$

$$\int_0^{\pm 1} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}^2} - \nu \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}^2} - \kappa \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 \right] d\tilde{x} = 0, \quad \int_0^{\pm 1} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}^2} - \nu \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}^2} - \kappa \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right] d\tilde{y} = 0, \tag{15}$$

где $\kappa := 6(1 - \nu^2)$, $\tilde{\nabla}^2 := a^2 \nabla^2$, $\tilde{L}(\cdot, \cdot) := a^4 L(\cdot, \cdot)$. Далее для краткости в обозначениях дифференциальных операторов будем опускать знак тильды

2. Решение краевой задачи

2.1. Построение базиса

Решение нелинейной краевой задачи (12)–(15) будем искать в виде разложения по некоторому базису в $\mathcal{L}^2(\Omega)$, порожденному линейным самосопряженным оператором. Согласно спектральной теореме фон Неймана [20], система собственных функций самосопряженного дифференциального оператора образует базис в $\mathcal{L}^2(\Omega)$, однако бигармонический оператор имеет довольно сложную систему собственных функций даже с однородными краевыми условиями, поэтому удобнее использовать другой самосопряженный оператор, например

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^4}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial^4}{\partial \tilde{y}^4}.$$

Система собственных функций этого оператора может быть получена как комбинация решений вспомогательной задачи Штурма – Лиувилля:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial v^4} - \eta^4 f = 0, \quad f \Big|_{v=\pm 1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{v=\pm 1} = 0.$$

Фундаментальная система решений этого уравнения хорошо известна:

$$\Psi = \{ \sin(\eta v), \cos(\eta v), \sinh(\eta v), \cosh(\eta v) \}.$$

Подставив линейную комбинацию этих функций в граничные условия, можно получить спектральное уравнение относительно собственных значений η :

$$[\sinh(\eta) \cos(\eta) - \sin(\eta) \cosh(\eta)] [\sinh(\eta) \cos(\eta) + \sin(\eta) \cosh(\eta)] = 0.$$

Таким образом, спектр оператора \mathcal{L} состоит из двух серий собственных значений:

$$\{ \eta_m \}_{m=1}^{\infty} = \{ \lambda_m \}_{m=1}^{\infty} \cup \{ \mu_m \}_{m=1}^{\infty},$$

которые определяются как корни трансцендентных уравнений:

$$\tanh(\lambda_m) + \tan(\lambda_m) = 0, \quad \tanh(\mu_m) - \tan(\mu_m) = 0.$$

Эти корни могут быть найдены численно с любой заданной точностью, но для достаточно больших значений m довольно точные приближения могут быть получены из асимптотических формул:

$$\lambda_m = \pi m - \frac{\pi}{4}, \quad \mu_m = \pi m + \frac{\pi}{4}. \tag{16}$$

Таблица 1

Собственные значения λ

Table 1

Eigenvalues λ

Номер	Точное значение	Приближенное значение	Погрешность
1	2.36502	2.35619	0.00372
2	5.49780	5.49779	$3.05126 \cdot 10^{-6}$
3	8.63938	8.63938	$3.62616 \cdot 10^{-6}$
4	11.7810	11.7810	$4.96600 \cdot 10^{-12}$
5	14.9226	14.9226	$7.38037 \cdot 10^{-15}$

Таблица 2

Собственные значения μ

Table 2

Eigenvalues μ

Номер	Точное значение	Приближенное значение	Погрешность
1	3.92660	3.92699	0.00010
2	7.06858	7.06858	$1.02559 \cdot 10^{-7}$
3	10.2102	10.2102	$1.32593 \cdot 10^{-10}$
4	13.3518	13.3518	$1.89320 \cdot 10^{-13}$
5	16.4934	16.4934	$2.15403 \cdot 10^{-16}$

Приведенный расчет (таблицы 1 и 2) показывает, что для стандартной машинной точности достаточно уточнить только пять первых значений, а все остальные можно вычислить непосредственно по формулам (16).

Каждая последовательность собственных чисел ассоциирована с семейством собственных функций:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m(v) &= \cos(\lambda_m v) \cosh(\lambda_m) - \cos(\lambda_m) \cosh(\lambda_m v), \\ \mathbf{v}_m(v) &= \sin(\mu_m v) \cosh(\mu_m) - \cos(\mu_m) \sinh(\mu_m v). \end{aligned} \quad (17)$$

Такие последовательности функций удобны для теоретических построений, поскольку имеют компактный вид, однако для вычислений удобнее использовать нормализованные функции:

$$\tilde{\mathbf{u}}_m(v) = \frac{\mathbf{u}_m}{\sqrt{\cosh(\lambda_m)^2 + \cos(\lambda_m)^2}}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_m(v) = \frac{\mathbf{v}_m}{\sqrt{\cosh(\mu_m)^2 - \cos(\mu_m)^2}}.$$

Очевидно, что каждая парная комбинация функций (17) представляет собой собственную функцию двумерного оператора \mathcal{L} . Таким образом, система собственных функций этого оператора состоит из четырех последовательностей:

$$\{\tilde{\mathbf{u}}_i(\tilde{x}) \tilde{\mathbf{u}}_j(\tilde{y}), \tilde{\mathbf{u}}_i(\tilde{x}) \tilde{\mathbf{v}}_j(\tilde{y}), \tilde{\mathbf{v}}_i(\tilde{x}) \tilde{\mathbf{u}}_j(\tilde{y}), \tilde{\mathbf{v}}_i(\tilde{x}) \tilde{\mathbf{v}}_j(\tilde{y})\}. \quad (18)$$

Хотя каждый член этих последовательностей имеет два индекса, предпочтительнее использовать одноиндексную систему нумерации. Такая система может быть порождена любой биекцией $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$. В случае если задача симметрична по двум координатам, т. е. необходимо учитывать одинаковое количество членов разложения по каждой из координат, то удобно использовать функцию Кантора для целых положительных чисел, которая была предложена им в статье [21]:

$$k = \frac{N(N-1)}{2} + i, \quad N = i + j - 1. \quad (19)$$

Это функция реализует отображение пары (i, j) в число k , нумеруя ячейки таблицы $i \times j$ по диагоналям. Наглядная схема нумерации приведена на рисунке 1, а.

В случае когда задача существенно асимметрична, удобнее использовать обобщение функции Кантора, в которой нумерация производится не по диагоналям, а по ступенькам. Например, для ширины ступеньки, равной 2, эта функция будет иметь вид

$$k = N(N - 1) + i, \quad N = \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + j - 1, \quad (20)$$

где скобками $\lceil \dots \rceil$ обозначена операция округления до целого вверх. Диаграмма функции Кантора со ступенькой приведена на рисунке 1, *b*.

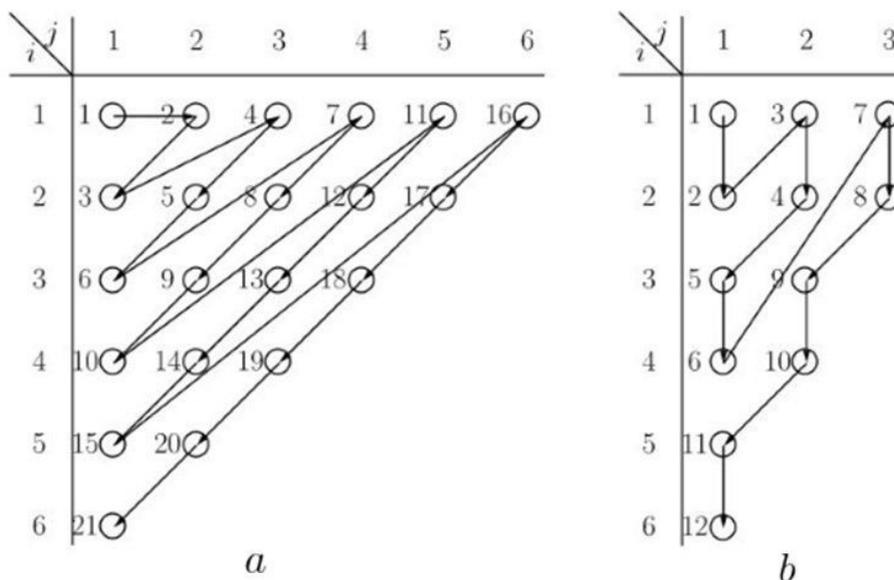


Рис. 1. Функция Кантора
 Fig. 1. Cantor function

Таким образом двухиндексная система базисных функций (18) может быть заменена одноиндексной:

$$\{\tilde{f}_{1k}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{f}_{2k}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{f}_{3k}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{f}_{4k}(\tilde{x}, \tilde{y})\}. \quad (21)$$

Возврат к исходной нумерации можно осуществить с помощью функций обратных к (19), (20). Для построения обратных функций необходимо связать текущий номер k с номером соответствующей диагонали (или ступеньки) N .

В случае функции (19) номер диагонали может быть найден по формуле

$$N = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{1 + 8(k - 1)}}{2} \right\rfloor,$$

где скобки $\lfloor \dots \rfloor$ обозначают операцию взятия целой части. Отсюда легко получить обратную функцию

$$i = k - \frac{N(N - 1)}{2} =: S(k), \quad j = N + 1 - i =: C(k).$$

Здесь и далее S и C – краткие обозначения компонентов обратной функции.

Аналогичные соотношения можно получить и для функции (20):

$$N = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{1 + 4(k - 1)}}{2} \right\rfloor,$$

$$i = k - N(N - 1) =: S(k), \quad j = N + 1 - \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil =: C(k).$$

Замечание. Мы используем одинаковые обозначения для обратных функций, чтобы подчеркнуть тот факт, что все дальнейшие выражения не зависят от выбора системы нумерации.

В силу условия (10) разложения всех функций, используемых в дальнейшем, по базису (21) будут содержать ненулевые коэффициенты только при четных по обоим координатам функциях \tilde{f}_{1k} . Поэтому далее для краткости мы будем опускать первый индекс и примем следующие обозначения:

$$f_k := f_{1k}, \quad \tilde{f}_k := \tilde{f}_{1k}. \quad (22)$$

2.2. Вспомогательная краевая задача

Главное преимущество базиса (21) заключается в том, что, раскладывая функции \tilde{w} и $\tilde{\phi}$ по нему, удастся автоматически выполнить краевые условия (13) и (14). Для того чтобы удовлетворить оставшимся краевым условиям (15) можно дополнить функцию напряжений решением вспомогательной краевой задачи:

$$\nabla^2 \nabla^2 \tilde{\phi} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}^2} \Big|_{\tilde{y}=\pm 1} = \psi_1(\tilde{x}), \quad \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}^2} \Big|_{\tilde{x}=\pm 1} = \psi_2(\tilde{y}), \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{y}=1} = -\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{y}=-1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{x}=1} = -\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{x}=-1} = 0,$$

где ψ_1, ψ_2 – произвольные квадратично-интегрируемые функции. Решение этой задачи будем искать в виде суммы

$$\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_0 + \tilde{\phi}^*, \quad (25)$$

в которой терм $\tilde{\phi}^*$ удовлетворяет неоднородным краевым условиям (24), но не удовлетворяет однородному бигармоническому уравнению (23). Другое слагаемое $\tilde{\phi}_0$, удовлетворяет однородным краевым условиям и неоднородному бигармоническому уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \tilde{\phi}_0 = -\nabla^2 \nabla^2 \tilde{\phi}^*.$$

Учитывая условие четности (10), можно ограничить произвол в выборе функций ψ_1, ψ_2 и рассматривать только четные функции. В этом случае функция $\tilde{\phi}^*$ может быть представлена следующим образом:

$$\tilde{\phi}^* = \alpha_0 \frac{\tilde{x}^2}{4} + \beta_0 \frac{\tilde{y}^2}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 k^2} [\alpha_k \cos(\pi k \tilde{x}) + \beta_k \cos(\pi k \tilde{y})]. \quad (26)$$

Такой вид функции позволяет автоматически удовлетворить краевым условиям для смешанных производных. Кроме того, подстановка этой функции в (24) приводит к выражениям, которые являются не чем иным, как разложением функций ψ_1, ψ_2 в ряды Фурье:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}^2} \Big|_{\tilde{y}=\pm 1} = \psi_1 = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(\pi k \tilde{x}), \quad \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}^2} \Big|_{\tilde{x}=\pm 1} = \psi_2 = \frac{\beta_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cos(\pi k \tilde{y}),$$

что позволяет удовлетворить любым граничным условиям, вычислив соответствующие коэффициенты разложений.

Теперь необходимо определить функцию $\tilde{\phi}_0$ таким образом, чтобы полное решение (25) удовлетворяло однородному бигармоническому уравнению. Для этой цели можно представить функцию $\tilde{\phi}_0$ в виде разложения по базисным функциям \tilde{f}_k :

$$\tilde{\phi}_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \tilde{f}_k.$$

Подстановка этого выражения и граничного решения (26) в бигармоническое уравнение приводит к следующему соотношению:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \nabla^2 \nabla^2 \tilde{f}_k = \sum_{k=1}^{\infty} \pi^2 k^2 [\alpha_k \cos(\pi k \tilde{x}) + \beta_k \cos(\pi k \tilde{y})]. \quad (27)$$

Полученное дифференциальное уравнение можно преобразовать к бесконечномерной системе алгебраических уравнений относительно ζ_k, α_k и β_k с помощью оператора проецирования:

$$\mathcal{P}_q(F(\tilde{x}, \tilde{y})) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F \tilde{f}_q d\tilde{x} d\tilde{y}, \quad q = 1, \dots, \infty. \tag{28}$$

Действие этого оператора на (27) приводит к следующей системе¹:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \left(\zeta_k \delta_{qk} + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2 \frac{\partial^4 \tilde{f}_k}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{y}^2} \tilde{f}_q d\tilde{x} d\tilde{y} \right) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \pi^2 k^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\alpha_k \cos(\pi k \tilde{x}) + \beta_k \cos(\pi k \tilde{y})] \tilde{f}_q d\tilde{x} d\tilde{y}, \end{aligned}$$

в которой ζ_k — собственные числа оператора \mathcal{L} , соответствующие четным собственным функциям

$$\zeta_k = \lambda_{S(k)}^4 + \lambda_{C(k)}^4.$$

Полученную бесконечномерную систему можно свести к конечной с помощью метода редукции [22; 23]:

$$\zeta = \mathbf{G}^{-1} \cdot (\mathbf{A}\alpha + \mathbf{B}\beta), \tag{29}$$

где ζ, α, β — векторы соответствующих коэффициентов Фурье; $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{G}$ — вспомогательные матрицы.

Матрица \mathbf{G} называется матрицей Галеркина, выражение для ее компонент можно компактно представить с помощью вспомогательного интеграла I_G^2 :

$$G_{qk} = \zeta_q \delta_{qk} + \frac{2\lambda_{S(k)}^2 \lambda_{C(k)}^2}{\|f_k\| \|f_q\|} I_G(\lambda_{S(q)}, \lambda_{S(k)}) I_G(\lambda_{C(q)}, \lambda_{C(k)}), \tag{30}$$

где $\|f_k\|$ — нормы базисных функций:

$$\|f_k\| = \sqrt{\cosh^2(\lambda_{S(k)}) + \cos^2(\lambda_{S(k)})} \sqrt{\cosh^2(\lambda_{C(k)}) + \cos^2(\lambda_{C(k)})}.$$

Компоненты матриц \mathbf{A}, \mathbf{B} кратко выражаются через соответствующие вспомогательные интегралы $I_0(\dots), I_4(\dots), I_5(\dots)$:

$$\begin{aligned} A_{qk} &= \frac{\pi^2 k^2}{\|f_q\|} \left[I_4(\lambda_{S(q)}, k) - I_5(\lambda_{S(q)}, k) \right] I_0(\lambda_{C(q)}), \\ B_{qk} &= \frac{\pi^2 k^2}{\|f_q\|} \left[I_4(\lambda_{C(q)}, k) - I_5(\lambda_{C(q)}, k) \right] I_0(\lambda_{S(q)}). \end{aligned}$$

Таким образом, решение (25) полностью определено. Далее для сокращения письма мы будем использовать следующие обозначения:

$$\tilde{\phi}_{\alpha k}^* := -\frac{1}{\pi^2 k^2} \cos(\pi k \tilde{x}), \quad \tilde{\phi}_{\beta k}^* := -\frac{1}{\pi^2 k^2} \cos(\pi k \tilde{y}).$$

В них решение (26) принимает вид

$$\tilde{\phi}^* = \alpha_0 \frac{\tilde{x}^2}{4} + \beta_0 \frac{\tilde{y}^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \tilde{\phi}_{\alpha k}^* + \beta_k \tilde{\phi}_{\beta k}^*).$$

¹ Здесь δ_{qk} — дельта Кронекера.

² Вспомогательные интегралы приведены в Приложении.

2.3. Переход к системе кубических уравнений

После построения вспомогательного решения вернемся к краевой задаче (12)–(15). Будем искать решение \tilde{w} , $\tilde{\phi}$ в виде разложений по базисным функциям (22):

$$\tilde{w} = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \tilde{f}_k, \quad \tilde{\phi} = \sum_{k=1}^{\infty} (s_k + \zeta_k) \tilde{f}_k + \tilde{\phi}^*. \quad (31)$$

Для этого необходимо подставить разложения в уравнения (12):

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k \left\{ \nabla^2 \nabla^2 \tilde{f}_k - \frac{\alpha_0}{2} \frac{\partial^2 \tilde{f}_k}{\partial \tilde{y}^2} - \frac{\beta_0}{2} \frac{\partial^2 \tilde{f}_k}{\partial \tilde{x}^2} - \sum_{r=1}^{\infty} \left[(s_r + \zeta_r) L(\tilde{f}_k, \tilde{f}_r) + \alpha_r L(\tilde{f}_k, \tilde{\phi}_{\alpha r}^*) + \beta_r L(\tilde{f}_k, \tilde{\phi}_{\beta r}^*) \right] \right\} = \tilde{p}, \quad (32)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ s_k \nabla^2 \nabla^2 \tilde{f}_k + \kappa g_k \sum_{r=1}^{\infty} g_r L(\tilde{f}_k, \tilde{f}_r) \right\} = 0, \quad (33)$$

и граничные условия (13)–(15). Так как искомые функции четные по обеим координатам, то для выполнения четырех условий (15) достаточно, чтобы выполнялись следующие два:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_0^1 \left[\frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} (s_k \tilde{f}_k + \zeta_k \tilde{f}_k + \beta_k \tilde{\phi}_{\beta k}^*) - \kappa g_k \sum_{r=1}^{\infty} g_r \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{f}_r}{\partial \tilde{x}} \right] d\tilde{x} \right\} + \frac{\beta_0}{2} - \nu \frac{\alpha_0}{2} = 0, \quad (34)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_0^1 \left[\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} (s_k \tilde{f}_k + \zeta_k \tilde{f}_k + \alpha_k \tilde{\phi}_{\alpha k}^*) - \kappa g_k \sum_{r=1}^{\infty} g_r \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{f}_r}{\partial \tilde{y}} \right] d\tilde{y} \right\} + \frac{\alpha_0}{2} - \nu \frac{\beta_0}{2} = 0 \quad (35)$$

Остальные граничные условия (13), (14) выполняются автоматически благодаря соответствующему выбору базисных функций.

На соотношения (32)–(35) можно подействовать операторами проецирования и свести их к бесконечномерной системе алгебраических уравнений. Именно для уравнений (32), (33) можно использовать оператор (28):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left\{ \zeta_k \delta_{qk} + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2 \frac{\partial^4 \tilde{f}_k}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{y}^2} \tilde{f}_q d\tilde{x} d\tilde{y} - \frac{\alpha_0}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \tilde{f}_k}{\partial \tilde{y}^2} \tilde{f}_q d\tilde{x} d\tilde{y} - \frac{\beta_0}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \tilde{f}_k}{\partial \tilde{x}^2} \tilde{f}_q d\tilde{x} d\tilde{y} - \right. \\ & - \sum_{r=1}^{\infty} \left[(s_r + \zeta_r) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L(\tilde{f}_k, \tilde{f}_r) \tilde{f}_q d\tilde{x} d\tilde{y} + \alpha_r \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L(\tilde{f}_k, \tilde{\phi}_{\alpha r}^*) \tilde{f}_q d\tilde{x} d\tilde{y} + \right. \\ & \left. \left. + \beta_r \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L(\tilde{f}_k, \tilde{\phi}_{\beta r}^*) \tilde{f}_q d\tilde{x} d\tilde{y} \right] \right\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{p} \tilde{f}_q d\tilde{x} d\tilde{y}, \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ s_k \left[\zeta_k \delta_{qk} + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2 \frac{\partial^4 \tilde{f}_k}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{y}^2} \tilde{f}_q d\tilde{x} d\tilde{y} \right] + \kappa g_k \sum_{r=1}^{\infty} g_r \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L(\tilde{f}_k, \tilde{f}_r) \tilde{f}_q d\tilde{x} d\tilde{y} \right\} = 0. \end{aligned}$$

На краевые условия (34), (35) следует подействовать одномерным проектором. Поскольку вспомогательная часть функции Эри представлена через косинусы, удобно использовать проекторы с ядром косинусов:

$$\mathcal{F}_0(F(v)) = \int_{-1}^1 F dv, \quad \mathcal{F}_q^c(F(v)) = \int_{-1}^1 F \cos(\pi qv) dv, \quad q = 1 \dots \infty.$$

Действие этих операторов на краевые условия приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned}
 & -\kappa \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \int_{-1}^1 \int_0^1 g_k g_r \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{f}_r}{\partial \tilde{x}} d\tilde{x} d\tilde{y} + \beta_0 - \nu \alpha_0 = 0, \\
 & -\kappa \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \int_{-1}^1 \int_0^1 g_k g_r \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{f}_r}{\partial \tilde{y}} d\tilde{y} d\tilde{x} + \alpha_0 - \nu \beta_0 = 0, \\
 & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_{-1}^1 \int_0^1 \left[(s_k + \zeta_k) \frac{\partial^2 \tilde{f}_k}{\partial \tilde{y}^2} \cos(\pi q \tilde{y}) - \kappa g_k \sum_{r=1}^{\infty} g_r \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{f}_r}{\partial \tilde{x}} \cos(\pi q \tilde{y}) \right] d\tilde{x} d\tilde{y} + \beta_k \delta_{qk} \right\} = 0, \\
 & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_{-1}^1 \int_0^1 \left[(s_k + \zeta_k) \frac{\partial^2 \tilde{f}_k}{\partial \tilde{x}^2} \cos(\pi q \tilde{x}) - \kappa g_k \sum_{r=1}^{\infty} g_r \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{f}_r}{\partial \tilde{y}} \cos(\pi q \tilde{x}) \right] d\tilde{y} d\tilde{x} + \alpha_k \delta_{qk} \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

Для решения полученной системы необходимо свести ее к конечной системе. Применение метода редукции к бесконечной системе линейных уравнений подтверждается хорошо развитой теорией, восходящей к ранним работам Кояловича [22; 23]. Однако в настоящее время нет строгих оснований для ее применения к нелинейным системам. Несмотря на это, метод редукции широко используется [11; 14; 24] и дает результаты хорошо согласующиеся с практикой.

Таким образом, применяя метод редукции, можно преобразовать полученные уравнения к следующей системе:

$$\begin{aligned}
 & \left[\mathbf{G} - \frac{\alpha_0}{2} \mathbf{M}^{\alpha_0} - \frac{\beta_0}{2} \mathbf{M}^{\beta_0} - \mathbf{M}(s + \zeta) - \mathbf{M}^{\alpha} \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{M}^{\beta} \boldsymbol{\beta} \right] \mathbf{g} = \mathbf{b}, \\
 & \mathbf{G} \mathbf{s} + \kappa (\mathbf{M} \mathbf{g}) \mathbf{g} = \mathbf{0}, \\
 & -\kappa (\mathbf{U}^{w0} \mathbf{g}) \mathbf{g} + \beta_0 - \nu \alpha_0 = 0, \quad \mathbf{U}(s + \zeta) + \mathbf{E} \boldsymbol{\beta} - \kappa (\mathbf{U}^w \mathbf{g}) \mathbf{g} = \mathbf{0}, \\
 & -\kappa (\mathbf{V}^{w0} \mathbf{g}) \mathbf{g} + \alpha_0 - \nu \beta_0 = 0, \quad \mathbf{V}(s + \zeta) + \mathbf{E} \boldsymbol{\alpha} - \kappa (\mathbf{V}^w \mathbf{g}) \mathbf{g} = \mathbf{0},
 \end{aligned} \tag{36}$$

где $\mathbf{M}^{\alpha_0}, \mathbf{M}^{\beta_0}, \mathbf{U}^{w0}, \mathbf{V}^{w0}, \mathbf{U}, \mathbf{V}$ – матрицы $n \times n$, а $\mathbf{M}^{\alpha}, \mathbf{M}^{\beta}, \mathbf{U}^w, \mathbf{V}^w, \mathbf{M}$ – кубические матрицы $n \times n \times n$. В таблице 3 представлены выражения для компонент некоторых матриц, записанные через вспомогательные интегралы. Компоненты матриц $\mathbf{M}^{\beta_0}, \mathbf{V}^{w0}, \mathbf{V}, \mathbf{M}^{\beta}, \mathbf{V}^w$ могут быть получены из выражений для компонент $\mathbf{M}^{\alpha_0}, \mathbf{U}^{w0}, \mathbf{U}, \mathbf{M}^{\alpha}, \mathbf{U}^w$ путем замены собственных чисел $\lambda_{S(\cdot)}$ на $\lambda_{C(\cdot)}$ соответственно и наоборот.

Из трех уравнений системы (36) можно сразу выразить вектор \mathbf{s} и константы α_0, β_0 :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{s} = -\kappa (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{g}) \mathbf{g}, \\
 & \alpha_0 = \frac{\kappa}{1 - \nu^2} [(\nu \mathbf{U}^{w0} + \mathbf{V}^{w0}) \mathbf{g}] \mathbf{g}, \quad \beta_0 = \frac{\kappa}{1 - \nu^2} [(\mathbf{U}^{w0} + \nu \mathbf{V}^{w0}) \mathbf{g}] \mathbf{g}.
 \end{aligned}$$

Используя соотношение (29), из оставшихся уравнений можно выразить векторы $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$:

$$\begin{aligned}
 & \boldsymbol{\alpha} = \kappa (\mathbf{R}_{\alpha} \mathbf{g}) \mathbf{g}, \quad \boldsymbol{\beta} = \kappa (\mathbf{R}_{\beta} \mathbf{g}) \mathbf{g} \\
 & \mathbf{R}_{\alpha} = \left[\mathbf{U} \mathbf{V}^{-1} + \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{A} + \mathbf{G} \mathbf{V}^{-1}) \right]^{-1} \left[\mathbf{B}^{-1} \mathbf{M} + (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{U}) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}^w - \mathbf{U}^w \right], \\
 & \mathbf{R}_{\beta} = \left[\mathbf{V} \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{B} + \mathbf{G} \mathbf{U}^{-1}) \right]^{-1} \left[\mathbf{A}^{-1} \mathbf{M} + (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{V}) \mathbf{U}^{-1} \mathbf{U}^w - \mathbf{V}^w \right].
 \end{aligned}$$

Наконец, подставляя полученные выражения в первое уравнение (36), можно получить систему кубических уравнений относительно \mathbf{g} :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{G} \mathbf{g} - \kappa (\mathbf{S} \mathbf{g}) \mathbf{g} + \\
 & + \frac{1}{2(1 - \nu^2)} \left\{ [(\nu \mathbf{U}^{w0} + \mathbf{V}^{w0}) \mathbf{g}] \mathbf{g} \mathbf{M}^{\alpha_0} + [(\mathbf{U}^{w0} + \nu \mathbf{V}^{w0}) \mathbf{g}] \mathbf{g} \mathbf{M}^{\beta_0} \right\} = \mathbf{b},
 \end{aligned}$$

Таблица 3

Компоненты вспомогательных матриц

Table 3

Components of auxiliary matrices

Матрицы	Выражение для компонент
Матрица $\mathbf{M}^{\alpha 0}$	$M_{qk}^{\alpha 0} = -\frac{\lambda_{C(k)}^2 I_G(\lambda_{C(q)}, \lambda_{C(k)})}{\ f_k\ \ f_q\ } \left(\cos^2(\lambda_{S(k)}) + \cosh^2(\lambda_{S(k)}) \right) \delta_{S(q)S(k)}$
Матрица \mathbf{U}^{w0}	$U_{qk}^{w0} = \frac{\lambda_{S(k)} \lambda_{S(q)} I_U(\lambda_{S(q)}, \lambda_{S(k)})}{2\ f_k\ \ f_q\ } \left(\cos^2(\lambda_{C(k)}) + \cosh^2(\lambda_{C(k)}) \right) \delta_{C(q)C(k)}$
Матрица \mathbf{U}	$U_{qk} = -\frac{\lambda_{C(k)}^2 \left(I_4(\lambda_{C(k)}, q) + I_5(\lambda_{C(k)}, q) \right) I_0(\lambda_{S(k)})}{2\ f_k\ }$
Кубическая матрица \mathbf{M}	$M_{qkr} = \frac{I_M(\lambda_{S(q)}, \lambda_{S(k)}, \lambda_{S(r)}, \lambda_{C(q)}, \lambda_{C(k)}, \lambda_{C(r)})}{\ f_k\ \ f_r\ \ f_q\ }$
Кубическая матрица \mathbf{M}^α	$M_{qkr}^\alpha = -\frac{\lambda_{C(k)}^2 I_{M3}(\lambda_{S(q)}, \lambda_{S(k)}, \pi r) I_G(\lambda_{C(q)}, \lambda_{C(k)})}{\ f_k\ \ f_q\ \cosh(\pi r)}$
Кубическая матрица \mathbf{U}^w	$U_{qkr}^w = \frac{\lambda_{S(k)} \lambda_{S(r)} I_{M3}(\lambda_{C(k)}, \lambda_{C(r)}, \pi q) I_U(\lambda_{S(k)}, \lambda_{S(r)})}{2\ f_k\ \ f_r\ \cosh(\pi q)}$

где \mathbf{S} — матрица четвертого порядка:

$$\mathbf{S} = -\mathbf{M}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{M} + \left[\left(\mathbf{M}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{M}^\alpha \right) \mathbf{R}_\alpha + \left(\mathbf{M}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{M}^\beta \right) \mathbf{R}_\beta \right].$$

В случае если функция нагрузки \tilde{p} удовлетворяет более сильному, чем (10), условию:

$$\{w, \phi, p\} \subset \mathcal{F}_s = \{f \in \mathcal{L}^2(\Omega) : f(x, y) = f(-x, y), f(x, y) = f(y, x)\},$$

полученная система (36) может быть существенно упрощена:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{G} - \frac{\alpha_0}{2} \left(\mathbf{M}^{\alpha 0} + \mathbf{M}^{\beta 0} \right) - \mathbf{M}(\mathbf{s} + \boldsymbol{\zeta}) - \left(\mathbf{M}^\alpha + \mathbf{M}^\beta \right) \boldsymbol{\alpha} \right] \mathbf{g} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{G}\mathbf{s} + \kappa(\mathbf{M}\mathbf{g}) &= \mathbf{0}, \\ -\kappa(\mathbf{U}^{w0}\mathbf{g}) + \alpha_0(1 - \nu) &= 0, \quad \mathbf{U}(\mathbf{s} + \boldsymbol{\zeta}) + \mathbf{E}\boldsymbol{\alpha} - \kappa(\mathbf{U}^w\mathbf{g}) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

причем выражение для вспомогательного вектора $\boldsymbol{\zeta}$ также упрощается:

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{B})\boldsymbol{\alpha}.$$

3. Модельные расчеты

Для иллюстрации полученного решения были проведены модельные расчеты для трех случаев (коэффициент Пуассона принят равным 0.3):

$$\tilde{p} = 25, \quad \tilde{p} = 25(1 - \tilde{x}^2)^2(1 - \tilde{y}^2)^2, \quad \tilde{p} = 25(1 - \tilde{y}^2)^2.$$

Цель этих вычислений — показать, как скорость сходимости последовательности частичных сумм \tilde{w}_n зависит от гладкости функции нагрузки и ее принадлежности к области дифференциального оператора.

Результаты первых двух расчетов представлены на рисунках 2 и 3. На подрисунках (a) показаны формы деформированной поверхности пластины. На подрисунках (b) представлены функции напряжений Эри. Подрисунки (c) показывают трансверсальные перемещения края пластины, полученные из частичных сумм. На последних подрисунках (d) приведены зависимости интегральной оценки невязки первого уравнения (12) от числа слагаемых, входящих в частичные суммы $\tilde{w}_n, \tilde{\phi}_n$:

$$\epsilon_n = \left| 1 - \frac{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \nabla^2 \nabla^2 \tilde{w}_n - L(\tilde{w}_n, \tilde{\phi}_n) d\tilde{x} d\tilde{y}}{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{p} d\tilde{x} d\tilde{y}} \right|.$$

На этих подрисунках оранжевые точки соответствуют суммам, которые симметричны по обоим индексам, т. е. вместе с любым термом $g_k \tilde{f}_k = g_k \tilde{u}_i(\tilde{x}) \tilde{u}_j(\tilde{y})$ они содержат симметричный терм $g_q \tilde{u}_j(\tilde{x}) \tilde{u}_i(\tilde{y})$.

Как и ожидалось, в случае гладкой функции нагрузки скорость сходимости резко увеличивается. Поэтому в случае когда $\tilde{p} = 25(1 - \tilde{y}^2)^2$ целесообразно учитывать больше членов разложения по координате \tilde{x} . Для этого можно воспользоваться нумерацией со ступенькой (20). Результаты расчета приведены на рисунке 4.

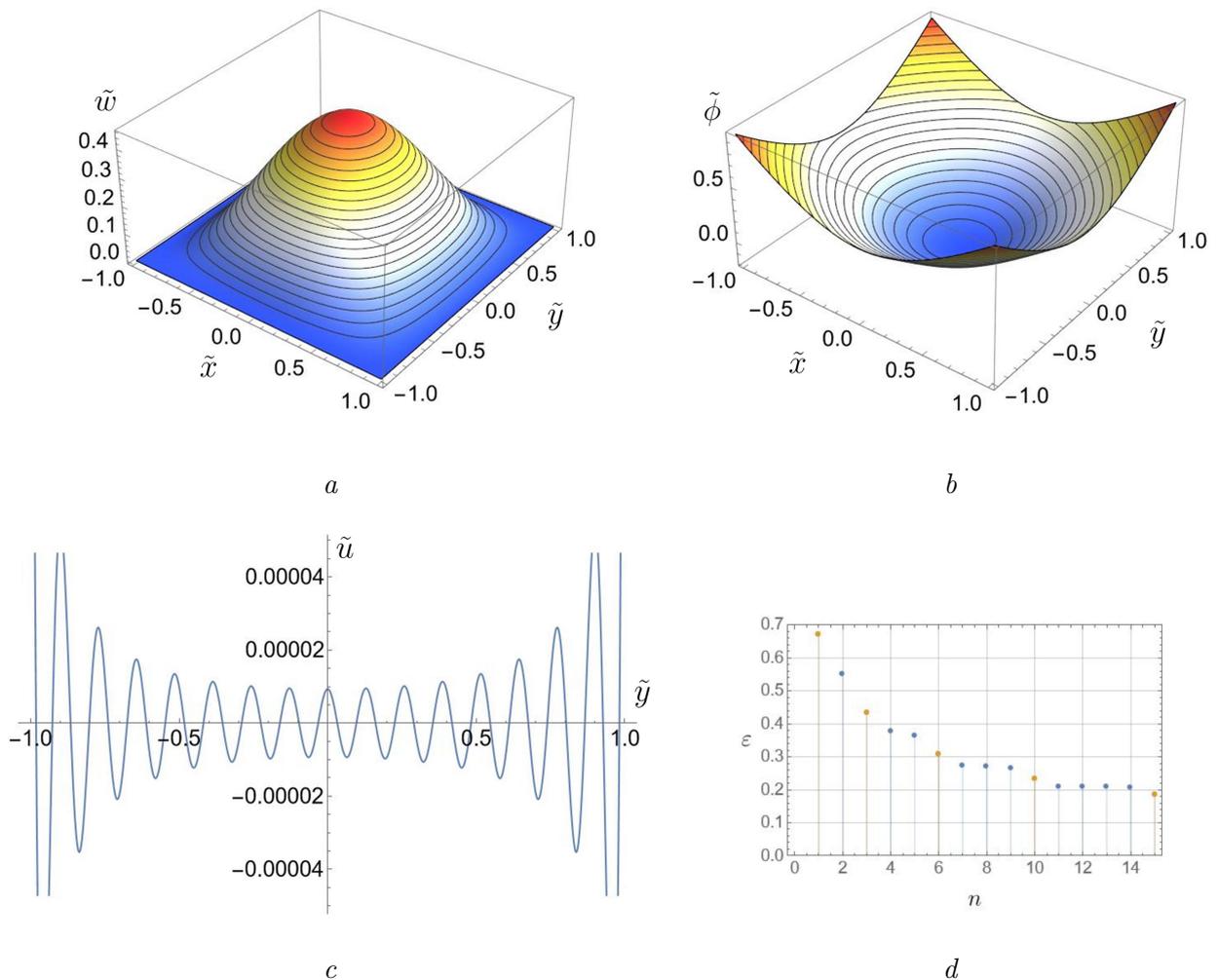


Рис. 2. Результаты расчетов для случая равномерной нагрузки
 Fig. 2. Computational results. Uniform load case

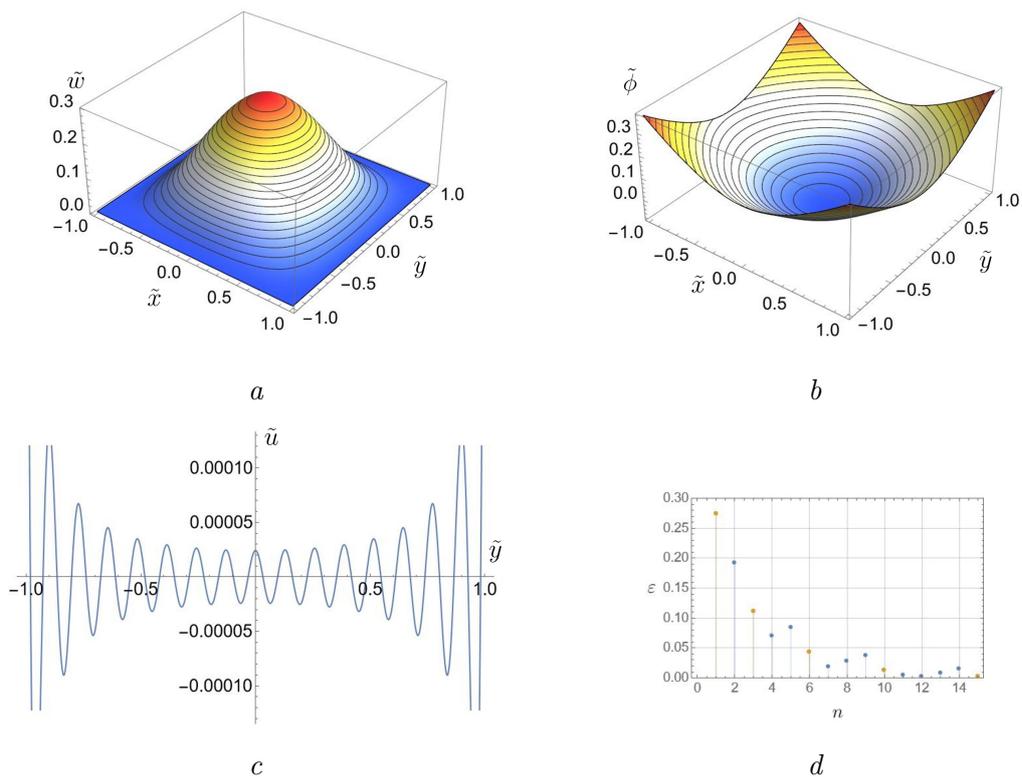


Рис. 3. Результаты расчетов для случая полиномиальной нагрузки
 Fig. 3. Computational results. Polynomial load case

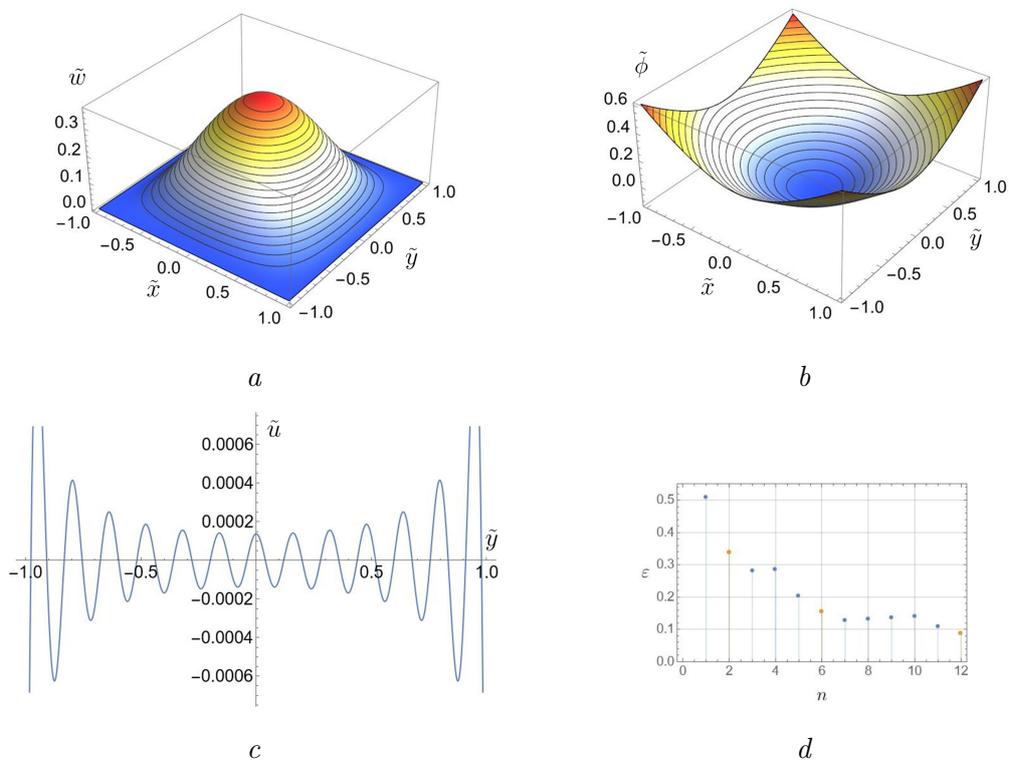


Рис. 4. Результаты расчетов для случая несимметричной нагрузки
 Fig. 4. Computational results. Nonsymmetry load case

Заключение

Резюмируем результаты статьи:

1. Развита метод построения решения уравнений Фешля – фон Кармана на основе метода Галеркина. В явном виде осуществлена алгебраизация краевой задачи для случая нагрузки, несимметричной относительно диагоналей пластины.
2. Представлены оценки сходимости полученного решения для трех вариантов функции поперечной нагрузки. Показано, что использование функции Кантора со ступенькой для нумерации слагаемых частичных сумм позволяет добиться удовлетворительной скорости сходимости для случая несимметричной нагрузки.

Финансирование. Работа была выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-19-00866).

Информация о конфликте интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Цитирование. Дигилов А.В., Лычев С.А. Решение уравнений Фешля – фон Кармана для квадратных пластин // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara State University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 4. С. 26–45. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-26-45.

© Дигилов А.В., Лычев С.А., 2024

Александр Вячеславович Дигилов (digilov@ipmnet.ru) – младший научный сотрудник лаборатории «Моделирование в механике деформируемого твердого тела», Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, 119526, Российская Федерация, г. Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1.

Сергей Александрович Лычев (lychevsa@mail.ru) – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории механика технологических процессов, Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, 119526, Российская Федерация, г. Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1.

Литература

- [1] Föppl A. Vorlesungen über technische Mechanik. Vol. 5. Leipzig: B. G. Teubner Verlag, 1907. 497 p. URL: <https://archive.org/details/vorlesungenbert26fpgooq/mode/2up>.
- [2] Kármán T. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. Leipzig: B. G. Teubner Verlag, 1910.
- [3] Lychev S., Digilov A., Djuzhev N. Galerkin-Type Solution of the Föppl – von Kármán Equations for Square Plates // Symmetry. 2025. Vol. 17, issue 1. P. 32. DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/sym17010032>.
- [4] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Москва: Либроком, 2009. 636 с. URL: <https://djvu.online/file/VtgNwUsEoWlyW?ysclid=m60p0jwao912220652>.
- [5] Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. Москва: Гостехиздат, 1956. 422 с. URL: <https://djvu.online/file/UDisSs9cFCGHW?ysclid=m60pax8mr9205429504>.
- [6] Саченков А.В., Нехотяев В.В. Большие прогибы тонких упругих пластин // Исследования по теории пластин и оболочек. 1972. № 8. С. 42–76. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/kutpo437>.
- [7] Zhang Y. Large deflection of clamped circular plate and accuracy of its approximate analytical solutions // Science China Physics, Mechanics & Astronomy. 2016. Vol. 59. Article number 624602. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11433-015-5751-y>.
- [8] Кхоа Д.Н. Расчет гибких прямоугольных пластин по методу последовательных аппроксимаций: дис. ... канд. техн. наук. Москва: Московский государственный строительный университет, 2023. 150 с. URL: https://mgso.ru/science/Dissoveti/Zashita_dissert/dao-ngokkkhoa/Dissertatsiya_DaoNK.pdf.

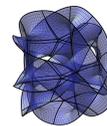
- [9] Panov D.Iu. Application of Acad. B.G. Galerkin’s method to certain nonlinear problems of the theory of elasticity // *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*. 1939. Vol. 3, issue 2.
- [10] Yamaki N. Influence of Large Amplitudes on Free Flexural Vibrations of Elastic Plates // *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1961. Vol. 41, issue 12. P. 501–510. DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/zamm.19610411204>.
- [11] Sundara Raja Iyengar K.T., Matin Naqvi M. Large deflection of rectangular plates // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1966. Vol. 1, issue 2. P. 109–122. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(66\)90024-2](https://doi.org/10.1016/0020-7462(66)90024-2).
- [12] Dai H.H., Paik J.K., Atluri S.N. The Global Nonlinear Galerkin Method for the Analysis of Elastic Large Deflections of Plates under Combined Loads: A Scalar Homotopy Method for the Direct Solution of Nonlinear Algebraic Equations // *Computers, Materials and Continua*. 2011. Vol. 23, № 1. P. 69–100. DOI: <https://doi.org/10.3970/cmc.2011.023.069>.
- [13] Dai H.H., Paik J.K., Atluri S.N. The Global Nonlinear Galerkin Method for the Solution of von Karman Nonlinear Plate Equations: An Optimal & Faster Iterative Method for the Direct Solution of Nonlinear Algebraic Equations $f(x) = 0$, using $x = \lambda[\alpha F + (1 - \alpha)bt f]$ // *Computers, Materials and Continua*. 2011. Vol. 23, № 2. P. 155–186. DOI: <http://dx.doi.org/10.3970/cmc.2011.023.155>.
- [14] Dai H., Yue X., Atluri S.N. Solutions of the von Kármán plate equations by a Galerkin method, without inverting the tangent stiffness matrix // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2014. Vol. 9, no. 2. P. 195–226. DOI: <http://dx.doi.org/10.2140/jomms.2014.9.195>.
- [15] Wang X., Liu X., Wang J., Zhou Y. A wavelet method for bending of circular plate with large deflection // *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2015. Vol. 28, issue 1. P. 83–90. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0894-9166\(15\)60018-0](https://doi.org/10.1016/S0894-9166(15)60018-0).
- [16] Zhang L., Wang J., Zhou Y.H. Wavelet solution for large deflection bending problems of thin rectangular plates // *Archive of Applied Mechanics*. 2015. Vol. 85. P. 355–365. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-014-0960-9>.
- [17] Lurie A.I. Theory of elasticity. Berlin; Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2010. 1050 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-26455-2>.
- [18] Ciarlet P.G. Mathematical Elasticity, vol. 1: Three-dimensional elasticity. Amsterdam: Elsevier, 1988. 452 p.
- [19] Ciarlet P.G. Mathematical Elasticity: Theory of Plates. Elsevier, 1997.
- [20] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Introductory real analysis. New York: Courier Corporation, 1975. 403 p. URL: <https://archive.org/details/IntroductoryRealAnalysis>.
- [21] Cantor G. Ein beitrage zur mannigfaltigkeitslehre // *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*. 1878. Vol. 1878, issue 84. P. 242–258. DOI: <https://doi.org/10.1515/crelle-1878-18788413>.
- [22] Koyalovich B.M. A study of infinite systems of linear algebraic equations // *Izv. Fiz.-Mat. Inst.* 1930. Vol. 3. P. 41–167.
- [23] Kantorovich L.V., Krylov V.I. Approximate methods of higher analysis. New York: Dover Publications, 2018.
- [24] Levy S. Bending of Rectangular Plates with Large Deflections // *NACA Technical Notes*. 1942. 19 p. URL: <https://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc59995>.

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-26-45

Solution of the Föppl–von Kármán equations for square plates

Digilov A.V. , Lychev S.A. 

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation;
digilov@ipmnet.ru (A.V.); lychevsa@mail.ru (S.A.);



Received: 10.10.2024

Revised: 20.11.2024

Accepted: 25.11.2024

Scientific article



Abstract. The present paper develops an approach to obtaining solutions of the Föppl–von Kármán equations for square plates, which are based on direct algebraisation of the boundary-value problem. The solution is obtained in term of expansion into basis of the space of square-integrable function. The system of eigenfunction of a linear self-adjointed operator is used as the basis. The expansion coefficients are defined by the reduction method from an infinite-dimensional system of cubic equations. It allows one to consider the proposed solution as non-linear generalisation of classic Galerkin method.

Key words: square plates; Föppl–von Kármán equations; Finite deformations; nonlinear equations.

Funding. The work was supported by the Russian Science Foundation (grant No. 23-19-00866).

Information about the conflict of interests: the authors declared no conflict of interest.

Citation. Digilov A.V., Lychev S.A. Solution of the Föppl–von Kármán equations for square plates. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 26–45. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-26-45. (In Russ.)

© Digilov A.V., Lychev S.A., 2024

Alexander V. Digilov (digilov@ipmnet.ru) – Junior researcher of Laboratory of Modelling in Solid Mechanics, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, bldg. 1, 101, Vernadsky Avenue, Moscow, 119526, Russian Federation.

Sergey A. Lychev (lychevsa@mail.ru) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, leading researcher of Laboratory of Mechanics of Technological Processes, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, bldg. 1, 101, Vernadsky Avenue, Moscow, 119526, Russian Federation.

References

- [1] Föppl A. Vorlesungen über technische Mechanik. Vol. 5. Leipzig: B. G. Teubner Verlag, 1907, 497 p. Available at: <https://archive.org/details/vorlesungenbert26fpgooq/mode/2up>.
- [2] Kármán T. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. Leipzig: B. G. Teubner Verlag, 1910.
- [3] Lychev S., Digilov A., Djuzhev N. Galerkin-Type Solution of the Föppl – von Kármán Equations for Square Plates. *Symmetry*, 2025, vol. 17, issue 1, p. 32. DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/sym17010032>.
- [4] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. New York; Toronto; London: McGraw-Hill, 1959, 656 p. Available at: <https://djvu.online/file/VtgNwUsEoWlyW?ysclid=m60p0jwao912220652>. (In Russ.)
- [5] Volmir A.S. Flexible plates and shells. Moscow: Gostekhizdat, 1956, 422 p. Available at: <https://djvu.online/file/UDisSs9cFCGHW?ysclid=m60pax8mr9205429504>. (In Russ.)
- [6] Nekhotyaev V.V., Sachenkov A.V. Large deflections of thin elastic plates. *Issledovaniya po Teorii Plastin i Obolochek*, 1972, no. 8, pp. 42–76. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/kutpo437>. (In Russ.)
- [7] Zhang Y. Large deflection of clamped circular plate and accuracy of its approximate analytical solutions. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 2016, vol. 59, Article number 624602. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11433-015-5751-y>.
- [8] Khoa D.N. Calculation of flexible rectangular plates using the method of successive approximation: Candidate's of Engineering Sciences thesis. Moscow: Moskovskii gosudarstvennyi stroitel'nyi universitet, 2023, 150 p. Available at: https://mgsu.ru/science/Dissoveti/Zashita_dissert/dao-ngokkhoa/Dissertatsiya_DaoNK.pdf. (In Russ.)
- [9] Panov D.Iu. Application of Acad. B.G. Galerkin's method to certain nonlinear problems of the theory of elasticity. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 1939, vol. 3, issue 2.

- [10] Yamaki N. Influence of Large Amplitudes on Free Flexural Vibrations of Elastic Plates. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1961, vol. 41, issue 12, pp. 501–510. DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/zamm.19610411204>.
- [11] Sundara Raja Iyengar K.T., Matin Naqvi M. Large deflection of rectangular plates. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1966, vol. 1, issue 2, pp. 109–122. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(66\)90024-2](https://doi.org/10.1016/0020-7462(66)90024-2).
- [12] Dai H.H., Paik J.K., Atluri S.N. The Global Nonlinear Galerkin Method for the Analysis of Elastic Large Deflections of Plates under Combined Loads: A Scalar Homotopy Method for the Direct Solution of Nonlinear Algebraic Equations. *Computers, Materials and Continua*, 2011, vol. 23, no. 1, pp. 69–100. DOI: <https://doi.org/10.3970/cmc.2011.023.069>.
- [13] Dai H.H., Paik J.K., Atluri S.N. The Global Nonlinear Galerkin Method for the Solution of von Karman Nonlinear Plate Equations: An Optimal & Faster Iterative Method for the Direct Solution of Nonlinear Algebraic Equations $f(x) = 0$, using $x = \lambda[\alpha F + (1 - \alpha)bt f]$. *Computers, Materials and Continua*, 2011, vol. 23, no. 2, pp. 155–186. DOI: <http://dx.doi.org/10.3970/cmc.2011.023.155>.
- [14] Dai H., Yue X., Atluri S.N. Solutions of the von Kármán plate equations by a Galerkin method, without inverting the tangent stiffness matrix. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2014, vol. 9, no. 2, pp. 195–226. DOI: <http://dx.doi.org/10.2140/jomms.2014.9.195>.
- [15] Wang X., Liu X., Wang J., Zhou Y. A wavelet method for bending of circular plate with large deflection. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2015, vol. 28, issue 1, pp. 83–90. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0894-9166\(15\)60018-0](https://doi.org/10.1016/S0894-9166(15)60018-0).
- [16] Zhang L., Wang J., Zhou Y.H. Wavelet solution for large deflection bending problems of thin rectangular plates. *Archive of Applied Mechanics*, 2015, vol. 85, pp. 355–365. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-014-0960-9>.
- [17] Lurie A.I. Theory of elasticity. Berlin; Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2010, 1050 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-26455-2>.
- [18] Ciarlet P.G. Mathematical Elasticity: Three-dimensional elasticity. Elsevier, 1988.
- [19] Ciarlet P.G. Mathematical Elasticity, vol. 1: Three-dimensional elasticity. Amsterdam: Elsevier, 1988, 452 p.
- [20] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Introductory real analysis. New York: Courier Corporation, 1975, 403 p. URL: <https://archive.org/details/IntroductoryRealAnalysis>.
- [21] Cantor G. Ein beitrage zur mannigfaltigkeitslehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1878, vol. 1878, issue 84, pp. 242–258. DOI: <https://doi.org/10.1515/crelle-1878-18788413>.
- [22] Koyalovich B.M. A study of infinite systems of linear algebraic equations. *Izv. Fiz.-Mat. Inst.*, 1930, vol. 3, pp. 41–167.
- [23] Kantorovich L.V., Krylov V.I. Approximate methods of higher analysis. New York: Dover Publications, 2018.
- [24] Levy S. Bending of Rectangular Plates with Large Deflections // NACA Technical Notes, 1942. 19 p. URL: <https://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc59995>.

Приложение

Ниже приведены выражения для вспомогательных интегралов, используемых в статье (здесь k – целое число, а ρ, ν, ζ – корни трансцендентного уравнения $\tan(\cdot) + \tanh(\cdot) = 0$):

$$I_0(\rho) = \int_{-1}^1 (\cos(\rho v) \cosh(\rho) - \cos(\rho) \cosh(\rho v)) dv = \frac{4 \sin(\rho) \cosh(\rho)}{\rho}$$

$$I_1(\rho, \nu) = \cos(\rho) \cos(\nu) \int_{-1}^1 \cosh(\rho v) \cosh(\nu v) dv = \begin{cases} \frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) (\rho \sin(\rho) \cos(\nu) - \nu \sin(\nu) \cos(\rho))}{\nu^2 - \rho^2} & \rho \neq \nu \\ \frac{\rho \cos^2(\rho) - \sin(\rho) \cos(\rho) \cosh^2(\rho)}{\rho} & \rho = \nu \end{cases}$$

$$I_2(\rho, \nu) = \cos(\rho) \cosh(\nu) \int_{-1}^1 \cosh(\rho v) \cos(\nu v) dv = \frac{2 \cos(\rho) \cosh(\nu) (\rho \sinh(\rho) \cos(\nu) + \nu \sin(\nu) \cosh(\rho))}{\nu^2 + \rho^2}$$

$$I_3(\rho, \nu) = \cosh(\rho) \cosh(\nu) \int_{-1}^1 \cos(\rho v) \cos(\nu v) dv = \begin{cases} -\frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) (\rho \sin(\rho) \cos(\nu) - \nu \sin(\nu) \cos(\rho))}{\nu^2 - \rho^2} & \rho \neq \nu \\ \frac{\rho \cosh^2(\rho) + \sin(\rho) \cos(\rho) \cosh^2(\rho)}{\rho} & \rho = \nu \end{cases}$$

$$I_4(\rho, k) = \cosh(\rho) \int_{-1}^1 \cos(\rho v) \cos(\pi k v) dv = \frac{2(-1)^k \rho \sin(\rho) \cosh(\rho)}{\rho^2 - \pi^2 k^2}$$

$$I_5(\rho, k) = \cos(\rho) \int_{-1}^1 \cosh(\rho v) \cos(\pi k v) dv = -\frac{2(-1)^k \rho \sin(\rho) \cosh(\rho)}{\rho^2 + \pi^2 k^2}$$

$$I_6(\rho, \nu) = \cos(\rho) \cos(\nu) \int_{-1}^1 \sinh(\rho v) \sinh(\nu v) dv = \begin{cases} \frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) (\rho \cos(\rho) \sin(\nu) - \nu \cos(\nu) \sin(\rho))}{\nu^2 - \rho^2} & \rho \neq \nu \\ -\frac{\rho \cos^2(\rho) + \sin(\rho) \cos(\rho) \cosh^2(\rho)}{\rho} & \rho = \nu \end{cases}$$

$$I_7(\rho, \nu) = \cos(\rho) \cosh(\nu) \int_{-1}^1 \sinh(\rho v) \sin(\nu v) dv = \frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) (\rho \cos(\rho) \sin(\nu) + \nu \cos(\nu) \sin(\rho))}{\nu^2 + \rho^2}$$

$$I_8(\rho, \nu) = \cosh(\rho) \cosh(\nu) \int_{-1}^1 \sin(\rho v) \sin(\nu v) dv = \begin{cases} \frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) (\rho \cos(\rho) \sin(\nu) - \nu \cos(\nu) \sin(\rho))}{\nu^2 - \rho^2} & \rho \neq \nu \\ \frac{\rho \cosh^2(\rho) - \sin(\rho) \cos(\rho) \cosh^2(\rho)}{\rho} & \rho = \nu \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 I_9(\rho, \nu, \xi) &= \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi) \int_{-1}^1 \cos(\rho v) \cos(\nu v) \cos(\xi v) dv = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\rho - \nu - \xi)}{\rho - \nu - \xi} + \frac{\sin(\rho + \nu - \xi)}{\rho + \nu - \xi} + \frac{\sin(\rho - \nu + \xi)}{\rho - \nu + \xi} + \frac{\sin(\rho + \nu + \xi)}{\rho + \nu + \xi} \right] \times \\
 &\quad \times \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{10}(\rho, \nu, \xi) &= \cos(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi) \int_{-1}^1 \cosh(\rho v) \cos(\nu v) \cos(\xi v) dv = \\
 &= -\frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi)}{(\rho^2 + (\nu - \xi)^2)(\rho^2 + (\nu + \xi)^2)} \times \\
 &\quad \times \left[2\rho\nu\xi \sin(\rho) \sin(\nu) \sin(\xi) + \rho \sin(\rho) \cos(\nu) \cos(\xi) (\rho^2 + \nu^2 + \xi^2) - \right. \\
 &\quad \left. - \nu \cos(\rho) \sin(\nu) \cos(\xi) (\rho^2 + \nu^2 - \xi^2) - \xi \cos(\rho) \cos(\nu) \sin(\xi) (\rho^2 - \nu^2 + \xi^2) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{11}(\rho, \nu, \xi) &= \cos(\rho) \cos(\nu) \cosh(\xi) \int_{-1}^1 \cosh(\rho v) \cosh(\nu v) \cos(\xi v) dv = \\
 &= -\frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi)}{(\rho^2 - \nu^2)^2 + \xi^2(2\rho^2 + 2\nu^2 + \xi^2)} \times \\
 &\quad \times \left[2\rho\nu\xi \sin(\rho) \sin(\nu) \sin(\xi) + \rho \sin(\rho) \cos(\nu) \cos(\xi) (\rho^2 - \nu^2 + \xi^2) + \right. \\
 &\quad \left. + \nu \cos(\rho) \sin(\nu) \cos(\xi) (-\rho^2 + \nu^2 + \xi^2) - \xi \cos(\rho) \cos(\nu) \sin(\xi) (\rho^2 + \nu^2 + \xi^2) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{12}(\rho, \nu, \xi) &= \cos(\rho) \cos(\nu) \cos(\xi) \int_{-1}^1 \cosh(\rho v) \cosh(\nu v) \cosh(\xi v) dv = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sinh(\rho - \nu - \xi)}{\rho - \nu - \xi} + \frac{\sinh(\rho + \nu - \xi)}{\rho + \nu - \xi} + \frac{\sinh(\rho - \nu + \xi)}{\rho - \nu + \xi} + \frac{\sinh(\rho + \nu + \xi)}{\rho + \nu + \xi} \right] \times \\
 &\quad \times \cos(\rho) \cos(\nu) \cos(\xi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{13}(\rho, \nu, \xi) &= \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi) \int_{-1}^1 \cos(\rho v) \sin(\nu v) \sin(\xi v) dv = \\
 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\sin(\rho - \nu - \xi)}{\rho - \nu - \xi} + \frac{\sin(\rho + \nu - \xi)}{\rho + \nu - \xi} + \frac{\sin(\rho - \nu + \xi)}{\rho - \nu + \xi} - \frac{\sin(\rho + \nu + \xi)}{\rho + \nu + \xi} \right] \times \\
 &\quad \times \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{14}(\rho, \nu, \xi) &= \cos(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi) \int_{-1}^1 \cosh(\rho v) \sin(\nu v) \sin(\xi v) dv = \\
 &= -\frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi)}{(\rho^2 + (\nu - \xi)^2)(\rho^2 + (\nu + \xi)^2)} \times \\
 &\quad \times \left[2\rho\nu\xi \sin(\rho) \cos(\nu) \cos(\xi) + \rho \sin(\rho) \sin(\nu) \sin(\xi) (\rho^2 + \nu^2 + \xi^2) + \right. \\
 &\quad \left. + \nu \cos(\rho) \cos(\nu) \sin(\xi) (\rho^2 + \nu^2 - \xi^2) + \xi \cos(\rho) \sin(\nu) \cos(\xi) (\rho^2 - \nu^2 + \xi^2) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{15}(\rho, \nu, \xi) &= \cosh(\rho) \cos(\nu) \cosh(\xi) \int_{-1}^1 \cos(\rho v) \sinh(\nu v) \sin(\xi v) dv = \\
 &= -\frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi)}{(\rho^2 + \nu^2)^2 + \xi^2(-2\rho^2 + 2\nu^2 + \xi^2)} \times
 \end{aligned}$$

$$\times \left[2\rho\nu\zeta \sin(\rho) \cos(\nu) \cos(\zeta) + \rho \sin(\rho) \sin(\nu) \sin(\zeta) (\rho^2 + \nu^2 - \zeta^2) - \right. \\ \left. - \nu \cos(\rho) \cos(\nu) \sin(\zeta) (\rho^2 + \nu^2 + \zeta^2) - \zeta \cos(\rho) \sin(\nu) \cos(\zeta) (-\rho^2 + \nu^2 + \zeta^2) \right]$$

$$I_{16}(\rho, \nu, \zeta) = \cos(\rho) \cos(\nu) \cosh(\zeta) \int_{-1}^1 \cosh(\rho\nu) \sinh(\nu\nu) \sin(\zeta\nu) d\nu = \\ = -\frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\zeta)}{(\rho^2 - \nu^2)^2 + \zeta^2 (2\rho^2 + 2\nu^2 + \zeta^2)} \times \\ \times \left[2\rho\nu\zeta \sin(\rho) \cos(\nu) \cos(\zeta) - \rho \sin(\rho) \sin(\nu) \sin(\zeta) (\rho^2 - \nu^2 + \zeta^2) - \right. \\ \left. - \nu \cos(\rho) \cos(\nu) \sin(\zeta) (-\rho^2 + \nu^2 + \zeta^2) - \zeta \cos(\rho) \sin(\nu) \cos(\zeta) (\rho^2 + \nu^2 + \zeta^2) \right]$$

$$I_{17}(\rho, \nu, \zeta) = \cosh(\rho) \cos(\nu) \cos(\zeta) \int_{-1}^1 \cos(\rho\nu) \sinh(\nu\nu) \sinh(\zeta\nu) d\nu = \\ = -\frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\zeta)}{(\rho^2 + (\nu - \zeta)^2) (\rho^2 + (\nu + \zeta)^2)} \times \\ \times \left[2\rho\nu\zeta \sin(\rho) \cos(\nu) \cos(\zeta) - \rho \sin(\rho) \sin(\nu) \sin(\zeta) (\rho^2 + \nu^2 + \zeta^2) + \right. \\ \left. + \nu \cos(\rho) \cos(\nu) \sin(\zeta) (\rho^2 + \nu^2 - \zeta^2) + \zeta \cos(\rho) \sin(\nu) \cos(\zeta) (\rho^2 - \nu^2 + \zeta^2) \right]$$

$$I_{18}(\rho, \nu, \zeta) = \cos(\rho) \cos(\nu) \cos(\zeta) \int_{-1}^1 \cosh(\rho\nu) \sinh(\nu\nu) \sinh(\zeta\nu) d\nu = \\ = \frac{1}{2} \left[\frac{\sinh(\rho - \nu - \zeta)}{\rho - \nu - \zeta} - \frac{\sinh(\rho + \nu - \zeta)}{\rho + \nu - \zeta} - \frac{\sinh(\rho - \nu + \zeta)}{\rho - \nu + \zeta} + \frac{\sinh(\rho + \nu + \zeta)}{\rho + \nu + \zeta} \right] \times \\ \times \cos(\rho) \cos(\nu) \cos(\zeta)$$

$$I_G(\rho, \nu) = I_3(\rho, \nu) - I_2(\rho, \nu) + I_2(\nu, \rho) - I_1(\rho, \nu)$$

$$I_U(\rho, \nu) = I_6(\rho, \nu) + I_7(\rho, \nu) + I_7(\nu, \rho) + I_8(\rho, \nu)$$

$$I_{M1}(\rho, \nu, \zeta) = I_9(\rho, \nu, \zeta) - I_{10}(\rho, \nu, \zeta) + I_{10}(\nu, \rho, \zeta) - I_{10}(\zeta, \rho, \nu) - \\ - I_{11}(\rho, \nu, \zeta) + I_{11}(\rho, \zeta, \nu) - I_{11}(\nu, \zeta, \rho) + I_{12}(\rho, \nu, \zeta)$$

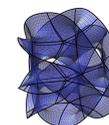
$$I_{M2}(\rho, \nu, \zeta) = -I_{13}(\rho, \nu, \zeta) + I_{14}(\rho, \nu, \zeta) - I_{15}(\rho, \nu, \zeta) - I_{15}(\rho, \zeta, \nu) + \\ + I_{16}(\rho, \nu, \zeta) + I_{16}(\rho, \zeta, \nu) - I_{17}(\rho, \nu, \zeta) + I_{18}(\rho, \nu, \zeta)$$

$$I_{M3}(\rho, \nu, \zeta) = I_9(\rho, \nu, \zeta) - I_{10}(\rho, \nu, \zeta) - I_{10}(\nu, \rho, \zeta) + I_{11}(\rho, \nu, \zeta)$$

$$I_{M4}(\rho, \nu, \zeta) = I_9(\rho, \nu, \zeta) - I_{10}(\rho, \nu, \zeta) + I_{10}(\nu, \rho, \zeta) - I_{11}(\rho, \nu, \zeta)$$

$$I_{M5}(\rho, \nu, \zeta) = I_{13}(\rho, \nu, \zeta) - I_{14}(\rho, \nu, \zeta) + I_{15}(\rho, \nu, \zeta) - I_{16}(\rho, \nu, \zeta)$$

$$I_M(\rho_1, \nu_1, \zeta_1, \rho_2, \nu_2, \zeta_2) = \nu_1^2 \nu_2^2 I_{M1}(\rho_1, \nu_1, \zeta_1) I_{M1}(\rho_2, \nu_2, \zeta_2) - \\ - 2\nu_1 \nu_2 \zeta_1 \zeta_2 I_{M2}(\rho_1, \nu_1, \zeta_1) I_{M2}(\rho_2, \nu_2, \zeta_2) + \\ + \zeta_1^2 \zeta_2^2 I_{M1}(\rho_1, \zeta_1, \nu_1) I_{M1}(\rho_2, \zeta_2, \nu_2)$$



К вопросу разработки глушителей шума реактивной струи

Калабухов В.Н. 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация; kalabyhov@mail.ru;

Поступила: 06.09.2024

Рассмотрена: 24.10.2024

Принята: 25.11.2024

Научная статья



Аннотация. В настоящей работе анализируются результаты исследований акустических характеристик дозвуковых реактивных струй при воздействии на них высокочастотного шума. В качестве основного устройства, генерирующего высокочастотный звук, рассматривалась система, состоящая из периферийных сопел, расположенных вокруг основного (базового) сопла. Выявлено, что звуковое облучение оказывает существенное влияние на аэродинамические и акустические характеристики дозвуковых турбулентных струй.

Ключевые слова: шум; дозвуковая турбулентная струя; когерентные структуры; звуковое облучение; акустический глушитель.

Введение

Работы, проводимые двигателестроительными фирмами и научно-исследовательскими центрами, привели к созданию целого ряда эффективных газотурбинных установок (ГТУ). Данный факт обусловил широкое применение ГТУ в энергетике, морском и наземном транспорте. Например, в «Белой книге» [1] холдинга «РЖД» с целью увеличения эффективности предусмотрено сокращение удельных затрат на потребляемое тепловозами топливо. Для этого предполагается замещение дизельного топлива природным газом на величину 25 % к 2030 году путем перехода на эксплуатацию газотурбовозов. В частности, на российских железных дорогах началась эксплуатация отечественного газотурбовоза ГТ1h. Установка на газотурбовозе достаточно легкой и компактной ГТУ НК-361 позволило решить проблему создания мощного автономного локомотива. Мощность газотурбовоза ГТ1h более чем в три раза выше, чем у стандартных тепловозов. Однако использование ГТУ влечет за собой рост внешнего шума.

Анализ результатов эксплуатационных испытаний газотурбовоза ГТ1h-002 с силовой установкой НК-361 [2] позволил определить минимальные требования к ГТУ, позволяющие повысить эффективность использования газотурбовозов. В числе этих требований снижение уровня внешнего шума до 87 дБ [3].

Например, основным источником внешнего шума тепловозов является шум струи отработавших газов дизеля, достигающий уровня 120–140 дБ. Для снижения уровня этого шума применяют механические глушители, которые в основном рассекают поток и приводят к его резкому торможению. При этом растет противодавление в глушителе, и, как результат, двигатель теряет мощность. Однако из опыта разработки выходных устройств турбореактивных двигателей (ТРД) известно, что основная задача выходного устройства ТРД — это обеспечение пропускной способности, поддерживающей требуемую согласно термодинамическому расчету оптимальную рабочую линию совместной работы вентилятора и газогенератора для получения максимального КПД этих узлов, т. е. минимального удельного расхода топлива. Такая задача решается выбором эффективной площади сопла с учетом коэффициента расхода, равного отношению действительного расхода газа к идеальному расходу. Таким образом, для эффективного снижения шума выхлопа ГТУ требуются методы шумоглушения, не ухудшающие рабочую линию совместной работы вентилятора и газогенератора.

1. Теоретические основы исследования

Закономерности образования шума дозвуковых турбулентных струй изучены достаточно подробно теоретически и экспериментально [4–5]. Так, общепризнано наличие в турбулентных струях когерентных структур — крупномасштабных периодических вихревых образований, развивающихся и взаимодействующих друг с другом на фоне мелкомасштабной турбулентности. Когерентные структуры могут излучать шум в процессах их образования, роста, слияния и разрушения в конце начального участка. Зависимость когерентных структур от начальных условий истечения, их чувствительность к периодическим возмущениям позволяют управлять аэродинамическими и акустическими характеристиками турбулентных струй.

Весьма эффективным является метод управления турбулентностью в струйных течениях путем воздействия на их когерентные структуры [6–7]. Так, высокочастотное звуковое облучение при числе Струхала $St = \frac{fd}{v} = 2...5$ приводит к ослаблению турбулентного смешения в начальном участке, уменьшению характерного масштаба турбулентности в слое смешения и, как следствие этого, к снижению широкополосного шума струи.

Работы по исследованию влияния акустического облучения реактивной струи на процесс развития турбулентности в струе начались в ЦАГИ в конце 70-х годов прошлого века. Было показано, что звуковое облучение оказывает существенное влияние на аэродинамические и акустические характеристики дозвуковых турбулентных струй. Впоследствии эти исследования были распространены на сверхзвуковые струи [6].

В настоящей работе исследуются акустические характеристики дозвуковых реактивных струй при воздействии на них высокочастотного шума. В качестве основного устройства, генерирующего высокочастотный звук, рассматривалась система, состоящая из периферийных сопел, расположенных вокруг основного (базового) сопла. Диаметр периферийных сопел был на порядок меньше диаметра основного сопла. Скорость истечения периферийных струй равнялась скорости истечения газа из основного сопла. Если диаметр периферийных струй в 10 раз меньше диаметра основной струи $d_2 = d_1/10$, то $f_2 = 10f_1$. Следовательно, число Струхала, определенное по диаметру и скорости основной струи и частоте f_2 воздействующего на основную струю звука, будет составлять $St = \frac{f_2 d_1}{v} = 10 \frac{f_1 d_1}{v} = 2...5$, т. е. шум, генерируемый периферийными струями, воспринимается основной струей как высокочастотное возбуждение.

2. Этапы разработки устройств шумоглушения дозвуковой реактивной струи

Исследования на горячих струях устройств, реализующих акустический метод снижения шума дозвуковой реактивной струи, были осуществлены в заглушенной камере. На моделях исследовалось влияние конструктивных элементов на эффективность шумоглушения струйной системой (струйный глушитель), включающей в себя базовое сопло и периферийные сопла, расположенные по окружности вокруг базового сопла. Испытания в заглушенной камере проходили в несколько этапов. Результаты акустических испытаний сразу пересчитывались на полетные условия натурального двигателя с диаметром сопла 1,06 м.

Модельная установка первого и второго этапа исследований (см. рис.) состояла из базового сопла диаметром $D = 80$ мм и периферийных сопел (трубопроводов) диаметром d , расположенных по периметру базового сопла.

Периферийные сопла питались через коллектор. На данной установке исследовалось влияние конструктивных параметров на эффективность глушения струи. Рассматривались следующие конструктивные параметры: количество периферийных сопел n ; диаметр периферийных сопел $\bar{d} = \frac{d}{D}$; осевое $\bar{x} = \frac{x}{D}$ удаление периферийных сопел, здесь x — расстояние между плоскостями срезов основного сопла и периферийных сопел; радиальное $\bar{H} = \frac{H}{D}$ — удаление периферийных сопел, здесь H — удаление оси периферийного сопла от кромки среза основного сопла.

При испытаниях струйной системы выдерживалось постоянство термодинамических параметров. Так, температура продувочного воздуха на входе в базовое сопло поддерживалась

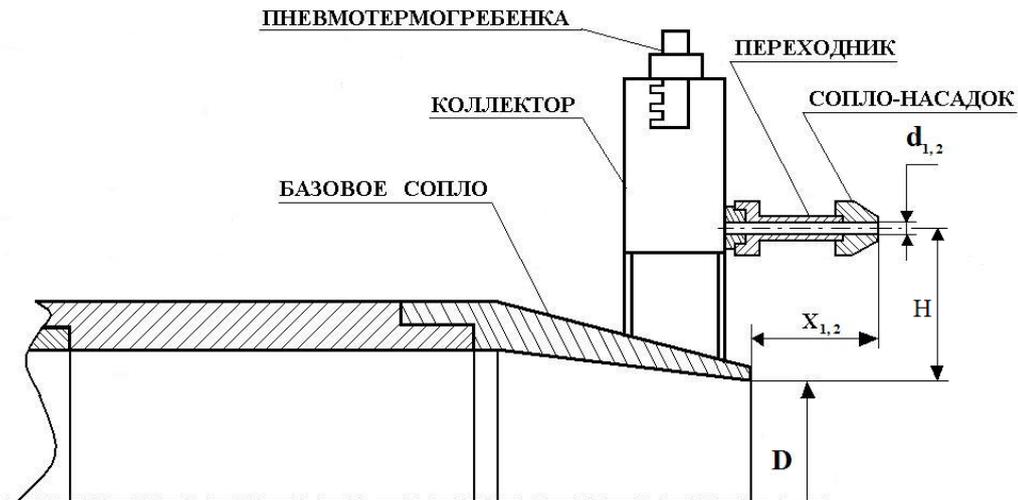


Рис.. Модельная установка
Fig.. Model installation

равной $T_c = 468 \pm 1^0 \text{ K}$. Отношение полного давления на срезе периферийных сопел к статическому давлению $\pi_k = 1,95$. Для базового сопла эта величина составляла $\pi_c = 1,9$. Результаты модельных экспериментальных исследований первого этапа пересчитывались в уровни воспринимаемого шума (EPНдБ) для контрольной точки «набор высоты».

Влияние диаметра и количества, периферийных сопел на шум струйной системы исследовалось с периферийными соплами диаметрами: $\bar{d} = 0,046$, $\bar{d} = 0,094$ и $\bar{d} = 0,119$. При испытаниях плоскости среза периферийных сопел совпадали с плоскостью среза базового сопла $\bar{x} = 0$, при этом радиальное удаление составляло $\bar{H} = 0,225$.

Варьирование количеством n для периферийных сопел диаметром $\bar{d} = 0,046$ эффекта не дало. В данном случае число Струхала, определенное по диаметру D и скорости v_1 основной струи и частоте f_2 воздействующего на основную струю звука, составляло $St = 5 \dots 10$, что выходит за рамки диапазона $St = 2 \dots 5$.

Для периферийных сопел диаметром $\bar{d} = 0,094$ эффект снижения шума увеличивался с ростом числа периферийных сопел. Число Струхала, определенное по диаметру D и скорости v_1 основной струи и частоте f_2 воздействующего на основную струю звука, в этом случае составляло $St = 2 \dots 5$. При $n = 4$ была получена эффективность 0,3 EPНдБ, при $n = 9$ эффективность составила 0,4 EPНдБ, а при $n = 12$ эффективность возросла до 1,2 EPНдБ. Для сопел $\bar{d} = 0,119$ тенденция снижения уровня шума струйной системы по сравнению с шумом базового сопла сохранилась. Глушитель в такой компоновке снижает шум реактивной струи в контрольной точке «набор высоты» на 1,5 EPНдБ.

Третий этап экспериментальных исследований, как и предыдущий этап, был связан с поиском конструктивных параметров, обеспечивающих максимальное снижение шума струи. Среди конструктивных параметров оставался один параметр, роль которого в снижении шума до конца не была установлена на первом и втором этапе. Это — осевое удаление периферийных сопел.

Испытания в заглушенной камере проходили на горячих струях ($T = 460 \dots 480^0 \text{ K}$). При этом соблюдалось равенство перепада давления в сопле и коллекторе $\pi_c = \pi_k = 2,1$. Для оценки эффективности шумоглушения в каждой серии испытаний проводились продувки базового сопла диаметром $D = 80 \text{ мм}$.

Испытания третьего этапа осуществлялись с периферийными соплами диаметром $\bar{d} = \frac{d}{D} = 0,071; 0,091; 0,121; 0,14$, что позволили получить эффективность для контрольной точки «взлет» — 2,2 EPНдБ.

Результаты испытаний моделей струйного глушителя позволили проработать ряд конструкций малошумных выходных устройств ГТД — например, глушитель шума реактивной струи [8], содержащий основное сопло диаметром D , расположенные вокруг него периферийные сопла диаметром $d = (0,07\dots 0,17) D$ и эжектор диаметром $D_{\text{э}}$ со звукопоглощающей конструкцией. Длина части эжектора, выходящая за срез многотрубчатого сопла, выполняется равной $L = \frac{D_{\text{э}} - D}{2K} + K(d + l)$, где l — расстояние от кромки основного сопла до кромки периферийного сопла; коэффициент $K = 0,12\dots 0,29$.

3. Обсуждение результатов исследования

Результаты первого этапа исследований на горячих струях показали.

1. Величина приведенной площади раскрытия периферийных сопел равна $\bar{F} \approx 12\dots 17\%$, соответствует максимальным эффективностям снижения шума струи. Причем увеличение приведенной площади раскрытия периферийных сопел в случае использования периферийных сопел диаметром, соответствующим диапазону чисел Струхалия $St = 2\dots 5$, эффективно как за счет увеличения диаметра \bar{d} периферийных сопел, так и за счет увеличения числа n периферийных сопел.

2. Верхняя граница диапазона радиального удаления периферийных сопел, соответствующего максимальным эффективностям снижения шума струи, равна $\bar{H} \approx 0,5$.

3. Максимальную эффективность показала следующая компоновка струйного глушителя: основное сопло диаметром D ; периферийные сопла диаметром $\bar{d} = 0,119$; приведенная площадь раскрытия периферийных сопел $\bar{F} \approx 17\%$ (число периферийных сопел $n = 12$); осевое удаление периферийных сопел $\bar{x} = 0$; радиальное удаление периферийных сопел $\bar{H} = 0,375\dots 0,5$. Глушитель в такой компоновке снижает шум реактивной струи в контрольной точке «набор высоты» на 1,5 ЕРНдБ.

Основные результаты исследований второго этапа.

1. Диапазон радиального удаления периферийных сопел, соответствующий максимальным эффективностям снижения шума струи, равен $\bar{H} \approx 0,05\dots 0,5$.

2. Наиболее эффективная компоновка струйного глушителя шума реактивной струи характеризуется следующими конструктивными параметрами: относительный диаметр периферийных сопел $\bar{d} \approx 0,1$; относительная площадь раскрытия периферийных сопел $\bar{F} \approx 12\%$ ($n = 12$, $\bar{d} = 0,1$) или $\bar{F} \approx 17\%$ ($n = 12$, $\bar{d} = 0,119$); относительное радиальное удаление осей периферийных сопел от кромки среза основного сопла $\bar{H} \approx 0,05\dots 0,5$; относительное осевое удаление периферийных сопел $\bar{x} = 0$.

3. Проведенные испытания показали следующие эффективности снижения шума при условии сохранения равенства тяг, площадей и компенсации гидравлических потерь.

Компоновка шумоглушителя с периферийными соплами диаметром $\bar{d} = 0,1$ ($\bar{F} = 12\%$):
— контрольная точка «взлет» — 1,5 ЕРНдБ.

Компоновка шумоглушителя с периферийными соплами диаметром $\bar{d} = 0,119$ ($\bar{F} = 17\%$):
— контрольная точка «взлет» — 2,2 ЕРНдБ;

Проведенный анализ результатов исследований третьего этапа позволил установить диапазон осевого удаления периферийных сопел, обеспечивающий максимальные эффективности шумоглушения. Этому диапазону соответствуют значения $\bar{x}_2 \approx 0,5\dots 1$.

Заключение

Исследования в области снижения авиационного шума [9] показали, что наиболее оптимальными являются комбинированные системы шумоглушения. Данный факт объясняется тем, что человеческое ухо испытывает наибольший дискомфорт от шума в диапазоне частот 1–6,3 кГц. Таким образом, системы, снижающие шум в узком диапазоне частот, являются менее эффективными по сравнению с комбинированными шумоглушителями.

Опыт разработки глушителей шума выходных устройств ГТУ показывает, что использование новых материалов и методов [10], появившихся в последние десятилетия, способно привести к существенному прогрессу в области снижения шума ГТУ.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

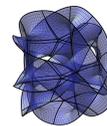
Цитирование. Калабухов В.Н. К вопросу разработки глушителей шума реактивной струи // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 4. С. 46–52. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-46-52.

© Калабухов В.Н., 2024

Вадим Николаевич Калабухов (kalabukhov@mail.ru) – кандидат технических наук, доцент кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Литература

- [1] Стратегия научно-технологического развития холдинга «РЖД» на период до 2025 года и на перспективу до 2030 года (Белая книга). Утв. распоряжением ОАО «РЖД» от 17.04 2018 г. № 769 р. Москва: ОАО «РЖД», 2018. 128 с. URL: <https://zsrd.rzd.ru/api/media/resources/c/17/121/18071?action=download>.
- [2] Бабков Ю.В., Прохор Д.И., Котяев Д.В., Грачев Н.В., Чернышев М.А. Газотурбинные двигатели как силовые установки тягового подвижного состава, работающего на сжиженном природном газе // Бюллетень результатов научных исследований. 2021. № 3. С. 55–65. DOI: <https://doi.org/10.20295/2223-9987-2021-3-55-65>. EDN: <https://www.elibrary.ru/zbcbkc>.
- [3] ГОСТ Р 50951-2006. Внешний шум магистральных и маневровых тепловозов. Нормы и методы измерений. Москва: Издательство стандартов, 2006. 15 с. URL: <https://files.stroyinf.ru/Index2/1/4293741/4293741195.htm>.
- [4] Zaman K.B.M.Q., Hussain A.K.M.F. Turbulence suppression in free shear flows by controlled excitation // Journal of Fluid Mechanics. 1981. Vol. 103. P. 133–159. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112081001274>.
- [5] Смольяков А.В. Шум турбулентных потоков: монография. Санкт-Петербург: ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова, 2005. 312 с. ISBN 5-900703-90-8. URL: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_002826010.
- [6] Гиневский А.С., Власов Е.В., Колесников А.В. Акустическое управление турбулентными струями. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 240 с. ISBN 5-9221-0161-7. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=24056721>. EDN: <https://www.elibrary.ru/uglgqz>.
- [7] Пимштейн В.Г. О скорости конвекции возмущений в турбулентных струях при аэроакустических взаимодействиях // Прикладная механика и техническая физика. 2007. Т. 48, № 5 (285). С. 21–25. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17249467>. EDN: <https://www.elibrary.ru/onmfqj>.
- [8] Калабухов В.Н. Разработка акустических глушителей шума реактивной струи // Динамика и виброакустика машин: материалы третьей международной научно-технической конференции, 29 июня – 01 июля 2016 г. Самара: Самарский университет, 2016. С. 148–149.



- [9] Халецкий Ю.Д. Эффективность комбинированных глушителей шума авиационных двигателей // Акустический журнал. 2012. Т. 58, № 4. С. 556–562. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17745813>. EDN: <https://www.elibrary.ru/oyiqar>.
- [10] Патент 203 05 25 Российская Федерация, МПК6 Е 04 В 1/84, 1/86. Способ изоляции шума / А.В. Генералов, В.Н. Калабухов. № 494874/63; заявл. 24.06.91; опубл. 10.03.95. URL: https://yandex.ru/patents/doc/RU2030525C1_19950310?ysclid=m5qq7dhz83718212287.

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-46-52

Experience in developing jet noise silencers

Kalabukhov V.N. 

Samara National Research University, Samara, Russian Federation; kalabyhov@mail.ru;

Received: 06.09.2024

Revised: 24.10.2024

Accepted: 25.11.2024

Scientific article



Abstract. In this paper, we investigate the acoustic characteristics of subsonic jet streams exposed to high-frequency noise. The main device generating high-frequency sound was a system consisting of peripheral nozzles located around the main (base) nozzle. It was shown that sound irradiation has a significant effect on the aerodynamic and acoustic characteristics of subsonic turbulent jets.

Key words: noise; subsonic turbulent jet; coherent structures; sound irradiation; acoustic silencer.

Information about the conflict of interests: the author and reviewers declared no conflicts of interest.

Citation. Kalabukhov V.N. Experience in developing jet noise silencers. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 46–52. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-46-52. (In Russ.)

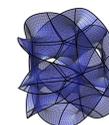
© Kalabukhov V.N., 2024

Vadim N. Kalabukhov (kalabyhov@mail.ru) – Candidate of Technical Sciences, assistant professor of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Strategy for scientific and technological development of the Russian Railways holding company for the period up to 2025 and for the future up to 2030 (White Paper). Approved by the order of the Russian Railways JSC dated 17.04.2018 No. 769 p. Moscow: OAO «RZhD», 2018, 128 p. Available at: <https://zszd.rzd.ru/api/media/resources/c/17/121/18071?action=download>. (In Russ.)
- [2] Babkov Yu.V., Prokhor D.I., Kotyayev D.V., Grachev N.V., Chernyshev M.A. Gas turbine engines used as power units for traction rolling stock fueled by liquefied natural gas. *Bulletin of Scientific Research Results*, 2021, no. 3, pp. 55–65. DOI: <https://doi.org/10.20295/2223-9987-2021-3-55-65>. EDN: <https://www.elibrary.ru/zbcbbk>. (In Russ.)
- [3] GOST R 50951-2006. External noise of mainline and shunting diesel locomotives. Standards and measurement methods. Moscow: Izdatel'stvo standartov, 2006, 15 p. Available at: <https://files.stroyinf.ru/Index2/1/4293741/4293741195.htm>. (In Russ.)
- [4] Zaman K.B.M.Q., Hussain A.K.M.F. Turbulence suppression in free shear flows by controlled excitation. *Journal of Fluid Mechanics*, 1981, vol. 103, pp. 133–159. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112081001274>.

- [5] Smolyakov A.V. Noise of turbulent flows: monograph. Saint Petersburg: TsNII im. akad. A.N. Krylova, 2005, 312 p. ISBN 5-900703-90-8. Available at: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_002826010. (In Russ.)
- [6] Ginevskii A.S., Vlasov E.V., Kolesnikov A.V. Acoustic control of turbulent jets. Moscow: FIZMATLIT, 2001, 240 p. ISBN 5-9221-0161-7. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=24056721>. EDN: <https://www.elibrary.ru/uglgqz>. (In Russ.)
- [7] Pimshtein V.G. Disturbance convection velocity in turbulent jets under aeroacoustic excitation. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2007, vol. 48, issue 5, pp. 636–640. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10808-007-0081-0>. EDN: <https://www.elibrary.ru/lktovj>. (In English; original in Russian)
- [8] Kalabukhov V.N. Development of acoustic silencers of jet stream noise. In: *Dynamics and vibroacoustics of machines: Proceedings of the third international scientific and technical conference, June 29–July 1, 2016*. Samara: Samarskii universitet, 2016, pp. 148–149. (In Russ.)
- [9] Khaletskiy Y.D. Effectiveness of combined aircraft engine noise suppressors. *Acoustical Physics*, 2012, vol. 58, issue 4, pp. 510–515. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063771012040094>. EDN: <https://www.elibrary.ru/rgajlb>. (In English; original in Russian)
- [10] Patent 203 05 25 Russian Federation, IPC6 E 04 B 1/84, 1/86. Generalov A.V., Kalabukhov V.N. Method for noise insulation. No. 494874/63; declared 24.06.91; published 10.03.95. Available at: https://yandex.ru/patents/doc/RU2030525C1_19950310?ysclid=m5qq7dhz83718212287. (In Russ.)



Нелинейные уравнения деформирования гибких пластин

Койфман¹ К.Г. , Лычев² С.А. 

¹ Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация; koifman.konstantin@gmail.com (К.Г.);

² Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлунского РАН, г. Москва, Российская Федерация; lychevsa@mail.ru (С.А.);

Поступила: 18.10.2024

Рассмотрена: 23.11.2024

Принята: 25.11.2025

Научная статья



Аннотация. В общих неортогональных координатах сформулированы нелинейные уравнения деформирования гибких пластин с учетом несовместных локальных деформаций. Использовались следующие предположения. 1. Перемещения пластины из отсчетной (самонапряженной) формы ограничены кинематическими гипотезами Кирхгофа — Лява. 2. Элементарные объемы, составляющие отсчетную форму, могут быть локально трансформированы в ненапряженное состояние посредством невырожденного линейного преобразования (гипотеза о локальной разгрузке). 3. Преобразования, обратные локальной разгрузке, — импланты — могут быть найдены из решения эволюционной задачи, моделирующей последовательное нанесение бесконечно тонких слоев на лицевую граничную поверхность пластины. Построены геометрические пространства аффинной связности, моделирующие глобальную отсчетную форму, свободную от напряжений. В качестве частных случаев рассмотрены: пространство Вайценбока (с ненулевым кручением), пространство Римана (с ненулевой кривизной) и пространство Вейля (с ненулевой неметричностью).

Ключевые слова: гиперупругость; гибкие пластины; кинематические гипотезы; нелинейные уравнения; асимптотические разложения; несовместные деформации; материальная связность.

Введение

В настоящее время микроэлектромеханические системы (МЭМС) широко используются в разнообразных электронных и оптических устройствах [1]. Особенность таких систем состоит в их пространственном масштабе, который может составлять порядка нескольких микрометров и менее [2; 3]. Деформация упругих элементов в таком масштабе существенно зависит от факторов, которые обычно не учитываются в традиционном проектировании [4]. К ним относятся: несовместные деформации, являющиеся источниками собственных (остаточных) напряжений, поверхностные эффекты, нелинейное взаимное влияние плоского и изгибного напряженных состояний, а также существенные изменения геометрической формы элементов из-за их высокой гибкости [4–7]. Для учета этих факторов необходимо выйти за рамки классической теории упругих пластин и оболочек [8; 9], рассматривая их с позиций нелинейной механики сплошных сред [10] как упругие системы с малым параметром, соответствующим их толщине.

Первые модели, учитывающие геометрическую нелинейность, были предложены Фёпplerом [11], а несколько позже фон Карманом [12]. Несмотря на то что соотношение между напряжениями и деформациями в этих моделях предполагалось линейным, а нелинейные члены, характеризующие связь между плоским напряженным состоянием и изгибом, определялись полуэмпирическим путем, их использование в инженерных расчетах показало результаты, близкие к наблюдаемым в экспериментах [13]. Это, конечно, не решает вопроса об их обосновании, который подробно обсуждается, например, в [14].

Цель настоящей работы — сделать шаг к построению полностью (геометрически и физически) нелинейной теории гибких пластин с несовместными деформациями. Для достижения

цели используются методы геометрической механики континуума [15–21], позволяющие моделировать форму, свободную от напряжений, в рамках единой области, снабженной неевклидовой геометрией. Благодаря такому подходу деформация является, как и в классической механике сплошной среды, гомеоморфизмом отсчетной формы в актуальную. Отличие заключается лишь в том, что теперь отсчетная форма служит неевклидовым пространством, в то время как актуальная форма по-прежнему остается областью физического пространства. Отметим, что геометрический подход позволяет не только учесть несовместные конечные деформации, но также и поверхностные эффекты, благодаря чему удается теоретически объяснить особенности механических свойств сверхтонких элементов МЭМС.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 1 приведен обзор основных положений геометрической теории несовместных деформаций, используемых в статье. Отсчетная форма тела с несовместными деформациями определяется в пространстве с неевклидовой связностью, благодаря чему удается сохранить привычную методологию механики сплошной среды и определять деформацию как гомеоморфизм одной формы (неевклидовой глобальной натуральной) в другую (евклидову самонапряженную). Раздел 2 посвящен определению тонкостенной конструкции произвольного вида и ее частного случая — пластины. При этом форма пластины предполагается произвольной и характеризуется произвольными же криволинейными координатами в плоскости осреднения. В соответствии с гипотезами Кирхгофа–Лява используется частичная асимптотика по толщинному параметру. В разделе 3 определяются подходящие меры напряжений и деформаций для пластины. Уравнение равновесия в отсчетном описании преобразуется в соответствии с этим выбором. Дивергентное слагаемое разбивается на два слагаемых — линейную и нелинейную (по перемещениям) части. Последний раздел 4 посвящен учету несовместных деформаций в пластине. Предложен частный вид поля локальных деформаций, и синтезирована отсчетная геометрия, соответствующая этому выбору.

1. Общие представления несовместных деформаций

1.1. Конфигурации и деформации

В соответствии с общей методологией, сплошная среда (далее — тело) формализуется в виде материального многообразия — абстрактного гладкого трехмерного многообразия [22] \mathfrak{B} , характеризующего как материальный состав тела, так и его топологические свойства. Элементы материального многообразия — суть метки частиц, формирующих тело, а топология определяет близость между ними, что позволяет в общем виде определять дифференцирование полей, заданных на \mathfrak{B} . Хотя структура материального многообразия может быть достаточно произвольной [23], в рамках классической нелинейной механики континуума рассматриваются лишь те из них, которые могут быть вложены в трехмерное евклидово пространство. Этим исключаются, в частности, такие многообразия, как твердотельная бутылка Клейна.

Как отмечалось, материальные многообразия достаточно абстрактны и, по образному выражению М. Эпштейна, населяют «Платонов мир чистых идей» [18]. Вместе с тем их качественные и количественные свойства могут быть определены лишь из наблюдения за формами в физическом пространстве \mathcal{E} . В соответствии с постулатами классической физики [24; 25], последнее предполагается наделенным аффинно-евклидовой структурой. В явном виде

$$\mathcal{E} = (E, \mathcal{V}, \text{vec}, g), \quad (1)$$

где E есть континуальное множество мест; \mathcal{V} есть трехмерное вещественное векторное пространство трансляций;

$$\begin{aligned} \text{vec} : E \times E &\rightarrow \mathcal{V}, \\ (a, b) &\mapsto \overrightarrow{ab} \end{aligned}$$

есть отображение, сопоставляющее каждой упорядоченной паре мест соответствующую трансляцию из первого места во второе. Предполагается выполнение следующих аксиом Вейля [26]:

(W₁) $\vec{ab} + \vec{bc} = \vec{ac}$ для любых $a, b, c \in E$ (соотношение Шаля),

(W₂) частное отображение

$$\begin{aligned} \text{vec}_a : E &\rightarrow \mathcal{V}, \\ x &\mapsto \vec{ax}, \end{aligned}$$

является биекцией для любой фиксированной точки $a \in E$.

Последний элемент структуры (1) есть скалярное произведение \mathbf{g} — симметричный билинейный положительно определенный функционал на \mathcal{V} . Для его действия используется альтернативное обозначение: $uv := \mathbf{g}(u, v)$.

Форма материального многообразия \mathfrak{B} определяется как образ $\mathcal{S} = \varkappa(\mathfrak{B})$ вложения $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$, которое, следуя Ноллу [27], будем называть конфигурацией. То обстоятельство, что \varkappa должно быть вложением, вытекает из аксиомы непрерывности и принципа непроницаемости [28]. Далее предполагается, что все соответствующие формы являются ограниченными связными областями \mathcal{E} , регулярными в смысле Келлога [29]. Благодаря этому появляется возможность определить интегрирование на границах форм и использовать теорему Стокса для преобразования интегралов по границе, что необходимо для формулировки уравнений баланса.

Несмотря на то что каждая конфигурация \varkappa подчинена свойству непроницаемости (двум различным частицам отвечают различные места), ее образ в общем случае не совпадает со всем множеством E . В этой связи не имеет смысла говорить об обратном отображении \varkappa^{-1} в соответствии с тем, как это принято в анализе. Однако обратные отображения являются необходимыми для построения теории, поскольку они позволяют формализовать деформации. Для исправления ситуации предлагается определить отображение

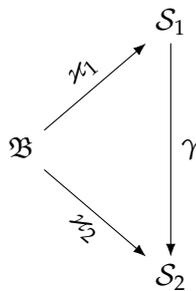
$$\begin{aligned} \hat{\varkappa} : \mathfrak{B} &\rightarrow \varkappa(\mathfrak{B}), \\ \mathfrak{x} &\mapsto \varkappa(\mathfrak{x}), \end{aligned}$$

полученное сужением области прибытия исходного отображения на образ. Построенное отображение является обратимым, что и требовалось.

Деформация тела определяется как изменение его форм. В явном виде пусть $\varkappa_1, \varkappa_2 : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$ — произвольные конфигурации материального многообразия, образами которых являются формы $\mathcal{S}_1 = \varkappa_1(\mathfrak{B})$ и $\mathcal{S}_2 = \varkappa_2(\mathfrak{B})$. Тогда деформация есть композиция

$$\gamma := \hat{\varkappa}_2 \circ \hat{\varkappa}_1^{-1} : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2.$$

Ее действие иллюстрирует следующая диаграмма:



1.2. Евклидова геометрия форм

Несмотря на кажущуюся первичность структуры (1), в действительности она может считаться производной, полученной исходя из следующих данных [30]: 1) евклидова векторного пространства \mathcal{V} , 2) некоторого места o («начала мира») и 3) всевозможных сдвигов из o на

векторы из \mathcal{V} . Наряду с этим пространство \mathcal{V} наделяет физическое пространство \mathcal{E} структурой пространства аффинной связности [31; 32]:

$$\mathcal{E}_{\text{geom}} = (E, \mathcal{T}_E, \mathcal{D}_E, \mathbf{g}_E, \nabla_E, dV_E), \quad (2)$$

где E — подлежащее множество мест, такое же, как и в (1), а \mathcal{T}_E и \mathcal{D}_E — евклидова топология и гладкая структура на E . Поле \mathbf{g}_E есть метрический тензор [22], являющийся постоянным полем, значения которого в каждой точке многообразия — суть скалярные произведения \mathbf{g} из структуры (1). В свою очередь метрический тензор определяет евклидову связность [32] ∇_E и форму объема [22] dV_E на E , представленные последними элементами структуры (2).

Многие геометрические аспекты, связанные со структурой (2), и детальное определение составляющих ее полей могут быть найдены в работе [33]. Подчеркнем лишь, что в рамках классической нелинейной механики представление физического пространства в виде многообразия, снабженного метрикой и связностью, находится в тени структуры (1), поскольку все поля заданы на евклидовых формах, соотношения между ними опираются на «школьную» геометрию и необходимости в усложнении привычных представлений нет. Методология изменяется, когда рассматриваются тела с несовместными деформациями, что, в частности, является предметом настоящего исследования. В таком случае возникает необходимость привлекать соображения неевклидовой геометрии, что влечет целесообразность в явном указании структуры (2) и ее дальнейшей модификации.

Геометрия физического пространства индуцируется на каждую из форм. Если \mathcal{S} — некоторая форма материального многообразия \mathfrak{B} , то ее можно представить в виде структуры

$$\mathcal{S} = (S, \mathcal{T}_E|_S, \mathcal{D}_E|_S, \mathbf{g}_E|_S, \nabla_E|_S, dV_E|_S), \quad (3)$$

в которой $S \subset E$ — подлежащее множество мест, а символ вертикальной черты $|_S$ означает сужение соответствующего поля на S .

В соответствии с теоремами, доказываемыми в курсе анализа на многообразиях [22], множество S является открытым в евклидовой топологии физического пространства, а геометрия на нем совпадает с евклидовой, что может быть выражено следующими соотношениями: $\mathfrak{T} = \mathbf{0}$, $\mathfrak{K} = \mathbf{0}$ и $\mathfrak{Q} = \mathbf{0}$, где \mathfrak{T} , \mathfrak{K} , \mathfrak{Q} , соответственно, кручение, кривизна и неметричность аффинной связности $\nabla_E|_S$. Таким образом, в рамках классической нелинейной механики форма (3) является евклидовым многообразием.

В отличие от физического пространства и форм, которые снабжены евклидовыми геометриями, никакой геометрии на материальном многообразии \mathfrak{B} изначально не предполагается. Ему отвечает следующее представление:

$$\mathfrak{B} = (B, \mathcal{T}_B, \mathcal{D}_B), \quad (4)$$

где B — подлежащее множество меток частиц, \mathcal{T}_B — топология на нем, а \mathcal{D}_B — гладкая структура.

Однако возможность вложить \mathfrak{B} в трехмерное евклидово пространство \mathcal{E} накладывает ограничения на \mathfrak{B} . В частности, множество B покрывается одной картой, индуцированной с любой из форм, а касательное расслоение $T\mathfrak{B}$ является тривиальным и может быть представлено в виде прямого произведения $T\mathfrak{B} = \mathfrak{B} \times \mathbb{R}^3$.

В работах по классической механике сплошной среды материальное многообразие часто отождествляется с одной из его форм и далее рассматривается в качестве отсчетной формы. Именно последняя приобретает статус многообразия меток, но рассматриваемого в объемлющем евклидовом пространстве. С формальной точки зрения это означает выбор некоторой конфигурации $\varkappa_R : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$ и расширение структуры (4) до следующего геометрического пространства:

$$\mathfrak{B}_R = (\mathfrak{B}, \varkappa_R^* \mathbf{g}_E, \varkappa_R^* \nabla_E, \varkappa_R^* dV_E), \quad (5)$$

где символ \varkappa_R^* означает операцию обратного образа (pullback [34]), примененную к соответствующему полю [22; 32]. В явном виде

$$\begin{aligned} \varkappa_R^* \mathbf{g}_E|_{\mathfrak{X}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mathbf{g}_E|_{\varkappa_R(\mathfrak{X})}(T_{\mathfrak{X}}\varkappa_R(\mathbf{u}), T_{\mathfrak{X}}\varkappa_R(\mathbf{v})), \\ \varkappa_R^* dV_E|_{\mathfrak{X}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= dV_E|_{\varkappa_R(\mathfrak{X})}(T_{\mathfrak{X}}\varkappa_R(\mathbf{u}), T_{\mathfrak{X}}\varkappa_R(\mathbf{v}), T_{\mathfrak{X}}\varkappa_R(\mathbf{w})) \end{aligned}$$

для любой точки $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ и любых касательных векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}$ и

$$(\varkappa_R^* \nabla_E)_u \mathbf{v} = \widehat{\varkappa}_R^* \{ (\nabla_E)_{(\widehat{\varkappa}_R)_* u} (\widehat{\varkappa}_R)_* \mathbf{v} \}$$

для любых векторных полей \mathbf{u}, \mathbf{v} на \mathfrak{B} . Здесь $T\varkappa_R : T\mathfrak{B} \rightarrow T\mathcal{E}$ есть касательное отображение [34] к \varkappa_R , а $(\widehat{\varkappa}_R)_* \mathbf{u} = T\varkappa_R \circ \mathbf{u} \circ \widehat{\varkappa}_R^{-1}$ есть прямой образ (pushforward [34]) векторного поля \mathbf{u} .

Поскольку поле $(\varkappa_R^* \nabla_E)_u \mathbf{v}$ определено достаточно сложно, дадим необходимые пояснения. Каждое из векторных полей \mathbf{u}, \mathbf{v} является отображением вида $\mathfrak{B} \rightarrow T\mathfrak{B}$, в то время как операция ∇_E действует на отображения $\mathcal{E} \rightarrow T\mathcal{E}$. Поэтому в первую очередь поля \mathbf{u}, \mathbf{v} переносятся на \mathcal{E} с сохранением их свойств. Это осуществляется при помощи прямого образа $(\widehat{\varkappa}_R)_*$. На новые поля уже можно подействовать евклидовой связностью, что приводит к полю $(\nabla_E)_{(\widehat{\varkappa}_R)_* u} (\widehat{\varkappa}_R)_* \mathbf{v}$. Но это — векторное поле на \mathcal{E} , поэтому далее оно отображается на \mathfrak{B} при помощи операции обратного образа $\widehat{\varkappa}_R^*$.

Структура (5) является евклидовым многообразием, а форма $\mathcal{S}_R = \varkappa_R(\mathfrak{B})$ — его гомеоморфной копией. Оба пространства \mathfrak{B}_R и \mathcal{S}_R совершенно неотличимы друг от друга, и поэтому в рамках классических рассуждений их отождествляют, полагая \mathcal{S}_R материальным многообразием и называя его отсчетной формой. Все рассуждения проводятся относительно \mathcal{S}_R . В настоящей работе мы также опираемся на отсчетную форму. Вместе с тем понятие материального многообразия не отбрасывается, а лишь остается в тени. При рассмотрении несовместных деформаций оно возвращается на арену, будучи снабженным неевклидовой геометрией. С такой геометрией материальное многообразие становится отсчетной формой, а конфигурации приобретают статус обобщенных деформаций. Подробно эти аспекты изложены в работе [35].

1.3. Локальные деформации

В настоящем исследовании рассматриваются лишь гиперупругие тела, материал которых прост [10]. В этой связи движение, вызванное действием внешних полей на тело и отсчитываемое от формы \mathcal{S}_R , реализуется в рамках принципа стационарности действия: $\delta \mathcal{A} = 0$, где \mathcal{A} — действие, определенное соотношением

$$\mathcal{A}[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{S}_R} \mathcal{L}(X, t, \gamma(X, t), \dot{\gamma}(X, t), D\gamma(X, t)) dV_R dt. \tag{6}$$

В нем $X \in \mathcal{S}_R$, $t \in \mathbb{R}$, а $\gamma : \mathcal{S}_R \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$ есть гладкое отображение, удовлетворяющее условию: для любого значения момента времени t частичное отображение $\gamma_t := \gamma(\cdot, t) : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}_t$ есть деформация отсчетной формы \mathcal{S}_R в некоторую форму \mathcal{S}_t . Символ $\dot{\gamma} := \frac{\partial \gamma}{\partial t}$ обозначает поле скорости в отсчетном описании, а $D\gamma := \frac{\partial \gamma}{\partial X}$ при каждом фиксированном t есть градиент по пространственным переменным. Они характеризуют наилучшее линейное приближение отображения γ :

$$\gamma(X + \mathbf{h}, t + \tau) = \gamma(X, t) + D\gamma(X, t)[\mathbf{h}] + \dot{\gamma}(X, t)\tau + \mathbf{o}(\|(\mathbf{h}, \tau)\|).$$

Следуя обозначениям, принятым в механике сплошной среды, для градиента $D\gamma$ будем использовать символ \mathbf{F} , т. е. $\mathbf{F} = D\gamma$.

В формуле (6) \mathcal{L} есть плотность действия. Будем полагать, что она определяется равенством (в котором зависимость полей от переменных X, t опущена ради экономии места)

$$\mathcal{L}(X, t, \gamma, \dot{\gamma}, \mathbf{F}) = \frac{1}{2} \rho_R(X) \dot{\gamma}^2 - W(X, \mathbf{F}) - \Phi(\gamma, t),$$

где ρ_R — массовая плотность в отсчетном описании, W — плотность упругой энергии, а Φ есть потенциал внешних массовых сил.

Используя далее стандартную вариационную технику, теперь можно получить уравнения поля и законы сохранения [21]. Однако эти соотношения являются общими, и для их частного применения необходимо знать явную зависимость W от F .

Для дальнейшего уточним, что понимается под представительным объемом: это часть формы \mathcal{S}_R , достаточно малая, чтобы считать ее деформации однородными, и достаточно большая, чтобы выполнялась гипотеза о термодинамическом равновесии. Теперь предположим, что некоторый представительный объем — тестовый образец — извлечен из формы, предварительно разгружен и помещен в испытательную машину. Тогда из экспериментов будет получена явная зависимость $W(X_0, F)$ плотности W от градиента деформации F . В ней следует предполагать точку $X_0 \in \mathcal{S}_R$, отвечающую выбранному представительному объему, фиксированной; меняется лишь линейное отображение F . В общем случае, выбирая разные представительные объемы, придем к разным зависимостям для плотности упругой энергии, однако в настоящей работе принимается гипотеза о материальном единообразии [27]: представительные объемы состоят из одного и того же материала.

Будем полагать, что представительный объем тела обладает некоторым привилегированным состоянием, которое назовем натуральным. Состояние, свободное от напряжений, может служить примером. В общем же случае охарактеризуем его значением P_{natural} тензора Пиолы–Кирхгофа 1-го рода. Тогда классическая механика сплошной среды основана на следующей гипотезе о глобальной разгрузке: существует деформация $\gamma_0 : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}_0$ из отсчетной формы в некоторую форму \mathcal{S}_0 , удовлетворяющая условию

$$\forall X \in \mathcal{S}_R : \left. \frac{\partial W(X, F)}{\partial F} \right|_{F=D_Y \gamma_0|_{Y=X}} = P_{\text{natural}}. \quad (7)$$

Таким образом, представительные объемы, составляющие форму \mathcal{S}_R , могут быть согласованно переведены в натуральное состояние, что даст новую форму \mathcal{S}_0 , находящуюся целиком в натуральном состоянии.

Вместе с тем гипотеза о глобальной разгрузке справедлива далеко не всегда [36]. В частности, она неверна, когда тело имеет дефектную структуру (дислокации, дисклинации, метрические аномалии). В таком случае целесообразно принять гипотезу о локальной разгрузке [35]. Предположим, что имеется семейство $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ деформаций $\gamma^{(X)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}^{(X)}$, удовлетворяющее условию

$$\forall X \in \mathcal{S}_R : \left. \frac{\partial W(X, F)}{\partial F} \right|_{F=D_Y \gamma^{(X)}|_{Y=X}} = P_{\text{natural}}. \quad (8)$$

В отличие от (7), производные $\frac{\partial W(X, F)}{\partial F}$ теперь вычисляются для градиентов от различных элементов семейства деформаций, а не от одной деформации. Это отражает то обстоятельство, что в общем случае представительные объемы, составляющие форму \mathcal{S}_R , не могут согласованно перейти в натуральное состояние и образовать некоторую глобальную форму \mathcal{S}_0 .

Следуя подходу, принятому в континуальной теории дефектов [37], для каждой точки $X \in \mathcal{S}_R$ определим тензор

$$H_X := D_Y \gamma^{(X)}|_{Y=X}. \quad (9)$$

Тогда свойство (8) принимает вид

$$\forall X \in \mathcal{S}_R : \left. \frac{\partial W(X, F)}{\partial F} \right|_{F=H_X} = P_{\text{natural}}. \quad (10)$$

В этой связи тензор H_X характеризует деформацию представительного объема, окружающего точку X , в натуральное состояние. По этой причине будем называть H_X локальной деформацией. Поскольку распределение дефектов предполагается непрерывным, то будем полагать, что поле

$$H : X \mapsto H_X$$

является гладким. Заметим, что это поле получено по некоторому семейству деформаций $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$. Но можно поступить и иначе, как это принято в теории дефектов: сразу определить поле \mathbf{H} , значения которого удовлетворяют (10). С формальной точки зрения оба подхода эквивалентны, поскольку соответствующее семейство $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ можно восстановить. Однако для дальнейших построений подход, связанный с семейством деформаций, представляется нам более предпочтительным.

1.4. Неевклидова отсчетная форма

В терминах поля локальных деформаций \mathbf{H} можно аналитически выразить свойство отсутствия глобальной натуральной формы. Действительно, локальные деформации совместны, если существует глобальная деформация $\gamma_0 : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}_0$, такая, что $D\gamma_0 = \mathbf{H}$. Здесь \mathcal{S}_0 и есть глобально натуральная форма. В противном случае локальные деформации несовместны. В дальнейшем будем считать отсчетную форму \mathcal{S}_R односвязной [38]. Тогда из теории потенциала [29] известно, что тензорное поле второго ранга является градиентом некоторого точечного отображения в том и только в том случае, когда его ротор равен нулю. В этой связи условие совместности локальных деформаций может быть записано в виде равенства $\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{0}$. Нарушение этого равенства означает, что локальные деформации несовместны. Теперь, представляя источник несовместности (в частности, плотность дефектов) в виде тензорного поля второго ранга $\boldsymbol{\eta}$, можно записать соотношение

$$\text{curl } \mathbf{H} = \boldsymbol{\eta}, \tag{11}$$

связывающее поле локальных деформаций с источником $\boldsymbol{\eta}$. Дальнейшие рассуждения должны использовать (11) как одно из уравнений системы, характеризующей напряженно-деформированное состояние тела.

Однако можно поступить иначе. Поскольку в каждой точке $X \in \mathcal{S}_R$ тензор \mathbf{H}_X является обратимым линейным преобразованием, приходим к полю

$$\mathbf{H}^{-1} : X \mapsto \mathbf{H}_X^{-1}$$

обратных локальных деформаций. Тогда соотношение (11) эквивалентно соотношению

$$\mathbf{H}^{-1} \text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{H}^{-1} \boldsymbol{\eta}.$$

Левая часть полученного соотношения есть не что иное, как свертка $\boldsymbol{\epsilon} : \mathfrak{T}$ тензора Леви-Чивита $\boldsymbol{\epsilon}$ и кручения \mathfrak{T} связности Вайценбока [27; 37; 39; 40]! Таким образом, кинематическое уравнение (11) заменяется геометрическим:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0,$$

и, следовательно, кручение приобретает статус плотности дефектов (дислокаций) [41].

Рассуждения, проведенные выше, неявно предполагали, что дефекты представлены дислокациями. Однако возможны и дисклинации и точечные дефекты [42; 43]. Общая геометрическая идея, таким образом, состоит в следующем [35]. «Сотрем» геометрию с отсчетной формы \mathcal{S}_R , представленной структурой

$$\mathcal{S}_R = (\mathcal{S}_R, \mathcal{T}_E|_{\mathcal{S}_R}, \mathcal{D}_E|_{\mathcal{S}_R}, \mathcal{g}_E|_{\mathcal{S}_R}, \nabla_E|_{\mathcal{S}_R}, dV_E|_{\mathcal{S}_R}),$$

и оставим лишь подлежащее многообразие \mathfrak{S}_R , т. е.

$$\mathfrak{S}_R = (\mathcal{S}_R, \mathcal{T}_E|_{\mathcal{S}_R}, \mathcal{D}_E|_{\mathcal{S}_R}).$$

Затем, принимая во внимание структуру дефектов, «синтезируем» подходящую геометрию на многообразии \mathfrak{S}_R , что приводит к неевклидову в общем случае пространству аффинной связности:

$$\mathbf{S}_R = (\mathfrak{S}_R, \mathbf{G}, \nabla, dV). \tag{12}$$

Здесь \mathbf{G} — риманова метрика на \mathfrak{S}_R , ∇ — аффинная связность на \mathfrak{S}_R , а dV — форма объема, порожденная метрикой \mathbf{G} .

Инварианты связности — кручение \mathfrak{T} , кривизна \mathfrak{R} и неметричность \mathfrak{Q} служат мерами несовместности локальных деформаций и, соответственно, плотностями дефектов. Пространство (12), таким образом, приобретает статус глобальной натуральной формы, наделенной неевклидовой геометрией.

В работе рассматривается лишь частный случай, когда несовместность локальных деформаций полностью характеризуется кривизной связности. Последняя является связностью Леви-Чивита, порожденной метрикой \mathbf{G} . Для синтезирования метрики используем следующее рассуждение [35]. Пусть $X \in \mathfrak{S}_R$ — произвольная точка, а $\gamma^{(X)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}^{(X)}$ — соответствующая деформация из семейства. Форма $\mathcal{S}^{(X)}$ есть структура вида (3),

$$\mathcal{S}^{(X)} = (S^{(X)}, \mathcal{T}_E|_{\mathcal{S}^{(X)}}, \mathcal{D}_E|_{\mathcal{S}^{(X)}}, \mathbf{g}_E|_{\mathcal{S}^{(X)}}, \nabla_E|_{\mathcal{S}^{(X)}}, dV_E|_{\mathcal{S}^{(X)}}),$$

в которой нас будет интересовать лишь метрика $\mathbf{g}_E|_{\mathcal{S}^{(X)}}$. Ее обратный образ обозначим через $\mathbf{G}^{(X)}$, т. е.

$$\mathbf{G}^{(X)} := (\gamma^{(X)})^* \mathbf{g}_E|_{\mathcal{S}^{(X)}}.$$

В явном виде

$$\mathbf{G}^{(X)}|_Y(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{g}_E|_{\gamma^{(X)}(Y)}(T_Y \gamma^{(X)}(\mathbf{u}), T_Y \gamma^{(X)}(\mathbf{v})),$$

где $Y \in \mathfrak{S}_R$, а $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_Y \mathfrak{S}_R$. Синтезируем теперь по семейству $\{\mathbf{G}^{(X)}\}_{X \in \mathfrak{S}_R}$ новое поле

$$\mathbf{G} : X \mapsto \mathbf{G}^{(X)}|_X,$$

т. е.

$$\mathbf{G}|_X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{g}_E|_{\gamma^{(X)}(X)}(T_X \gamma^{(X)}(\mathbf{u}), T_X \gamma^{(X)}(\mathbf{v}))$$

для $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_X \mathfrak{S}_R$. Но последнее равенство можно записать в терминах локальных деформаций и скалярного произведения (\cdot):

$$\mathbf{G}|_X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{H}_X[\mathbf{u}]\mathbf{H}_X[\mathbf{v}]. \quad (13)$$

Приходим к финальному выражению для метрики. Физический смысл определения (13) состоит в том, что в каждой точке $X \in \mathfrak{S}_R$ метрика \mathbf{G} возвращает длины и углы материальных волокон, находящихся в натуральном состоянии.

Синтезировав метрику (13), мы теперь можем синтезировать связность Леви-Чивита [44]. Ее коэффициенты в координатном репере $(\partial_A)_{A=1}^3$ представлены выражениями:

$$\Gamma^C_{AB} = \frac{G^{CD}}{2} \left(\frac{\partial G_{DB}}{\partial X^A} + \frac{\partial G_{AD}}{\partial X^B} - \frac{\partial G_{AB}}{\partial X^D} \right), \quad (14)$$

где $[G^{AB}] = [G_{AB}]^{-1}$ — матрица, обратная к матрице метрических коэффициентов $G_{AB} = \mathbf{G}(\partial_A, \partial_B)$. Таким образом, неевклидова отсчетная форма (12) полностью синтезирована. Она является римановым пространством, геометрия которого характеризуется тензором кривизны Римана \mathfrak{R} . Его компоненты в координатном репере связаны с коэффициентами связности формулой

$$\mathfrak{R}^D_{ABC} = \frac{\partial \Gamma^D_{BC}}{\partial X^A} - \frac{\partial \Gamma^D_{AC}}{\partial X^B} + \Gamma^E_{BC} \Gamma^D_{AE} - \Gamma^E_{AC} \Gamma^D_{BE}. \quad (15)$$

Тензорное поле \mathfrak{R} , в свою очередь, определяет тензор кривизны Риччи Ric , компоненты которого в координатном репере получаются при помощи свертки компонент кривизны Римана:

$$\text{Ric}_{AB} = \mathfrak{R}^C_{ACB}.$$

Являясь тензорным полем второго ранга, тензор Ric имеет в качестве одного из главных инвариантов след

$$\text{Scal} = G^{AB}\text{Ric}_{AB} \quad (16)$$

— скалярную кривизну.

Подведем итог рассуждениям. Если локальные деформации несовместны, то имеются две возможности. В рамках первой из них мы по-прежнему работаем с формами как с областями, наделенными геометрией евклидова пространства. Но тогда приходится отказаться от идеи глобальной натуральной формы, заменив ее семейством локально натуральных форм. В этой связи соотношения механики сплошной среды теряют свой привычный вид. Однако имеется и вторая возможность, когда требование к геометрии форм ослабляется. Допускается, что форма может быть многообразием неевклидовой связности, инварианты которой характеризуют несовместность деформаций. В таком случае идея глобальной натуральной формы сохраняется и деформацию тела можно по-прежнему рассматривать как отображение одной формы в другую [45]. Однако теперь первая форма является неевклидовым пространством, в то время как вторая, актуальная форма, по-прежнему наделена евклидовой геометрией объемлющего пространства.

2. Кинематика пластин

2.1. Допустимые конфигурации и формы

Следуя методологии, предложенной в разделе 1.1., уточним, что понимается под основным объектом настоящего исследования — пластиной. С интуитивной точки зрения пластина рассматривается как трехмерное тело, одно из измерений которого мало по сравнению с двумя другими. Вместе с тем попытка формализации такого представления наталкивается на следующую трудность: формы одного тела гомеоморфны, а гомеоморфизм нечувствителен к размерам. Образно говоря, если некоторая форма тела подходит под интуитивное описание пластины, то результат ее деформации может привести к форме, равнопротяженной по всем направлениям. Для того чтобы исправить ситуацию, следует ограничить класс возможных форм. Это может быть сделано следующим образом.

Назовем *допустимой* конфигурацию \mathcal{K} , если ее образ $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ является ограниченным множеством и удовлетворяет условию: для любой точки формы \mathcal{S} найдется шар с центром в этой точке, который а) полностью лежит в \mathcal{S} и б) радиус этого шара намного меньше минимального радиуса шара, описанного вокруг формы \mathcal{S} . Таким образом, отношение максимального радиуса шара, вписанного в форму, к минимальному радиусу шара, описанного вокруг формы, должно быть намного меньше 1. Далее под тонкостенной конструкцией будем подразумевать пару $(\mathfrak{B}, \mathcal{C})$, где \mathfrak{B} — материальное многообразие, а \mathcal{C} — множество всех допустимых конфигураций. Зафиксируем некоторую допустимую конфигурацию $\mathcal{K}_R \in \mathcal{C}$; ее образ $\mathcal{S}_R = \mathcal{K}_R(\mathfrak{B})$ рассматривается в качестве отсчетной формы. Тогда приходим к тонкостенной конструкции с выбранной отсчетной формой $(\mathfrak{B}, \mathcal{C}, \mathcal{K}_R)$.

Поясним теперь, что в настоящей работе понимается под пластиной. Предположим, что граница $\partial\mathcal{S}$ может быть разложена на две части:

$$\partial\mathcal{S}_R = \Pi_1 \cup \Pi_2,$$

так, что выполнены следующие условия:

1. Существует поверхность ω_R такая, что для каждой точки A на Π_2 существует шар, содержащий эту точку, с центром, лежащим на ω ;
2. Радиус этого шара r_A намного меньше радиуса r сферы, описанной вокруг всей формы \mathcal{S}_R .

В общем случае мы приходим к формализации оболочки, которая, таким образом, представляема в виде структуры $(\mathfrak{B}, \mathcal{C}, \mathcal{K}_R, \omega_R)$. Предположим дополнительно, что ω_R есть плоскость.

Тогда структура, определенная выше, есть формализация пластины. Именно этот случай и рассматривается в настоящей работе.

Будем называть ω_R плоскостью редукции, объединение частей Π_2 лицевыми поверхностями, а объединение частей Π_1 — боковыми поверхностями. Пересечение плоскости редукции и боковых поверхностей, т. е. $\Gamma = \omega_R \cap \Pi_1$, определяет контур пластины. Отметим, что плоскость редукции служит плоскостью осреднения и в общем случае может целиком или частично лежать вне формы \mathcal{S}_R (пластина с волнообразным профилем может служить примером). Деформация пластины определяется как тот из возможных гомеоморфизмов $\gamma : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}$, образ которого \mathcal{S} является допустимой формой, удовлетворяющей условиям типа 1 и 2 выше.

2.2. Координатные представления полей

Для получения координатных представлений выберем в физическом пространстве \mathcal{E} правую прямоугольную (декартову) систему координат $\{O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})\}$ так, что начало отсчета принадлежит плоскости редукции ω_R , а первые два вектора \mathbf{i}, \mathbf{j} параллельны ω_R . Это означает, что любая точка $X \in \omega_R$ может быть записана как

$$\overrightarrow{OX} = x^1 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j} \quad \text{или} \quad X = O + x^1 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j}.$$

Наряду с декартовыми используются и криволинейные координаты (ρ^1, ρ^2) , которые задаются по крайней мере на части $\omega_0 \subset \omega_R$:

$$\forall X \in \omega_0 : X = O + x^1(\rho^1, \rho^2) \mathbf{i} + x^2(\rho^1, \rho^2) \mathbf{j},$$

где $(\rho^1, \rho^2) \in D_0 \subset \mathbb{R}^2$.

Предполагается, что на D_0 справедливо неравенство

$$\det \left[\frac{\partial x^\alpha}{\partial \rho^\beta} \right] > 0,$$

означающее обратимость формул перехода от одних координат к другим.

Для простоты предположим, что контур Γ полностью лежит в ω_0 , а связные подмножества Π_2 являются поверхностями без самопересечений. Следовательно, форма \mathcal{S}_R , как область в \mathcal{E} , может быть определена в координатной форме следующим расширением карты (ρ^1, ρ^2) на окрестность ω_0 :

$$\mathcal{S}_R = \left\{ X \in \mathcal{E} : X = O + x^1(\rho^1, \rho^2) \mathbf{i} + x^2(\rho^1, \rho^2) \mathbf{j} + z \mathbf{k}, \quad (\rho^1, \rho^2, z) \in D \subset \mathbb{R}^3 \right\}. \quad (17)$$

Здесь символы $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$ обозначают декартовы координаты, связанные с выбранной системой координат в \mathcal{E} .

В области ω_0 , которая является открытым подмножеством плоскости редукции ω_R (т. е. подпространства \mathcal{E} , натянутого на (\mathbf{i}, \mathbf{j})), можно определить поле локальных (в общем случае косоугольных) базисов $(\mathbf{e}_\alpha)_{\alpha=1}^2$ как

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho^\alpha} = \frac{\partial x}{\partial \rho^\alpha} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \rho^\alpha} \mathbf{j}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (18)$$

Дальнейшие рассуждения наталкиваются на следующую трудность: явные выражения для компонент полей, записанные относительно криволинейных координат, оказываются громоздкими. Для упрощения записи будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a &= x_{,\rho}^2 + y_{,\rho}^2, & b &= x_{,\rho} x_{,\theta} + y_{,\rho} y_{,\theta}, & c &= x_{,\theta}^2 + y_{,\theta}^2, & \omega &= x_{,\rho} y_{,\theta} - y_{,\rho} x_{,\theta}, \\ d &= x_{,\rho\rho} y_{,\theta} - y_{,\rho\rho} x_{,\theta}, & e &= x_{,\rho\theta} y_{,\theta} - y_{,\rho\theta} x_{,\theta}, & f &= x_{,\theta\theta} y_{,\theta} - x_{,\theta} y_{,\theta\theta}, \\ g &= x_{,\rho} y_{,\rho\rho} - y_{,\rho} x_{,\rho\rho}, & h &= x_{,\rho} y_{,\rho\theta} - y_{,\rho} x_{,\rho\theta}, & j &= x_{,\rho} y_{,\theta\theta} - y_{,\rho} x_{,\theta\theta}. \end{aligned}$$

Здесь $\rho = \rho^1$, $\theta = \rho^2$, $\zeta = z$, а запятая означает взятие частной производной по соответствующему аргументу. В рамках новых обозначений формулы (18) принимают вид

$$\mathbf{e}_\rho = x_{,\rho}\mathbf{i} + y_{,\rho}\mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_\theta = x_{,\theta}\mathbf{i} - y_{,\theta}\mathbf{j}.$$

Поле взаимных базисов $(\mathbf{e}^\alpha)_{\alpha=1}^2$, в свою очередь, определяется из решения системы линейных неоднородных уравнений $\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_\beta^\alpha$, $\alpha, \beta = 1, 2$. В явном виде

$$\mathbf{e}^\rho = -\frac{y_{,\theta}}{\omega}\mathbf{i} + \frac{x_{,\theta}}{\omega}\mathbf{j}, \quad \mathbf{e}^\theta = \frac{y_{,\rho}}{\omega}\mathbf{i} - \frac{x_{,\rho}}{\omega}\mathbf{j}.$$

Поле базисов $(\mathbf{e}_\alpha)_{\alpha=1}^2$ и соответствующее ему поле $(\mathbf{e}^\alpha)_{\alpha=1}^2$ дуальных базисов можно расширить на все пространство \mathcal{V} , присоединив к ним третий вектор \mathbf{k} . Это приводит к полям базисов $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\zeta) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{k})$ и $(\mathbf{e}^\rho, \mathbf{e}^\theta, \mathbf{e}^\zeta) = (\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{k})$.

Исходным и расширенным полям базисов соответствуют плоские и пространственные операторы Гамильтона в ω_0 и \mathcal{S}_R . Они имеют следующие представления:

$$\begin{aligned} \nabla_\omega &:= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} = \mathbf{e}^1 \frac{\partial}{\partial \rho^1} + \mathbf{e}^2 \frac{\partial}{\partial \rho^2}, \\ \nabla &:= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{e}^1 \frac{\partial}{\partial \rho^1} + \mathbf{e}^2 \frac{\partial}{\partial \rho^2} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} = \nabla_\omega + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Отметим, что здесь и далее мы, следуя [10], определяем оператор градиента как транспонирование формального диадного произведения соответствующего оператора Гамильтона и поля \mathbf{u} , т. е.

$$\text{grad } \mathbf{u} := (\nabla \otimes \mathbf{u})^\top.$$

Для краткости обозначим $\text{grad } \mathbf{u}$ как $\nabla \mathbf{u}$ (без знака диадного произведения). Итак, $\nabla \mathbf{u} = (\nabla \otimes \mathbf{u})^\top$, и, следовательно, если $\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{e}_\alpha + w \mathbf{k}$ является векторным полем, то:

$$\begin{aligned} \nabla_\omega \mathbf{u} &= \left(\mathbf{e}^\alpha \frac{\partial}{\partial \rho^\alpha} \otimes (u^\beta \mathbf{e}_\beta + w \mathbf{k}) \right)^\top = \\ &= \left(\frac{\partial u^\beta}{\partial \rho^\alpha} + u^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta \right) \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}^\alpha + \frac{\partial w}{\partial \rho^\alpha} \mathbf{k} \otimes \mathbf{e}^\alpha, \\ \nabla \mathbf{u} &= \left(\left(\mathbf{e}^\alpha \frac{\partial}{\partial \rho^\alpha} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \otimes (u^\beta \mathbf{e}_\beta + w \mathbf{k}) \right)^\top = \\ &= \nabla_\omega \mathbf{u} + \frac{\partial u^\beta}{\partial z} \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{k} + \frac{\partial w}{\partial z} \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \end{aligned}$$

где функции

$$\Gamma_{\gamma\alpha}^\beta = \mathbf{e}^\beta \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\gamma}{\partial \rho^\alpha} = \frac{\partial \rho^\beta}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \rho^\gamma \partial \rho^\alpha} + \frac{\partial \rho^\beta}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \rho^\gamma \partial \rho^\alpha}$$

являются символами Кристоффеля, связанными с криволинейными координатами на ω_0 . В явном виде

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho\rho}^\rho &= \frac{d}{\omega}, \quad \Gamma_{\rho\rho}^\theta = \frac{g}{\omega}, \quad \Gamma_{\theta\rho}^\rho = \Gamma_{\rho\theta}^\rho = \frac{e}{\omega}, \\ \Gamma_{\theta\rho}^\theta &= \Gamma_{\rho\theta}^\theta = \frac{h}{\omega}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^\rho = \frac{f}{\omega}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^\theta = \frac{j}{\omega}. \end{aligned} \tag{19}$$

В последующих соотношениях будут использоваться компоненты метрического тензора $\mathbf{g}_0 = g_{\alpha\beta} \mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{e}^\beta = g^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta$ на плоскости редукции ω_R . В рамках обозначений, введенных выше, они представлены выражениями:

$$\begin{aligned} g_{\rho\rho} &= a, \quad g_{\rho\theta} = g_{\theta\rho} = b, \quad g_{\theta\theta} = c, \\ g^{\rho\rho} &= \frac{b}{\omega^2}, \quad g^{\rho\theta} = g^{\theta\rho} = -\frac{c}{\omega^2}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{a}{\omega^2}. \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь $[g^{\alpha\beta}] = [g_{\alpha\beta}]^{-1}$.

2.3. Деформации и кинематические гипотезы

Деформация определяется как гомеоморфизм γ , который отображает допустимую отсчетную область \mathcal{S}_R на допустимую искаженную область \mathcal{S} , т. е.

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{S}_R &\rightarrow \mathcal{S}, \\ X &\mapsto x = \gamma(X). \end{aligned}$$

При этом с отсчетной областью ассоциирована плоскость редукции ω_R , которая может лежать как целиком внутри нее, так и выходить за ее пределы, хотя бы частично. Предположим вначале, что плоскость редукции ω_R содержится внутри \mathcal{S}_R . Тогда отображение γ индуцирует деформацию γ_0 плоскости редукции ω_R как ограничение γ на ω_R :

$$\begin{aligned} \gamma_0 : \omega_0 &\rightarrow \Omega, \\ \gamma_0 &:= \gamma|_{\omega_R}. \end{aligned}$$

Здесь $\Omega := \gamma(\omega_R)$ обозначает образ плоскости редукции, который можно назвать поверхностью редукции.

Предположим теперь, что плоскость редукции ω_R , хотя бы некоторой своей частью, выходит за пределы отсчетной формы \mathcal{S}_R . Тогда примем следующее допущение: плоскость редукции находится в малой окрестности \mathcal{U}_R множества \mathcal{S}_R . В таком случае можно ожидать, что деформация γ продолжается до некоторого гомеоморфизма $\bar{\gamma} : \mathcal{U}_R \rightarrow \mathcal{U}$ этой окрестности на окрестность \mathcal{U} множества \mathcal{S} . Образ $\Omega = \bar{\gamma}(\omega_R)$ плоскости редукции и тогда определяет поверхность редукции. Соответствующую деформацию обозначим как $\bar{\gamma}_0 : \omega_R \rightarrow \Omega$.

Поскольку физическое пространство \mathcal{E} обладает аффинно-евклидовой структурой (1), можно определить векторное поле перемещений:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} : \mathcal{S}_R &\rightarrow \mathcal{V}, \\ X &\mapsto \text{vec}(X, \gamma(X)). \end{aligned} \tag{21}$$

Его градиент $\nabla \mathbf{u}$ есть линейное отображение $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, обеспечивающее наилучшее линейное приближение \mathbf{u} в окрестности каждой точки $X \in \mathcal{S}_R$:

$$\mathbf{u}(X + \mathbf{h}) = \mathbf{u}(X) + \nabla \mathbf{u}(X)[\mathbf{h}] + \mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|).$$

В поле базисов $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\zeta)$ градиент $\nabla \mathbf{u}$ представлен в виде разложения

$$\nabla \mathbf{u} = \left(u_{,\alpha}^\beta + u^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta \right) g^{\alpha\delta} \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\delta + w_{,\alpha} g^{\alpha\delta} \mathbf{k} \otimes \mathbf{e}_\delta + u_{,\zeta}^\beta \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{k} + w_{,\zeta} \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$$

по диадному базису $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k)_{i,k=1}^3$. Здесь $\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{e}_\alpha + w \mathbf{k}$. Приняв во внимание формулы (19) и (20), компоненты полученного разложения можно записать в виде матрицы

$$[\nabla \mathbf{u}] = \begin{bmatrix} \frac{c}{\omega^2} \left(\frac{du}{\omega} + \frac{ev}{\omega} + u_{,\rho} \right) - \frac{b}{\omega^2} \left(\frac{eu}{\omega} + \frac{fv}{\omega} + u_{,\theta} \right) & \frac{a}{\omega^2} \left(\frac{eu}{\omega} + \frac{fv}{\omega} + u_{,\theta} \right) - \frac{b}{\omega^2} \left(\frac{du}{\omega} + \frac{ev}{\omega} + u_{,\rho} \right) & u_\zeta \\ \frac{c}{\omega^2} \left(\frac{du}{\omega} + \frac{hv}{\omega} + v_{,\rho} \right) - \frac{b}{\omega^2} \left(\frac{hu}{\omega} + \frac{iv}{\omega} + v_{,\theta} \right) & \frac{a}{\omega^2} \left(\frac{hu}{\omega} + \frac{iv}{\omega} + v_{,\theta} \right) - \frac{b}{\omega^2} \left(\frac{du}{\omega} - \frac{hv}{\omega} + v_{,\rho} \right) & v_\zeta \\ \frac{cw_{,\rho}}{\omega^2} - \frac{bw_{,\theta}}{\omega^2} & \frac{aw_{,\theta}}{\omega^2} - \frac{bw_{,\rho}}{\omega^2} & w_\zeta \end{bmatrix},$$

в которой используются обозначения $u = u^1$, $v = u^2$.

Деформации плоскости редукции отвечает векторное поле перемещений $\mathbf{u}_0 : \omega \rightarrow \mathcal{V}$, которое определяется, соответственно, как

$$\mathbf{u}_0(X) := \text{vec}(X, \gamma_0(X)) \quad \text{или} \quad \mathbf{u}_0(X) := \text{vec}(X, \bar{\gamma}_0(X)).$$

Кроме того, используя координатное представление (17) отсчетной формы, мы можем построить разложение поля перемещений (21) по малому параметру z , связанному с толщиной¹:

$$\mathbf{u}(\rho^1, \rho^2, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{u}_n(\rho^1, \rho^2),$$

где коэффициенты могут быть, при известных аналитических предположениях, определены как производные \mathbf{u} :

$$\mathbf{u}_n(\rho^1, \rho^2) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \mathbf{u}(\rho^1, \rho^2, z) \Big|_{z=0}.$$

Будем далее полагать, что нулевые термы разложения \mathbf{u}_0 совпадают со смещениями точек плоскости редукции. Таким образом, вместо трехмерной задачи относительно \mathbf{u} можно рассмотреть двумерную задачу относительно последовательности неизвестных \mathbf{u}_n , которая намного проще первой. В этом случае градиент деформации можно выразить в терминах \mathbf{u}_n :

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \nabla_{\omega} \mathbf{u}_n + \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{k} \\ &= \nabla_{\omega} \mathbf{u}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} (z \nabla_{\omega} \mathbf{u}_n + n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{k}). \end{aligned}$$

При наличии лишь конечного числа элементов мы приходим к асимптотическому представлению. Если же учесть элементы степени не выше единицы, то формально:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + z \mathbf{u}_1 + \mathbf{o}(z), \quad \nabla \mathbf{u} = \nabla_{\omega} \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{k} + z (\nabla_{\omega} \mathbf{u}_1 + 2 \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{k}) + \mathbf{o}(z). \quad (22)$$

Появление \mathbf{u}_2 в выражении для градиента деформации асимптотически согласовано, но приводит к расхождению со стандартным подходом в теории оболочек. Чтобы избежать этого расхождения, мы можем либо пренебречь этим членом, либо изменить подход к деформации, рассматривая (22) как точное выражение для деформации двумерного континуума Коссера. В настоящей работе мы используем последний подход. Таким образом, в соответствии с идеями, восходящими к работам Фойгта и братьев Коссера [46; 47], будем полагать, что пластина является двумерным плоским континуумом, каждая частица которого — микроконтинуум (по терминологии Миндлина [48]) — движется подобно абсолютно твердому телу. С формальной точки зрения в таком случае пластина рассматривается как упорядоченная пара (ω_R, \mathbf{D}) , где \mathbf{D} — векторное поле на ω_R (по терминологии [49] — поле директоров), которое при деформировании пластины может лишь менять направление, но не длину. Формулы (22) теперь записываются следующим образом:

$$\mathbf{u} = \overset{\circ}{\mathbf{u}} + z \mathbf{u}_1, \quad \nabla \mathbf{u} = \nabla_{\omega} \overset{\circ}{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{k} + z \nabla_{\omega} \mathbf{u}_1,$$

без термов порядка $\mathbf{o}(z)$. Здесь $\overset{\circ}{\mathbf{u}}$ — поле смещений точек ω_R , а \mathbf{u}_1 — некоторое поле, обусловленное наличием дополнительных степеней свободы у частиц пластины.

Имея в виду записать явное выражение для поля \mathbf{u}_1 , примем во внимание, что в соответствии с теоремами Эйлера² и Шаля³ [25], движение каждой частицы пластины является композицией

¹ Отметим, что в работе используются два типа отображений. Один из них — это отображения, заданные в точках физического пространства \mathcal{E} , а другой — отображения, заданные в точках арифметического пространства \mathbb{R}^2 или \mathbb{R}^3 , где принимают значения криволинейные координаты. Поэтому если \mathbf{u} — поле смещений, рассматриваемое как отображение первого типа, а $\tilde{\mathbf{u}}$ — его аналог, рассматриваемый как функция координат, то имеет место связь $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \circ Q$, где $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{E}$ — картирующее отображение. В настоящей работе мы не делаем различия между полями $\tilde{\mathbf{u}}$ и \mathbf{u} ; оно ясно из контекста.

² «Всякое перемещение тела с одной закрепленной точкой O представляет собой вращение» (с. 104).

³ «Любое перемещение тела может быть осуществлено путем поступательного перемещения вдоль некоторого направления и вращения около этого направления» (с. 109).

перемещения точки ω_R и поворота линейных элементов, которые трансверсальны к ω_R . В этой связи мы в действительности имеем соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \overset{\circ}{\mathbf{u}} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{D} \\ &= \overset{\circ}{\mathbf{u}} + \|\mathbf{D}\| \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{D}}{\|\mathbf{D}\|} \\ &= \overset{\circ}{\mathbf{u}} + z \mathbf{u}_1, \end{aligned}$$

и поля z , \mathbf{u}_1 определяются выражениями:

$$z := \|\mathbf{D}\|, \quad \mathbf{u}_1 := \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{D}}{\|\mathbf{D}\|},$$

где \mathbf{R} — собственный ортогональный тензор ($\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I}$, $|\mathbf{R}| = 1$).

В трехмерном пространстве вращение твердого тела производится вокруг некоторой прямой, содержащейся в теле, на определенный угол⁴. В этой связи явное выражение для тензора \mathbf{R} может быть получено на основании формулы Родрига [25]:

$$\mathbf{R}\mathbf{D} = \gamma \mathbf{D} + (1 - \gamma)(\mathbf{n}\mathbf{D})\mathbf{n} + \sigma \mathbf{n} \times \mathbf{D}, \quad (23)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, направленный вдоль оси вращения, а числа γ и σ определены равенствами $\gamma = \cos \alpha$ и $\sigma = \sin \alpha$, в которых α — угол поворота.

Считая угол α малым, можно заменить формулу (23) ее линейным приближением, полагая $\gamma \approx 1$ и $\sigma \approx \alpha$:

$$\mathbf{R}\mathbf{D} \approx \mathbf{D} + \omega \mathbf{D},$$

где ω — антисимметричный тензор, определенный равенством $\omega = \alpha \mathbf{n}_\times$, в котором \mathbf{n}_\times — Гиббсов крест вектора.

Таким образом, мы приходим к представлению типа Уфлянда–Миндлина. Однако можно пойти еще дальше и предположить, следуя Кирхгофу и Ляву [50], что значения поля директоров \mathbf{D} нормальны к плоскости редукции и после деформации значения измененного поля также нормальны к поверхности осреднения. В таком случае повороты относительно плоскости редукции могут быть охарактеризованы в терминах одной скалярной функции $\overset{\circ}{w}$, и мы приходим к выражениям, представляющим кинематические гипотезы Кирхгофа–Лява:

$$\mathbf{u} = \overset{\circ}{\mathbf{u}} - \zeta \nabla \overset{\circ}{w} = \left(\overset{\circ}{u}^\alpha - \zeta g^{\alpha\beta} \overset{\circ}{w}_{,\beta} \right) \mathbf{e}_\alpha + \overset{\circ}{w} \mathbf{k},$$

или в компонентах:

$$\mathbf{u} = \left(\overset{\circ}{u} - \frac{\zeta}{\omega^2} \left(c \overset{\circ}{w}_{,\rho} - b \overset{\circ}{w}_{,\theta} \right) \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\overset{\circ}{v} - \frac{\zeta}{\omega^2} \left(a \overset{\circ}{w}_{,\theta} - b \overset{\circ}{w}_{,\rho} \right) \right) \mathbf{e}_\theta + \overset{\circ}{w} \mathbf{k}.$$

⁴ Это свойство доказывается в классических руководствах по геометрии [26] и аналитической динамике [25]. Вместе с тем для полноты изложения мы приведем здесь его краткое доказательство. Действительно, утверждение эквивалентно существованию вектора $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, являющегося неподвижной точкой отображения \mathbf{R} , т. е. $\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Для установления последнего свойства рассмотрим характеристический многочлен $f_R(\lambda) = \det(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I})$ при $\lambda = 1$. Поскольку определитель не меняется при транспонировании, то можно записать равенство $f_R(1) = \det(\mathbf{R}^T - \mathbf{I})$. С другой стороны,

$$\mathbf{R}(\mathbf{R}^T - \mathbf{I}) = \mathbf{I} - \mathbf{R} = -(\mathbf{R} - \mathbf{I}),$$

и, в терминах определителей,

$$\det(\mathbf{R}^T - \mathbf{I}) = \det[\mathbf{R}(\mathbf{R}^T - \mathbf{I})] = (-1)^3 \det(\mathbf{R} - \mathbf{I}),$$

поэтому

$$f_R(1) = \det(\mathbf{R}^T - \mathbf{I}) = -\det(\mathbf{R} - \mathbf{I}) = -f_R(1),$$

что влечет равенство $f_R(1) = 0$. Таким образом, $\lambda = 1$ есть собственное значение \mathbf{R} и ему отвечает собственный вектор, который и является искомым. Заметим, что в доказательстве использовано: 1) трехмерность пространства \mathcal{V} и 2) то, что ортогональный тензор \mathbf{R} является собственным.

В таком случае градиент перемещений $\beta := \nabla u$ может быть представлен в виде следующего диадного разложения:

$$\beta = \left[(\overset{\circ}{u}^\beta - \zeta g^{\beta\gamma} \overset{\circ}{w}_{,\gamma})_{,\alpha} + (\overset{\circ}{u}^\gamma - \zeta g^{\gamma\alpha} \overset{\circ}{w}_{,\alpha}) \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta \right] g^{\alpha\delta} e_\beta \otimes e_\delta + \overset{\circ}{w}_{,\alpha} g^{\alpha\delta} k \otimes e_\delta - g^{\beta\gamma} \overset{\circ}{w}_{,\gamma} e_\beta \otimes k. \quad (24)$$

Тензорному полю градиента перемещений β соответствует поле градиента деформации F , которое вычисляется по формуле

$$F = I + \beta. \quad (25)$$

Здесь I – единичный тензор, который в диадном разложении представляется единичной матрицей:

$$I = e_\rho \otimes e^\rho + e_\theta \otimes e^\theta + k \otimes k.$$

3. Меры напряжений и деформаций

3.1. О координатах в отсчетном описании

В классической теории пластин координатные представления полей и дифференциальных операторов рассматриваются относительно натуральной отсчетной формы \mathcal{S}_R , поскольку ее геометрия предполагается известной, а отклик имеет наиболее простой вид. Вместе с тем если в теле присутствуют непрерывно распределенные дефекты, то, как это обсуждалось в разделе 1.4., натуральная форма существует вне рамок евклидова пространства \mathcal{E} . В этой связи наблюдению и измерению доступна лишь актуальная форма \mathcal{S} , и потому только на ней можно явным образом ввести координатную сеть. Поскольку настоящая работа по-прежнему апеллирует к отсчетной методологии, следует указать способы явного определения отсчетных координат и пересчета полей из актуальных координат в отсчетные. Этому посвящен настоящий раздел.

Предположим, что выбрана некоторая форма \mathcal{S}_R , которая в общем случае самонапряжена и подвержена воздействию дополнительных внешних полей, за счет которых можно по-прежнему считать форму допустимой и выделить в ней плоскость редукции. Область \mathcal{S}_R рассматривается в качестве отправной точки для построения неевклидовой отсчетной формы; по этой причине назовем ее промежуточной формой. Стирая геометрию с пространства \mathcal{S}_R , индуцированную геометрией евклидова объемлющего пространства, приходим к многообразию \mathfrak{S}_R , которое будет носителем новой неевклидовой геометрии. Откладывая на потом реализацию процедуры синтеза геометрии, уточним способ введения координат на \mathfrak{S}_R .

Пусть \mathcal{S} – актуальная форма, непосредственно наблюдаемая в эксперименте или технологическом процессе. Хотя она по-прежнему принадлежит множеству допустимых форм, ей соответствует поверхность осреднения Ω , которая в общем случае не является плоскостью. Однако картирование этой формы осуществляется по аналогии с (17):

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathcal{E} : x = O + x^1(\tilde{\rho}^1, \tilde{\rho}^2) \mathbf{i} + x^2(\tilde{\rho}^1, \tilde{\rho}^2) \mathbf{j} + z \mathbf{k}, \quad (\tilde{\rho}^1, \tilde{\rho}^2, z) \in D \subset \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Здесь $(\tilde{\rho}^1, \tilde{\rho}^2)$ – внутренние координаты на поверхности Ω , а z – трансверсальная координата.

Предполагается, что форма \mathcal{S} столь тонка, что содержится в малой окрестности Ω [9]. Тогда деформация актуальной формы \mathcal{S} в промежуточную форму \mathcal{S}_R представлена гомеоморфизмом

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{S} &\rightarrow \mathfrak{S}_R, \\ x &\mapsto X. \end{aligned}$$

Отметим, что его область определения рассматривается как пространство аффинной связности, хотя и с тривиальной евклидовой геометрией, в то время как область прибытия есть многообразие, лишенное какой-либо геометрии. Выбор такого представления не случаен и соответствует методологии работы с самонапряженными телами; деформацию γ будем называть обратной деформацией (аллюзия к работе Шилдта [51]).

Охарактеризуем теперь способ переноса координат с формы \mathcal{S} на многообразии \mathfrak{S}_R . Пусть (\tilde{U}, \tilde{Q}) — карта на \mathcal{S} , порожденная координатами $(\tilde{\rho}^1, \tilde{\rho}^2, z)$. Здесь $\tilde{U} \subset \mathcal{S}$ — открытое множество, которое в общем случае не совпадает с формой \mathcal{S} , а

$$\begin{aligned} \tilde{Q}: \tilde{U} &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ x &\mapsto (\tilde{\rho}^1, \tilde{\rho}^2, z) \end{aligned}$$

— катрирующее отображение. Тогда пара $(\gamma(\tilde{U}), \tilde{Q} \circ \gamma^{-1}|_{\gamma(\tilde{U})})$ есть карта на \mathfrak{S}_R . Следовательно, семейство карт $\mathcal{A}_{\mathfrak{S}} = \{(\tilde{U}_i, \tilde{Q}_i)\}_{i \in I}$, покрывающее актуальную форму \mathcal{S} , переходит в семейство карт $\mathcal{A}_{\mathfrak{S}_R} = \{(\gamma(\tilde{U}_i), \tilde{Q}_i \circ \gamma^{-1}|_{\gamma(\tilde{U}_i)})\}_{i \in I}$, покрывающее \mathfrak{S}_R . Тем самым координаты на отсчетной форме введены. Карты из набора $\mathcal{A}_{\mathfrak{S}_R}$ могут быть непосредственно использованы для координатного описания деформации:

$$\tilde{\gamma} = \tilde{Q}_i \circ \gamma \circ (\tilde{Q}_i \circ \gamma^{-1})^{-1} = \text{Id} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

и мы приходим к представлению, используемому в монографии [52]. Наряду с этим карты из $\mathcal{A}_{\mathfrak{S}_R}$ могут быть использованы для тестирования других карт на принадлежность к гладкой структуре многообразия \mathfrak{S}_R . В явном виде, если (U, Q) — некоторая карта на \mathfrak{S}_R , то она допустима лишь в том случае, когда для всех $i \in I$, при которых $\tilde{U}_i \cap U \neq \emptyset$, функция замены координат

$$\tilde{Q}_i \circ Q^{-1} : Q(\tilde{U}_i \cap U) \rightarrow \tilde{Q}_i(\tilde{U}_i \cap U)$$

является диффеоморфизмом. Таким образом, хотя мы не обязаны использовать именно набор карт $\mathcal{A}_{\mathfrak{S}_R}$, другие карты могут быть с ним сопоставлены.

Поля, заданные на актуальной форме \mathcal{S} , могут быть пересчитаны на многообразии \mathfrak{S}_R посредством операции прямого образа [21; 34]. В частности, если $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ — скалярное поле на актуальной форме (например, поле температуры или плотность упругой энергии), то его образ на промежуточной форме определяется как

$$f_* := f \circ \gamma^{-1} : \mathfrak{S}_R \rightarrow \mathbb{R}. \quad (26)$$

Если $\mathbf{u} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{V}$ — векторное поле (в частности, поле перемещений или скорости), то его удобно интерпретировать как отображение $\mathbf{u} : \mathcal{S} \rightarrow T\mathcal{S}$, т. е. сечение касательного расслоения $T\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. Тогда перенос поля \mathbf{u} на \mathfrak{S}_R определяется как

$$\mathbf{u}_* := T\gamma \circ \mathbf{u} \circ \gamma^{-1} : \mathfrak{S}_R \rightarrow T\mathfrak{S}_R. \quad (27)$$

Заметим, что здесь недостаточно изменить область определения \mathbf{u} ; необходимо также подправить область прибытия, для чего используется касательное отображение $T\gamma : T\mathcal{S} \rightarrow T\mathfrak{S}_R$. Другой пример — перенос тензорного поля $\mathbf{g} : \mathcal{S} \rightarrow T\mathcal{S} \otimes T\mathcal{S}$ (например, метрического тензора) на \mathfrak{S}_R , что дает поле $\mathbf{g}_* : \mathfrak{S}_R \rightarrow T\mathfrak{S}_R \otimes T\mathfrak{S}_R$, определенное соотношением

$$\forall X \in \mathfrak{S}_R \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_X \mathfrak{S}_R : \mathbf{g}_*|_X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{g}|_{\gamma^{-1}(X)}(T_X \gamma^{-1}(\mathbf{u}), T_X \gamma^{-1}(\mathbf{v})). \quad (28)$$

Остальные примеры переноса полей, в частности полей напряжений, могут быть найдены в [21].

В формулах (26), (27) и (28) используется градиент обратной деформации γ . Поэтому, в частности, при переносе полей, определяющих геометрию на форме \mathcal{S} , мы получим геометрию на многообразии \mathfrak{S}_R , ничем не отличающуюся от евклидовой. Однако можно сделать следующий шаг и заменить градиент $T\gamma$ на поле \mathfrak{K} невырожденных линейных преобразований, не порожденное единой деформацией. Тогда придем к формулам, аналогичным тем, что написаны выше, и эти формулы также определяют перенос полей. Вместе с тем в этот перенос будет заложена дополнительная информация, связанная с несовместностью \mathfrak{K} . Поэтому при переносе евклидовой геометрии с формы \mathcal{S} на многообразии \mathfrak{S}_R мы получим новую геометрию, отличающуюся от евклидовой.

В последующих рассуждениях мы будем предполагать, что геометрия на \mathfrak{S}_R перенесена из \mathcal{S} посредством обратной деформации γ . Роль полученной геометрии исключительно вспомогательная; она нужна для того, чтобы продолжать использовать евклидовы представления дифференциальных операторов для формулировки уравнений поля. Но за это упрощение придется заплатить модификацией уравнения состояния, добавив туда в явном виде локальные деформации. Отметим, что возможен иной подход, не предполагающий вспомогательной евклидовой геометрии, а напрямую апеллирующий к неевклидовой геометрии натуральной формы. Но тогда в рамках него мы будем вынуждены использовать формализм ковекторнозначных дифференциальных форм и оператор Картана. Более подробно эти вопросы обсуждаются в статье [53].

3.2. Энергетически сопряженные пары полей

Механика сплошной среды оперирует различными тензорами напряжений, среди которых тензоры напряжений Коши \mathbf{T} , Пиолы–Кирхгофа первого рода \mathbf{P} и Пиолы–Кирхгофа второго рода \mathbf{S} . Формула преобразования элементарных площадей (формула Нансона) в отсчетном и актуальном состоянии приводит к преобразованию Пиолы [54]:

$$\mathbf{P} = J\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T},$$

связывающей напряжения Коши и Пиолы–Кирхгофа первого рода; здесь $J = \det \mathbf{F}$. Более простым является соотношение между двумя тензорами Пиолы–Кирхгофа

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}. \quad (29)$$

В настоящей работе мы используем отсчетное описание, поэтому выбор должен быть сделан в пользу одного из тензоров Пиолы–Кирхгофа. Но любому такому выбору должен отвечать некоторый выбор меры деформации, допустимой с точки зрения принципа материальной индифферентности [10]. Будем выбирать меру деформации в соответствии с энергетической сопряженностью: каждый из термов в цепочке равенств

$$\mathbf{T}:\mathbf{D} = J^{-1}\mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}} = J^{-1}\mathbf{S}:\dot{\mathbf{E}}$$

— мощности, развиваемые соответствующими тензорами напряжений, характеризует энергетически сопряженную пару [54]. Здесь \mathbf{D} — симметричная часть градиента скорости, \mathbf{F} — градиент деформации, а \mathbf{E} — тензор Грина–Сен-Венана:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}). \quad (30)$$

В настоящей работе выбор сделан в пользу пары (\mathbf{S}, \mathbf{E}) . При таком выборе: 1) мы имеем дело с симметричным тензором напряжений, преобразующим отсчетную нормаль в отсчетный вектор напряжений, и 2) удастся выбрать потенциал, приводящий к закону состояния, внешне похожему на закон Гука.

3.3. Уравнения равновесия

Уравнения равновесия в отсчетном описании могут быть записаны в следующем виде:

$$\operatorname{div}_R \mathbf{P} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (31)$$

где div_R — оператор дивергенции в отсчетных координатах, \mathbf{f} — плотность объемных сил, \mathbf{P} — тензор напряжений Пиола–Кирхгофа первого рода.

В настоящей работе дивергенция тензорного поля определяется в соответствии с [54]:

$$\forall \mathbf{a} \in \mathcal{V} : \mathbf{a} \operatorname{div}_R \mathbf{P} = \operatorname{div}_R(\mathbf{P}^T \mathbf{a}),$$

где справа — дивергенция векторного поля. Таким образом, в терминах оператора Гамильтона, $\operatorname{div}_R \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \nabla$, что влечет разложение

$$\operatorname{div}_R \mathbf{P} = \left([\mathbf{P}]_{,j}^{ij} + [\mathbf{P}]^{sj} \Gamma_{sj}^i + [\mathbf{P}]^{is} \Gamma_{sj}^j \right) \mathbf{e}_i,$$

или, если явно выделить третий элемент базиса \mathbf{k} ,

$$\operatorname{div}_R \mathbf{P} = \left([\mathbf{P}]_{,\beta}^{\alpha\beta} + [\mathbf{P}]_{,3}^{\alpha 3} + [\mathbf{P}]^{\gamma\beta} \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} + [\mathbf{P}]^{\alpha\beta} \Gamma_{\beta\gamma}^{\gamma} \right) \mathbf{e}_{\alpha} + \left([\mathbf{P}]_{,\beta}^{3\beta} + [\mathbf{P}]^{3\beta} \Gamma_{\beta\gamma}^{\gamma} + [\mathbf{P}]_{,3}^{33} \right) \mathbf{k}.$$

Принимая во внимание формулы (19), приходим к следующим выражениям для компонент дивергенции:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_R \mathbf{P} &= [\operatorname{div}_R \mathbf{P}]^{\rho} \mathbf{e}_{\rho} + [\operatorname{div}_R \mathbf{P}]^{\theta} \mathbf{e}_{\theta} + [\operatorname{div}_R \mathbf{P}]^{\zeta} \mathbf{e}_{\zeta}, \\ [\operatorname{div}_R \mathbf{P}]^{\rho} &= [\mathbf{P}]_{,\theta}^{\rho\theta} + [\mathbf{P}]_{,\zeta}^{\rho\zeta} + [\mathbf{P}]_{,\rho}^{\rho\rho} + \frac{2d+h}{\omega} [\mathbf{P}]^{\rho\rho} + \frac{2e+j}{\omega} [\mathbf{P}]^{\rho\theta} + \\ &\quad + \frac{e}{\omega} [\mathbf{P}]^{\theta\rho} + \frac{f}{\omega} [\mathbf{P}]^{\theta\theta}, \\ [\operatorname{div}_R \mathbf{P}]^{\theta} &= [\mathbf{P}]_{,\theta}^{\theta\theta} + [\mathbf{P}]_{,\zeta}^{\theta\zeta} + [\mathbf{P}]_{,\rho}^{\theta\rho} + \frac{d+2h}{\omega} [\mathbf{P}]^{\theta\rho} + \frac{e+2j}{\omega} [\mathbf{P}]^{\theta\theta} + \\ &\quad + \frac{g}{\omega} [\mathbf{P}]^{\rho\rho} + \frac{h}{\omega} [\mathbf{P}]^{\rho\theta}, \\ [\operatorname{div}_R \mathbf{P}]^{\zeta} &= [\mathbf{P}]_{,\theta}^{\zeta\theta} + [\mathbf{P}]_{,\zeta}^{\zeta\zeta} + [\mathbf{P}]_{,\rho}^{\zeta\rho} + \frac{d+h}{\omega} [\mathbf{P}]^{\zeta\rho} + \frac{e+j}{\omega} [\mathbf{P}]^{\zeta\theta}. \end{aligned}$$

С целью выделить нелинейную часть отдельным слагаемым, запишем уравнение баланса (31) в терминах тензора напряжений Пиола–Кирхгофа второго рода \mathbf{S} , который связан с полем \mathbf{P} соотношением (29). При этом уравнение (31) примет вид

$$\mathcal{L} \mathbf{S} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (32)$$

где \mathcal{L} — линейный дифференциальный оператор, действующий на поле \mathbf{S} по закону

$$\mathcal{L} \mathbf{S} = \operatorname{div}_R(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}).$$

Далее, согласно равенству (25) и линейности операции дивергенции, справедлива следующая выкладка:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \mathbf{S} &= \operatorname{div}_R((\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \mathbf{S}) \\ &= \operatorname{div}_R \mathbf{S} + \operatorname{div}_R(\nabla \mathbf{u} \mathbf{S}) \\ &= \operatorname{div}_R \mathbf{S} + \mathcal{A} \mathbf{S}, \end{aligned}$$

где полагаем

$$\mathcal{A} \mathbf{S} := \operatorname{div}_R(\nabla \mathbf{u} \mathbf{S}). \quad (33)$$

Операторы div_R и \mathcal{A} линейны относительно компонент тензора Пиола–Кирхгофа второго рода. Вместе с тем если принять во внимание, что напряжения в действительности зависят от перемещений, то, поскольку коэффициенты остатка \mathcal{A} также зависят от перемещений, оператор \mathcal{A} относительно последних оказываются нелинейным. Условно можно сказать, что (33) характеризует «геометрическую нелинейность» упругой системы. Он имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \mathbf{S} &= \left[([\mathbf{S}]_{,\beta}^{\omega\beta} + [\mathbf{S}]_{,3}^{\omega 3}) [\boldsymbol{\beta}]^{\alpha\sigma} g_{\sigma\omega} + ([\mathbf{S}]_{,\beta}^{\omega 3} + [\mathbf{S}]_{,3}^{33}) [\boldsymbol{\beta}]^{\alpha 3} + [\mathbf{S}]^{\omega\beta} (([\boldsymbol{\beta}]^{\alpha\sigma} g_{\sigma\omega})_{,\beta} + \right. \\ &\quad \left. + [\boldsymbol{\beta}]^{\gamma\sigma} g_{\sigma\omega} \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} + [\boldsymbol{\beta}]^{\alpha\sigma} g_{\sigma\omega} \Gamma_{\beta\gamma}^{\gamma}) + [\mathbf{S}]^{\omega 3} ([\boldsymbol{\beta}]_{,3}^{\alpha 3} + g_{\sigma\omega} [\boldsymbol{\beta}]_{,3}^{\alpha\sigma} + [\boldsymbol{\beta}]^{\gamma 3} \Gamma_{\gamma\omega}^{\alpha} + [\boldsymbol{\beta}]^{\alpha 3} \Gamma_{\omega\gamma}^{\gamma}) + \right. \\ &\quad \left. + [\mathbf{S}]^{33} [\boldsymbol{\beta}]_{,3}^{\alpha 3} \right) \mathbf{e}_{\alpha} + \left[[\mathbf{S}]^{\omega\beta} (([\boldsymbol{\beta}]^{3\sigma} g_{\sigma\omega})_{,\beta} + [\boldsymbol{\beta}]^{3\sigma} g_{\sigma\omega} \Gamma_{\beta\gamma}^{\gamma}) + [\mathbf{S}]^{\omega 3} g_{\sigma\omega} [\boldsymbol{\beta}]_{,3}^{3\sigma} + \right. \\ &\quad \left. + [\mathbf{S}]_{,\beta}^{\omega\beta} [\boldsymbol{\beta}]^{3\sigma} g_{\sigma\omega} + [\mathbf{S}]_{,3}^{\omega 3} g_{\sigma\omega} [\boldsymbol{\beta}]^{3\sigma} \right] \mathbf{k}. \quad (34) \end{aligned}$$

3.4. Меры деформаций

Принимая во внимание рассуждения раздела 3.2., в качестве меры деформаций пластины выберем тензор Грина – Сен-Венана (30). В силу соотношения (25) между градиентом деформации и градиентом перемещений удобно представить меру деформаций в виде разложения на линейную (относительно градиента перемещений β) и нелинейную части:

$$\mathbb{E} = \varepsilon + \epsilon,$$

где ε — тензор малых деформаций, определенный равенством

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\beta + \beta^T),$$

а ϵ — нелинейная добавка:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \beta^T \beta.$$

Выбор такой аддитивной декомпозиции тензора Грина – Сен-Венана влечет декомпозицию дивергентной части уравнения равновесия на терм, линейный по перемещениям, и нелинейный терм, что позволит сформулировать соответствующий итерационный алгоритм для решения краевой задачи.

В компонентах тензор малых деформаций имеет разложение

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[(\overset{\circ}{u}^\beta - \zeta g^{\beta\gamma} \overset{\circ}{w}_{,\gamma})_{,\alpha} g^{\alpha\delta} + (\overset{\circ}{u}^\delta - \zeta g^{\delta\gamma} \overset{\circ}{w}_{,\gamma})_{,\alpha} g^{\alpha\beta} + (\overset{\circ}{u}^\gamma - \zeta g^{\gamma\alpha} \overset{\circ}{w}_{,\alpha}) (\Gamma_{\gamma\alpha}^\beta g^{\alpha\delta} + \Gamma_{\gamma\alpha}^\delta g^{\alpha\beta}) \right] e_\beta \otimes e_\delta.$$

Далее, раскрывая определение операции транспонирования, приходим к следующей формуле для нелинейного термина:

$$\begin{aligned} \epsilon = \frac{1}{2} \left[([\beta]^{\alpha\beta} [\beta]^{\mu\eta} g_{\alpha\mu} + [\beta]^{3\beta} [\beta]^{3\eta}) e_\beta \otimes e_\eta + [\beta]^{\alpha\beta} [\beta]^{\mu 3} g_{\alpha\mu} (e_\beta \otimes k + k \otimes e_\beta) + \right. \\ \left. + [\beta]^{\alpha 3} [\beta]^{\mu 3} g_{\alpha\mu} k \otimes k \right]. \end{aligned}$$

Наконец, в силу (24) получаем

$$\begin{aligned} \epsilon = \frac{1}{2} \left\{ \left[(\overset{\circ}{u}^\alpha - \zeta g^{\alpha\gamma} \overset{\circ}{w}_{,\gamma})_{,\sigma} + (\overset{\circ}{u}^\gamma - \zeta g^{\gamma\alpha} \overset{\circ}{w}_{,\alpha}) \Gamma_{\gamma\sigma}^\alpha \right] g^{\sigma\beta} \times \right. \\ \times \left[(\overset{\circ}{u}^\mu - \zeta g^{\mu\omega} \overset{\circ}{w}_{,\omega})_{,\pi} + (\overset{\circ}{u}^\xi - \zeta g^{\xi\omega} \overset{\circ}{w}_{,\omega}) \Gamma_{\xi\pi}^\mu \right] g^{\pi\eta} g_{\alpha\mu} + \overset{\circ}{w}_{,\gamma} g^{\gamma\beta} \overset{\circ}{w}_{,\alpha} g^{\alpha\eta} \left. \right\} e_\beta \otimes e_\eta - \\ - \left[(\overset{\circ}{u}^\alpha - \zeta g^{\alpha\gamma} \overset{\circ}{w}_{,\gamma})_{,\sigma} + (\overset{\circ}{u}^\gamma - \zeta g^{\gamma\alpha} \overset{\circ}{w}_{,\alpha}) \Gamma_{\gamma\sigma}^\alpha \right] g^{\sigma\beta} \overset{\circ}{w}_{,\alpha} (e_\beta \otimes k + k \otimes e_\beta) + \\ + \overset{\circ}{w}_{,\gamma} \overset{\circ}{w}_{,\alpha} g^{\alpha\gamma} k \otimes k \left. \right\}. \quad (35) \end{aligned}$$

Полученные разложения для ε и ϵ в совокупности определяют диадное разложение для поля \mathbb{E} .

3.5. Закон состояния

В настоящей работе материал пластины предполагается простым и гиперупругим. Будем использовать потенциал Сен-Венана – Кирхгофа, определяемый выражением

$$W = \frac{\lambda}{2} (\mathbf{I} : \mathbb{E})^2 + \mu \mathbb{E} : \mathbb{E}, \quad (36)$$

в котором λ и μ — материальные константы, аналогичные константам Ламе, применяемым в линейной теории упругости для изотропного тела. Потенциалу (36) в силу формулы Дойля – Эриксона [10] соответствует закон состояния, линейно связывающий тензор деформации \mathbb{E} с вторым тензором напряжений Пиола – Кирхгофа \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \mathbb{E} + 2\mu \mathbb{E}. \quad (37)$$

Именно линейность закона состояния и служила мотивацией для выбора тензора Пиола – Кирхгофа второго рода в качестве меры напряженного состояния.

3.6. Осреднение уравнений баланса

Для получения двумерных уравнений равновесия, которые чаще всего используются при моделировании полей в пластинах и оболочках, следует произвести осреднение уравнений равновесия (32) по толщине пластины, что сводится к вычислению моментов (в математическом смысле) левых и правых частей этих уравнений по переменной ζ в пределах (h_-, h_+) . Интегрирование (32) с весом 1 приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{T}]^{\rho\theta}_{,\theta} + [\mathfrak{T}]^{\rho\zeta}_{,\zeta} + [\mathfrak{T}]^{\rho\rho}_{,\rho} + \frac{2d+h}{\omega} [\mathfrak{T}]^{\rho\rho} + \frac{2e+j}{\omega} [\mathfrak{T}]^{\rho\theta} + \frac{e}{\omega} [\mathfrak{T}]^{\theta\rho} + \frac{f}{\omega} [\mathfrak{T}]^{\theta\theta} + \\ + \mathfrak{E}^\rho + [\mathfrak{D}]^\rho = 0, \\ [\mathfrak{T}]^{\theta\theta}_{,\theta} + [\mathfrak{T}]^{\theta\zeta}_{,\zeta} + [\mathfrak{T}]^{\theta\rho}_{,\rho} + \frac{d+2h}{\omega} [\mathfrak{T}]^{\theta\rho} + \frac{e+2j}{\omega} [\mathfrak{T}]^{\theta\theta} + \frac{g}{\omega} [\mathfrak{T}]^{\rho\rho} + \frac{h}{\omega} [\mathfrak{T}]^{\rho\theta} + \\ + \mathfrak{E}^\theta + [\mathfrak{D}]^\theta = 0, \\ [\mathfrak{T}]^{\zeta\theta}_{,\theta} + [\mathfrak{T}]^{\zeta\zeta}_{,\zeta} + [\mathfrak{T}]^{\zeta\rho}_{,\rho} + \frac{d+h}{\omega} [\mathfrak{T}]^{\zeta\rho} + \frac{e+j}{\omega} [\mathfrak{T}]^{\zeta\theta} + \mathfrak{E}^\zeta + [\mathfrak{D}]^\zeta = 0, \end{aligned}$$

а интегрирование первых двух уравнений (32) с весом ζ дает

$$\begin{aligned} [\mathfrak{M}]^{\rho\theta}_{,\theta} + [\mathfrak{M}]^{\rho\zeta}_{,\zeta} + [\mathfrak{M}]^{\rho\rho}_{,\rho} + \frac{2d+h}{\omega} [\mathfrak{M}]^{\rho\rho} + \frac{2e+j}{\omega} [\mathfrak{M}]^{\rho\theta} + \frac{e}{\omega} [\mathfrak{M}]^{\theta\rho} + \frac{f}{\omega} [\mathfrak{M}]^{\theta\theta} + \\ + \mathfrak{E}^\rho + [\mathfrak{D}]^\rho = 0, \\ [\mathfrak{T}]^{\theta\theta}_{,\theta} + [\mathfrak{M}]^{\theta\zeta}_{,\zeta} + [\mathfrak{M}]^{\theta\rho}_{,\rho} + \frac{d+2h}{\omega} [\mathfrak{M}]^{\theta\rho} + \frac{e+2j}{\omega} [\mathfrak{M}]^{\theta\theta} + \frac{g}{\omega} [\mathfrak{M}]^{\rho\rho} + \frac{h}{\omega} [\mathfrak{M}]^{\rho\theta} + \\ + \mathfrak{E}^\theta + [\mathfrak{D}]^\theta = 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\mathfrak{T} = \int_{h_-}^{h_+} \mathbf{s} d\zeta, \quad \mathfrak{M} = \int_{h_-}^{h_+} \mathbf{s} \zeta d\zeta, \quad \mathfrak{D} = \int_{h_-}^{h_+} \mathbf{f} d\zeta, \quad \mathfrak{Q} = \int_{h_-}^{h_+} \mathbf{f} \zeta d\zeta,$$

а \mathfrak{E}^ρ , \mathfrak{E}^θ , \mathfrak{E}^ζ , \mathfrak{E}^θ — соответствующие интегралы от выражений, определяемых оператором \mathcal{A} (34) (характеризующим «геометрическую нелинейность») и слагаемыми, входящими в закон состояния с «физически нелинейным» термом ϵ (35).

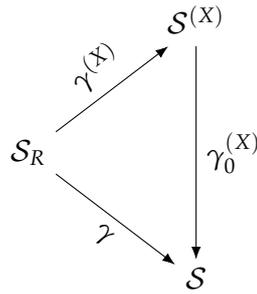
4. Несовместные деформации в пластине

4.1. Мультипликативная декомпозиция

До сих пор ничего не утверждалось о несовместности локальных деформаций в пластине, и все рассуждения, связанные с формулировкой уравнений баланса, в равной степени применимы как к случаю, когда форма \mathcal{S}_R является натуральной, так и к случаю, когда она самонапряжена. Вместе с тем в последнем случае соображения раздела 3.5. должны быть подвергнуты корректировке, поскольку упругий потенциал W (36) отсчитывается от натурального состояния. В соответствии с общими положениями континуальной теории дефектов, эту корректировку можно произвести следующим образом. Пусть $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ — семейство локально натуральных деформаций $\gamma^{(X)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}^{(X)}$, для которого выполнено свойство (8) (см. раздел 1.3.). Если \mathcal{S} — некоторая актуальная форма, а $\gamma : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}$ — соответствующая деформация, то приходим к композиции

$$\gamma_0^{(X)} := \gamma \circ (\gamma^{(X)})^{-1} : \mathcal{S}^{(X)} \rightarrow \mathcal{S}, \quad (38)$$

которая является деформацией, переводящей инфинитезимальную окрестность точки X из натурального состояния в актуальное. Действие деформации $\gamma_0^{(X)}$ иллюстрируется следующей диаграммой:



В инфинитезимальном приближении равенству (38) отвечает соотношение между градиентами:

$$D_Y \gamma_0^{(X)} := D_Y \gamma \circ D_Y (\gamma^{(X)})^{-1},$$

рассматриваемое в точке $Y \in S_R$. Вводя теперь локальную деформацию H_X в соответствии с формулой (9) и полную локальную дисторсию F_X^* как

$$F_X^* := D_Y \gamma_0^{(X)}|_{Y=X},$$

приходим к равенству

$$F_X^* = F_X H_X^{-1},$$

которое удобно представить в ином виде:

$$F_X^* = F_X \mathfrak{K}_X.$$

Здесь \mathfrak{K}_X — (по терминологии Епштейна & Мажена [18; 55]) имплант в точке X , определяемый как $\mathfrak{K}_X := H_X^{-1}$. В итоге приходим к соотношению между полями:

$$F^* = F \mathfrak{K}. \tag{39}$$

В нем поле F совместно, т. е. $\text{curl } F = 0$, в то время как поля локальных деформаций и полной дисторсии несовместны:

$$\text{curl } H \neq 0 \quad \text{и} \quad \text{curl } F^* \neq 0.$$

Таким образом, соотношение (39) есть в точности мультипликативная декомпозиция, предложенная Ли [56].

Принимая во внимание высказанные соображения, заменим в выражении для тензора деформаций Грина–Сен-Венана (30) поле F на поле F^* :

$$E^* = \frac{1}{2} \left((F^*)^T F^* - I \right).$$

В соответствии с (39), приходим тогда к равенству

$$E^* = \frac{1}{2} \left(\mathfrak{K}^T F^T F \mathfrak{K} - I \right). \tag{40}$$

Уточненному тензору Грина–Сен-Венана отвечает потенциал Сен-Венана–Кирхгофа (36) в виде

$$W^* = \frac{\lambda}{2} (I : E^*)^2 + \mu E^* : E^*.$$

Заметим, что коэффициенты λ и μ здесь по-прежнему являются постоянными, поскольку потенциал определяется, как и в эксперименте, относительно натурального состояния. Единственное отличие состоит в том, что теперь это натуральное состояние определено лишь локально и при переходе от одного к другому приходится перебирать элементы семейства $\{S^{(X)}\}_{X \in S_R}$.

4.2. Локальные деформации частного вида

С целью проиллюстрировать влияние несовместных деформаций на выражения для упругого потенциала и тензора напряжений, рассмотрим модельный случай. Предположим, что поле локальных деформаций является шаровым тензором:

$$\mathbf{H} = \nu \mathbf{I}, \quad (41)$$

где $\nu = \nu(\rho, \theta, \zeta) > 0$ — скалярное поле. С физической точки зрения последнее может быть ассоциировано с объемной усадкой материала или неоднородной температурной деформацией. Соответственно, имплант имеет вид

$$\mathfrak{K} = \sqrt{\delta} \mathbf{I},$$

где для упрощения дальнейших формул мы взяли $\delta = \nu^{-2}$. В таком случае полная дисторсия (39) есть поле

$$\mathbf{F}^* = \sqrt{\delta} \mathbf{F},$$

и модифицированный тензор (40) принимает вид

$$\mathbf{E}^* = \delta \mathbf{E} + \frac{\delta - 1}{2} \mathbf{I}.$$

Здесь поле \mathbf{E} соответствует тензору Грина–Сен-Венана, определенному по градиенту \mathbf{F} . В рассматриваемом частном случае упругий потенциал представлен равенством

$$W^* = \left(\frac{\lambda \delta}{2} + \mu(\delta - 1) \right) \mathbf{I} : \mathbf{E} + \mu \delta^2 \mathbf{E} : \mathbf{E} + \frac{3}{2} \mu (\delta - 1)^2,$$

а поле напряжений Пиола–Кирхгофа второго рода имеет вид

$$\mathbf{S}^* = \delta (\lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \mathbf{E} + 2\mu \mathbf{E}) + \frac{\delta}{2} (3\lambda + 2\mu) \mathbf{I}.$$

Полученное выражение отличается от (37). В частности, аналоги материальных констант теперь являются скалярными функциями координат. Но так и должно быть, поскольку закон состояния (37) определен относительно натуральной (хотя бы локально) отсчетной формы, в то время как полученный закон состояния записан относительно самонапряженной промежуточной формы. Тело приобрело фиктивную неоднородность.

4.3. Идея эволюционной задачи

Заметим, что скалярное поле δ (или ν) в общем случае неизвестно и для своего определения требует решения эволюционной задачи [21; 57]. Хотя ее полная формулировка выходит за рамки настоящей работы, мы приведем основные идеи, которые могли бы способствовать постановке такой задачи. Прежде всего введем эволюционный параметр α , который характеризует течение эволюционного процесса. Будем полагать, что процесс эволюции связан с непрерывным присоединением инфинитезимально тонких слоев в трансверсальном направлении (вдоль толщины) к фиксированной подложке. Тогда, представляя форму \mathcal{S}_R как конечный результат такого присоединения, определим функцию $\zeta_{\text{growth}} = \zeta_{\text{growth}}(\alpha)$ — границу роста, определяющую текущее значение максимальной трансверсальной координаты. Следовательно, эволюционный процесс моделируется как движение поверхности вдоль промежуточной формы, где поверхность отделяет множество точек, между которыми установлены связи, от множества точек, не связанных между собой.

Получаем семейство самонапряженных форм⁵ $\{\mathcal{S}_{R,\alpha}\}_{\alpha \in [0,1]}$, вложенных в \mathcal{S}_R , которые определены как

⁵ Значение $\alpha = 0$ соответствует началу процесса, а значение $\alpha = 1$ — окончанию процесса.

$$\mathcal{S}_{R,\alpha} = \left\{ X \in \mathcal{E} : X = O + x^1(\rho^1, \rho^2)\mathbf{i} + x^2(\rho^1, \rho^2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \right. \\ \left. (\rho^1, \rho^2, z) \in D_0 \times [-H, \zeta_{\text{growth}}(\alpha)] \subset \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Каждой форме $\mathcal{S}_{R,\alpha}$ отвечает свое поле локальных деформаций $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\alpha)$, и мы будем предполагать, что выполнено условие отсутствия эволюции неоднородности [58]:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \mathbf{H}(\rho, \theta, \zeta, \alpha) = \mathbf{0}.$$

Наконец, должно быть сформулировано условие, которое определяет характер возникновения структурной неоднородности:

$$\mathcal{F}(\mathbf{H}(\alpha), \zeta_{\text{growth}}(\alpha)) = 0. \tag{42}$$

Пример такого условия можно найти в работе [59]. Уравнения баланса, классические краевые условия и соотношение типа (42) в совокупности составляют эволюционную задачу для растущей по толщине пластины.

4.4. Отсчетная геометрия

В завершение статьи синтезируем риманову геометрию на подлежащем многообразии \mathfrak{S}_R , используя общие формулы из раздела 1.4. и частный вид (41) поля локальных деформаций. Материальная метрика \mathbf{G} определяется в соответствии с формулой (13), и ее компоненты имеют вид

$$G_{IJ} = \nu^2 g_{IJ}, \tag{43}$$

где g_{ij} — компоненты евклидова метрического тензора, полученного сужением исходной евклидовой метрики пространства \mathcal{E} на многообразии \mathfrak{S}_R . Коэффициенты связности Леви-Чивита — символы Кристоффеля — определяются согласно формулам (14). Однако по их выражениям ничего нельзя сказать об отличии геометрии от евклидовой. Это можно сделать, лишь вычислив кривизну по формуле (15). В частности, один из ее скалярных инвариантов — скалярная кривизна (16) — представлен выражением

$$\text{Scal} = 2 \frac{\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial z}\right)^2 - 2\nu \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2}\right)}{\nu^4},$$

отличным от нуля. В произвольных координатах выражения получаются довольно громоздкими, поэтому скалярная кривизна записана относительно прямоугольных координат, индуцированных на многообразии \mathfrak{S}_R .

Полученная геометрия Римана эквивалентна геометрии Вейля [60; 61]. Действительно, поскольку $\nu > 0$, существует скалярное поле $f : \mathfrak{S}_R \rightarrow \mathbb{R}$, которое удовлетворяет условию: $\nu^2 = e^f$. Тогда равенство (43) принимает вид

$$G_{IJ} = e^f g_{IJ},$$

и вычисление символов Кристоффеля по формуле (14) приводит к выражению

$$\Gamma^C_{AB} = \frac{g^{CD}}{2} (\partial_A g_{DB} + \partial_B g_{AD} - \partial_D g_{AB}) - \frac{1}{2} \left(\delta^C_B \partial_A f + \delta^C_A \partial_B f - g_{AB} G^{CD} \partial_D f \right).$$

Но это есть не что иное, как коэффициенты связности Вейля, построенной по евклидову метрическому тензору \mathbf{g} и 1-форме $\vartheta = df$. Можно, таким образом, сделать следующие выводы. Во-первых, даже если индуцированные координаты декартовы, коэффициенты связности отличны от нуля. Во-вторых, связность Вейля обычно возникает в ситуациях, когда рассматриваются точечные дефекты или неоднородные температурные деформации. Но именно этот случай мы рассматриваем в данной работе.

Заключение

Резюмируем результаты настоящей работы:

1. Сформулированы нелинейные уравнения деформирования гибких пластин в общих неортогональных координатах. В рамках вывода предполагались справедливыми гипотезы Кирхгофа–Лява.
2. Подробно рассмотрены аспекты, связанные с моделированием несовместных деформаций в рамках геометрического подхода. В частности, сформулирована гипотеза о локальной разгрузке и определено мультипликативное разложение полной дисторсии. В работе рассматривался случай геометрии Римана.
3. На примере импланта, представленного шаровым тензором, синтезирована материальная геометрия и показано, что она совпадает с геометрией Вейля.
4. Показано, как можно сформулировать эволюционную задачу для определения объемной усадки.

Финансирование. Работа была выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-19-00866).

Информация о конфликте интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Цитирование. Койфман К.Г., Лычев С.А. Нелинейные уравнения деформирования гибких пластин // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara State University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 4. С. 53–83. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-53-83.

© Койфман К.Г., Лычев С.А., 2024

Константин Георгиевич Койфман (koifman.konstantin@gmail.com) – ассистент кафедры высшей математики, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, 105005, Российская Федерация, г. Москва, 2-я Бауманская улица, 5.

Сергей Александрович Лычев (lychevsa@mail.ru) – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории «Механика технологических процессов», Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, 119526, Российская Федерация, г. Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1.

Литература

- [1] De Teresa J.M. (ed.) Nanofabrication: Nanolithography techniques and their applications. Bristol, UK: IOP Publishing, 2020. 450 p. DOI: <http://doi.org/10.1088/978-0-7503-2608-7>.
- [2] Bhushan B. Mechanical Properties of Nanostructures // Springer Handbook of Nanotechnology. Berlin; Heidelberg: Springer Berlin, Heidelberg, 2005. P. 1305–1338. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-29857-1_41.
- [3] Corigliano A., Ardito R., Comi C., Frangi A., Ghisi A., Mariani S. Mechanics of Microsystems. Wiley, 2018. 424 p. Available at: <https://avidreaders.ru/book/mechanics-of-microsystems.html?ysclid=m5wcp7r7qa165607938>.
- [4] Lychev S., Digilov A., Demin G., Gusev E., Kushnarev I., Djuzhev N., Bepalov V. Deformations of single-crystal silicon circular plate: Theory and experiment // Symmetry. 2024. Vol. 16, issue 2. P. 137. DOI: <http://doi.org/10.3390/sym16020137>.
- [5] Eremeyev V.A., Altenbach H., Morozov N.F. The influence of surface tension on the effective stiffness of nanosize plates // Doklady Physics. 2009. Vol. 54, issue 2. P. 98–100. DOI: <https://doi.org/10.1134/S102833580902013X>.

- [6] Eremeyev V.A. On effective properties of materials at the nano- and microscales considering surface effects // *Acta Mechanica*. 2015. Vol. 227, issue 1. P. 29–42. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1427-y>.
- [7] Dedkova A.A., Glagolev P.Y., Gusev E.E., Djuzhev N.A., Kireev V.Y., Lychev S.A., Tovarnov D.A. Peculiarities of Deformation of Round Thin-Film Membranes and Experimental Determination of Their Effective Characteristics // *Technical Physics*. 2024. Vol. 69, issue 2. P. 201–212. DOI: <http://doi.org/10.1134/s1063784224010109>.
- [8] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Москва: Либроком, 2009. 636 с. URL: <https://djvu.online/file/VtgNwUsEoWlyW?ysclid=m5wesnio3v852550962>.
- [9] Lebedev L.P., Cloud M.J., Eremeyev V.A. *Tensor Analysis with Applications in Mechanics*. Singapore: World Scientific, 2010. 363 p. DOI: <https://doi.org/10.1142/7826>.
- [10] Truesdell C., Noll W. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Berlin; Heidelberg: Springer Berlin, Heidelberg, 2004. 602 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-10388-3>.
- [11] Föppl A. *Vorlesungen über technische Mechanik*. Vol. 5. Leipzig: B.G. Teubner Verlag, 1907. 408 p. URL: <https://archive.org/details/vorlesungenuber00foppgoog/mode/2up>.
- [12] Kármán T. *Festigkeitsprobleme im Maschinenbau*. Leipzig: B.G. Teubner Verlag, 1910. P. 311–385. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-663-16028-1_5.
- [13] Вольмир А.С. *Гибкие пластинки и оболочки*. Москва: Гостехиздат, 1956. 422 с. URL: <https://ru.djvu.online/file/UDisSs9cFCGHW?ysclid=m5xk1o2hn3747950990>.
- [14] Ciarlet P.G. A justification of the von Kármán equations // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1980. Vol. 73, issue 4. P. 349–389. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00247674>.
- [15] Marsden J.E., Hughes T.J.R. *Mathematical Foundations of Elasticity*. New York: Dover Publications, 1994. 576 p. Available at: <https://authors.library.caltech.edu/records/s9jhh-sn323>.
- [16] Rakotomanana L. *A Geometric Approach to Thermomechanics of Dissipating Continua*. Birkhäuser Boston, MA, 2004. 265 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8132-6>.
- [17] Epstein M., Elzanowski M. *Material Inhomogeneities and their Evolution. A Geometric Approach*. Springer Berlin, Heidelberg, 2007. 261 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-72373-8>.
- [18] Epstein M. *The geometrical language of continuum mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 312 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511762673>.
- [19] Steinmann P. *Geometrical Foundations of Continuum Mechanics: An Application to First- and Second-Order Elasticity and Elasto-Plasticity*. Springer Berlin, Heidelberg, 2015. 517 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-46460-1>.
- [20] Lychev S.A., Koifman K.G. Geometric aspects of the theory of incompatible deformations. Part I. Uniform configurations // *Nanomechanics Science and Technology: An International Journal*. 2016. Vol. 7, issue 3. P. 177–233. DOI: <http://dx.doi.org/10.1615/NanomechanicsSciTechnolIntJ.v7.i3.10>.
- [21] Lychev S., Koifman K. *Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics*. Walter de Gruyter GmbH, 2018. 370 p. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110563214>.
- [22] Lee J.M. *Introduction to Smooth Manifolds*. New York: Springer New York, 2012. 708 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>.
- [23] Терстон У. *Трёхмерная геометрия и топология*. Москва: МЦНМО, 2001. 159 с. URL: <https://djvu.online/file/d9kTToZY4xSoe?ysclid=m5xo4p5xsk264956559>.
- [24] Ньютон И. *Математические начала натуральной философии*. Москва: Наука, 1989. 706 с. URL: <https://djvu.online/file/wCBIIGHJY68zQ?ysclid=m5xq46subf880076048>.
- [25] Парс Л.А. *Аналитическая динамика*. Москва: Наука, 1971. 636 с. URL: <https://djvu.online/file/gE3s7zpUFwIti?ysclid=m5xqeo60cm741093621>.
- [26] Постников М.М. *Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия*. Москва: Наука, 1979. 336 с. URL: <https://djvu.online/file/xZDfmLpebumCj?ysclid=m5xqn6y67s772754531>.
- [27] Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1967. Vol. 27, issue 1. P. 1–32. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00276433>.

- [28] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Flügge S. (eds.) Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik, vol. 2/3/1. Berlin; Heidelberg: Springer Berlin, Heidelberg, 1960. P. 226–858. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.
- [29] Kellogg O.D. Foundations of Potential Theory. Berlin; Heidelberg: Springer Berlin, Heidelberg, 1967. 384 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-90850-7>.
- [30] Lychev S., Koifman K., Bout D. Finite incompatible deformations in elastic solids: Relativistic approach // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43, issue 7. P. 1908–1933. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222100250>.
- [31] Chern S.S., Chen W.H., Lam K.S. Lectures on Differential Geometry. Singapore: World Scientific Publishing, 1999. 356 p. URL: https://books.google.ru/books?id=Mvk7DQAAQBAJ&redir_esc=y.
- [32] Lee J.M. Introduction to Riemannian Manifolds. Springer Cham, 2018. 437 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-91755-9>.
- [33] Lychev S.A., Koifman K.G., Pivovarov N.A. Incompatible deformations in relativistic elasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, issue 6. P. 2352–2397. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060343>.
- [34] Abraham R., Marsden J.E., Ratiu T. Manifolds, tensor analysis, and applications. 2nd edition. Springer Science & Business Media, 1988. 656 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1029-0>.
- [35] Lychev S.A., Koifman K.G. Contorsion of material connection in growing solids // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, issue 8. P. 1852–1875. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080221080187>.
- [36] Eckart C. The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and anelasticity // Physical Review. 1948. Vol. 73, issue 4. P. 373–382. DOI: <http://doi.org/10.1103/physrev.73.373>.
- [37] Kröner E. Allgemeine kontinuumstheorie der versetzungen und eigenspannungen // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1959. Vol. 4, issue 1. P. 273–334. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00281393>.
- [38] Lee J.M. Introduction to Topological Manifolds. New York: Springer New York, 2011. 433 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7940-7>.
- [39] Bilby B.A., Bullough R., Smith E. Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. 1955. Vol. 231, issue 1185. P. 263–273. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1955.0171>.
- [40] Yavari A., Goriely A. Riemann–Cartan geometry of nonlinear dislocation mechanics // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 2012. Vol. 205, issue 1. P. 59–118. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00205-012-0500-0>.
- [41] Miri M., Rivier N. Continuum elasticity with topological defects, including dislocations and extra-matter // Journal of Physics A: Mathematical and General. 2002. Vol. 35, number 7. P. 1727–1739. DOI: <http://doi.org/10.1088/0305-4470/35/7/317>.
- [42] Anthony K.H. Die theorie der disklinationen // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1970. Vol. 39, issue 1. P. 43–88. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00281418>.
- [43] Anthony K.H. Die theorie der nichtmetrischen Spannungen in Kristallen // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1971. Vol. 40, issue 1. P. 50–78. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00281530>.
- [44] Levi-Civita T. Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1916. Vol. 42, issue 1. P. 173–204. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF03014898>.
- [45] Goodbrake C., Goriely A., Yavari A. The mathematical foundations of anelasticity: existence of smooth global intermediate configurations // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2021. Vol. 477, issue 2245. P. 20200462. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2020.0462>.
- [46] Voigt W. Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. II // Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen. 1887. Vol. 34. P. 53–100.
- [47] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et fils, 1909. 226 p. URL: <https://onlinebooks.library.upenn.edu/webbin/book/lookupid?key=olbp79796>.

- [48] Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1964. Vol. 16, issue 1. P. 51–78. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00248490>.
- [49] Ericksen J.L., Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1957. Vol. 1, issue 1. P. 295–323. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00298012>.
- [50] Reddy J.N. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. Boca Raton: CRC Press, 2006. 568 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9780849384165>.
- [51] Schield R.T. Inverse deformation results in finite elasticity // Journal of Applied Mathematics and Physics. 1967. Vol. 18. P. 490–500. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01601719>.
- [52] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980. 259 с. URL: <https://djvu.online/file/jUBUyrRG4xLui?ysclid=m5z7v8g7k9959065018>.
- [53] Kanso E., Arroyo M., Tong Y., Yavari A., Marsden J.E., Desbrun M. On the geometric character of stress in continuum mechanics // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2007. Vol. 58. P. 843–856. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00033-007-6141-8>.
- [54] Gurtin M.E., Fried E., Anand L. The Mechanics and Thermodynamics of Continua. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 718 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511762956>.
- [55] Maugin G.A. Material Inhomogeneities in Elasticity. New York: Chapman & Hall, 1993. 292 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781003059882>.
- [56] Lee E.H. Elastic-plastic deformation at finite strains // Journal of Applied Mechanics. 1969. Vol. 36, issue 1. P. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3564580>.
- [57] Lychev S.A. Equilibrium equations for transversely accreted shells // ZAMM — Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2014. Vol. 94, issue 1–2. P. 118–129. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201200231>.
- [58] Лычев С.А., Манжиров А.В. Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77, № 4. С. 585–604. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=20181632>. EDN: <https://elibrary.ru/qzqmwtd>.
- [59] Lychev S., Koifman K. Nonlinear evolutionary problem for a laminated inhomogeneous spherical shell // Acta Mechanica, 2019. Vol. 230, issue 11. P. 3989–4020. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02399-7>.
- [60] Yavari A., Goriely A. Weyl geometry and the nonlinear mechanics of distributed point defects // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2012. Vol. 468, issue 2148. P. 3902–3922. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2012.0342>.
- [61] Dhas B., Srinivasa A.R., Roy D. A Weyl geometric model for thermo-mechanics of solids with metrical defects. DOI: <http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.1904.06956>.

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-53-83

Nonlinear equations of flexible plates deformations

Koifman¹ K.G. , Lychev² S.A. 

¹ Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation; koifman.konstantin@gmail.com (K.G.);

² Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation; lychevsa@mail.ru (S.A.);

Received: 18.10.2024

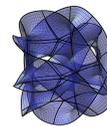
Revised: 23.11.2024

Accepted: 25.11.2025

Scientific article



Abstract. Nonlinear equations of deformation of flexible plates are formulated in general nonorthogonal coordinates with taking into account incompatible local deformations. The following assumptions are used. 1. Displacements of the plate from the reference (self-stressed) shape are restricted by the kinematic hypotheses of Kirchhoff — Love. 2. Elementary volumes constituting the reference shape can be locally transformed into an unstressed state by means of a nondegenerate linear transformation (hypothesis of local discharging). 3. Transformations inverse to local unloading, referred to as implants, can be found from the solution of the evolutionary problem simulating the successive deposition of infinitely thin layers on the front boundary surface of the plate. Geometric spaces of affine connection that model the global stress-free reference shape are constructed. The following special cases are considered: Weitzenböck space (with non-zero torsion), Riemann space (with non-zero curvature) and Weyl space (with non-zero non-metricity).



Key words: hyperelasticity; flexible plates; kinematic hypothesis; nonlinear equations; asymptotic expansion; incompatible deformations; material connection.

Funding. The work was supported by the Russian Science Foundation (grant No. 23-19-00866).

Information about the conflict of interests: the authors declared no conflict of interest.

Citation. Koifman K.G., Lychev S.A. Nonlinear equations of flexible plates deformations. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 53–83. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-53-83. (In Russ.)

© Koifman K.G., Lychev S.A., 2024

Konstantin G. Koifman (koifman.konstantin@gmail.com) – assistant professor at the Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, 5, 2-nd Baumanskaya Street, Moscow, 105005, Russian Federation.

Sergey A. Lychev (lychevsa@mail.ru) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, leading researcher of Laboratory of Mechanics of Technological Processes, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, bldg. 1, 101, Vernadsky Avenue, Moscow, 119526, Russian Federation.

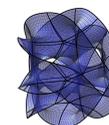
References

- [1] J.M. De Teresa (ed.) Nanofabrication: Nanolithography techniques and their applications. Bristol, UK: IOP Publishing, 2020, 450 p. DOI: <http://doi.org/10.1088/978-0-7503-2608-7>.
- [2] Bhushan B. Mechanical Properties of Nanostructures. In: *Springer Handbook of Nanotechnology*. Berlin; Heidelberg: Springer Berlin, Heidelberg, 2005, pp. 1305–1338. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-29857-1_41.
- [3] Corigliano A., Ardito R., Comi C., Frangi A., Ghisi A., Mariani S. Mechanics of Microsystems. Wiley, 2018, 424 p. Available at: <https://avidreaders.ru/book/mechanics-of-microsystems.html?ysclid=m5wcp7r7qa165607938>.
- [4] Lychev S., Digilov A., Demin G., Gusev E., Kushnarev I., Djuzhev N., Bespalov V. Deformations of single-crystal silicon circular plate: Theory and experiment. *Symmetry*, 2024, vol. 16, issue 2, p. 137. DOI: <http://doi.org/10.3390/sym16020137>.
- [5] Eremeyev V.A., Altenbach H., Morozov N.F. The influence of surface tension on the effective stiffness of nanosize plates. *Doklady Physics*, 2009, vol. 54, issue 2, pp. 98–100. DOI: <https://doi.org/10.1134/S102833580902013X>.
- [6] Eremeyev V.A. On effective properties of materials at the nano- and microscales considering surface effects. *Acta Mechanica*, 2015, vol. 227, issue 1, pp. 29–42. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1427-y>.
- [7] Dedkova A.A., Glagolev P.Y., Gusev E.E., Djuzhev N.A., Kireev V.Y., Lychev S.A., Tovarnov D.A. Peculiarities of Deformation of Round Thin-Film Membranes and Experimental Determination of Their Effective Characteristics. *Technical Physics*, 2024, vol. 69, issue 2, pp. 201–212. DOI: <http://doi.org/10.1134/s1063784224010109>.
- [8] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. New York, Toronto, London: McGraw-Hill, 1959, 636 p. Available at: <https://djvu.online/file/VtgNwUsEoWlyW?ysclid=m5wesnio3v852550962>. (In Russ.)
- [9] Lebedev L.P., Cloud M.J., Eremeyev V.A. Tensor Analysis with Applications in Mechanics. Singapore: World Scientific, 2010, 363 p. DOI: <https://doi.org/10.1142/7826>.
- [10] Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Berlin; Heidelberg: Springer Berlin, Heidelberg, 2004, 602 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-10388-3>.
- [11] Föppl A. Vorlesungen über technische Mechanik. Vol. 5. Leipzig: B.G. Teubner Verlag, 1907, 408 p. URL: <https://archive.org/details/vorlesungenuber00foppgooog/mode/2up>.

- [12] Kármán T. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. Leipzig: B.G. Teubner Verlag, 1910, pp. 311–385. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-663-16028-1_5.
- [13] Volmir A.S. Flexible plates and shells. Moscow: Gostekhizdat, 1956, 422 p. Available at: <https://ru.djvu.online/file/UDisSs9cFCGHW?ysclid=m5xk1o2hn3747950990>. (In Russ.)
- [14] Ciarlet P.G. A justification of the von Kármán equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1980, vol. 73, issue 4, pp. 349–389. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00247674>.
- [15] Marsden J.E., Hughes T.J.R. Mathematical Foundations of Elasticity. New York: Dover Publications, 1994, 576 p. Available at: <https://authors.library.caltech.edu/records/s9jhk-sn323>.
- [16] Rakotomanana L. A Geometric Approach to Thermomechanics of Dissipating Continua. Birkhäuser Boston, MA, 2004, 265 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8132-6>.
- [17] Epstein M., Elzanowski M. Material Inhomogeneities and their Evolution. A Geometric Approach. Springer Berlin, Heidelberg, 2007, 261 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-72373-8>.
- [18] Epstein M. The geometrical language of continuum mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2010, 312 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511762673>.
- [19] Steinmann P. Geometrical Foundations of Continuum Mechanics: An Application to First- and Second-Order Elasticity and Elasto-Plasticity. Springer Berlin, Heidelberg, 2015, 517 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-46460-1>.
- [20] Lychev S.A., Koifman K.G. Geometric aspects of the theory of incompatible deformations. Part I. Uniform configurations. *Nanomechanics Science and Technology: An International Journal*, 2016, vol. 7, issue 3, pp. 177–233. DOI: <http://dx.doi.org/10.1615/NanomechanicsSciTechnoIntJ.v7.i3.10>.
- [21] Lychev S., Koifman K. Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics. Walter de Gruyter GmbH, 2018, 370 p. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110563214>.
- [22] Lee J.M. Introduction to Smooth Manifolds. New York: Springer New York, 2012, 708 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>.
- [23] Thurston W.P. Three-Dimensional Geometry and Topology. Vol. 1. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1997, 159 p. Available at: <https://djvu.online/file/d9kTToZY4xSoe?ysclid=m5xo4p5xsk264956559>. (In Russ.)
- [24] Newton I. The Mathematical Principles of Natural Philosophy. Moscow: Nauka, 1989, 706 p. Available at: <https://djvu.online/file/wCBIIIGHJY68zQ?ysclid=m5xq46subf880076048>. (In Russ.)
- [25] Pars L.A. A Treatise on Analytical Dynamics. Moscow: Nauka, 1971, 636 p. Available at: <https://djvu.online/file/gE3s7zpUFwIti?ysclid=m5xqeo60cm741093621>. (In Russ.)
- [26] Postnikov M.M. Lectures in geometry. Semester I. Analytic geometry. Moscow: Nauka, 1979, 336 p. Available at: <https://djvu.online/file/xZDfmLpe6umCj?ysclid=m5xqn6y67s772754531>. (In Russ.)
- [27] Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1967, vol. 27, issue 1, pp. 1–32. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00276433>.
- [28] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: Flügge S. (eds.) *Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik, vol. 2/3/1*. Berlin; Heidelberg: Springer Berlin, Heidelberg, 1960, pp. 226–858. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.
- [29] Kellogg O.D. Foundations of Potential Theory. Berlin; Heidelberg: Springer Berlin, Heidelberg, 1967, 384 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-90850-7>.
- [30] Lychev S., Koifman K., Bout D. Finite incompatible deformations in elastic solids: Relativistic approach. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2022, vol. 43, issue 7, pp. 1908–1933. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222100250>.
- [31] Chern S.S., Chen W.H., Lam K.S. Lectures on Differential Geometry. Singapore: World Scientific Publishing, 1999, 356 p. Available at: https://books.google.ru/books?id=Mvk7DQAAQBAJ&redir_esc=y.
- [32] Lee J.M. Introduction to Riemannian Manifolds. Springer Cham, 2018, 437 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-91755-9>.

- [33] Lychev S.A., Koifman K.G., Pivovarov N.A. Incompatible deformations in relativistic elasticity. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2023, vol. 44, issue 6, pp. 2352–2397. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060343>.
- [34] Abraham R., Marsden J.E., Ratiu T. Manifolds, tensor analysis, and applications. 2nd edition. Springer Science & Business Media, 1988, 656 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1029-0>.
- [35] Lychev S.A., Koifman K.G. Contorsion of material connection in growing solids. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, vol. 42, issue 8, pp. 1852–1875. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080221080187>.
- [36] Eckart C. The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and anelasticity. *Physical Review*, 1948, vol. 73, issue 4, pp. 373–382. DOI: <http://doi.org/10.1103/physrev.73.373>.
- [37] Kröner E. Allgemeine kontinuumstheorie der versetzungen und eigenspannungen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1959, vol. 4, issue 1, pp. 273–334. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00281393>.
- [38] Lee J.M. Introduction to Topological Manifolds. New York: Springer New York, 2011, 433 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7940-7>.
- [39] Bilby B.A., Bullough R., Smith E. Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 1955, vol. 231, issue 1185, pp. 263–273. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1955.0171>.
- [40] Yavari A., Goriely A. Riemann–Cartan geometry of nonlinear dislocation mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2012, vol. 205, issue 1, pp. 59–118. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00205-012-0500-0>.
- [41] Miri M., Rivier N. Continuum elasticity with topological defects, including dislocations and extra-matter. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2002, vol. 35, number 7, pp. 1727–1739. DOI: <http://doi.org/10.1088/0305-4470/35/7/317>.
- [42] Anthony K.H. Die theorie der disklinationen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1970, vol. 39, issue 1, pp. 43–88. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00281418>.
- [43] Anthony K.H. Die theorie der nichtmetrischen Spannungen in Kristallen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1971, vol. 40, issue 1, pp. 50–78. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00281530>.
- [44] Levi-Civita T. Nozione di parallelismo in una variet'a qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1916, vol. 42, issue 1, pp. 173–204. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF03014898>.
- [45] Goodbrake C., Goriely A., Yavari A. The mathematical foundations of anelasticity: existence of smooth global intermediate configurations. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2021, vol. 477, issue 2245, p. 20200462. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2020.0462>.
- [46] Voigt W. Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. II. *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen*, 1887, vol. 34, pp. 53–100.
- [47] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et fils, 1909, 226 p. URL: <https://onlinebooks.library.upenn.edu/webbin/book/lookupid?key=olbp79796>.
- [48] Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, vol. 16, issue 1, pp. 51–78. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00248490>.
- [49] Ericksen J.L., Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1957, vol. 1, issue 1, pp. 295–323. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00298012>.
- [50] Reddy J.N. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. Boca Raton: CRC Press, 2006, 568 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9780849384165>.
- [51] Schield R.T. Inverse deformation results in finite elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 1967, vol. 18, pp. 490–500. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01601719>.
- [52] Lurie A.I. Non-Linear Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1980, 259 p. Available at: <https://djvu.online/file/jUBUyrRG4xLui?ysclid=m5z7v8g7k9959065018>. (In Russ.)
- [53] Kanso E., Arroyo M., Tong Y., Yavari A., Marsden J.E., Desbrun M. On the geometric character of stress in continuum mechanics. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 2007, vol. 58, pp. 843–856. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00033-007-6141-8>.

- [54] Gurtin M.E., Fried E., Anand L. The Mechanics and Thermodynamics of Continua. Cambridge: Cambridge University Press, 2010, 718 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511762956>.
- [55] Maugin G.A. Material Inhomogeneities in Elasticity. New York: Chapman & Hall, 1993, 292 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781003059882>.
- [56] Lee E.H. Elastic-plastic deformation at finite strains. *Journal of Applied Mechanics*, 1969, vol. 36, issue 1, pp. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3564580>.
- [57] Lychev S.A. Equilibrium equations for transversely accreted shells. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2014, vol. 94, issue 1–2, pp. 118–129. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201200231>.
- [58] Lychev S.A., Manzhairov A.V. The mathematical theory of growing bodies. Finite deformations. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, vol. 77, issue 4, pp. 421–432. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.11.011>. EDN: <https://elibrary.ru/wqyump>. (In English; original in Russian)
- [59] Lychev S., Koifman K. Nonlinear evolutionary problem for a laminated inhomogeneous spherical shell. *Acta Mechanica*, 2019, vol. 230, issue 11, pp. 3989–4020. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02399-7>.
- [60] Yavari A., Goriely A. Weyl geometry and the nonlinear mechanics of distributed point defects. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2012, vol. 468, issue 2148, pp. 3902–3922. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2012.0342>.
- [61] Dhas B., Srinivasa A.R., Roy D. A Weyl geometric model for thermo-mechanics of solids with metrical defects. DOI: <http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.1904.06956>.



Экспериментальная оценка определения среднего размера спеклов

Сергеев Р.Н. 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация; romanr@yandex.ru;

Поступила: 11.09.2024

Рассмотрена: 27.10.2024

Принята: 25.11.2024

Аннотация. В работе предлагается способ оценки среднего размера спекла по экспериментально зафиксированным изображениям спекл-полей на КМОП-матрице. Данный способ может быть полезен при использовании в методах спекл-интерферометрии при определении их метрологических параметров.

Ключевые слова: спекл-поле; средний размер спекла; КМОП-матрица; бинаризация; сегментация.

Научная статья



Введение

Явление возникновения спеклов это интерференционное явление, которое возникает, когда диффузно-рассеивающий объект отражает или пропускает когерентное освещение [1]. Применение спекл-структур, образующихся в плоскости изображения, составляет основу методов спекл-интерферометрии и спекл-фотографии.

Свойства спекл-картин зависят от способа их образования. Существует два типа наблюдения спеклов, терминология которых введена еще Д. Габором, субъективные спеклы, наблюдаемые в фокальной плоскости оптической системы, и объективные спеклы, наблюдаемые на определенном расстоянии от диффузно-рассеивающего объекта.

Одним из важных параметров спекл-картин является средний поперечный размер спекла. Как правило, для оценки поперечного размера спеклов используют функцию автокорреляции поля интенсивности из предположения о том, что спекл-поле имеет гауссовскую статистику распределения [2–5].

Применение такой оценки недостаточно при практическом использовании оптических методов измерений, когда средний размер спеклов определяет их чувствительность и диапазоны измерений. Поэтому авторами разных работ проводятся исследования по определению поперечного размера спеклов [3; 6; 7].

В данной работе предлагаются алгоритм программы и апробация оценки поперечного размера спеклов экспериментально регистрируемой цифровой камерой изображений субъективных спекл-полей, получаемых различными оптическими системами. Алгоритм может применяться непосредственно перед проведением измерений, способствуя выбору оптимальных метрологических характеристик используемой измерительной системы.

1. Алгоритм оценки среднего поперечного размера спекла

Суть предлагаемого алгоритма состоит в сравнении спекла с известным размером пикселя КМОП-матрицы. Таким образом, изображение спекла, зафиксированное КМОП-матрицей, будет определять некоторую фигуру с определенной площадью, кратной площади пикселя. Исходя из площади фигуры, занимаемой спеклом, можно определить характерный диаметр окружности с соответствующей площадью, который и будет искомым средним поперечным размером спекла.

На рисунке 1 представлены характерные картины зарегистрированных изображений субъективных спекл-полей с различными апертурами оптической системы: круглой и кольцевых с соотношением диаметров внутреннего к внешнему $\varepsilon = 0,8$ и $0,9$. В силу малости размеров спеклов для возможности их наблюдения на рисунке 1 представлены вырезанные участки из левого верхнего угла изображений с целым размером 2592×1944 пикселей. Из нее видны хаотическое расположение и форма спеклов.

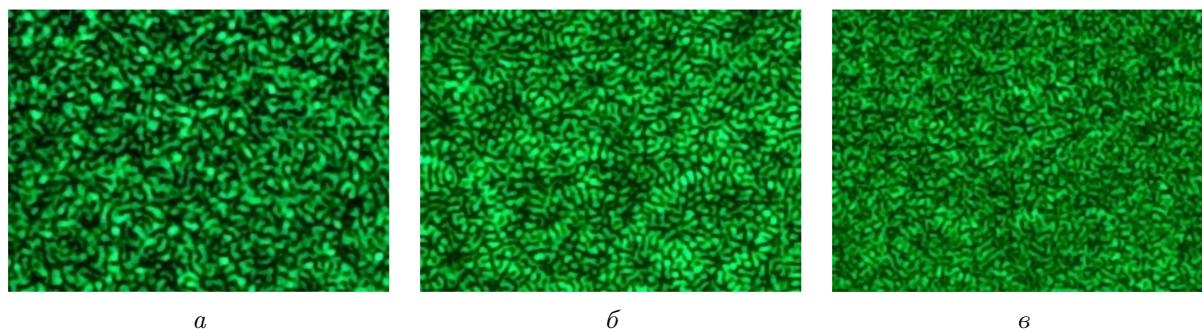


Рис. 1. Характерные спекл-изображения: а) для открытой апертуры; для кольцевых апертур с б) $0,8$ и в) $0,9$ при одинаковом увеличении

Fig. 1. Typical speckle patterns: а) for an open aperture; for annular apertures with б) 0.8 and в) 0.9 at the same magnification

Для определения площади спекла необходимо определить его границы, т. е. выделить контур с одинаковой внутри него яркостью. В компьютерном зрении для задач, где изображение предмета имеет одномерную яркость, применяют бинаризацию изображений, разделяя диапазон яркости пополам [8; 9].

Изображение, регистрируемое камерой, цветное поэтому для применения порога яркости для бинаризации необходимо преобразовать изображение в массив яркости. В настоящее время широко используется представление цифрового изображения в колориметрической системе RGB, в данной системе используется три компонента цвета красного (R), зеленого (G) и синего (B). Поэтому прежде, чем произвести бинаризацию, цветное изображение спекл-поля преобразуется из колориметрической системы RGB. Известно, что яркость отдельного пикселя можно определить в соответствии с выражением [9]:

$$L(x, y) = R(x, y) + 4,5907G(x, y) + 0,0601B(x, y), \quad (1)$$

где $R(x, y), G(x, y), B(x, y)$ — цветовая составляющая пикселя.

В полученном массиве яркости производится поиск максимума, минимума, а также определяется среднее значение яркости по всему ансамблю координат пикселей. Преобразованное изображение спекл-поля сохраняется и используется дальше для сегментирования спеклов.

На основе полученных данных производится бинаризация изображения. Создается двумерный массив, равный исходному изображению, в котором пиксели на цветном изображении, имевшие высокую яркость, превышающую установленный порог, представляются темными, а остальные — светлыми. В силу того что размеры спеклов сопоставимы с размером пикселей, резкое изменение яркости на границе может приводить к частичной потере информации в виде неточного получения границы спекла. На рисунке 2 представлены некоторые возможные случаи яркости спеклов.

В случае, показанном на рисунке 2, а, при бинаризации произойдет потеря информации, т. к. яркость спекла ниже пороговой. Когда яркость спекла высокая, происходит перенасыщение КМОП-матрицы (рис. 2, б), в таком случае определение контура произойдет с искажением формы. Оптимальным условием будет, если яркость спекла выше пороговой, но ниже максимальной (рис. 2, в). Кроме того, КМОП-матрица может иметь изначальное насыщение, связанное с высокой интенсивностью освещения объекта исследования, приводя к появлению фона (рис. 2, г). В данном случае определим минимальное значение яркости (которое будет

отлично от нуля) и проведем его попиксельное вычитание из всего массива. Пример результата бинаризации изображений на рисунке 1 в соответствии с описанным алгоритмом приведен на рисунке 3.

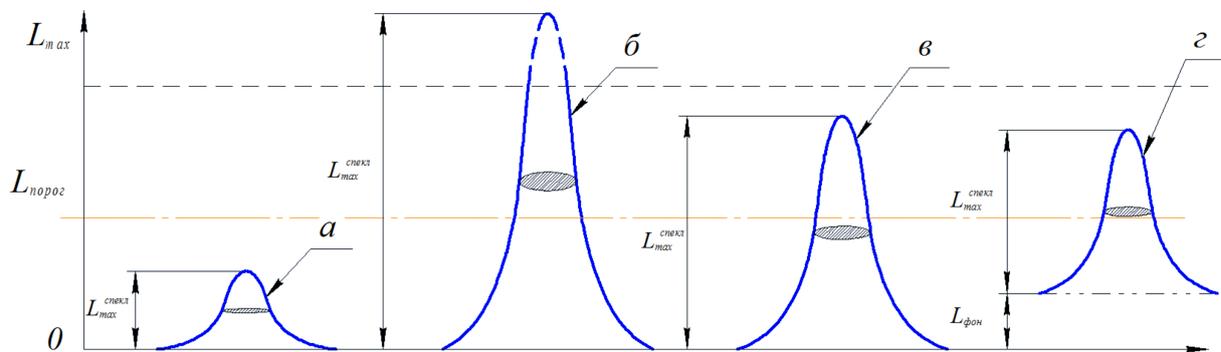


Рис. 2. Схематичное представление яркости светлых спеклов на цифровом изображении
Fig. 2. Schematic representation of the brightness of light speckles in a digital image

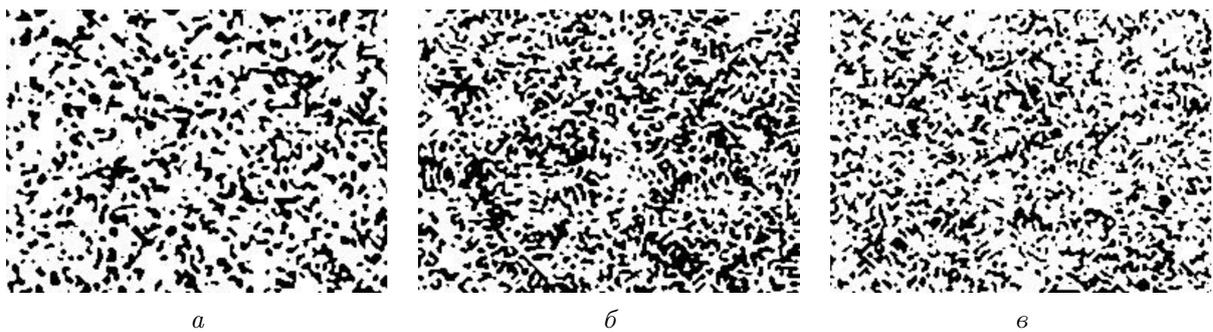


Рис. 3. Характерный вид бинаризованных спекл-изображений: а) для открытой апертуры; для кольцевых апертур с б) 0,8 и в) 0,9
Fig. 3. Typical appearance of binarized speckle patterns: a) for an open aperture; for annular apertures with b) 0.8 and v) 0.9

Сегментация контуров на бинаризованном изображении производится с помощью функций библиотеки компьютерного зрения с открытым исходным кодом OpenCV [10]. Существующая функция библиотеки OpenCV производит поиск связанных компонент бинарного изображения, получая на выходе размеченную карту пикселей, в которой ненулевые пиксели, принадлежащие одной связной компоненте, получают одинаковые метки [10; 11]. Таким образом, обрабатывая уже связанные компоненты, создаем массив, в котором находятся их площади в пикселях, а размер массива будет соответствовать их количеству. Далее производится статистическая обработка массива.

Описанный алгоритм реализован в едином приложении FindeSizeSpeckle.py, а также модуле, содержащем используемые функции SpeckleSizeModule.py на языке программирования Python [12].

2. Экспериментальная апробация алгоритма

Апробация алгоритма проводилась на экспериментально зарегистрированных изображениях субъективных спеклов. Схема записи субъективных спеклов состояла из когерентно освещенной матовой пластины, являющейся частью специального устройства, позволяющего автоматически перемещать пластину в плоскости изображения. Оптическая система состояла из

формирующей линзы апертурой 50 мм и фокусным расстоянием 480 мм, а также трех вариантов диафрагм: круглой и кольцевых с соотношением диаметров внутреннего к внешнему $\varepsilon = 0,8$ и $0,9$ (диаметр внешнего кольца 50 мм). Матовая пластина и плоскость КМОП-матрицы размещались на расстоянии $2f$, что обеспечивало оптическое увеличение, равное 1. Запись осуществлялась на КМОП-матрицу Eakins 5.0MP USB Digital Microscope Camera с разрешением 2592×1944 пикселей и размером пикселя $2,2 \text{ мкм} \times 2,2 \text{ мкм}$. Источником когерентного света служил лазер LCS-DTL-317 с длиной волны 532 мкм и максимальной мощностью $52,6 \text{ мВт}$.

В силу того что интенсивность освещения оказывает влияние на вид формируемого спекл-поля, было проведено исследование влияния мощности освещения лазером. Для каждого уровня мощности лазера проводился набор 15 изображений спекл-полей, смещенных друг относительно друга на $2,5 \text{ мкм}$.

Результат влияния мощности лазера на осредненную яркость по всему изображению, полученную по ансамблю из 15 изображений для трех вариантов апертур, представлен на рисунке 4.

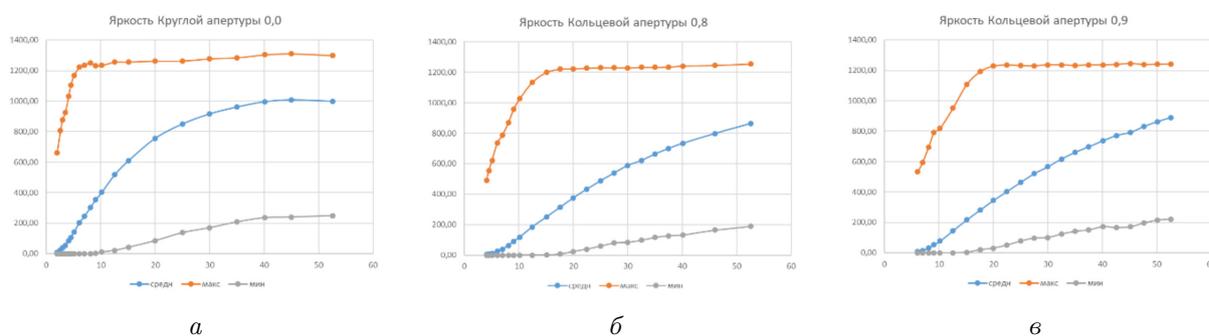


Рис. 4. График изменения средней яркости изображений от мощности лазера для круглой а) и кольцевых б), в) апертур

Fig. 4. Graph of the change in average image brightness from laser power for circular a) and annular б), в) apertures

Из рисунка 4 видно, что при мощности освещения больше 10 мВт начинает расти минимальная яркость изображений. Это говорит о снижении контраста изображений в целом. Для снижения этого эффекта при бинаризации предусмотрено вычитание значения соответствующей минимальной яркости. Рост максимальной яркости происходит до значений мощности лазера для круглой апертуры $(0,0)–8,1 \text{ мВт}$, кольцевой $(0,8)–17,6 \text{ мВт}$, $(0,9)–20,0 \text{ мВт}$, что справедливо т. к. у кольцевых апертур площадь входного зрачка меньше.

На рисунке 5 представлены характерные гистограммы изображений спекл-поля при мощности источника освещения 15 мВт и кольцевой апертуры с $\varepsilon=0,8$.

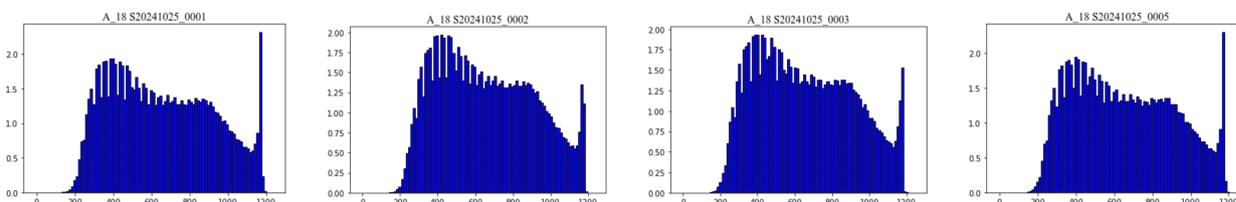


Рис. 5. Характерное изменение яркости пикселей при смещении диффузной матовой пластины в плоскости изображения

Fig. 5. Characteristic change in pixel brightness when shifting the diffuse matte plate in the image plane

Из рисунка 5 видно, что смещение не приводит к серьезному изменению функции распределения яркости.

На рисунке 6 показаны гистограммы распределения частот яркости пикселей при разных уровнях мощности освещения и различных апертурах.

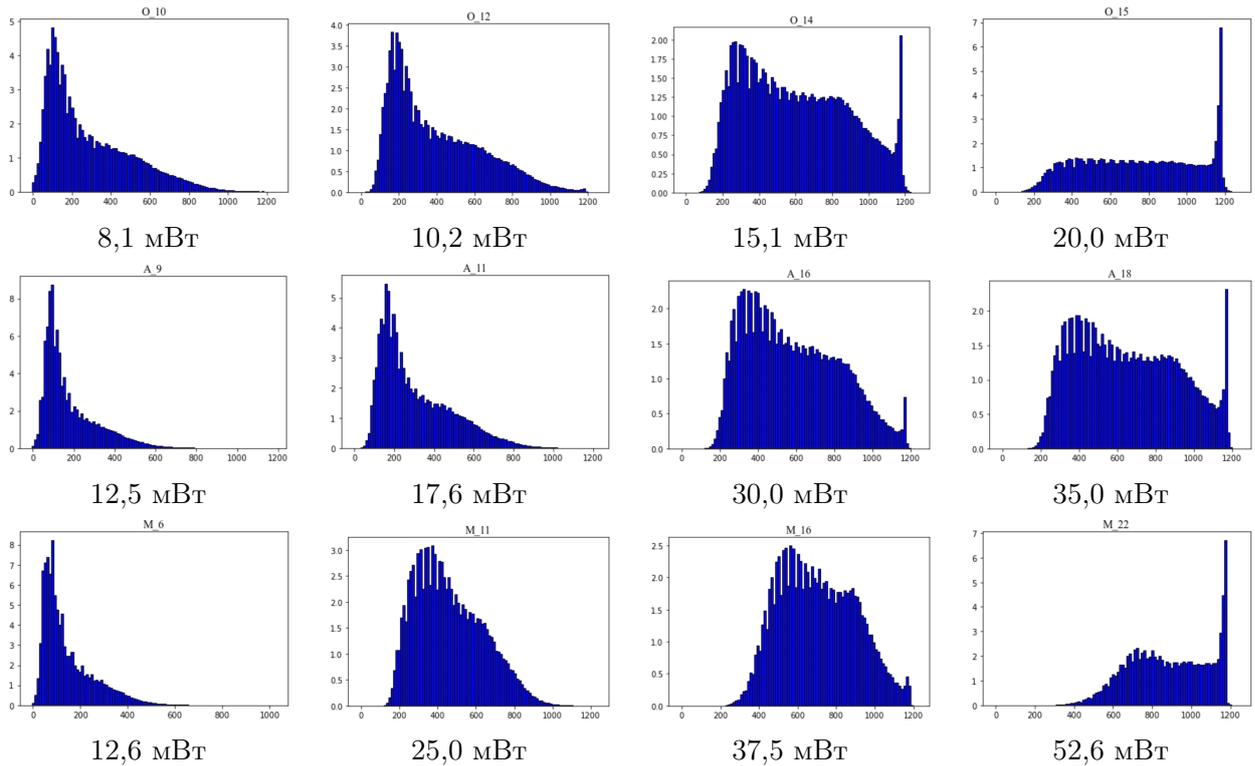


Рис. 6. Гистограмма распределения яркости при круглой апертуре (верхний ряд); кольцевой апертуре $\epsilon = 0,8$ (средний ряд), $\epsilon = 0,9$ (нижний ряд)

Fig. 6. Histogram of brightness distribution for a circular aperture (top row); annular aperture $\epsilon = 0,8$ (middle row), $\epsilon = 0,9$ (bottom row)

Из рисунка 6 видно, что частота яркости пикселей меняется с увеличением мощности освещения и при некотором значении имеет вид, приближенный к нормальному закону распределения случайной величины. Степень корреляция функции частоты яркости пикселей с нормальным законом может выступать в качестве критерия для сравнения средних размеров спеклов при различных апертурах оптической системы.

Необходимость выбора данного критерия обусловлена тем, что существует влияние на размер спекла уровня яркости [6]. На рисунке 7 построен график зависимости среднего размера спекла от уровня мощности освещения.

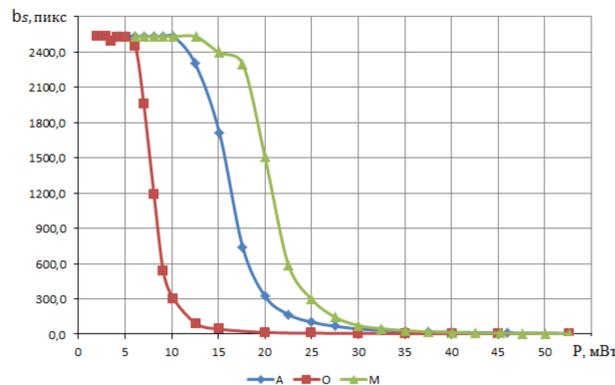


Рис. 7. График изменения поперечного размера спекла от мощности освещения лазером для круглой апертуры (O), кольцевой с $\epsilon = 0,8$ (A), кольцевой с $\epsilon = 0,9$ (M)

Fig. 7. Graph of the change in the average transverse size of the speckle from the laser illumination power for a circular aperture (O), annular with $\epsilon = 0,8$ (A), annular with $\epsilon = 0,9$ (M)

Результат получен при помощи разработанного алгоритма. Осреднение проводилось по ансамблю из 15 изображений. Из рисунка 7 видно, что линейный участок изменения размера спекла находится в диапазоне для круглой апертуры от 6,1...10,2 мВт, для кольцевых (0,8) от 12,5...20 мВт, (0,9) от 17,6...25 мВт.

Заключение

Разработанный алгоритм программы и проведенная апробация оценки среднего размера спеклов позволяет непосредственно в условиях экспериментальных исследований вычислять средний размер спеклов, тем самым определяя оптимальные метрологические характеристики измерительной оптической системы в спекл-интерферометрии. Способ применим к любым методам спекл-интерферометрии.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 23-29-10066.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

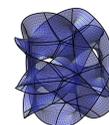
Цитирование. Сергеев Р.Н. Экспериментальная оценка определения среднего размера спеклов // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 4. С. 84–91. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-84-91.

© Сергеев Р.Н., 2024

Роман Николаевич Сергеев (romansr@yandex.ru) – старший преподаватель кафедры математического моделирования в механике, инженер НИИ-201 (Институт акустики машин), Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Литература

- [1] Франсон М. Оптика спеклов. Москва: Мир, 1980. 172 с. URL: <https://libcats.org/book/438857>.
- [2] Dainty J.C. Laser Speckle and Related Phenomena. Berlin: Springer-Verlag Berlin, Heidelberg GmbH, 1975. 288 p. URL: <https://iypt.ru/wp-content/uploads/2019/07/Topics-in-Applied-Physics-Volume-9.pdf>.
- [3] Goodman J.W. Speckle Phenomena in Optics: Theory and Applications. Englewood, Colorado: Roberts and Company Publishers, 2007. 387 p. URL: https://books.google.ru/books?id=MXAkngEACAAJ&redir_esc=y.
- [4] Зельдович Б.Я., Пилипецкий Н.Ф., Шкунов В.В. Обращение волнового фронта. Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. 240 с. URL: <https://libcats.org/book/504837>.
- [5] Клименко И.С. Голография сфокусированных изображений и спекл-интерферометрия. Москва: Наука, Главная редакция физ.-мат. лит., 1985. 224 с. URL: <https://djvu.online/file/9EmghZQLXqIX4>; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18898719>. EDN: <https://www.elibrary.ru/pxoowb>.
- [6] Марти Лопес Л. К определению поперечного размера спеклов // Журнал Технической Физики. 1991. Т. 61, вып. 8. С. 144–148. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/jtf4380>.



- [7] Alexander T.L., Harvey J.E., Weeks A.R. Average speckle size as a function of intensity threshold level: comparison of experimental measurements with theory // *Applied Optics*. 1994. Vol. 33, issue 35. P. 8240–8250. DOI: <https://doi.org/10.1364/AO.33.008240>.
- [8] Сальников И.И. Растровые пространственно-временные сигналы в системах анализа изображений. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 248 с. URL: <https://knigogid.ru/books/1918446-rastrovye-prostranstvenno-vremennye-signaly-v-sistemah-analiza-izobrazheniy>.
- [9] Красильников Н.Н. Цифровая обработка 2D- и 3D-изображений. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2011. 608 с. URL: <https://books.google.ru/books?id=ssYLMX5gLpkC&printsec=frontcover&hl=ru#v=onepage&q&f=false>.
- [10] Кэлер А., Брэдски Г. Изучаем OpenCV 3. Москва: ДМК Пресс, 2017. 826 с.
- [11] Содем Я.Э. Программирование компьютерного зрения на языке Python. Москва: ДМК-Пресс, 2016. 312 с. URL: https://vk.com/wall-53449719_9798?ysclid=m5w8gnmmr1556769599.
- [12] Хилл К. Научное программирование на Python. Москва: ДМК Пресс, 2021. 646 с. URL: <https://www.rulit.me/author/hill-kristian/nauchnoe-programmirovaniye-na-python-download-677121.html>.

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-84-91

Experimental assessment of determining the average size of speckles

Sergeev R.N. 

Samara National Research University, Samara, Russian Federation; romansr@yandex.ru;

Received: 11.09.2024

Revised: 27.10.2024

Accepted: 25.11.2024

Scientific article



Abstract. The paper proposes a method for estimating the average speckle size using experimentally recorded images of speckle fields on a CMOS matrix. This method can be useful when used in speckle interferometry methods when determining their metrological parameters.

Key words: speckle field; average speckle size; CMOS matrix; binarization; segmentation.

Funding. The work was supported by the Russian Science Foundation grant No. 23-29-10066.

Information about the conflict of interests: the author and reviewers declared no conflicts of interest.

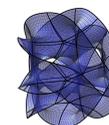
Citation. Sergeev R.N. Experimental assessment of determining the average size of speckles. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 84–91. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-84-91. (In Russ.)

© Sergeev R.N., 2024

Roman N. Sergeev (romansr@yandex.ru) – senior lecturer of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, engineer of NII-201 (Institute of Acoustics of Machines), Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Franson M. Speckle Optics. Moscow: Mir, 1980, 172 p. Available at: <https://libcats.org/book/438857>. (In Russ.)
- [2] Dainty J.C. Laser Speckle and Related Phenomena. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg GmbH, 1975, 288 p. Available at: <https://iypt.ru/wp-content/uploads/2019/07/Topics-in-Applied-Physics-Volume-9.pdf>.
- [3] Goodman J.W. Speckle Phenomena in Optics: Theory and Applications. Englewood, Colorado: Roberts and Company Publishers, 2007, 387 p. Available at: https://books.google.ru/books?id=MXAkngEACAAJ&redir_esc=y.
- [4] Zeldovich B.Ya., Pilipetskiy N.F., Shkunov V.V. Wave Front Reversal. Moscow: Nauka, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury, 1985, 240 p. Available at: <https://libcats.org/book/504837>. (In Russ.)
- [5] Klimenko I.S. Holography of focused images and speckle interferometry. Moscow: Nauka, Glavnaya redaktsiya fiz.-mat. lit., 1985, 224 p. Available at: <https://djvu.online/file/9EmghZQLXqIX4>; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18898719>. EDN: <https://www.elibrary.ru/pxoowb>. (In Russ.)
- [6] Lopez L.M. On determining the transverse size of speckles. *Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki*, 1991, vol. 61, issue 8, pp. 144–148. Available at: <https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS:A1991HJ93400022>. (In Russ.)
- [7] Alexander T.L., Harvey J.E., Weeks A.R. Average speckle size as a function of intensity threshold level: comparison of experimental measurements with theory. *Applied Optics*, 1994, vol. 33, issue 35, pp. 8240–8250. DOI: <https://doi.org/10.1364/AO.33.008240>.
- [8] Salnikov I.I. Raster spatio-temporal signals in image analysis systems. Moscow: FIZMATLIT, 2009, 248 p. Available at: <https://knigogid.ru/books/1918446-rastrovye-prostranstvenno-vremennye-signaly-v-sistemah-analiza-izobrazheniy>. (In Russ.)
- [9] Krasilnikov N.N. Digital processing of 2D and 3D images. Saint Petersburg: BKhV-Peterburg, 2011, 608 p. Available at: <https://books.google.ru/books?id=ssYLMX5gLpkC&printsec=frontcover&hl=ru#v=onepage&q&f=false>. (In Russ.)
- [10] Kaehler A., Bradski G. Learning OpenCV 3. Moscow: DMK Press, 2017, 826 p. (In Russ.)
- [11] Solem J.E. Programming Computer Vision with Python. Moscow: DMK-Press, 2016, 312 p. Available at: https://vk.com/wall-53449719_9798?ysclid=m5w8gnmmr1556769599. (In Russ.)
- [12] Hill Ch. Scientific programming in Python. Moscow: DMK Press, 2021, 646 p. Available at: <https://www.rulit.me/author/hill-kristian/nauchnoe-programmirovanie-na-python-download-677121.html>. (In Russ.)



Численное моделирование температурного поля нефтепровода для теплового метода измерения толщины парафиновых отложений с учетом движения нефти

Артур М.Х.¹, Рыжова Е.А.¹, Ярославкина Е.Е.¹

Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация;
m.h.artur@yandex.ru (М.Х.); rka2307@yandex.ru (Е.А.); yaroslavkina7@gmail.com (Е.Е.);

Поступила: 18.10.2024

Рассмотрена: 23.11.2024

Принята: 25.11.2024

Научная статья



Аннотация. В статье приводится анализ проблем выпадения асфальтосмолопарафиновых отложений на внутренней поверхности стенок трубопроводов. Рассматривается задача численного моделирования температурного поля нагреваемого нефтепровода в программном продукте ANSYS. Исследуется процесс нагревания и остывания трубопровода при разной толщине отложений и скорости нефти. Разработана двумерная численная модель нефтепровода, которая позволяет изучить поведение его температурного поля в процессе нагрева и остывания. Разработанные в статье исследования помогают сократить затраты на обслуживание нефтепроводов.

Ключевые слова: трубопроводный транспорт нефти; толщина АСПО; парафиновые отложения; численное моделирование; тепловой метод измерения; нефтепровод; движение нефти; температурное поле; кольцевой электронагреватель.

Введение

В связи с тем что доля трудно извлекаемых запасов нефти с высокой вязкостью постоянно растет, проблема выпадения асфальтосмолопарафиновых отложений (АСПО) на внутренней поверхности стенок труб при добыче и транспортировке нефти приобретает все большее значение. АСПО представляют собой густую вязкую массу, содержащую в себе парафины, смолы, асфальтены, масла, а также серу, различные металлы и минеральные соединения. Процентное соотношение компонентов АСПО зависит от природы нефти и различных факторов в скважинах и системах сбора нефти [1].

Процесс образования АСПО определяется многими факторами, среди которых физико-химические характеристики и химический состав нефти, степень шероховатости нефтепровода, гидродинамические характеристики потока и др. Наибольший вклад в образование парафиновых отложений вносит температурный фактор: при понижении температуры на внутренней стенке трубопровода образуются парафиновые отложения [2; 3].

Отложения АСПО приводят к увеличению расхода электрической энергии на транспортировку нефти и дополнительным экономическим затратам, поскольку из-за сужения поперечного сечения труб и увеличения сопротивления движению нефти уменьшается пропускная способность трубопровода, снижается эффективность работы насосных установок, сокращается межремонтный период [4; 5]. Кроме того, возрастает риск возникновения аварийных ситуаций в связи с закупоркой и разрывом трубопровода, что, помимо финансовых и временных затрат на ремонт и замену оборудования, влечет за собой затраты на восстановление экологической ситуации.

Для борьбы с отложениями парафина в нефтепроводах в настоящее время применяют различные способы: механические (использование различных по конструкции и материалу

скребков и поршней); тепловые (промывка горячим теплоносителем, электропрогрев); физические (магнитный; акустический, гидродинамический); химические (закачка растворителей и ингибиторов, применение моющих препаратов) [6; 7]. Выбор метода очистки в том числе зависит от толщины АСПО. Однако в независимости от используемого метода очистка нефтепровода от АСПО связана с возрастанием затрат на эксплуатацию и обслуживание трубопроводов, повышением рисков для экологической обстановки и здоровья людей, так как при удалении отложений могут высвобождаться вредные вещества в окружающую среду, а также с повышением риска коррозии, так как парафиновые отложения предотвращают прямой контакт металла с агрессивной средой [8–10]. В связи с вышеизложенным важно правильно оценить толщину отложений, так как это позволит определить наиболее подходящее время очистки трубопровода, что снизит затраты на его эксплуатацию и риск аварий, а также выбрать наиболее эффективный подходящий способ очистки отложений.

Одним из перспективных методов оценки толщины отложений является модифицированный тепловой метод измерения парафиновых отложений, при котором используются три кольцевых нагревателя [11; 12]. Однако для реализации этого метода необходимо знать, как будет изменяться температурное поле в процессе нагрева и остывания нефтепровода при слоях парафина разной толщины. Получить такие данные экспериментально затруднительно в связи с разнообразием параметров исследуемых объектов (теплофизические свойства материалов, толщина отложений, размеры нефтепровода, характеристики нагревательных элементов и т. д.). В целях упрощения реализации теплового метода измерений в данной работе предлагается двумерная осесимметричная модель поведения температурного поля нефтепровода при нагреве его поверхности с помощью кольцевых электронагревателей.

1. Описание объекта моделирования

Объект моделирования представляет собой участок нефтепровода с наружным диаметром 32 мм, толщиной стенки 2 мм, по которому движется нефть с постоянной скоростью v_H . Поток считается ламинарным. Моделирование проведено для скоростей v_H 10 мм/с, 100 мм/с и 500 мм/с, длина моделируемого участка 2 м. Температура поступающей в нефтепровод нефти 10 °С.

Таблица

Теплофизические свойства материалов

Table

Thermophysical properties of materials

Блок	Теплопроводность, λ	Удельная теплоемкость, с	Плотность, ρ
Нагреватель (алюминий)	236 Вт/К·м	900 Дж/кг·К	2700 кг/м ³
Термоизолятор(минеральная вата)	0,03 Вт/К·м	835 Дж/кг·К	32 кг/м ³
Труба (сталь)	58 Вт/К·м	482 Дж/кг·К	7850 кг/м ³
Нефть	0,15 Вт/К·м	880 Дж/кг·К	857 кг/м ³
Парафин	0,27 Вт/К·м	2200 Дж/кг·К	900 кг/м ³

Нефтепровод нагревается тремя кольцевыми электронагревателями с прямоугольным сечением 4 × 6 мм, расположенными на расстоянии 2 мм друг от друга. Объемная плотность тепловыделения каждого электронагревателя — 500 кВт/м³.

Толщина парафина d считается неизменной по всей длине моделируемого участка. Моделирование проводится для d в диапазоне от 2 до 6 мм с шагом 2 мм.

Измерение температуры T происходит под центральным нагревателем. Максимальная температура нагрева — 50 °С под датчиком измерения в целях недопущения оплавления парафина.

Поскольку разница между максимальным и минимальным значением температурного поля в процессе нагрева не превышает 60°C , теплофизические свойства (см. табл.) материалов принимаются постоянными [13; 14].

2. Численное моделирование температурного поля нагреваемого нефтепровода

Двумерная нестационарная численная модель поведения температурного поля в процессе нагрева и остывания нефтепровода с учетом движения нефти была разработана в соответствии с алгоритмом, показанным на рисунке 2.1.

Моделирование движения нефти основано на смещении температурного поля перед каждым временным шагом термического анализа. Этот подход может быть применен только для моделирования нагрева нефтепровода постоянного сечения с ламинарным течением нефти без ускорения [15; 16]. Моделирование блока «Нефть» проведем с помощью прямоугольных элементов с одинаковой длиной стороны по направлению движения. Фрагмент геометрии модели с разделением на элементы представлен на рисунке 2.2. Для численного моделирования непрерывный процесс заменяется достаточно большим количеством временных шагов.

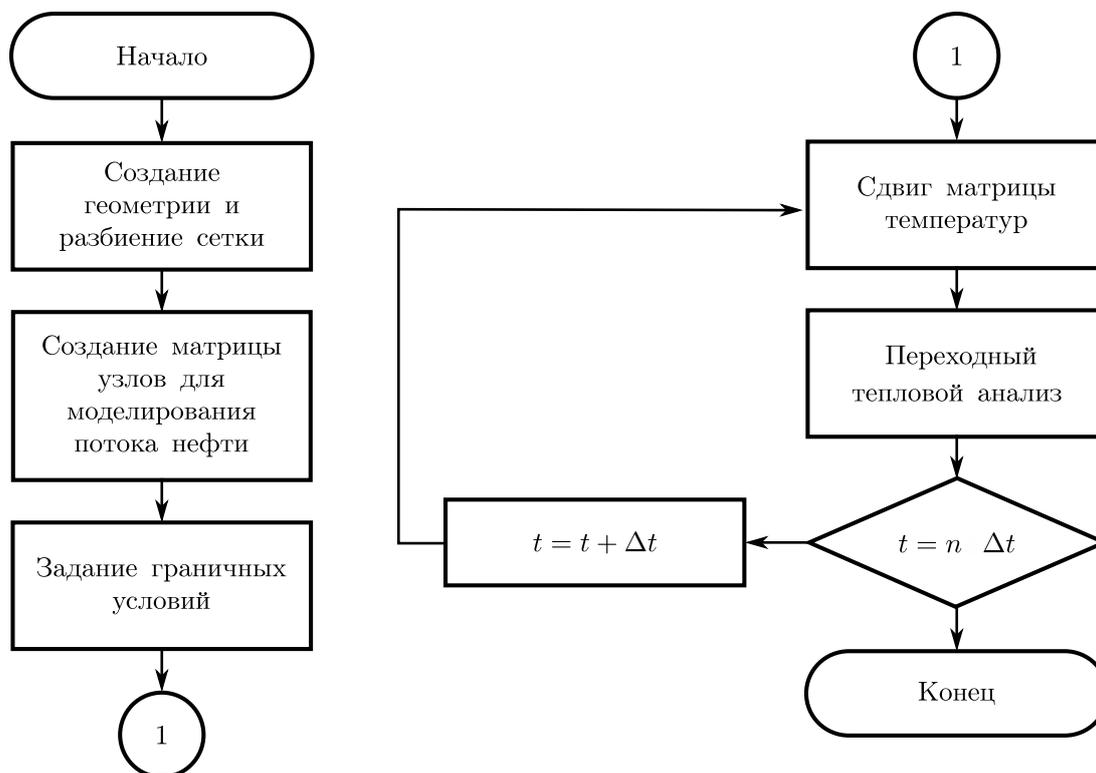


Рис. 2.1. Алгоритм теплового анализа нефтепровода с равномерным течением нефти
Fig. 2.1. Algorithm for thermal analysis of an oil pipeline with uniform oil movement

Термический анализ включает моделирование тепловых потерь за счет конвекции с поверхности изоляции нефтепровода. После задания граничных условий проводится моделирование температурного поля нефтепровода без нагрева до достижения квазистационарного режима, который считается достигнутым, когда изменение температуры в точке измерения составляет не более $0,01^{\circ}\text{C}$ за 100 с. Эта температура принимается за начальную T_{H} . Далее моделируется переходный процесс нагрева до достижения квазистационарного режима с включенными нагревателями. Температурное поле нефтепровода перед процессом нагрева и в конце процесса нагрева отражено на рисунке 2.3.

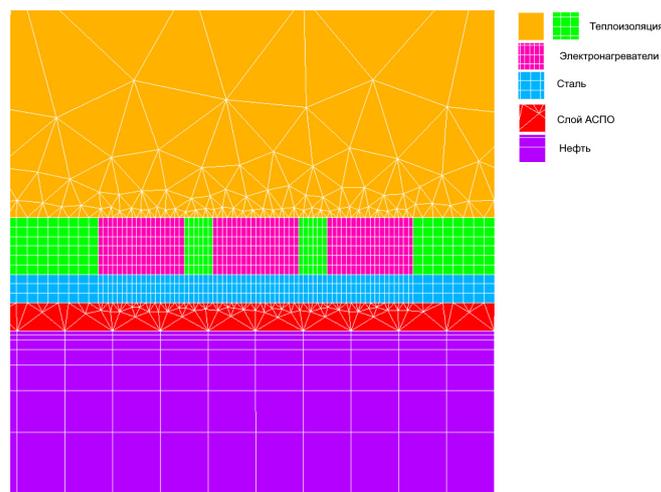


Рис. 2.2. Геометрия и конечно-элементная сетка фрагмента нефтепровода с тремя электронагревателями

Fig. 2.2. Geometry and FEM mesh of an oil pipeline fragment with three electric heaters

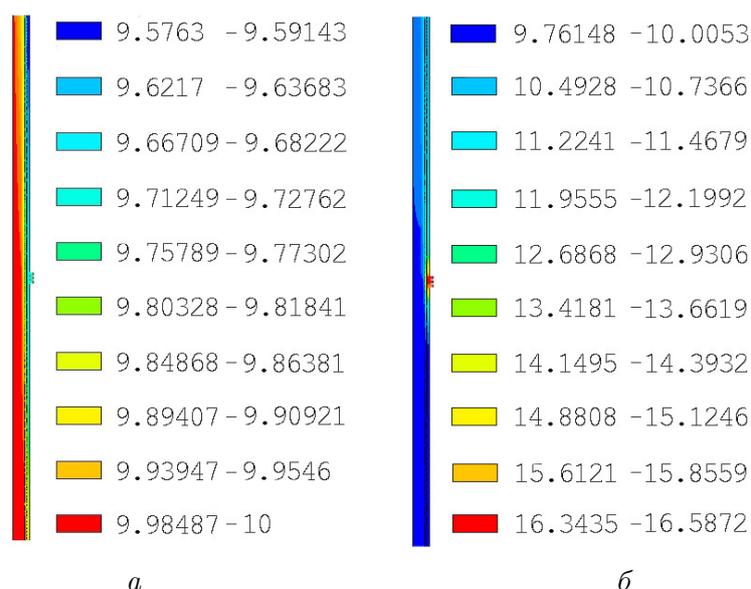


Рис. 2.3. Распределение температурного поля (°C) в продольном сечении нефтепровода при толщине парафина 2 мм: а) при квазистационарном режиме до процесса нагрева; б) при квазистационарном режиме в процессе нагрева

Fig. 2.3. Distribution of the temperature field (°C) in the longitudinal section of the oil pipeline with a paraffin thickness of 2 mm: a) in a quasi stationary mode before the heating process; b) in a quasi stationary mode during the heating process

На рис. 2.4 представлены графики изменения относительной температуры $\Delta T = T - T_H$ в процессе нагрева и остывания нефтепровода при различных скоростях нефти. Полученные результаты соответствуют известным физическим закономерностям поведения температурного поля в процессе нагрева и остывания с учетом различной толщины парафинового слоя и скорости нефти. Анализ графиков показывает, что изменение толщины парафинового слоя оказывает существенное воздействие на динамику температуры стенок нефтепровода, подтверждая тем самым эффективность использования теплового анализа для измерения толщины АСПО. Также из представленных графиков можно сделать вывод, что при скоростях ниже

100 мм/с целесообразно при моделировании учитывать скорость потока. Увеличение скорости выше 100 мм/с не оказывает существенного влияния на поведение температуры при одинаковой толщине АСПО, т. е. соблюдается граничное условие первого рода, которое задает распределение температуры на поверхности тела для каждого момента времени. В этом случае можно упростить рассматриваемую модель, приняв температуру на границе парафин – нефть постоянной [12].

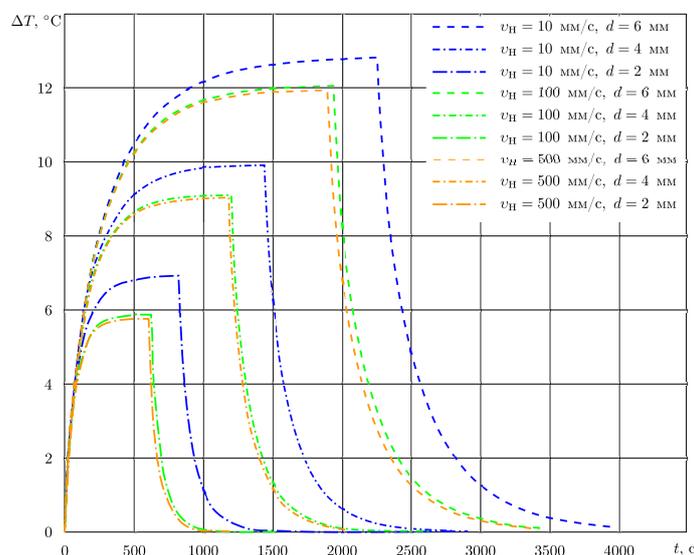


Рис. 2.4. Графики процессов нагрева и остывания трубопровода при разной толщине отложений и скорости нефти

Fig. 2.4. Graphs of pipeline heating and cooling processes at different deposit thicknesses and oil velocities

Заключение

С использованием программы ANSYS была разработана двухмерная численная модель нефтепровода, которая позволяет изучить поведение его температурного поля в процессе нагрева и остывания. Сравнение графиков, полученных в процессе моделирования, с графиками фактического изменения температуры нефтепровода при разных скоростях потока нефти позволяет оценить толщину парафиновых отложений, что способствует рациональному выбору методов и времени для очистки труб. Проведенные исследования помогают сократить затраты на обслуживание нефтепроводов.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Цитирование. Артур М.Х., Рыжова Е.А., Ярославкина Е.Е. Численное моделирование температурного поля нефтепровода для теплового метода измерения толщины парафиновых отложений с учетом движения нефти // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 4. С. 92–100. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-92-100.

© Артур М.Х., Рыжова Е.А., Ярославкина Е.Е., 2024

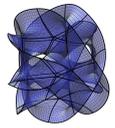
Мария Хамилъевна Артур (m.h.artur@yandex.ru) – кандидат технических наук, доцент кафедры информационно-измерительной техники, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Екатерина Андреевна Рыжова (rka2307@yandex.ru) – студент кафедры информационно-измерительной техники, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Екатерина Евгеньевна Ярославкина (yaroslavkina7@gmail.com) – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой информационно-измерительной техники, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Литература

- [1] Шарифуллин А.В., Байбекова Л.Р., Сулейманов А.Т., Хамидуллин Р.Ф., Шарифуллин В.Н. Особенности состава и строения нефтяных отложений // Технологии нефти и газа. 2006. № 6 (47). С. 19–24. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=12228988>. EDN: <https://elibrary.ru/khpueh>.
- [2] Лоскутова Ю.В., Прозорова И.В., Березина Е.М., Волкова Г.И. Подготовка и транспорт проблемных нефтей (научно-практические аспекты). Томск: Издательский дом Томск. гос. ун-та, 2015. 135 с. URL: <https://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000508019>.
- [3] Тронов В.П. Механизм образования смоло-парафиновых отложений и борьба с ними. Москва: Недра, 1969. 192 с. URL: <https://djvu.online/file/DL8v917e6fAaB>.
- [4] Фиков А.С. Потенциал энергосбережения от очистки магистральных нефтепроводов // Вестник Белорусско-Российского университета. 2010. № 1. С. 174–181. URL: <http://e.biblio.bru.by/handle/1212121212/1668?show=full>.
- [5] Илюшин П.Ю., Лекомцев А.В., Ладейщикова Т.С., Рахимзянов Р.М. Оценка эффективности метода холодный поток в борьбе с асфальтосмолопарафиновыми отложениями // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Геология. Нефтегазовое и горное дело = Bulletin of PNRPU. Geology. Oil and gas engineering and mining. 2018. Т. 18, № 1. С. 53–62. DOI: <https://doi.org/10.15593/2224-9923/2018.3.5>. EDN: <https://elibrary.ru/oovrrk>.
- [6] Хасанова К.И., Дмитриев М.Е., Мастобаев Б.Н. Повышение эффективности применения средств и методов борьбы с асфальтосмолопарафиновыми отложениями в процессе транспорта нефти по магистральным трубопроводам // Транспорт и хранение нефтепродуктов и углеводородного сырья. 2013. № 3. С. 7–12. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21231175>. EDN: <https://elibrary.ru/rwrqqn>.
- [7] Акрамов Т.Ф., Яркеева Н.Р. Борьба с отложениями парафиновых, асфальтосмолистых компонентов нефти // Нефтегазовое дело. 2017. Т. 15, № 4. С. 67–72. DOI: <https://doi.org/10.17122/ngdelo-2017-4-67-72>.
- [8] Хасанов И.И., Шакиров Р.А., Леонтьев А.Ю., Логинова Е.А. Применение асфальтосмолопарафиновых отложений в качестве внутренней тепловой изоляции магистральных нефтепроводов // Транспорт и хранение нефтепродуктов и углеводородного сырья. 2018. № 4. С. 32–39. DOI: <https://doi.org/10.24411/0131-4270-2018-10405>. EDN: <https://elibrary.ru/vvezby>.
- [9] Гильмутдинов Н.Р., Дмитриев М.Е., Мастобаев Б.Н. Новые направления использования асфальтосмолопарафиновых отложений в процессе трубопроводного транспорта нефти // Транспорт и хранение нефтепродуктов и углеводородного сырья. 2015. № 2. С. 8–12. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=25616293>. EDN: <https://elibrary.ru/voopgj>.
- [10] Ревель-Муроз П.А., Гильмутдинов Н.Р., Дмитриев М.Е., Мастобаев Б.Н. Использование асфальтосмолопарафиновых отложений в качестве тепловой и антикоррозионной изоляции нефтепроводов // Транспорт и хранение нефтепродуктов и углеводородного сырья. 2016. № 3. С. 12–16. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29312498>. EDN: <https://elibrary.ru/yrlovr>.



- [11] Табет Н.К.А., Фетисов В.С. Термодинамический способ определения толщины отложений парафина на внутренней поверхности нефтепровода // Электротехнические и информационные комплексы и системы. 2019. Т. 15, № 2. С. 105–112. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=41328781>. EDN: <https://elibrary.ru/qriqyz>.
- [12] Табет Н.К.А. Система автоматического контроля толщины парафиновых отложений в нефтепроводах на основе модифицированного теплового метода измерения: автореф. дис. ... канд. техн. наук. Уфа: УГАТУ, 2020. 20 с. URL: https://ugatu.su/media/uploads/MainSite/Science/dissovet/02/2019/TabetNKA/autoref_TabetNKA.pdf.
- [13] Агапкин В.М., Борисов С.Н., Кривошеин Б.Л. Справочное руководство по расчетам трубопроводов. Москва: Недра, 1987. 191 с.
- [14] ГОСТ 4640-2011 Вата минеральная. Технические условия. Методы испытаний. Москва: Стандартинформ, 2019. 16 с. URL: https://alter-plus.ru/files/GOST_4640-2011_7369.pdf.
- [15] Galunin S., Zlobina M., Blinov K., Nikanorov A., Zedler T., Nacke B. Numerical analysis of coupled physics for induction heating of movable workpieces // Modelling for Electromagnetic Processing // Proceedings of the International Scientific Colloquium in Hannover, Germany. Hannover, 2008. P. 59–64. URL: <http://www.modlab.lv/publications/mep2008/pdfs/71-76.pdf>.
- [16] Blinov K., Nikanorov A., Nacke B., Klupzig M. Numerical simulation and investigation of induction through-heaters in dynamic operation mode // COMPEL – The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering. 2011. Vol. 30, issue 5, P. 1539–1549. DOI: <https://doi.org/10.1108/03321641111152694>.

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-92-100

Numerical simulation of the oil pipeline temperature field for the thermal method of measuring the thickness of paraffin deposits taken into account of oil movement

Artur M.Kh.^{ID}, Ryzhova E.A.^{ID}, Yaroslavkina E.E.^{ID}

Samara State Technical University, Samara, Russian Federation; m.h.artur@yandex.ru (M.Kh.); rka2307@yandex.ru (E.A.); yaroslavkina7@gmail.com (E.E.);

Received: 18.10.2024

Revised: 23.11.2024

Accepted: 25.11.2024

Scientific article



Abstract. The article provides an analysis of the problems of precipitation of asphalt-resin-paraffin deposits on the inner surface of the walls pipelines. The problem of numerical modeling of the temperature field of the heated oil pipeline in the ANSYS software product is considered. The process of heating and cooling the pipeline at different sediment thicknesses and oil velocities is investigated. A two-dimensional numerical model of the oil pipeline has been developed, which allows studying the behavior of its temperature field during heating and cooling. The research developed in the article helps to reduce the cost of maintaining oil pipelines.

Key words: oil pipeline transport; paraffin deposits thickness; paraffin deposits; numerical modeling; thermal measurement method; oil pipeline; oil movement; temperature field; ring electric heater.

Information about the conflict of interests: the authors and reviewers declared no conflicts of interest.

Citation. Artur M.Kh., Ryzhova E.A., Yaroslavkina E.E. Numerical simulation of the oil pipeline temperature field for the thermal method of measuring the thickness of paraffin deposits taken into account of oil movement. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 92–100. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-92-100. (In Russ.)

© Artur M.Kh., Ryzhova E.A., Yaroslavkina E.E., 2024

Maria Kh. Artur (m.h.artur@yandex.ru) – Candidate of Technical Sciences, assistant professor of the Department of Information and Measurement Technology, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya Street, Samara, 443100, Russian Federation.

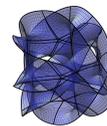
Ekaterina A. Ryzhova (rka2307@yandex.ru) – student of the Department of Information and Measurement Technology, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya Street, Samara, 443100, Russian Federation.

Ekaterina E. Yaroslavkina (yaroslavkina7@gmail.com) – Candidate of Technical Sciences, associate professor, head of the Department of Information and Measurement Technology, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya Street, Samara, 443100, Russian Federation.

References

- [1] Sharifullin A.V., Baybekova L.R., Suleymanov A.T., Khamidullin R.F., Sharifullin V.N. Features of composition and structure of oil deposits. *Oil and Gas Technologies*, 2006, no. 6 (47), pp. 19–24. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=12228988>. EDN: <https://elibrary.ru/khpuex>. (In Russ.)
- [2] Loskutova Yu.V., Prozorova I.V., Berezina E.M., Volkova G.I. Preparation and transport of problem oils (research and practical aspects). Tomsk: Izdatel'skii dom Tomsk. gos. un-ta, 2015, 135 p. Available at: <https://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000508019>. (In Russ.)
- [3] Tronov V.P. The mechanism of formation of gum paraffin deposits and their control. Moscow: Nedra, 1970, 192 p. Available at: <https://djvu.online/file/DL8v9l7e6fAaB>. (In Russ.)
- [4] Fikov A.S. Potential of energy efficiency from clearing of the oil-trunk pipelines. *Belarusian-Russian University Bulletin*, 2010, no. 1 (26), pp. 174–181. Available at: <http://e.biblio.bru.by/handle/1212121212/1668?show=full>. (In Russ.)
- [5] Ilyushin P.Yu., Lekomtsev A.V., Ladeyshchikova T.S., Rakhimzyanov R.M. The efficiency assessment of the “Cold Flow” method against the deposition of asphaltenes, resins and paraffins. *Perm Journal of Petroleum and Mining Engineering*, 2018, vol. 18, no. 1, pp. 53–62. DOI: <https://doi.org/10.15593/2224-9923/2018.3.5>. EDN: <https://elibrary.ru/oovrrk>. (In Russ.)
- [6] Hasanova K.I., Dmitriev M.E., Mastobaev B.N. More effective use of poverty and methods asphaltene deposition in the transport process of oil through pipelines. *Transport and Storage of Oil Products and Hydrocarbons*, 2013, no. 3, pp. 7–12. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21231175>. EDN: <https://elibrary.ru/rwpqqn>. (In Russ.)
- [7] Akramov T.F., Iarkeeva N.R. Control deposits of paraffin, asphalt-resin components of oil. *Petroleum Engineering*, 2017, vol. 15, no. 4, pp. 67–72. DOI: <https://doi.org/10.17122/ngdelo-2017-4-67-72>. (In Russ.)
- [8] Khasanov I.I., Shakirov R.A., Leontyev A.Yu., Loginova E.A. Application of Heavy Oil Deposits as Thermal Insulating Layer in Major Pipelines. *Transport and Storage of Oil Products and*

- Hydrocarbons*, 2018, no. 4, pp. 32–39. DOI: <https://doi.org/10.24411/0131-4270-2018-10405>. EDN: <https://elibrary.ru/vvezby>. (In Russ.)
- [9] Gilmutdinov N.R., Dmitriev M.E., Mastobaev B.N. New directions of use of asphaltene deposition in pipeline transport of oil. *Transport and Storage of Oil Products and Hydrocarbons*, 2015, no. 2, pp. 8–12. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=25616293>. EDN: <https://elibrary.ru/voopgj>. (In Russ.)
- [10] Revel’-Muroz P.A., Gil’mutdinov N.R., Dmitriev M.E., Mastobaev B.N. Using of asphaltene deposits as a heat and corrosion insulation of oil pipelines. *Transport and Storage of Oil Products and Hydrocarbons*, 2016, no. 3, pp. 12–16. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29312498>. EDN: <https://elibrary.ru/yrlovr>. (In Russ.)
- [11] Thabet N.K.A., Fetisov V.S. Thermodynamic method of determination of thickness of paraffin sediments on oil pipeline inner surface. *Electrical and data processing facilities and systems*, 2019, vol. 15, no. 2, pp. 105–112. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=41328781>. EDN: <https://elibrary.ru/qriqyz>. (In Russ.)
- [12] Tabet N.K.A. Automatic control system of paraffin deposit thickness in oil pipelines based on modified thermal measurement method: author’s abstract of Candidate’s of Engineering Sciences thesis. Ufa: UGATU, 2020, 20 p. Available at: https://ugatu.su/media/uploads/MainSite/Science/dissovet/02/2019/TabetNKA/autoref_TabetNKA.pdf. (In Russ.)
- [13] Agapkin V.M., Borisov S.N., Krivoshein B.L. Reference guide for pipeline calculations. Moscow: Nedra, 1987, 53 p. (In Russ.)
- [14] State Standard 4640–2011. Mineral wool. Specifications. Moscow: Standartinform, 2019, 16 p. Available at: https://alter-plus.ru/files/GOST_4640-2011_7369.pdf. (In Russian)
- [15] Galunin S., Zlobina M., Blinov K., Nikanorov A., Zedler T., Nacke B. Numerical analysis of coupled physics for induction heating of movable workpieces. In: *Modelling for Electromagnetic Processing. Proceedings of the International Scientific Colloquium in Hannover, Germany*. Hannover, 2008, pp. 59–64. Available at: <http://www.modlab.lv/publications/mep2008/pdfs/71-76.pdf>.
- [16] Blinov K., Nikanorov A., Nacke B., Klupzig M. Numerical simulation and investigation of induction through-heaters in dynamic operation mode. *COMPEL – The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 2011, vol. 30, issue 5, pp. 1539–1549. DOI: <https://doi.org/10.1108/03321641111152694>.



Неизотермическая математическая модель блокирования техногенных трещин

Касперович А.М.^{ORCID}, Шевелев А.П.^{ORCID}, Гильманов А.Я.^{ORCID}

Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация; kasperovich_anton@mail.ru (А.М.); a.p.shevelev@utmn.ru (А.П.); a.y.gilmanov@utmn.ru (А.Я.);

Поступила: 10.08.2024

Рассмотрена: 13.09.2024

Принята: 25.11.2024

Научная статья



Аннотация. В настоящий момент крупные нефтяные месторождения перешли на стадию падающей добычи, для поддержания пластового давления залежи необходимо применять технологии заводнения. С целью сохранения прежних темпов добычи нефти требуется форсировать отборы путем увеличения значения забойного давления на нагнетательном фонде скважин. Однако при этом увеличиваются риски превышения давления разрыва пласта, что способно привести к образованию техногенных трещин автогидроразрыва пласта (автоГРП). Интенсивное увеличение трещины автоГРП вызывает рост рисков преждевременного достижения воды по ней в зону дренирования добывающего фонда скважин, что, в свою очередь, приведет к увеличению значения обводненности добываемой продукции. Проведенный анализ актуальных численных математических моделей кольматирования техногенных трещин показал текущий статус определения объема утечек кольматационного агента за пределы трещины с учетом изменения температурного поля на забое нагнетательной скважины. Указанная проблема является актуальной, поскольку на ряде нефтегазовых месторождений проводились специальные комплексы исследований по определению роста техногенных трещин автоГРП, возникших в результате превышения давления разрыва пласта и попавших в зону дренирования добывающих скважин. Изменение температурного поля пласта позволит напрямую отследить изменения вязкости нагнетаемого кольматирующего агента, а также определить объем утечек агента за пределы трещины автоГРП. В работе описано построение неизотермической физико-математической модели нагнетания суспензионной системы (вода – реагент) в пласт с учетом изменения температурного поля пласта объема утечек реагента за пределы трещины автоГРП, учтенного впервые. Целью работы является установление зависимостей объема утечек кольматирующего агента, критического времени заполнения трещины от изменения температурного поля на забое нагнетательной скважины. Построена неизотермическая гидродинамическая модель, показывающая этапы инициации трещины автоГРП с последующей ее кольматацией. Получено распределение концентрации осевшего реагента как в трещине, так и за ее пределами в зависимости от изменения температурного поля на забое скважины. Определено, что объем утечек реагента уменьшается в случае учета изменения температурного поля на забое нагнетательной скважины при идентичных параметрах работы скважины и геолого-физических характеристиках пласта.

Ключевые слова: неизотермическое гидродинамическое моделирование; автогидроразрыв пласта; поддержание пластового давления; объем утечек реагента; температурное поле.

Введение

В настоящий момент основная добыча нефти происходит на месторождениях с трудноизвлекаемыми запасами, в результате чего системы ППД используют уже на начальной стадии разработки месторождения. Подача нагнетательного агента в пласт, как правило, происходит с определенным значением забойного давления в целях предотвращения образования автоматических трещин гидроразрыва пласта (автоГРП) [5]. В случае превышения значения забойного

давления над давлением разрыва пласта существует риск образования трещины автоГРП, которая приводит к образованию зон недренируемых запасов нефти и преждевременному прорыву нагнетаемой воды к добывающему фонду скважин [3]. С целью снижения рисков дальнейшего прорыва воды к добывающим скважинам проводят специальные исследования, позволяющие определить инициацию и последующий рост трещины автоГРП [10].

Комплекс специальных исследований по фиксации роста трещин автоГРП происходили на Приобском месторождении [6; 7; 13; 14] (РФ) и месторождении Daqing [8] (КНР). Учитывая ухудшенные свойства продуктивного пласта Приобского месторождения, при проектировании разработки данного месторождения принято решение форсированного отбора пластового флюида путем увеличения значений забойного давления на нагнетательном фонде скважин, превышающих значения давления гидроразрыва пласта. В результате проведения комплекса специальных промыслово-геофизических исследований (ПГИ) получен профиль трещины автоГРП, размеры которых способны достигать километровой длины. Одним из возможных решений по частичной ликвидации трещин автоГРП является ее частичная кольматация путем закачки кольматирующих агентов.

В исследовании [1] рассматривается оценка эффективности использования полимер-дисперсных частиц для блокирования трещин в автоГРП. Исследование основывается на математической модели, которая анализирует процесс закачки и транспортировки суспензии по трещине и оценивает действие полимер-дисперсных составов. Важным результатом работы стало выявление того, что при приближении разрыва на фронте суспензии к окончанию техногенной трещины происходит инициация разрыва доли частиц кольматационного агента, движущегося в направлении потока.

В представленных научных исследованиях не описывается теория разрастания трещин автоГРП под воздействием закачки реагента. Этот вопрос был рассмотрен в работе [8]. Материалами, способными выступать в роли реагентов, могут быть полимерные составы и суспензии. Работа содержит изучение формы и характеристик развития трещин, спровоцированных введением вязкой суспензии в слабokonсолидированный песчаник при двустороннем давлении. Результаты продемонстрировали, что форма трещин, созданных вязкими веществами в неукрепленной пластовой формации, является в основном плоской.

Детальное описание построения моделей инициализации и роста техногенных трещин автоГРП раскрыто в работах [4; 9; 15; 20]. В данных исследованиях представлены критерии для описания характеристик скорости распространения трещины и ее ориентации, а также методы контроля над процессом развития трещин.

В настоящее время количество опубликованных исследований, посвященных моделированию блокировки трещин автоГРП в гидродинамических симуляторах недостаточно для формирования конкретной методики проведения цикла расчетов по определению количества кольматирующего агента для блокирования трещин автоГРП. Однако в работах [2; 16] рассматриваются особенности геолого-гидродинамического моделирования заводнения с использованием полимеров. Разница между полимерным заводнением и тем, что рассматривается в данной статье, заключается в том, что в первом случае закачивается большое количество жидкости и не образуются трещины.

Процесс оседания частиц суспензии в пористом материале описан в работах [11; 12; 17–19]. Различают два механизма закрепления частиц суспензии (полимерного материала) в пористых структурах: механический (это процесс, при котором более крупные полимерные молекулы механически блокируются в узких каналах пористой породы) и гидродинамический (это процесс, когда некоторые полимерные молекулы временно задерживаются гидродинамическими силами во впадинах, образуя соединения между друг другом по схеме, представленной на рисунке 1.

Стоит отметить, что в работе [21] описано построение изотермической гидродинамической модели частичного блокирования трещины автоГРП с помощью закачки кольматирующего агента. Проведенный анализ вышеуказанных исследований показывает, что существующие численные модели не учитывают изменения температурного поля на забое нагнетаемой скважины, учет которого напрямую влияет на вязкость образовавшегося раствора, тем самым

процесс кольтматации трещины будет существенно отличаться от процесса, рассмотренного в работе [21].

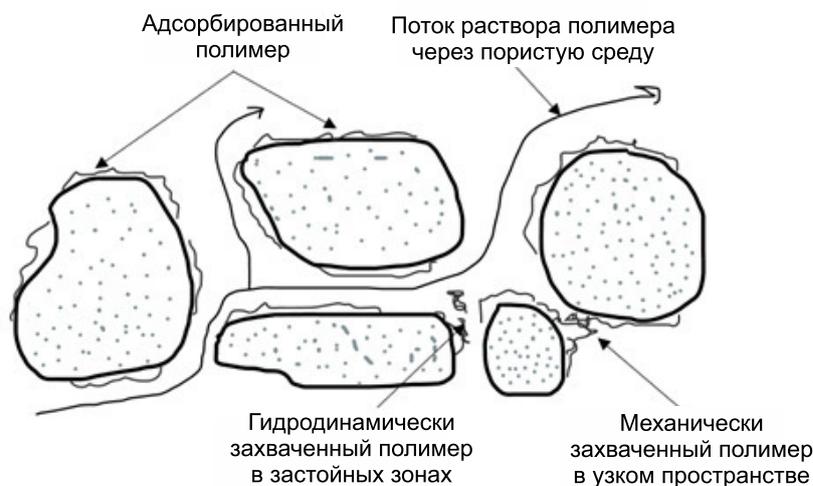


Рис. 1. Схема механизмов удержания частиц полимера в объеме пористого скелета
 Fig. 1. Diagram of the mechanisms of retention of polymer particles in the volume of a porous skeleton

Целью работы является установление зависимостей объема утечек кольтматирующего агента, критического времени заполнения трещины от изменения температурного поля на забое нагнетательной скважины. Также стоит отметить, что гидродинамическая модель, учитывающая объем утечек реагента за пределы трещины автоГРП с учетом изменения температурного поля на забое нагнетательной скважины, предлагается впервые.

1. Материалы и методы

С целью решения поставленной задачи необходимо создать физико-математическую модель нагнетания кольтматационного агента в пласт с учетом изменения температурного поля на забое нагнетательной скважины. Гидродинамическая модель построена и посчитана при помощи современного вычислительного программного обеспечения на базе коммерческого гидродинамического симулятора tNavigator. В симуляторе применяется неизотермическая трехфазная модель черной нефти (black-oil) с использованием температурной опции.

Для решения задачи частичного блокирования трещины автоГРП кольтматационным агентом в качестве несущей фазы выбран раствор воды и полимера. Использование полимера в качестве кольтматирующего агента для решения поставленной задачи обуславливается наибольшим опытом полимерной обработки существующих трещин автоГРП.

Следующим этапом решения поставленной задачи является постановка математической задачи кольтматирования трещин автоГРП, включающей в себя основные уравнения механики многофазных систем. Уравнения неразрывности фаз имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi N_f) = \text{div} \left(x_{c,f} \varepsilon_f \left(k \frac{k_{rf}}{\mu_f} (\nabla P_f - \gamma_f \nabla D) \right) + q_c \right), \quad (1)$$

где f — фаза флюида; N_f — молярная плотность компонента; φ — пористость; P_f — давление фазы; $x_{c,f}$ — молярная доля компонента в компоненте фазы; ε_f — молярная плотность фазы; $k = k(P_f, x, y, z)$ — тензор абсолютной проницаемости; k_{rf} — относительная фазовая проницаемость; μ_f — вязкость фазы; γ_f — вертикальный градиент давления; $D = D(x, y, z)$ — вектор глубины; $q_c = q_c(p, N, t, x, y, z)$ — источник компонента c (скважина).

Уравнение сохранения энергии, необходимое для учета изменения температурного поля на забое нагнетательной скважины, представляется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (V_b E_{tot}) = - \int_{\partial V_b}^{V_b + \partial V_b} \left(\sum_{p=1}^{n'_p} H_p \varepsilon_p U_p \right) ds + \int_{\partial V_b}^{V_b + \partial V_b} K_b \nabla T ds + Q_{Re} + q_c. \quad (2)$$

Здесь V_b — объем блока; E_{tot} — результирующая энергия; n'_p — число фаз в модели; H_p — энтальпия компонента фазы; U_p — потенциальная энергия компонента фазы; K_b — теплопроводность блока расчетной сетки; T — температура пласта; Q_{re} — дополнительный поток энергии, возникший за счет химических превращений в пласте.

Закон сохранения массы полимера описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (M_{poly} + M_{ads}) + \nabla (u_{poly} C_{poly}) - Q_{poly} = 0 \\ M_{ads} = C_{ads} \rho_{rock} V_{rock} \\ V_{rock} = V_{full} - V_{pore} \\ V_{poly} = V_{pore} (1 - \varphi_{d\ pv}) \end{cases}.$$

Здесь M_{poly} — масса полимера в блоке; M_{ads} — масса адсорбата в блоке; u_{poly} — скорость течения полимера между блоками, являющаяся зависимостью от проводимости соединения между блоками, относительной фазовой проницаемостью воды и ее вязкостью; C_{poly} — концентрация полимера в растворе; Q_{poly} — масса полимера из источников/стоков; V_{pore} — поровый объем; V_{poly} — поровый объем, доступный для заполнения полимером; $\varphi_{d\ pv}$ — функция определения свойства породы для адсорбции полимера; $C_{ads} = C_{ads}(C_{poly})$ — массовая доля адсорбированного полимера; ρ_{rock} — плотность породы; V_{rock} — объем блока, незанятый поровым пространством V_{full} .

Описание начального распределения капиллярных давлений на границе раздела фаз происходит по следующим зависимостям:

$$P_o(x, y, z, 0) - P_w(x, y, z, 0) = P_{cow}, \quad (3)$$

$$S_o + S_w = 1. \quad (4)$$

Граничным условием для решения поставленной задачи является условие непротекания Неймана, используемое в следующем виде:

$$\frac{\partial p_p}{\partial N} = \left(k \frac{k_{rp}}{B \mu_p} (\nabla P_p - \gamma_p \nabla D), n \right) = 0.$$

Определение критического времени t кольтатации трещины автоГРП суспензионным составом будет осуществляться путем анализа объема закачанной жидкости. Объем утечек реагента V_y за пределы трещины автоГРП будет вычислен исходя из разницы объема закачанного реагента и объема трещины автоГРП.

На основании построенной математической модели, способной описать процесс частичного блокирования трещины автоГРП, необходимо перейти к созданию расчетной сетки. Параметры расчетной сетки, а также распределение начальных пластового давления и нефтенасыщенности представлены в таблице 1 и на рисунках 2, 3.

Затем необходимо определить удельную теплоемкость породы, нефти и воды при заданных значениях температуры. Входные данные, при которых определены результаты исследований, приведены в таблице 1.

Далее необходимо установить свойства флюидов, определить зависимость ОФП нефти и воды от водонасыщенности, а также установить зависимости вязкости нефти, воды от температуры, зависимость вязкости водного раствора от концентрации полимера. Использование зависимостей вязкости воды от температуры и вязкости водного раствора позволит с достаточной степенью точности определить объем утечек суспензии за пределы трещины автоГРП.

Таблица 1

Параметры расчетной сетки гидродинамической модели

Table 1

Parameters of the computational grid for the reservoir model

Параметр	ГДМ
Размерность каркаса, ед.	64 × 44 × 42
Общее количество ячеек, ед.	118272
Общее количество активных ячеек, ед.	24209
Средняя размерность ячеек, м	100 × 100 × 1
Поровый объем, млн м ³	27
Песчанистость, д. ед.	0,62
Пористость, д. ед.	0,20
Нефтенасыщенность, д. ед.	0,20
Запасы нефти, млн м ³	27

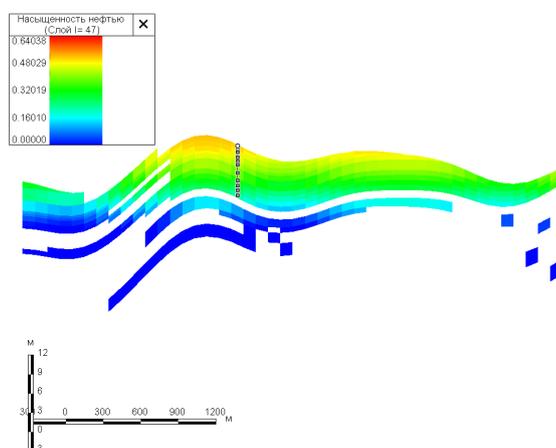


Рис. 2. Распределение начальной нефтенасыщенности вдоль нагнетательной скважины

Fig. 2. Distribution of initial oil saturation along the injection well

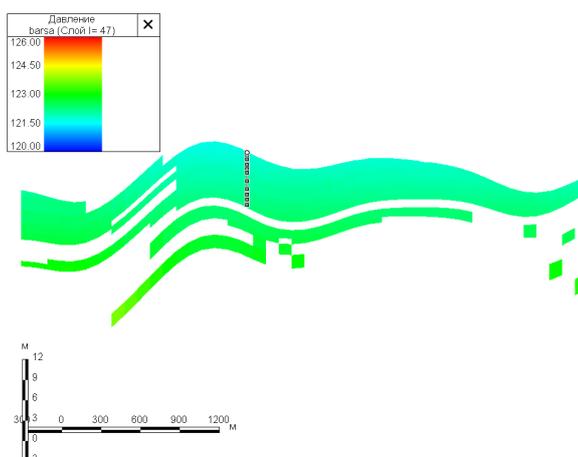


Рис. 3. Распределение начального пластового давления вдоль нагнетательной скважины

Fig. 3. Distribution of the initial reservoir pressure along the injection well

Таблица 2

PVT свойства насыщающих флюидов и породы

Table 2

PVT properties of saturating fluids and rocks

Параметр	ГДМ
Плотность воды в пов. усл., кг/м ³	1017
Плотность нефти в пов. усл., кг/м ³	842
Начальная пластовая вязкость нефти, сПз	1,142
Начальная пластовая вязкость воды, сПз	0,3
Объемный коэффициент нефти, сПз	1,214
Объемный коэффициент воды, сПз	1
Сжимаемость породы, 1/Бар	5E-5
Сжимаемость воды, 1/Бар	1E-5
Сжимаемость нефти, 1/Бар	0,125E-5

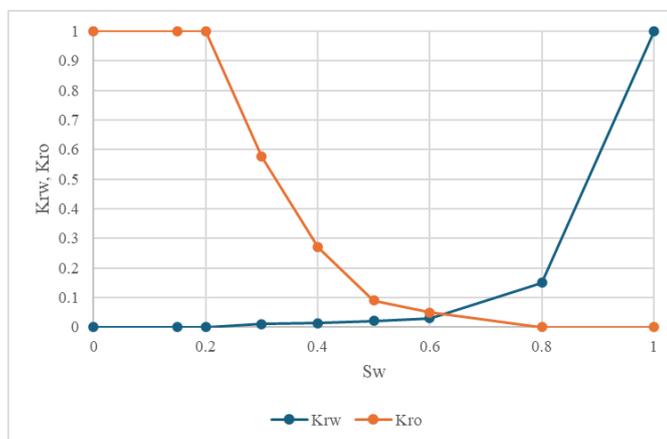


Рис. 4. Зависимость ОФП нефти, воды от водонасыщенности

Fig. 4. Dependence of oil and water interfacial tension on water saturation

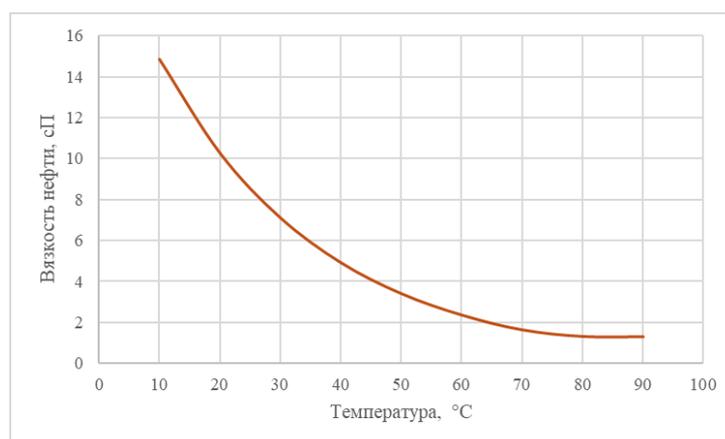


Рис. 5. Зависимость вязкости нефти от температуры

Fig. 5. Dependence of oil viscosity on temperature

Графики указанных зависимостей представлены на рисунках 4, 5, 6. Значения свойств флюидов и породы приведены в таблице 2.

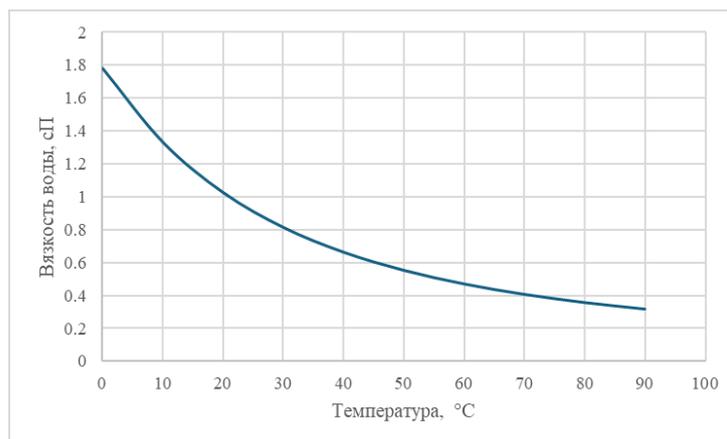


Рис. 6. Зависимость вязкости воды от температуры

Fig. 6. Dependence of water viscosity on temperature

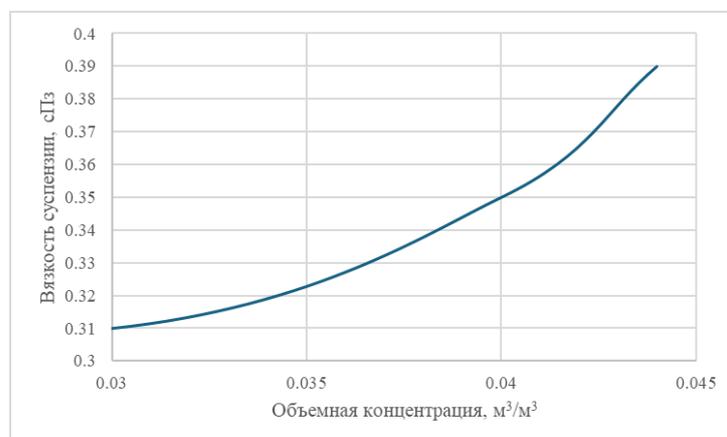


Рис. 7. Зависимость вязкости раствора от концентрации полимеров

Fig. 7. Dependence of the viscosity of the solution on the concentration of polymers

На основе уравнений (1)–(6), а также вышеуказанных параметров сетки, свойств флюидов и породы, ОФП построена трехфазная, трехкомпонентная гидродинамическая модель в коммерческом симуляторе tNavigator.

2. Результаты

В результате проведенного численного моделирования кольтатации трещины автоГРП с учетом вышеуказанной математической постановки задач (1)–(6) и описанными свойствами расчетной сетки и флюидов (таблицы 1, 2) определено значение времени частичного блокирования трещины автоГРП, оценен объем утечек реагента за пределы трещины.

На рисунке 8 представлена принципиальная схема проведения расчета. Моделируемый процесс охватывает стадию инициации трещины автоГРП с последующим блокированием.

На момент начала нагнетания воды при превышении давления разрыва пласта происходит образование трещины автоГРП, в результате чего необходимо проведение операции по блокированию образованного высокопроводящего канала.

Стоит отметить, что в настоящем эксперименте трещина автоГРП имеет фиксированные значения параметров полудлин, раскрытости и высоты трещины (таблица 3).

Указанные технологические параметры подобраны с целью выполнения сопоставления с результатами работы [21].

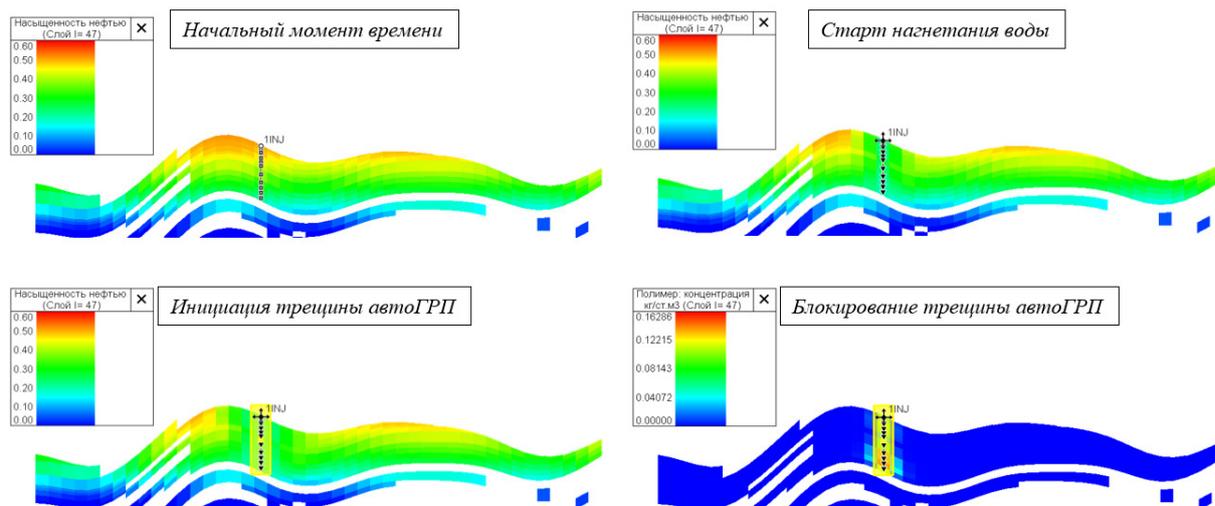


Рис. 8. Этапы проведения гидродинамического моделирования кольматирования трещины автоГРП
 Fig. 8. Stages of hydrodynamic modeling of colmatation of a fracture of an automatic hydraulic fracturing system

Таблица 3

Технологические параметры трещины автоГРП и режима работы нагнетательной скважины

Table 3

Technological parameters of the technogenic fracture and the operating mode of the injection well

Параметр	Значение
Раскрытость трещины автоГРП, мм	2
Полудлина трещины автоГРП, м	300
Высота трещины автоГРП, м	30
Приемистость воды, м ³ /с	0,001
Концентрация полимера в воде, д. ед.	0,3

На рисунке 9 представлено распределение закачанной суспензии вдоль трещины автоГРП.

Исходя из полученных результатов можно сделать вывод, что утечки за пределы трещины автоГРП существуют, с учетом изменения температурного поля на забое нагнетательной скважины величина утечек относительно объема трещины незначительна. На рисунке 10 показано распределение пластовой температуры.

Используя зависимость вязкости раствора от концентрации полимера, указанной на рисунке 7, определено изменение вязкости закачиваемого раствора в динамике. Динамика изменения вязкости закачиваемого раствора отражена на рисунке 11. Анализ данной динамики свидетельствует о том, что, в процессе проведения обработки вязкость суспензии увеличивается, что, в свою очередь, позволяет снизить потери дисперсных частиц в пласт.

В работе [21] представлены результаты гидродинамического моделирования кольматации трещины автоГРП при аналогичных параметрах, указанных в таблице 3 без учета изменения температурного поля на забое нагнетательной скважины. Выделим два варианта: вариант 1 без учета изменения температурного поля и вариант 2 с учетом изменения температурного поля. Сопоставление результатов расчетов представлено в таблице 3.

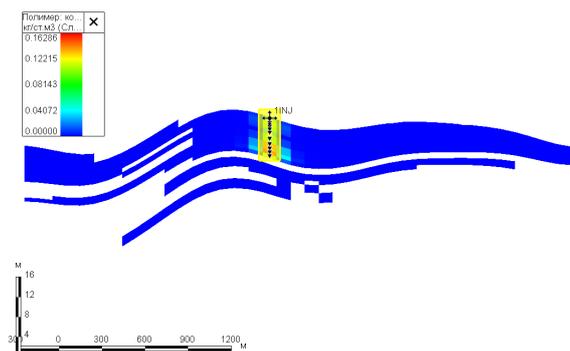


Рис. 9. Распределение закачанной суспензии вдоль трещины автоГРП
Fig. 9. Distribution of the injected suspension along the fracture of the automatic hydraulic fracturing

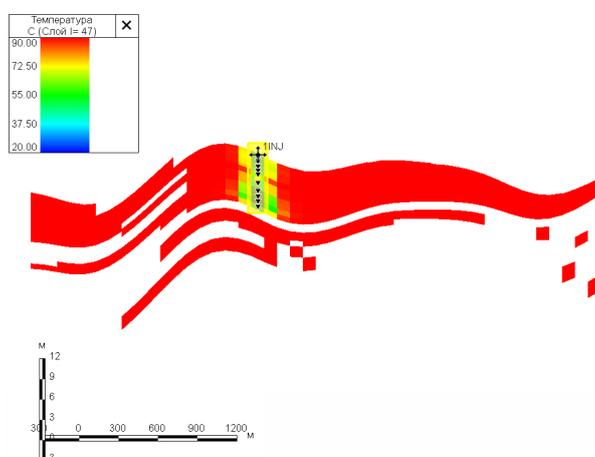


Рис. 10. Распределение пластовой температуры вдоль трещины автоГРП
Fig. 10. Distribution of reservoir temperature along the fracture of automatic hydraulic fracturing

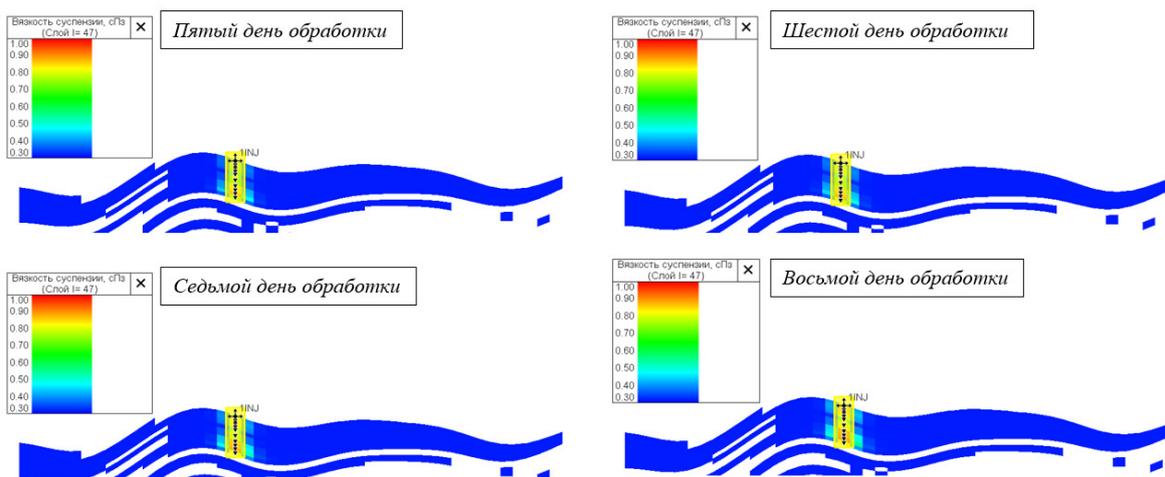


Рис. 11. Изменение вязкости закачиваемой суспензии в динамике обработки
Fig. 11. Change in the viscosity of the injected suspension in the dynamics of processing

Сопоставление результатов расчетов по вариантам 1 и 2
Comparison of the calculation results for options 1 and 2

Таблица 4

Table 4

Вариант	t , сут.	V_y , м ³
1	13	2,4
2	8	1,7

Таким образом, результаты расчетов свидетельствуют о том, что при учете изменения температурного поля при кольматации трещины автоГРП объем утечек суспензии снижается за счет увеличения вязкости закачиваемой суспензии, в результате чего подвижность суспензии в значительной степени снижается, что позволяет с меньшими потерями заблокировать трещину автоГРП.

Заключение

В результате проделанной работы могут быть сделаны следующие выводы.

С использованием построенной в работе неизотермической фильтрационной гидродинамической модели, описывающей процесс кольматации трещины автоГРП, определен объем утечек реагента из трещины в зависимости от изменения температурного поля на забое нагнетательной скважины.

С помощью сопоставления расчетов по вариантам 1 и 2 показано, что учет изменения температурного поля на забое нагнетательной скважины позволяет увеличить точность прогнозных значений объема утечек суспензии за пределы трещины автоГРП.

В результате работы установлено, что критическое время заполнения трещины и объем утечек реагента будут уменьшаться вследствие снижения температуры в призабойной зоне пласта. Соответственно, задача уменьшения или полного предотвращения объема утечек реагента за пределы трещины автоГРП будет состоять в оптимизации входных параметров приемистости и концентрации полимера в потоке для конкретной геолого-физической характеристики породы.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Цитирование. Касперович А.М., Шевелев А.П., Гильманов А.Я. Неизотермическая математическая модель блокирования техногенных трещин // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 4. С. 101–115. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-101-115.

© Касперович А.М., Шевелев А.П., Гильманов А.Я., 2024

Антон Михайлович Касперович (kasperovich_anton@mail.ru) – аспирант кафедры моделирования физических процессов и систем, Тюменский государственный университет, 625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, 6.

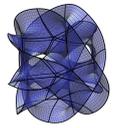
Александр Павлович Шевелев (a.p.shevelev@utmn.ru) – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры моделирования физических процессов и систем, Тюменский государственный университет, 625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, 6.

Александр Янович Гильманов (a.y.gilmanov@utmn.ru) – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры моделирования физических процессов и систем, Тюменский государственный университет, 625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, 6.

Литература

- [1] Шевелев А.П., Гильманов А.Я., Федоров К.М. Задача о блокировании техногенной трещины в пласте суспензионной смесью // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 6. С. 26–33. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0568528122600230>. EDN: <https://elibrary.ru/rpeblq>.
- [2] Черемсин А.Н., Тостолыткин Д.В., Орлова Н.С. Особенности моделирования полимерного заводнения в современных гидродинамических симуляторах // Наука и ТЭК. 2012. № 3. С. 39–43. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17861365>. EDN: <https://www.elibrary.ru/nnudge>.
- [3] Галимов Р.И. Технология полимерного заводнения на поздней стадии разработки месторождений // Молодой ученый. 2017. № 40 (174). С. 4–6. URL: <https://moluch.ru/archive/174/44555>; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30114749>. EDN: <https://www.elibrary.ru/zjaalt>.
- [4] Тома А., Саюк Б., Абиров Ж. Полимерное заводнение для увеличения нефтеотдачи на месторождениях легкой и тяжелой нефти // Территория Нефтегаз. 2017. № 7–8. С. 58–61. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/polimernoe-zavodnenie-dlya-uvelicheniya-nefteotdachi-na-mestorozhdeniyah-legkoy-i-tyazheloy-nefti>.
- [5] Черный С.Г., Лапин В.Н., Есипов Д.В., Куранаков Д.С. Методы моделирования зарождения и распространения трещин. Новосибирск: Издательство Сибирского отделения Российской академии наук, 2016. 312 с. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29973826>. EDN: <https://www.elibrary.ru/zfxvup>.
- [6] Мальцев В.В., Асмандияров Р.Н., Байков В.А., Усманов Т.С., Давлетбаев А.Я. Исследование развития трещин автоГРП на опытном участке Приобского месторождения с линейной системой разработки // Нефтяное хозяйство. 2012. № 5. С. 70–73. URL: https://oil-industry.net/Journal/archive_detail.php?art=195865.
- [7] Гимазов А.А., Базыров И.С. Способ разработки низкопроницаемых и сверхнизкопроницаемых коллекторов путем заводнения. Патент RU 2 740 357.С 1. URL: https://yandex.ru/patents/doc/RU2740357C1_20210113?ysclid=m53vgi6szc892371744.
- [8] Yan W., Demin W., Zhi S., Changlan S., Gang W., Desheng L. Hydraulic fracturing of polymer injection wells // Paper presented at the SPE Asia Pacific Oil and Gas Conference and Exhibition, Perth, Australia, 18–20 October, 2004. Paper Number SPE-88592-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/88592-MS>.
- [9] Dontsov E.V., Peirce A.P. Slurry flow, gravitational settling and a proppant transport model for hydraulic fractures. // Journal of Fluid Mechanics. 2014. Vol. 760. P. 567–590. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2014.606>.
- [10] Байков В.А., Давлетбаев А.Я., Усманов Т.С., Степанова З.Ю., Асмандияров Р.Н. Специальные гидродинамические исследования для мониторинга за развитием трещин ГРП в нагнетательных скважинах // Нефтегазовое дело. 2011. № 1. С. 65–75. URL: https://ogbus.ru/files/ogbus/authors/Baikov/Baikov_1.pdf; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17311328>. EDN: <https://www.elibrary.ru/oovktb>.
- [11] Татосов А.В., Шляпкин А.С. Движение проппанта в раскрывающейся трещине гидро-разрыва пласта // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, № 2. С. 217–226. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-2-217-226>. EDN: <https://www.elibrary.ru/urlitg>.
- [12] Seright R.S. Use of preformed gels for conformance control in fractured systems // SPE Production & Facilities. 1997. Vol. 12, issue 1. P. 59–65. DOI: <https://doi.org/10.2118/35351-PA>.

- [13] Байков В.А., Бураков И.М., Латыпов И.Д., Яковлев А.А., Асмандияров Р.Н. Контроль развития техногенных трещин авто-ГРП при поддержании пластового давления на месторождениях ООО «РН-Юганскнефтегаз» // Нефтяное хозяйство. 2012. № 11. С. 30–33. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=18206953>. EDN: <https://elibrary.ru/pikzqf>.
- [14] Ручкин А.А., Ягафаров А.К. Оптимизация применения потока отклоняющих технологий на Самотлорском месторождении. Тюмень: Вектор Бук, 2005. 165 с. URL: http://eues.ru/sites/default/files/2022-02/Ручкин%20Ягафаров%20Оптимизация%20применения%20потокоотклоняющих%20технологий_2005....pdf.
- [15] Промысловые исследования по изучению самопроизвольного развития техногенных трещин в нагнетательных скважинах / А.Я. Давлетбаев [и др.]. Тюмень: Вектор Бук, 2005. 165 с.
- [16] Mobbs A.T., Hammond P.S. Computer simulations of proppant transport in a hydraulic fracture // SPE Production & Facilities. 2001. Vol. 16, issue 2. P. 112–121. DOI: <http://doi.org/10.2118/69212-PA>.
- [17] Sorbie Kenneth. S. Polymer-Improved Oil Recovery. Edinburg: Springer Dordrecht, 359 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-011-3044-8>.
- [18] Cheng C., Milsch H. Hydromechanical investigations on the self-propping potential of fractures in tight sandstones // Rock Mechanics and Rock Engineering. 2021. Vol. 54. P. 5407–5432. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00603-021-02500-4>.
- [19] Seright R.S. Examination of literature on colloidal dispersion gels for oil recovery // Petroleum Science. Vol. 18, issue 4. P. 1097–1114. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.petsci.2021.07.009>.
- [20] Шель Е.В., Кабанова П.К., Ткаченко Д.Р., Базыров И.Ш., Логвинюк А.В. Моделирование инициации и распространения трещины гидроразрыва пласта на нагнетательной скважине для нетрициноватых терригенных пород на примере Приобского месторождения // ПРОНЕФТЬ. Профессионально о нефти. 2020. № 2 (16). С. 36–42. DOI: <https://doi.org/10.7868/S2587739920020056>. EDN: <https://elibrary.ru/hcuwft>.
- [21] Шевелев А.П., Гильманов А.Я., Касперович А.М. Моделирование блокирования трещин автогидроразрыва пласта в гидродинамическом симуляторе // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2023. Т. 9, № 1 (33). С. 78–91. DOI: <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-78-91>.



Non-isothermal mathematical model of blocking technogenic fractures

Kasperovich A.M. , Shevelev A.P. , Gilmanov A.Ya. 

University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation; kasperovich_anton@mail.ru (A.M.); a.p.shevelev@utmn.ru (A.P.); a.y.gilmanov@utmn.ru (A.Ya.);

Received: 10.08.2024

Revised: 13.09.2024

Accepted: 25.11.2024

Scientific article



Abstract. Nowadays, large oil fields have moved to the stage of declining production, to maintain reservoir pressure, it is necessary to apply flooding technologies. To maintain the previous rates of oil production, it is necessary to force selections by increasing the value of downhole pressure on the injection wells. However, the risks of exceeding the fracturing pressure are increasing, which can lead to the formation of technogenic fractures. An intensive increase in the fracture can lead to an increase in the risks of premature water reaching through it into the drainage zone of the producing wells, which will lead to an increase in the value of the water oil ratio. The analysis of current numerical mathematical models of colmatation of technogenic fracture has shown the status of determining the volume of leaks of the colmatation agent beyond the fracture, considering changes in the temperature field at the bottom of the injection well. This problem is relevant, since special research complexes have been conducted at several oil and gas fields to determine the growth of technogenic fractures that arose because of excess fracturing pressure and fell into the drainage zone of producing wells. A change in the temperature field of the reservoir will allow direct changes in the viscosity of the injected colmatation agent, as well as determine the amount of leakage of the agent beyond the limits of the technogenic fractures. The article describes the construction of a non-isothermal physico-mathematical model of injection of a suspension system (water-reagent) into the reservoir, considering changes in the temperature field of the reservoir, the volume of reagent leaks beyond the limits of the technogenic fracture, considered for the first time. The aim of the work is to establish the dependences of the leakage volume of the colmatation agent, the critical time of filling the fracture from changes in the temperature field at the bottom of the injection well. A non-isothermal reservoir simulation model has been constructed showing the stages of initiation of a technogenic fracture with its subsequent colmatation. The distribution of the concentration of the colmatation reagent both in the fracture and outside it, depending on the change in the temperature field at the bottom of the well, is obtained. It is determined that the volume of reagent leaks decreases if changes in the temperature field at the bottom of the injection well are considered with identical well operation parameters and geological and physical characteristics of the formation.

Key words: non-isothermal reservoir simulation modeling; reagent leakage volume; reservoir properties; temperature field.

Information about the conflict of interests: the authors and reviewers declared no conflicts of interest.

Citation. Kasperovich A.M., Shevelev A.P., Gilmanov A.Ya. Non-isothermal mathematical model of blocking technogenic fractures. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 101–115. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-101-115. (In Russ.)

© Kasperovich A.M., Shevelev A.P., Gilmanov A.Ya., 2024

Anton M. Kasperovich (kasperovich_anton@mail.ru) – postgraduate student of the Department of Modelling of Physical Processes and Systems, University of Tyumen, 6, Volodarsky Street, Tyumen, 625003, Russian Federation.

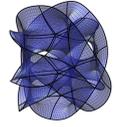
Alexander P. Shevelev (a.p.shevelev@utmn.ru) – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Modelling of Physical Processes and Systems, University of Tyumen, 6, Volodarsky Street, Tyumen, 625003, Russian Federation.

Alexander Ya. Gilmanov (a.y.gilmanov@utmn.ru) – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, senior lecturer of the Department of Modelling of Physical Processes and Systems, University of Tyumen, 6, Volodarsky Street, Tyumen, 625003, Russian Federation.

References

- [1] Gil'manov A.Ya., Fedorov K.M., Shevelev A.P. Problem of blocking a technogenic fracture in the reservoir using a suspension mixture. *Fluid Dynamics*, 2022, vol. 57, issue 6, pp. 720–728. DOI: <https://doi.org/10.1134/s0015462822600936>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ntqelo>. (In English; original in Russian)
- [2] Cheremisin A.N., Tostolytkin D.V., Orlova N.S. Features of modeling polymer flooding in modern reservoir simulators. *Nauka i TEK*, 2012, no. 3, pp. 39–43. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17861365>. EDN: <https://www.elibrary.ru/nnudge>. (In Russ.)
- [3] Galimov R.I. Technology of polymer flooding at the late stage of field development. *Molodoi uchenyi*, 2017, no. 40 (174), pp. 4–6. Available at: <https://moluch.ru/archive/174/44555>; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30114749>. EDN: <https://www.elibrary.ru/zjaalt>. (In Russ.)
- [4] Thomas A., Sahuc B., Abirov Zh. Polymer Flooding to Increase Oil Recovery at Light and Heavy Oil Fields. *Neftegaz Territory*, 2017, no. 7–8, pp. 58–61. Available at: <https://cyberleninka.ru/article/n/polimernoe-zavodnenie-dlya-uvelicheniya-nefteotdachi-namestorozhdeniyah-legkoy-i-tyazheloy-nefti>. (In Russ.)
- [5] Cherny S.G., Lapin V.N., Esipov D.V., Kuranakov D.S. Methods of modeling the origin and propagation of cracks. Novosibirsk: Izdatel'stvo Sibirskogo otdeleniya Rossiiskoi akademii nauk, 2016, 312 p. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29973826>. EDN: <https://www.elibrary.ru/zfxvup>. (In Russ.)
- [6] Maltsev V.V., Asmandiyarov R.N., Baikov V.A., Usmanov T.S., Davletbaev A.Ya. Testing of auto hydraulic-fracturing growth of the linear oilfield development system of Priobskoye oil field. *Oil Industry Journal*, 2012, no. 5, pp. 70–73. Available at: https://oil-industry.net/Journal/archive_detail.php?art=195865. (In Russ.)
- [7] Gimazov A.A., Bazyrov I.S. Method of developing low-permeable and ultra-low-permeable collectors by flooding. Patent RU 2 740 357. C. 1. Available at: https://yandex.ru/patents/doc/RU2740357C1_20210113?ysclid=m53vgi6szc892371744. (In Russ.)
- [8] Yan W., Demin W., Zhi S., Changlan S., Gang W., Desheng L. Hydraulic fracturing of polymer injection wells. *Paper presented at the SPE Asia Pacific Oil and Gas Conference and Exhibition, Perth, Australia, 18–20 October, 2004*. Paper Number SPE-88592-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/88592-MS>.
- [9] Dontsov E.V., Peirce A.P. Slurry flow, gravitational settling and a proppant transport model for hydraulic fractures. *Journal of Fluid Mechanics*, 2014, vol. 760, pp. 567–590. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2014.606>.
- [10] Baikov V.A., Davletbaev A.Ya., Usmanov T.S., Stepanova Z.Yu., Asmandiyarov R.N. Special well tests to fractured water injection wells. *The network journal "Oil and Gas Business"*, 2011,

- no. 1, pp. 65–75. Available at: https://ogbus.ru/files/ogbus/authors/Baikov/Baikov_1.pdf;
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17311328>. EDN: <https://www.elibrary.ru/oovktb>.
(In Russ.)
- [11] Tatosov A.V., Shlyapkin A.S. The motion of propping agent in an opening crack in hydraulic fracturing. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, vol. 18, no. 2, pp. 217–226. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-2-217-226>. EDN: <https://www.elibrary.ru/urlitg>. (In Russ.)
- [12] Seright R.S. Use of preformed gels for conformance control in fractured systems. *SPE Production & Facilities*, 1997, vol. 12, issue 1, pp. 59–65. DOI: <https://doi.org/10.2118/35351-PA>.
- [13] Baykov V.A., Burakov I.M., Latypov I.D., Yakovlev A.A., Asmandiyarov R.N. The control of self-induced hydraulic fracturing process on RN-Yuganskneftegaz LLC oilfields. *Oil Industry*, 2012, no. 11, pp. 30–33. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=18206953>. EDN: <https://elibrary.ru/pikzqf>. (In Russ.)
- [14] Ruchkin A.A., Yagafarov A.K. Optimization of the application EOR technologies on Samotlor field. Tyumen: Vektor Buk, 2005, 165 p. Available at: http://eues.ru/sites/default/files/2022-02/Ручкин%20Ягафаров%20Оптимизация%20применения%20потокоотклоняющих%20технологий_2005....pdf. (In Russ.)
- [15] Davletbaev A.Ya., Baykov V.A., Bikbulatova G.R., Asmandiyarov R.N., Nazargalin E.R., Slabetsky A.A., Sergeichev A.V., Nuriev R.I. Field studies on the study of spontaneous development of technogenic cracks in injection wells. Tyumen: Vektor Buk, 2005, 165 p. (In Russ.)
- [16] Mobbs A.T., Hammond P.S. Computer simulations of proppant transport in a hydraulic fracture. *SPE Production & Facilities*, 2001, vol. 16, no. 2, pp. 112–121. DOI: <http://doi.org/10.2118/69212-PA>.
- [17] Sorbie Kenneth. S. Polymer-Improved Oil Recovery. Edinburg: Springer Dordrecht, 359 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-011-3044-8>.
- [18] Cheng C., Milsch H. Hydromechanical investigations on the self-propping potential of fractures in tight sandstones. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2021, vol. 54, pp. 5407–5432. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00603-021-02500-4>.
- [19] Seright R.S. Examination of literature on colloidal dispersion gels for oil recovery. *Petroleum Science*, vol. 18, issue 4, pp. 1097–1114. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.petsci.2021.07.009>.
- [20] Shel E.V., Kabanova P.K., Tkachenko D.R., Bazyrov I.Sh., Logvinyuk A.V. Modeling of a hydraulic fracture initiation and propagation of an injection well for non-fractured terrigenous rocks on the Priobskoye field. *PROneft. Professionals about Oil*, 2020, no. 2 (16), pp. 36–42. DOI: <https://doi.org/10.7868/S2587739920020056>. EDN: <https://elibrary.ru/hcuwft>. (In Russ.)
- [21] Shevelev A.P., Gilmanov A.Ya., Kasperovich A.M. Simulation of blocking of hydraulic fracture near injector in a reservoir simulator. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 2023, vol. 9, no. 1 (33), pp. 78–91. DOI: <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-78-91>. (In Russ.)



Ассоциативное рождение J/ψ -мезонов и прямых фотонов в подходе реджезации партонов

Алимов Л.Э. , Карпишков А.В. , Салеев В.А. 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация; alimov.le@yandex.ru (Л.Э.); karpishkoff@gmail.ru (А.В.); saleev.va@ssau.ru (В.А.);

Поступила: 15.08.2024

Рассмотрена: 22.09.2024

Принята: 25.11.2024

Научная статья



Аннотация. Проведено теоретическое исследование ассоциативного рождения J/ψ -мезонов и прямых фотонов в подходе реджезации партонов с использованием двух различных моделей адронизации пары тяжелых кварка и антикварка в тяжелый кварконий, известных как нерелятивистская квантовая хромодинамика (НРКХД) и улучшенная модель испарения цвета (УМИЦ). Мы нашли существенные отличия в предсказаниях для сечений рождения и спектров по поперечному импульсу J/ψ -мезонов и фотонов, полученных с использованием НРКХД и УМИЦ. Эти отличия могут быть применены для верификации используемых моделей адронизации. Выполненные нами предсказания сечений ассоциативного рождения J/ψ -мезонов и прямых фотонов при энергиях большого адронного коллайдера немного превышают предсказания, ранее полученные в расчетах в следующем за лидирующим порядке в коллинеарной партонной модели. Также мы сделали предсказания различных двухчастичных корреляционных спектров для ассоциативного рождения J/ψ -мезонов и прямых фотонов, которые представляют интерес при экспериментальных исследованиях.

Ключевые слова: БАК; чармоний; J/ψ -мезон; подход реджезации партонов; улучшенная модель испарения цвета; нерелятивистская квантовая хромодинамика; модель цветовых синглетов; ассоциативное рождение.

Введение

Экспериментальное исследование процессов ассоциативного рождения J/ψ -мезонов и прямых фотонов в протон-протонных столкновениях при высоких энергиях представляет большой интерес не только для проверки предсказаний пертурбативной квантовой хромодинамики (КХД) и различных моделей адронизации тяжелых кварков в тяжелый кварконий [1; 2], но и для получения информации о глюонных функциях распределения (ГФР) в протоне, в том числе зависящих от поперечного импульса поляризованных ГФР [3; 4].

Значение константы сильного взаимодействия на масштабе массы очарованного кварка $\alpha_S(m_c) \simeq 0.3$ позволяет проводить расчеты сечений рождения чармониев в рамках теории возмущений КХД. В настоящее время в коллинеарной партонной модели (КПМ) достигнута точность вычислений, отвечающая следующему за лидирующим порядку (СЛП) по α_S как для процессов прямого рождения J/ψ [5], так и для процессов ассоциативного рождения J/ψ -мезонов с прямыми фотонами [6].

Адронизации $c\bar{c}$ -пары в состояние чармония — непертурбативный процесс, который может быть описан только в рамках феноменологических моделей. В модели цветовых синглетов (МЦС) [7; 8] предполагается, что кварк-антикварковая пара формирует синглетное по цвету состояние с квантовыми числами конечного чармония. В более общем подходе нерелятивистской квантовой хромодинамики (НРКХД), в которой учитываются релятивистские поправки по степеням относительной скорости $c\bar{c}$ -пары, рождение тяжелого чармония может происходить через октетные по цвету промежуточные состояния [9]. Другой подход к описанию адронизации — это модель испарения цвета (МИЦ), в которой предполагается, что $c\bar{c}$ -пара с инвариантной

массой от порога рождения чармония C до порога рождения самого легкого мезона с открытым очарованием с определенной вероятностью \mathcal{F}^C превращается в чармоний C [10; 11]. В настоящее время МИЦ была улучшена в работе Ма и Вогта [12].

Важную роль в описании рождения чармониев в протон-протонных столкновениях при высоких энергиях играет выбор подхода факторизации физики жестких и мягких процессов. В области больших поперечных импульсов $p_T \gg m_c$, где поперечными импульсами начальных партонов можно пренебречь, рождение чармониев в жестких протон-протонных столкновениях может быть достаточно хорошо описано с использованием КПМ [13]. Однако для описания области малых поперечных импульсов $p_T \ll m_c$ необходимо учитывать ненулевой поперечный импульс непертурбативной природы, что достигается в подходе ТМД-факторизации, которая учитывает эффекты поперечного движения партонов [14]. Для описания экспериментальных данных в промежуточной области поперечных импульсов $p_T \simeq m_c$ используются различные процедуры «сшивания» результатов расчетов в КПМ и ТМД [15]. В пределе высоких энергий применим альтернативный метод описания сечений рождения при любых поперечных импульсах p_T — подход реджезации партонов (ПРП) [16]– [18]. Данный подход — это один из вариантов реализации подхода факторизации при высоких энергиях, который основывается на модифицированном приближении мультиреджевской кинематики КХД, в котором имеет место эффект реджезации партонов амплитуд. В ПРП нами ранее были описаны существующие экспериментальные данные для процессов рождения прямых одиночных J/ψ -мезонов, для рождения J/ψ -мезонов с учетом вкладов от распадов вышележащих состояний при энергиях $\sqrt{s} = 1.8\text{--}13$ ТэВ, с использованием как НРКХД [19–21], так и УМИЦ [22].

В настоящее время накоплено большое количество экспериментальных данных по рождению J/ψ -мезонов в адронных взаимодействиях от энергий $\sqrt{s} = 19$ ГэВ до $\sqrt{s} = 13$ ТэВ [23]. Рождение одиночных прямых фотонов в адрон-адронных столкновениях было изучено экспериментально в широком диапазоне энергий в экспериментах с фиксированной мишенью [24] и на коллайнерах RICH, Тэватрон, БАК [25–27]. В ПРП были проведены исследования одиночного, двойного и тройного рождения фотонов при энергии БАК [28–31].

Однако до настоящего времени сечение ассоциативного рождения J/ψ -мезонов и прямых фотонов не было измерено ни в одном эксперименте. В этой работе мы изучаем ассоциативное рождение J/ψ -мезонов и прямых фотонов в ПРП, используя две различные модели адронизации пары тяжелых кварка и антикварка в тяжелый кварконий: НРКХД и УМИЦ. Мы предсказываем сечения рождения и различные спектры J/ψ -мезонов и прямых фотонов в протон-протонных столкновениях при энергии $\sqrt{s} = 13$ ТэВ.

1. Подход реджезации партонов

ПРП — калибровочно инвариантная реализация подхода k_T -факторизации, который доказан в лидирующем логарифмическом приближении (ЛЛП) в пределе высоких энергий КХД [32–34]. Ключевыми элементами ПРП являются факторизация амплитуд в реджевском пределе КХД, эффективная теория поля (ЭТП) для реджезованных глюонов и кварков Л.Н. Липатова [35] и неинтегрированные ПФР (нПФР) [18], построенные в модифицированной модели Кимбера — Мартина — Рискина — Ватта (КМРВ) [36; 37].

В ПРП сечение процесса ассоциативного рождения J/ψ -мезонов и прямых фотонов с большим поперечным импульсом $p_{T\gamma}$, $pp \rightarrow J/\psi\gamma X$ выражается как свертка реджезованного партонового сечения подпроцесса и нПФР. Для подпроцесса глюон-глюонного слияния дифференциальное сечение может быть записано:

$$d\sigma(pp \rightarrow J/\psi\gamma X) = \int \frac{dx_1}{x_1} \int \frac{d^2q_{T1}}{\pi} \Phi_g(x_1, t_1, \mu^2) \int \frac{dx_2}{x_2} \int \frac{d^2q_{T2}}{\pi} \Phi_g(x_2, t_2, \mu^2) \times \\ \times d\hat{\sigma}^{\text{ПРП}}(RR \rightarrow J/\psi\gamma), \quad (1.1)$$

где $q_{1,2} = x_{1,2}P_{1,2} + q_{1,2T}$ — это 4-импульсы реджезованных глюонов; $P_{1,2}^\mu = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, \pm 1)$ —

4 -импульсы протонов; $q_{1,2T} = (0, \mathbf{q}_{1,2T}, 0)$ — это 4 -поперечные импульсы глюонов; $t_{1,2} = -\mathbf{q}_{1,2T}^2$, $\Phi_g(x, t, \mu^2)$ — нПФР реджезованного глюона.

Отметим, что для модифицированных КМРВ нПФР при произвольном x выполняется условие точной нормировки [18]:

$$\int_0^{\mu^2} \Phi_g(x, t, \mu^2) dt = x f_g(x, \mu^2). \quad (1.2)$$

Сечение партонного подпроцесса $d\hat{\sigma}^{\text{ПРП}}(RR \rightarrow J/\psi\gamma)$, так же как и $d\hat{\sigma}^{\text{ПРП}}(RR \rightarrow \psi'\gamma)$ и $d\hat{\sigma}^{\text{ПРП}}(RR \rightarrow \chi_{cJ}\gamma)$, записываются через усреднение квадратов реджезованных амплитуд $\overline{|M|}_{\text{ПРП}}^2$ обычным образом, см. (2.5) и (2.6).

Амплитуды партон-партонного рассеяния в ПРП вычисляются с использованием правил Фейнмана ЭТП Липатова. В данном подходе амплитуды калибровочно-инвариантны и начальные партоны рассматриваются как реджезованные партоны. Чтобы получить реджезованные амплитуды мы используем программный пакет FeynArts [38] для системы Mathematica и модельный файл ReggeQCD [17].

Калибровочная инвариантность всех амплитуд подтверждается аналитически. Кроме того, квадраты амплитуд в ПРП имеют явный коллинеарный предел, который был проверен аналитически для каждой рассматриваемой квадратованной амплитуды:

$$\lim_{t_1, t_2 \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_1 d\phi_2}{(2\pi)^2} \overline{|M|}_{\text{ПРП}}^2 = \overline{|M|}_{\text{КПМ}}^2. \quad (1.3)$$

ПРП использовалась для описания рождения прямых J/ψ -мезонов и рождения J/ψ через распады вышележащих состояний при высокой энергии в протон-протонных столкновениях. В предыдущих работах было обнаружено хорошее соответствие между вычислениями ЛП ПРП [19–21; 39–41] и экспериментальными данными коллабораций CDF, ATLAS, CMS, LHCb.

2. ПРП и НРКХД

Подход НРКХД — это теоретическая модель, в которой разделяются эффекты физики больших и малых расстояний. Сечение рождения чармония \mathcal{C} в подпроцессе глюонного слияния может быть выражено как сумма по всем возможным состояниям $c\bar{c}$ -пары с соответствующими квантовыми числами [9]:

$$\sigma(RR \rightarrow \mathcal{C}\gamma) = \sum_n \hat{\sigma}(RR \rightarrow c\bar{c}[n]\gamma) \frac{\langle \mathcal{O}^{\mathcal{C}}[n] \rangle}{N_{col} N_{pol}}, \quad (2.1)$$

где $[n] = [{}^{2S+1}L_J^{(1,8)}]$ — состояние $c\bar{c}$ -пары, записанное в спектроскопической нотации; квантовое число в верхнем индексе $(1,8)$ определяет синглетное или октетное по цвету состояние; $\hat{\sigma}$ — сечение партонного подпроцесса рождения состояния $c\bar{c}[n]$, а $\langle \mathcal{O}^{\mathcal{C}}[n] \rangle$ — это непертурбативные матричные элементы (НМЭ), которые описывают переход промежуточного состояния в чармоний \mathcal{C} . Также $N_{col} = 2N_c$ — для синглетных по цвету состояний, $N_{col} = N_c^2 - 1$ — для октетных по цвету состояний, $N_{pol} = 2J + 1$.

При изучении рождения J/ψ -мезонов мы рассматриваем вклады прямого рождения подпроцесса

$$R + R \rightarrow J/\psi + \gamma \quad (2.2)$$

и рождение в подпроцессах

$$R + R \rightarrow \psi' + \gamma, \quad (2.3)$$

$$R + R \rightarrow \chi_{cJ} + \gamma \quad (2.4)$$

через распады $\psi' \rightarrow J/\psi X$ и $\chi_{cJ} \rightarrow J/\psi\gamma$. При энергиях большого адронного коллайдера (БАК) вклад подпроцесса кварк-антикварковой аннигиляции в $J/\psi + \gamma$ мал и может быть упущен. Мы получили аналитические формулы квадрированных амплитуд с использованием программных пакетов FeynArts и ReggeQCD, которые громоздки для представления в печатной статье, но могут быть получены у авторов по запросу.

Формула для численных расчетов может быть получена в ПРП из формулы факторизации (1.1) и сечения партонного подпроцесса

$$d\hat{\sigma}^{\text{ПРП}}(RR \rightarrow J/\psi\gamma) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - p_\psi - k_\gamma) \frac{\overline{M^2}_{\text{ПРП}}}{I} \frac{d^3 p_\psi}{(2\pi)^3 2p_\psi^0} \frac{d^3 k_\gamma}{(2\pi)^3 2k_\gamma^0}, \quad (2.5)$$

где $I = 2x_1x_2s$ — потоковый фактор; p_ψ^μ — 4-импульс J/ψ -мезона; k_γ — 4-импульс фотона.

Таким образом, в ПРП с использованием НРКХД сечение рождения $J/\psi + \gamma$ может быть записано как

$$\frac{d\sigma(pp \rightarrow J/\psi\gamma)}{dp_{\psi T} dy_\psi dk_{\gamma T} dy_\gamma d\Delta\phi} = \frac{p_{\psi T} k_{\gamma T}}{16\pi^3} \int dt_1 \int d\phi_1 \Phi_g(x_1, t_1, \mu^2) \Phi_g(x_2, t_2, \mu^2) \frac{\overline{M^2}_{\text{PRA}}}{(x_1 x_2 s)^2}, \quad (2.6)$$

где $\mathbf{q}_{2T} = \mathbf{p}_T + \mathbf{k}_T - \mathbf{q}_{1T}$, $x_1 = (p_\psi^0 + k_\gamma^0 + p_\psi^z + k_\gamma^z)/\sqrt{s}$, $x_2 = (p_\psi^0 + k_\gamma^0 - p_\psi^z - k_\gamma^z)/\sqrt{s}$, y_ψ — быстрота J/ψ ; y_γ — быстрота фотона; $\Delta\phi = \phi_\psi - \phi_\gamma$. Квадрированные амплитуды $\overline{M^2}_{\text{ПРП}}$ являются функциями переменных Мандельштама \hat{s} , \hat{t} , \hat{u} и переменных $t_1, t_2, a_k, a_p, b_k, b_p$, где $a_k = 2(k_\gamma P_2)/s$, $a_p = 2(p_\psi P_2)/s$, $b_k = 2(k_\gamma P_1)/s$, $b_p = 2(p_\psi P_1)/s$.

3. ПРП и УМИЦ

Описание ассоциативного рождения J/ψ -мезона и прямого фотона с большим p_T в ПРП с использованием УМИЦ в лидирующем порядке по α_S возможно через подпроцессы

$$R + R \rightarrow c + \bar{c} + \gamma, \quad (3.1)$$

$$Q + \bar{Q} \rightarrow c + \bar{c} + \gamma. \quad (3.2)$$

Как и в случае использования НРКХД, вклад процесса кварк-антикварковой аннигиляции пренебрежимо мал и может быть опущен.

В УМИЦ сечение рождения J/ψ -мезонов с учетом распадов вышележащих состояний записывается следующим образом:

$$\sigma(pp \rightarrow J/\psi\gamma X) = F^\psi \int_{m_D^2}^{4m_D^2} \frac{d\sigma(pp \rightarrow c\bar{c}\gamma X)}{dM^2} dM^2, \quad (3.3)$$

где M — инвариантная масса $c\bar{c}$ -пары; m_D — масса самого легкого D мезона.

Другими словами, интегрирование проводится от массы чармония до порога рождения мезонов с открытым очарованием. В УМИЦ также учитывается, что масса промежуточного состояния (то есть инвариантная масса $c\bar{c}$ -пары) отлична от массы J/ψ -мезона, что учитывается соотношением между 4-импульсами $p_\psi^\mu = p^\mu \frac{m_\psi}{M}$, где $p^\mu = p_c^\mu + p_{\bar{c}}^\mu$. При описании сечений рождения J/ψ -мезонов при энергии БАК в ПРП с использованием УМИЦ было показано, что хорошее описание экспериментальных данных достигается при значении параметра адронизации $F^\psi \simeq 0.02$ при энергии $\sqrt{s} = 13$ ТэВ [22].

Сечение партонного подпроцесса (2.1) записывается также как (2.5), но с учетом того, что это подпроцесс $2 \rightarrow 3$:

$$d\hat{\sigma}^{\text{ПРП}}(R + R \rightarrow c + \bar{c} + \gamma) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - p_c - p_{\bar{c}} - k_\gamma) \frac{\overline{|M|}_{\text{ПРП}}^2}{2x_1 x_2 s} \times \\ \times \frac{d^3 p_c}{(2\pi)^3 2p_{c0}} \frac{d^3 p_{\bar{c}}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{c}0}} \frac{d^3 k_\gamma}{(2\pi)^3 2k_{\gamma 0}}. \quad (3.4)$$

Формула для численных расчетов в ПРП с использованием УМИЦ может быть получена из (3.3) и (3.4):

$$\frac{d\sigma(pp \rightarrow J/\psi \gamma X)}{dp_{\psi T} dy_\psi dk_{\psi T} dy_\gamma d\Delta\phi} = F^\psi \times \frac{p_{\psi T} k_{\psi T}}{1024\pi^6} \int_{m_\psi^2}^{4m_D^2} dM^2 \int dt_1 \int \phi_1 \int d\Omega_{c\bar{c}} \left(\frac{M}{m_\psi}\right)^2 \times \\ \times \sqrt{1 - \frac{4m_c^2}{M^2}} \Phi_g(x_1, t_1, \mu^2) \Phi_g(x_2, t_2, \mu^2) \frac{\overline{|M|}_{\text{ПРП}}^2}{(x_1 x_2 s)^2}, \quad (3.5)$$

где $d\Omega_{c\bar{c}} = \sin(\theta) d\theta d\phi$, углы θ и ϕ — полярный и азимутальный углы в системе покоя $c\bar{c}$ -пары.

В численных расчетах мы полагаем массу c -кварка $m_c = 1.3$ ГэВ, массу D -мезона $m_D = 1.86$ ГэВ, и массу J/ψ -мезона $m_{J/\psi} = 3.097$ ГэВ.

Для численных вычислений удобно записать 4-импульсы c -кварка и \bar{c} -антикварка следующим образом:

$$p_c^\mu = \frac{1}{2} p^\mu + r^\mu \quad \text{и} \quad p_{\bar{c}}^\mu = \frac{1}{2} p^\mu - r^\mu, \quad (3.6)$$

где r^μ 4-импульс относительного движения записан через инвариантную массу M , поперечный импульс p_T и быстроту y $c\bar{c}$ -пары как

$$r^\mu = \frac{1}{2} \sqrt{M^2 - 4m_c^2} (X^\mu \sin(\theta) \cos(\phi) + Y^\mu \sin(\theta) \sin(\phi) + Z^\mu \cos(\theta)), \quad (3.7)$$

где

$$X^\mu = \frac{1}{M} \left(p_T \cosh(y), \sqrt{M^2 + p_T^2}, 0, p_T \sinh(y) \right), \\ Y^\mu = \text{sign}(y) (0, 0, 1, 0), \\ Z^\mu = \text{sign}(y) (\sinh(y), 0, 0, \cosh(y)).$$

Средний квадрат амплитуды $\overline{|M|}_{\text{ПРП}}^2$ был вычислен с использованием программных пакетов FeynArts и ReggeQCD и является функцией переменных $\hat{s} = (q_1 + q_2)^2$, $\hat{t} = (q_1 - k)^2$, $\hat{u} = (q_2 - k)^2$, $w_1 = (q_1 - p_c)^2$, $w_2 = (q_2 - p_{\bar{c}})^2$, $a_c = 2(p_c P_2)/s$, $a_{\bar{c}} = 2(p_{\bar{c}} P_2)$, $a_k = 2(k_\gamma P_2)$, $b_c = 2(p_c P_1)/s$, $b_{\bar{c}} = 2(p_{\bar{c}} P_1)$, $b_k = 2(k_\gamma P_1)$.

Вычисления в ПРП с использованием УМИЦ, описанные выше, могут быть выполнены альтернативным способом с использованием Монте-Карло-генератора событий партонного уровня KaTie [42], так же как и в работе [43] для процесса ассоциативного рождения J/ψ и D -мезонов. Мы выполнили проверку всех наших вычислений в ПРП с использованием УМИЦ с помощью генератора KaTie и получили хорошее согласие.

4. Результаты

Во-первых, мы вычислили сечение рождения $J/\psi + \gamma$ в ПРП с использованием подхода НРКХД, при этом мы отдельно рассматривали различные вклады в процессы рождения J/ψ , происходящие через промежуточные синглетное и октетные по цвету различные состояния. Результаты представлены на рис. 4.1. Мы подтвердили вывод о доминирующей роли синглетного механизма в прямом рождении $J/\psi + \gamma$ [1; 3]. На рис. 4.1 мы также показываем сумму вкладов от подпроцессов кварк-антикварковой аннигиляции при рождении J/ψ через октетные по

цвету состояния, вклады такого типа крайне малы. Принимая во внимание сложности экспериментального разделения вкладов прямого рождения и рождения через распады вышележащих состояний, мы оцениваем вклад в сечение рождения $J/\psi + \gamma$, когда рождение J/ψ происходит через распады $\psi(2S) \rightarrow J/\psi X$ и $\chi_{cJ} \rightarrow J/\psi \gamma$.

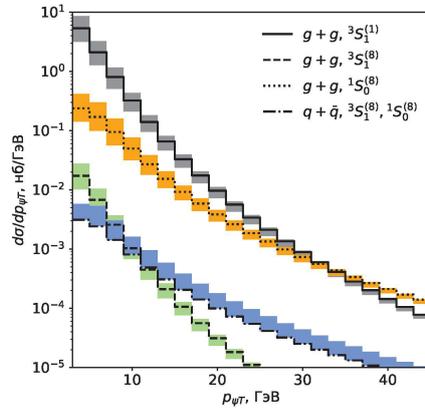


Рис. 4.1. Сечение ассоциативного рождения $J/\psi + \gamma$ как функция поперечного импульса $p_{\psi T}$, полученная в ПРП с использованием НРКХД при энергии $\sqrt{s} = 14$ ТэВ в центральной области по быстроте $|y_{\gamma, \psi}| < 2$: непрерывная кривая — вклад МЦС, штриховая кривая — вклад в прямое рождение через октетное по цвету промежуточное состояние $[^1S_0^{(8)}]$, пунктирная кривая — вклад в прямое рождение через октетное по цвету промежуточное состояние $[^3S_1^{(8)}]$, вклад процессов кварк-антикварковой аннигиляции показан кривой с длинным штрихом

Fig. 4.1. Cross section of associative production of $J/\psi + \gamma$ as a function of transverse momentum $p_{\psi T}$ obtained in PRP using NRQCD at energy $\sqrt{s} = 14$ TeV in the central rapidity region $|y_{\gamma, \psi}| < 2$. Solid curve — contribution of MCS, dashed curve — contribution to direct production via octet intermediate color state $[^1S_0^{(8)}]$, dotted curve — contribution to direct production via octet intermediate color state $[^3S_1^{(8)}]$. Contribution of quark-antiquark annihilation processes is shown by curve with long dash

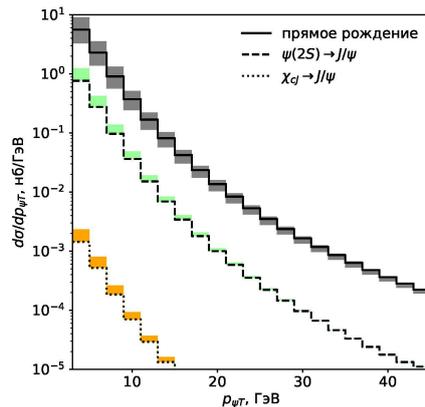


Рис. 4.2. Сечение ассоциативного рождения $J/\psi + \gamma$ как функция поперечного импульса $p_{\psi T}$, полученная в ПРП с использованием НРКХД при энергии $\sqrt{s} = 14$ ТэВ в центральной области по быстроте $|y_{\gamma, \psi}| < 2$: непрерывная кривая — вклад прямого рождения J/ψ -мезонов, штриховая кривая — вклад рождения через распад $\psi(2S) \rightarrow J/\psi X$, пунктирная кривая — вклад в рождение через распад $\chi_{cJ} \rightarrow J/\psi \gamma$

Fig. 4.2. Cross section of associative production of $J/\psi + \gamma$ as a function of transverse momentum $p_{\psi T}$ obtained in PRP using NRQCD at energy $\sqrt{s} = 14$ TeV in the central rapidity region $|y_{\gamma, \psi}| < 2$. Solid curve — contribution of direct production of J/ψ mesons, dashed curve — contribution of production via decay $\psi(2S) \rightarrow J/\psi X$, dotted curve — contribution to production via decay $\chi_{cJ} \rightarrow J/\psi \gamma$

Как можно видеть на рис. 4.2, только вклад в рождение J/ψ через распад $\psi(2S)$ может быть значителен и составляет несколько процентов. Таким образом, при использовании НРКХД мы будем учитывать только вклад синглетного по цвету состояния, то есть мы будем использовать МЦС [7; 8]. Вклады от распадов $\psi(2S), \chi_{cJ}$ также не будут учитываться, так как они малы по сравнению с теоретической неопределенностью вычислений в ПРП.

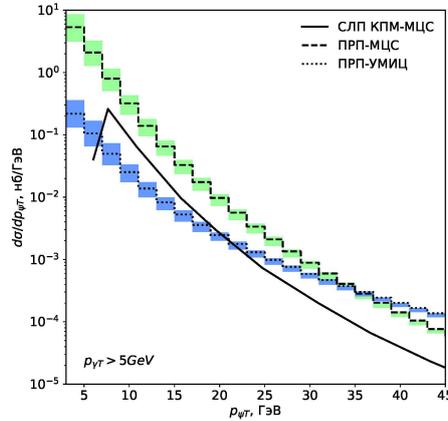


Рис. 4.3. Дифференциальные сечения ассоциативного рождения $J/\psi + \gamma$ как функция поперечного импульса $p_{\psi T}$ при $p_{\psi T} > 5$ ГэВ в центральной области по быстроте $|y_{\psi}, y_{\gamma}| < 2$: непрерывная черная кривая — сечение рождения, полученное в СЛП КПМ, используются результаты из [6]; штриховая кривая — сечение рождения, полученное в ПРП с использованием МЦС; пунктирная кривая — сечение рождения, полученное в ПРП с использованием УМИЦ

Fig. 4.3. Differential cross sections of associated $J/\psi + \gamma$ production as a function of transverse momentum $p_{\psi T}$ at $p_{\psi T} > 5$ GeV in the central rapidity region $|y_{\psi}, y_{\gamma}| < 2$. Solid black curve — production cross section obtained in SLP KPM, results from [6] are used; dashed curve — production cross section obtained in PRP using MCS; dotted curve — production cross section obtained in PRP using UMIC

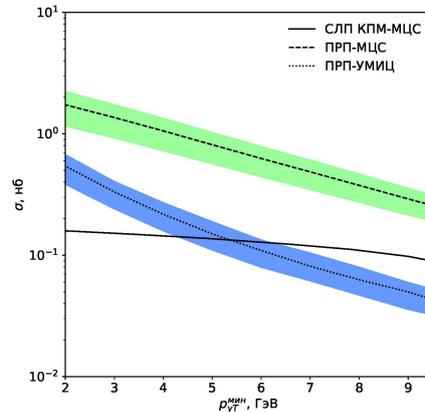


Рис. 4.4. Полные сечения ассоциативного рождения $J/\psi + \gamma$ как функция нижней границы поперечного импульса фотона $p_{\gamma T}^{\min}$ при $p_{\psi T} > 10$ ГэВ: непрерывная черная кривая — сечение рождения, полученное в СЛП КПМ, используются результаты из [6]; штриховая кривая — сечение рождения, полученное в ПРП с использованием МЦС; пунктирная кривая — сечение рождения, полученное в ПРП с использованием УМИЦ

Fig. 4.4. Total cross sections of associated $J/\psi + \gamma$ production as a function of the lower bound of the photon transverse momentum $p_{\gamma T}^{\min}$ at $p_{\psi T} > 10$ GeV. Solid black curve — production cross section obtained in SLP KPM, results from [6] are used; dashed curve — production cross section obtained in PRP using MCS; dotted curve — production cross section obtained in PRP using UMIC

Мы провели сравнение с вычислениями в СЛП КПМ с использованием МЦС при энергии $\sqrt{s} = 14$ ТэВ, опубликованными в [6]. Выполнен расчет спектра по поперечному импульсу

J/ψ -мезонов в кинематической области $|y_\psi|, |y_\gamma| < 3$ и $p_{\gamma T} > 5$ ГэВ, которые использовались в [6]. Показано, что вычисления в ПРП с использованием МЦС немного завышают сечение рождения, вычисленное в СЛП КИМ с использованием МЦС при всех поперечных импульсах J/ψ , см. рис. 4.3. Это интересный эффект, так как результаты одиночного рождения J/ψ , полученные в ЛП ПРП и в СЛП КИМ с использованием НРКХД, приблизительно совпадают. Также были обнаружены значительные расхождения предсказаний в ПРП, сделанных с использованием различных моделей адронизации: p_T -спектр, полученный с использованием УМИЦ, значительно ниже спектра, полученного в МЦС, в области от малых $p_{\psi T}$ до $p_{\psi T} = 30$ ГэВ. Результаты расчета в СЛП КИМ с использованием УМИЦ в настоящее время, к сожалению, отсутствуют, и мы не можем провести сравнение расчетов в такой модели адронизации.

На рис. 4.1–4.6 теоретические неопределенности, связанные с вариацией жесткого масштаба на фактор 2, обозначаются заштрихованными областями.

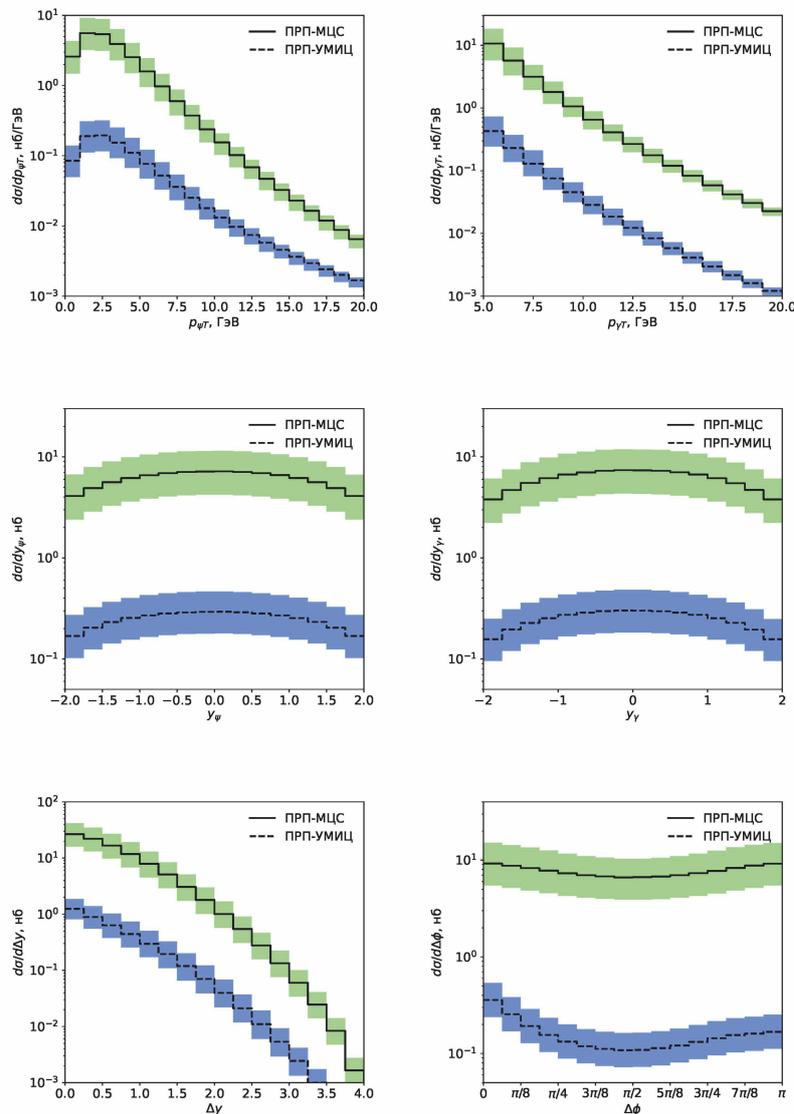


Рис. 4.5. Дифференциальные сечения ассоциативного рождения $J/\psi + \gamma$ при $\sqrt{s} = 13$ ТэВ, в центральной области по быстройте $|y_{\gamma,\psi}| < 2$ как функции поперечных импульсов $p_{\psi T}, p_{\gamma T}$, быстроей y_ψ, y_γ , разности быстроей Δy и разности азимутальных углов $\Delta\phi$: непрерывная кривая — в ПРП с использованием МЦС, штриховая кривая — в ПРП с использованием УМИЦ

Fig. 4.5. Differential cross sections of the associated production of $J/\psi + \gamma$ at $\sqrt{s} = 13$ TeV, in the central region in rapidity $|y_{\gamma,\psi}| < 2$ as functions of the transverse momenta $p_{\psi T}, p_{\gamma T}$, rapidities y_ψ, y_γ , rapidity difference Δy and azimuthal angle difference $\Delta\phi$. Continuous curve — in the PRP using the MCS, dashed curve — in the PRP using the UMIC

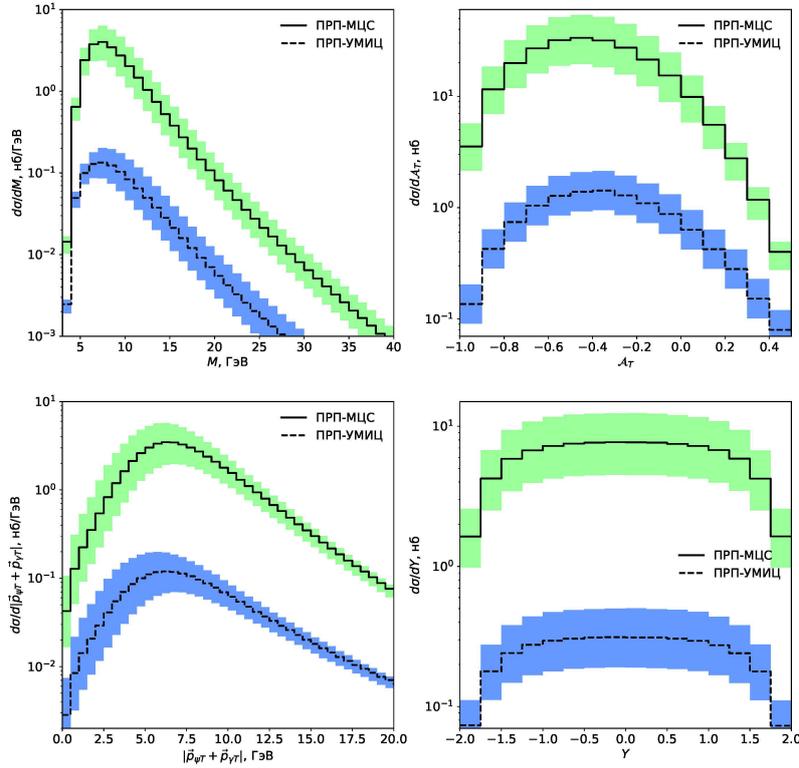


Рис. 4.6. Дифференциальные сечения ассоциативного рождения $J/\psi + \gamma$ при энергии $\sqrt{s} = 13$ ТэВ, в центральной области по быстройте $|y_{\gamma,\psi}| < 2$ как функции инвариантной массы $M = M_{\psi\gamma}$, асимметрии поперечных импульсов \mathcal{A}_T , поперечного импульса пары $p_T = |\mathbf{p}_{\psi T} + \mathbf{p}_{\gamma T}|$ и быстроты пары $Y_{\gamma\psi}$: непрерывная кривая — в ПРП с использованием МЦС, штриховая — в ПРП с использованием УМИЦ

Fig. 4.6. Differential cross sections of associative production of $J/\psi + \gamma$ at energy $\sqrt{s} = 13$ TeV, in the central region in rapidity $|y_{\gamma,\psi}| < 2$ as functions of invariant mass $M = M_{\psi\gamma}$, transverse momentum asymmetry \mathcal{A}_T , pair transverse momentum $p_T = |\mathbf{p}_{\psi T} + \mathbf{p}_{\gamma T}|$ and pair rapidity $Y_{\gamma\psi}$. Continuous curve — in PRP using MCS, dashed — in PRP using UMICS

Отрасывая сравнительно небольшие вклады рождения J/ψ -мезона через октетные по цвету состояния и рождения через распады, были выполнены предсказания в ПРП с использованием МЦС и УМИЦ при энергии БАК $\sqrt{s} = 13$ ТэВ в центральной области по быстройтам $|y_{J/\psi}|$ и $|y_\gamma| < 2$. На рис. 4.5 представлены дифференциальные сечения как функции поперечного импульса J/ψ $p_{J/\psi T}$, поперечного импульса фотона $p_{\gamma T}$, быстроты J/ψ $y_{J/\psi}$, быстроты фотона y_γ , разности быстрот $\Delta y = |y_\psi - y_\gamma|$ и разности азимутальных углов $\Delta\phi = |\phi_\psi - \phi_\gamma|$. Непрерывная кривая — расчет в ПРП с использованием МЦС, пунктирная — расчет в ПРП с использованием УМИЦ. На рис. 4.6 показаны дифференциальные сечения как функции инвариантной массы пары $M = M_{\psi\gamma}$, асимметрии поперечных импульсов $\mathcal{A}_T = (|\mathbf{p}_{\psi T}| - |\mathbf{p}_{\gamma T}|) / (|\mathbf{p}_{\psi T}| + |\mathbf{p}_{\gamma T}|)$, поперечного импульса пары $p_T = |\mathbf{p}_{\psi T} + \mathbf{p}_{\gamma T}|$ и быстроты пары $Y = Y_{\psi\gamma}$.

Заключение

Работая в рамках подхода ПРП, мы подтвердили результаты предыдущих работ других авторов, что для процесса ассоциативного рождения J/ψ -мезонов и прямых фотонов МЦС как приближение НРКХД применимо и вклад в сечение рождения чармония через октетные состояния может не учитываться. Также показано, что можно не учитывать вклад в сечение рождения в процессах кварк-антикварковой аннигиляции при вычислении сечений рождения

$J/\psi + \gamma$ при энергиях $\sqrt{s} = 13 - 14$ ТэВ. Показано, что сечения рождения J/ψ -мезонов и фотонов, предсказанные с использованием МЦС и УМИЦ, сильно отличаются, при этом отличие растёт с ростом поперечного импульса фотона. Предсказания УМИЦ сильно подавлены относительно предсказаний МЦС, что контрастирует с ситуацией хорошего согласия МЦС и УМИЦ при описании одиночного рождения J/ψ -мезонов. Также необходимо отметить, что проведенные нами ранее расчеты сечения ассоциативного рождения J/ψ и фотона при низких энергиях в обобщенной партонной модели [44], выполненные в разных моделях адронизации, УМИЦ и МЦС, примерно совпадали. Таким образом, экспериментальные измерения сечений ассоциативного рождения J/ψ -мезонов и прямых фотонов с большим p_T могут быть исключительно важными для проверки моделей адронизации УМИЦ и НРКХД.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС», грант № 24-1-1-16-5, и государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, № FSSS-2024-0027.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Цитирование. Алимов Л.Э., Карпишков А.В., Салеев В.А. Ассоциативное рождение J/ψ -мезонов и прямых фотонов в подходе реджезации партонов // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 4. С. 116–132. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-116-132.

© Алимов Л.Э., Карпишков А.В., Салеев В.А., 2024

Лев Элдорович Алимов (alimov.le@yandex.ru) – аспирант кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Антон Витальевич Карпишков (karpishkoff@gmail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

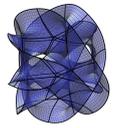
Владимир Анатольевич Салеев (saleev.va@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Литература

- [1] Drees M., Kim C.S. Associate $J/\psi + \gamma$ production: a clean probe of gluon densities // Zeitschrift für Physik C Particles and Fields. 1992. Vol. 53, № 4. P. 673–678. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01559746>
- [2] Mehen T. Testing quarkonium production with photoproduced $J/\psi + \gamma$ // Physical Review D. 1997. Vol. 55, issue 7. P. 4338–4343. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.55.4338>.
- [3] Doncheski M.A., Kim C.S. Associated $J/\psi + \gamma$ production as a probe of the polarized gluon distribution // Physical Review D. 1994. Vol 49, issue 9. P. 4463–4468. DOI: <https://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.49.4463>.
- [4] Accessing the Transverse Dynamics and Polarization of Gluons inside the Proton at the LHC / J.-P. Lansberg [et al.] // Physical Review Letters. 2014. Vol. 112, issue 21. Article number 212001. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.212001>.

- [5] Butenschoen M., Kniehl B.A. Next-to-leading order tests of nonrelativistic-QCD factorization with J/ψ yield and polarization // *Modern Physics Letters A*. 2013. Vol. 28, № 9. Article number 1350027. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0217732313500272>.
- [6] Li R., Kniehl B.A. Next-to-leading-order QCD corrections to J/ψ (Υ) + γ production at the LHC // *Physics Letters B*. 2009. Vol. 672, issue 1. P. 51–55. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2008.12.050>.
- [7] Baier R., Rückl R. Hadronic collisions: a quarkonium factory // *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*. 1983. Vol. 19. P. 251–266. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01572254>.
- [8] Berger E.L., Jones D. Inelastic photoproduction of J/ψ and Υ by gluons // *Physical Review D*. 1981. Vol. 23, issue 7. P. 1521–1530. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.1521>.
- [9] Bodwin G.T., Braaten E., Lepage G.P. Rigorous QCD analysis of inclusive annihilation and production of heavy quarkonium // *Physical Review D*. 1995. Vol. 51, issue 3. P. 1125–1171. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevD.51.1125>.
- [10] Fritzsche H. Producing heavy quark flavors in hadronic collisions. A test of quantum chromodynamics // *Physics Letters B*. 1977. Vol. 67, issue 2. P. 217–221. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(77\)90108-3](https://doi.org/10.1016/0370-2693(77)90108-3).
- [11] Halzen F. CVC for gluons and hadroproduction of quark flavours // *Physics Letters B*. 1977. Vol. 69, issue 1. P. 105–108. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(77\)90144-7](https://doi.org/10.1016/0370-2693(77)90144-7).
- [12] Ma Y.-Q., Vogt R. Quarkonium Production in an Improved Color Evaporation Model // *Phys. Rev. D*. 2016. Vol. 94, issue 11. Article number 114029. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.114029>.
- [13] Collins J. Foundations of perturbative QCD. Cambridge: Cambridge University Press. 2011. 624 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/9781009401845>.
- [14] Collins J.C., Soper D.E., Sterman G. Factorization of hard processes in QCD // *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.* 1989. Vol. 5. P. 1–91. DOI: https://doi.org/10.1142/9789814503266_0001.
- [15] Echevarria M.G., Kasemets T., Lansberg J.-P., Pisano C., Signori A. Matching factorization theorems with an inverse-error weighting // *Physics Letters. Section B*. 2018. Vol 781. P. 161–168. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2018.03.075>.
- [16] Nefedov M.A., Saleev V.A., Shipilova A.V. Dijet azimuthal decorrelations at the LHC in the parton Reggeization approach // *Phys. Rev. D*. 2013. Vol. 87, issue 9. P. 094930. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.094030>.
- [17] Karpishkov A.V., Nefedov M.A., Saleev V.A. $B\bar{B}$ angular correlations at the LHC in parton Reggeization approach merged with higher-order matrix elements // *Phys. Rev. D*. 2017. Vol. 96, issue 9. P. 096019. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.096019>.
- [18] Nefedov M.A., Saleev V.A. High-energy factorization for the Drell-Yan process in $p p$ and $p p^\uparrow$ collisions with new unintegrated PDFs // *Phys. Rev. D*. 2020. Vol. 102, issue 11. P. 114018. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.114018>.
- [19] Kniehl B.A., Vasin D.V., Saleev V.A. Charmonium production at high energy in the k_T -factorization approach // *Phys. Rev. D*. 2006. Vol. 73, issue 7. P. 074022. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.73.074022>.
- [20] Saleev V.A., Nefedov M.A., Shipilova A.V. Prompt J/ψ production in the Regge limit of QCD: From the Tevatron to the LHC // *Phys. Rev. D*. 2012. Vol. 85, issue 7. P. 074013. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.074013>.

- [21] Kniehl B.A., Nefedov M.A., Saleev V.A. ψ (2 S) and Y (3 S) hadroproduction in the parton Reggeization approach: Yield, polarization, and the role of fragmentation // *Phys. Rev. D*. 2016. Vol. 94, issue 5. P. 054007. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.054007>.
- [22] Chernyshev A.A., Saleev V.A. Single and pair J/ψ production in the improved color evaporation model using the parton Reggeization approach // *Phys. Rev. D*. 2022. Vol. 106, issue 11. P. 114006. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.106.114006>.
- [23] Heavy Quarkonium: Progress, Puzzles, and Opportunities / N. Brambilla [et al.] // *The European Physical Journal C*. 2011. Vol. 71. Article number 1534. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-010-1534-9>.
- [24] Vogelsang W., Whalley M.R. A compilation of data on single and double prompt photon production in hadron-hadron interactions // *Phys. Rev. D*. 1997. Vol. 23, issue 7A. P. A1–A69. DOI: <https://doi.org/10.1088/0954-3899/23/7A/001>.
- [25] Measurement of the production cross section of pairs of isolated photons in pp collisions at 13 TeV with the ATLAS detector / G. Aad [et al.] // *Journal of High Energy Physics*. 2021. Vol. 2021. Article number 169. DOI: [https://doi.org/10.1007/JHEP11\(2021\)169](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2021)169).
- [26] Measurement of the inclusive isolated photon production cross section in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV / S. Acharya [et al.] // *The European Physical Journal C*. 2019. Vol. 79, issue 11. Article number 896. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-7389-9>.
- [27] Measurement of differential cross sections for inclusive isolated-photon and photon+jets production in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV / A.M. Sirunyan [et al.] // *The European Physical Journal C*. 2019. Vol. 79, issue 1. Article number 20. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-6482-9>.
- [28] Saleev V.A. Prompt photon photoproduction at HERA within the framework of the quark Reggeization hypothesis // *Phys. Rev. D*. 2008. Vol. 78, issue 11. P. 114031. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.114031>.
- [29] Kniehl B.A., Saleev V.A., Shipilova A.V., Yatsenko E.V. Single jet and prompt-photon inclusive production with multi-Regge kinematics: From Tevatron to LHC // *Phys. Rev. D*. 2011. Vol. 84, issue 7. P. 074017. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.84.074017>.
- [30] Nefedov M., Saleev V. Diphoton production at the Tevatron and the LHC in the NLO approximation of the parton Reggeization approach // *Phys. Rev. D*. 2015. Vol. 92, issue 9. P. 094033. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.094033>.
- [31] Karpishkov A., Saleev V. Production of three isolated photons in the parton Reggeization approach at high energies // *Phys. Rev. D*. 2022. Vol. 106, issue 5. P. 054036. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.106.054036>.
- [32] Collins J.C., Ellis R.K. Heavy-quark production in very high energy hadron collisions // *Nuclear Physics B*. 1991. Vol. 360, issue 1. P. 3–30. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(91\)90288-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(91)90288-9).
- [33] Catani S., Hautmann F. High-energy factorization and small- x deep inelastic scattering beyond leading order // *Nuclear Physics B*. 1994. Vol. 427, issue 3. P. 475–524. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(94\)90636-X](https://doi.org/10.1016/0550-3213(94)90636-X).
- [34] Gribov L.V., Levin E.M., Ryskin M.G. Semihard processes in QCD // *Physics Reports*. 1983. Vol. 100, issue 1–2. P. 1–150. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(83\)90022-4](https://doi.org/10.1016/0370-1573(83)90022-4).
- [35] Lipatov L.N. Gauge invariant effective action for high energy processes in QCD // *Nuclear Physics B*. 1995. Vol. 452, issues 1–2. P. 369–397. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(95\)00390-E](https://doi.org/10.1016/0550-3213(95)00390-E).



- [36] Kimber M.A., Martin A.D., Ryskin M.G. Unintegrated parton distributions // *Physical Review D*. 2001. Vol. 63, issue 11. P. 114027. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.63.114027>.
- [37] Watt G., Martin A.D., Ryskin M.G. Unintegrated parton distributions and inclusive jet production at HERA // *The European Physical Journal C - Particles and Fields*. 2003. Vol. 31. P. 73–89. DOI: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s2003-01320-4>.
- [38] Hahn T. Generating Feynman diagrams and amplitudes with FeynArts 3 // *Computer Physics Communications*. 2001. Vol. 140, issue 3. P. 418–431. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0010-4655\(01\)00290-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0010-4655(01)00290-9).
- [39] Saleev V.A., Nefedov M.A., Shipilova A.V. Prompt J/ψ production in the Regge limit of QCD: From the Tevatron to the LHC // *Phys. Rev. D*. 2012. Vol. 85, issue 7. P. 074013. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.074013>.
- [40] Nefedov M.A., Saleev V.A., Shipilova A.V. Charmonium production at the Tevatron and Large Hadron Collider in the Regge limit of QCD // *Physics of Atomic Nuclei*. 2013. Vol. 76, issue 12. P. 1546–1553. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063778813110124>.
- [41] Saleev V.A., Nefedov M.A., Shipilova A.V. Prompt J/ψ production in the Regge limit of QCD: From Tevatron to LHC // *Phys. Rev. D*. 2012. Vol. 85, issue 7. P. 074013. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.074013>.
- [42] van Hameren A. KaTie: For parton-level event generation with k_T -dependent initial states // *Computer Physics Communication*. 2018. Vol. 224. P. 371–380. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2017.11.005>.
- [43] Chernyshev A., Saleev V. Associated production of heavy quarkonia and D mesons in the improved color evaporation model with KaTie // *Phys. Rev. D*. 2024. Vol. 109, issue 9. P. 094029. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.109.094029>.
- [44] Алимов Л.Э., Салеев В.А. Ассоциативное рождение J/ψ - мезонов и прямых фотонов при энергии коллайдера NICA // *Вестник Самарского университета. Естественная серия*. 2023. Т. 29, № 2. С. 48–61. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-48-61>.

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-116-132

Associated production of J/ψ and direct photon in the parton Reggeization approach

Alimov L.E. , Karpishkov A.V. , Saleev V.A. 

Samara National Research University, Samara, Russian Federation; alimov.le@yandex.ru (L.E.); karpishkoff@gmail.ru (A.V.); saleev.va@ssau.ru (V.A.);

Received: 15.08.2024

Revised: 22.09.2024

Accepted: 25.11.2024

Scientific article



Abstract. We study the associated J/ψ and direct photon production in the high-energy factorization, as it is formulated in the parton Reggeization approach, using two different models for the hadronization of a heavy quark-antiquark pair into a heavy quarkonium, namely the non-relativistic quantum chromodynamics (NRQCD) and the improved color evaporation model (ICEM). We find essential differences in predictions for cross section and transverse momenta spectra obtained using the NRQCD and the ICEM, which can be used for the discrimination between these models. Our prediction for cross sections of the associated J/ψ and direct photon production at the LHC energies slightly overestimate the results early obtained in the next-to-leading order (NLO) calculation in the collinear parton model (CPM). We predict different two-particle correlation spectra in the associated J/ψ and direct photon production which may be interesting for an experimental study.

Key words: LHC; charmonium; J/ψ and direct photon; parton Reggeization approach; improved color evaporation model; non-relativistic quantum chromodynamics; color-singlet model; associated production.

Funding. The work was supported by the Foundation for the Development of Theoretical Physics and Mathematics “BASIS”, grant No. 24-1-1-16-5, and the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, No. FSSS-2024-0027.

Information about the conflict of interests: the authors and reviewers declared no conflicts of interest.

Citation. Alimov L.E., Karpishkov A.V., Saleev V.A. Associated production of J/ψ and direct photon in the parton Reggeization approach. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 116–132. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-116-132. (In Russ.)

© Alimov L.E., Karpishkov A.V., Saleev V.A., 2024

Lev E. Alimov (alimov.le@yandex.ru) – postgraduate student of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

Anton V. Karpishkov (karpishkoff@gmail.ru) – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

Vladimir A. Saleev (saleev.va@ssau.ru) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

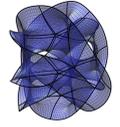
References

- [1] Drees M., Kim C.S. Associate $J/\psi+\gamma$ production: a clean probe of gluon densities. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, 1992, vol. 53, no. 4, pp. 673–678. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01559746>.
- [2] Mehen T. Testing quarkonium production with photoproduced $J/\psi+\gamma$. *Physical Review D*, 1997, vol. 55, issue 7, pp. 4338–4343. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.55.4338>.
- [3] Doncheski M.A., Kim C.S. Associated $J/\psi+\gamma$ production as a probe of the polarized gluon distribution. *Physical Review D*, 1994, vol. 49, issue 9, pp. 4463–4468. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.49.4463>.
- [4] den Dunnen W., Lansberg J.P., Pisano C. Accessing the Transverse Dynamics and Polarization of Gluons inside the Proton at the LHC. *Physical Review Letters*, 2014, vol. 112, issue 21, Article number 212001. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.212001>.
- [5] Butenschoen M., Kniehl B.A. Next-to-leading order tests of non-relativistic-QCD factorization with J/ψ yield and polarization. *Modern Physics Letters A*, 2013, vol. 28, no. 9, article number 1350027. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0217732313500272>.
- [6] Li R., Kniehl B.A. Next-to-leading-order QCD corrections to J/ψ (Y) + γ production at the LHC. *Physics Letters B*, 2009, vol 672, issue 1, pp. 51–55. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2008.12.050>.
- [7] Baier R., Rückl R. Hadronic collisions: a quarkonium factory. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, 1983, vol. 19, pp. 251–266. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01572254>.

- [8] Berger E.L., Jones D. Inelastic photoproduction of J/ψ and Y by gluons. *Physical Review D*, 1981, vol. 23, issue 7, pp. 1521–1530. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.1521>.
- [9] Bodwin G.T., Braaten E., Lepage G.P. Rigorous QCD analysis of inclusive annihilation and production of heavy quarkonium. *Physical Review D*, 1995, vol. 51, issue 3, pp. 1125–1171. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevD.51.1125>.
- [10] Fritzsche H. Producing heavy quark flavors in hadronic collisions. A test of quantum chromodynamics. *Physics Letters B*, 1977, vol. 67, issue 2, pp. 217–221. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(77\)90108-3](https://doi.org/10.1016/0370-2693(77)90108-3).
- [11] Halzen F. CVC for gluons and hadroproduction of quark flavours. *Physics Letters B*, 1977, vol. 69, issue 1, pp. 105–108. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(77\)90144-7](https://doi.org/10.1016/0370-2693(77)90144-7).
- [12] Ma Y.-Q., Vogt R. Quarkonium Production in an Improved Color Evaporation Model. *Phys. Rev. D*, 2016, vol. 94, issue 11, article number 114029. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.114029>.
- [13] Collins J. Foundations of perturbative QCD. Cambridge: Cambridge University Press, 2011, 624 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/9781009401845>.
- [14] Collins J.C., Soper D.E., Sterman G. Factorization of hard processes in QCD. *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys*, 1989, vol. 5, pp. 1–91. DOI: https://doi.org/10.1142/9789814503266_0001.
- [15] Echevarria M.G., Kasemets T., Lansberg J.-P., Pisano C., Signori A. Matching factorization theorems with an inverse-error weighting. *Physics Letters. Section B*, 2018, vol. 781, pp. 161–168. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2018.03.075>.
- [16] Nefedov M.A., Saleev V.A., Shipilova A.V. Dijet azimuthal decorrelations at the LHC in the parton Reggeization approach. *Phys. Rev. D*, 2013, vol. 87, issue 9, p. 094930. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.094930>.
- [17] Karpishkov A.V., Nefedov M.A., Saleev V.A. $B\bar{B}$ angular correlations at the LHC in parton Reggeization approach merged with higher-order matrix elements. *Phys. Rev. D*, 2017, vol. 96, issue 9, p. 096019. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.096019>.
- [18] Nefedov M.A., Saleev V.A. High-energy factorization for the Drell-Yan process in $p p$ and p^\uparrow collisions with new unintegrated PDFs. *Phys. Rev. D*, 2020, vol. 102, issue 11, p. 114018. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.114018>.
- [19] Kniehl B.A., Vasin D.V., Saleev V.A. Charmonium production at high energy in the k_T -factorization approach. *Phys. Rev. D*, 2006, vol. 73, issue 7, p. 074022. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.73.074022>.
- [20] Saleev V.A., Nefedov M.A., Shipilova A.V. Prompt J/ψ production in the Regge limit of QCD: From the Tevatron to the LHC. *Phys. Rev. D*, 2012, vol. 85, issue 7, p. 074013. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.074013>.
- [21] Kniehl B.A., Nefedov M.A., Saleev V.A. ψ ($2S$) and Y ($3S$) hadroproduction in the parton Reggeization approach: Yield, polarization, and the role of fragmentation. *Phys. Rev. D*, 2016, vol. 94, issue 5, p. 054007. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.054007>.
- [22] Chernyshev A.A., Saleev V.A. Single and pair J/ψ production in the improved color evaporation model using the parton Reggeization approach. *Phys. Rev. D*, 2022, vol. 106, issue 11, p. 114006. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.106.114006>.
- [23] Brambilla N., Eidelman S., Heltsley B.K. et al. Heavy Quarkonium: Progress, Puzzles, and Opportunities. *The European Physical Journal C*, 2011, vol. 71, article number 1534. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-010-1534-9>.

- [24] Vogelsang W., Whalley M.R. A compilation of data on single and double prompt photon production in hadron-hadron interactions. *Phys. Rev. D*, 1997, vol. 23, issue 7A, p. A1–A69. DOI: <https://doi.org/10.1088/0954-3899/23/7A/001>.
- [25] The ATLAS collaboration, Aad G., Abbott B. et al. Measurement of the production cross section of pairs of isolated photons in pp collisions at 13 TeV with the ATLAS detector. *Journal of High Energy Physics*, 2021, vol. 2021, article number 169. DOI: [https://doi.org/10.1007/JHEP11\(2021\)169](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2021)169)
- [26] Acharya S., Adamová D., Adhya S.P. et al. Measurement of the inclusive isolated photon production cross section in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV. *The European Physical Journal C*, 2019, vol. 79, issue 11, article number 896. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-7389-9>.
- [27] Sirunyan A.M., Tumasyan A., Adam W. et al. Measurement of differential cross sections for inclusive isolated-photon and photon+jets production in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV. *The European Physical Journal C*, 2019, vol. 79, issue 1, article number 20. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-6482-9>.
- [28] Saleev V.A. Prompt photon photoproduction at HERA within the framework of the quark Reggeization hypothesis. *Phys. Rev. D*, 2008, vol. 78, issue 11, p. 114031. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.114031>.
- [29] Kniehl B.A., Saleev V.A., Shipilova A.V., Yatsenko E.V. Single jet and prompt-photon inclusive production with multi-Regge kinematics: From Tevatron to LHC. *Phys. Rev. D*, 2011, vol. 84, issue 7, p. 074017. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.84.074017>
- [30] Nefedov M., Saleev V. Diphoton production at the Tevatron and the LHC in the NLO approximation of the parton Reggeization approach. *Phys. Rev. D*, 2015, vol. 92, issue 9, p. 094033. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.094033>.
- [31] Karpishkov A., Saleev V. Production of three isolated photons in the parton Reggeization approach at high energies. *Phys. Rev. D*, 2022, vol. 106, issue 5, p. 054036. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.106.054036>.
- [32] Collins J.C., Ellis R.K. Heavy-quark production in very high energy hadron collisions. *Nuclear Physics B*, 1991, vol. 360, issue 1, pp. 3–30. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(91\)90288-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(91)90288-9).
- [33] Catani S., Hautmann F. High-energy factorization and small- x deep inelastic scattering beyond leading order. *Nuclear Physics B*, 1994, vol. 427, issue 3, pp. 475–524. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(94\)90636-X](https://doi.org/10.1016/0550-3213(94)90636-X).
- [34] Gribov L.V., Levin E.M., Ryskin M.G. Semihard processes in QCD. *Physics Reports*, 1983, vol. 100, issues 1–2, pp. 1–150. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(83\)90022-4](https://doi.org/10.1016/0370-1573(83)90022-4).
- [35] Lipatov L.N. Gauge invariant effective action for high energy processes in QCD. *Nuclear Physics B*, 1995, vol. 452, issues 1–2, pp. 369–397. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(95\)00390-E](https://doi.org/10.1016/0550-3213(95)00390-E).
- [36] Kimber M.A., Martin A.D., Ryskin M.G. Unintegrated parton distributions. *Physical Review D*, 2001, vol. 63, issue 11, p. 114027. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.63.114027>.
- [37] Watt G., Martin A.D., Ryskin M.G. Unintegrated parton distributions and inclusive jet production at HERA. *The European Physical Journal C - Particles and Fields*, 2003, vol. 31, pp. 73–89. DOI: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s2003-01320-4>.
- [38] Hahn T. Generating Feynman diagrams and amplitudes with FeynArts 3. *Computer Physics Communications*, 2001, vol. 140, issue 3, pp. 418–431. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0010-4655\(01\)00290-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0010-4655(01)00290-9).

- [39] Saleev V.A., Nefedov M.A., Shipilova A.V. Prompt J/ψ production in the Regge limit of QCD: From Tevatron to LHC. *Physical Review D*, 2012, vol. 85, issue 7, p. 074013. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.074013>.
- [40] Nefedov M.A., Saleev V.A., Shipilova A.V. Charmonium production at the Tevatron and Large Hadron Collider in the Regge limit of QCD. *Physics of Atomic Nuclei*, 2013, vol. 76, issue 12, pp. 1546–1553. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063778813110124>.
- [41] Saleev V.A., Nefedov M.A., Shipilova A.V. Prompt J/ψ production in the Regge limit of QCD: From Tevatron to LHC. *Phys. Rev. D*, 2012, vol. 85, issue 7, p. 074013. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.074013>.
- [42] van Hameren A. KaTie: For parton-level event generation with k_T -dependent initial states. *Computer Physics Communications*, 2018, vol. 224, pp. 371–380. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2017.11.005>.
- [43] Chernyshev A., Saleev V. Associated production of heavy quarkonia and D mesons in the improved color evaporation model with KaTie. *Phys. Rev. D*, 2024, vol. 109, issue 9, p. 094029. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.109.094029>.
- [44] Alimov L.E., Saleev V.A. Associative production of J/ψ — mesons and direct photons at the energy of the NICA collider. *Vestnik Samarskogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 48–61. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-48-61>. (In Russ.)



Рождение J/ψ в подходе пересуммирования мягких глюонов и нерелятивистской КХД

Салеев В.А. , Шильяев К.К. 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация; saleev@samsu.ru (В.А.); kirill.k.shilyaev@gmail.com (К.К.);

Поступила: 11.08.2024

Рассмотрена: 22.10.2024

Принята: 25.11.2024

Научная статья



Аннотация. В работе изучается рождение J/ψ -мезонов в протон-протонных столкновениях в подходе пересуммирования мягких глюонов (неколлинеарная факторизация), в коллинеарной партонной модели и нерелятивистской квантовой хромодинамике. С использованием экспериментальных данных при энергии $\sqrt{s} = 200$ ГэВ фиксируются значения октетных непертурбативных матричных элементов. Для описания области промежуточных поперечных импульсов используется метод обратных погрешностей. Сделаны предсказания для сечения рождения и спектра по поперечному импульсу J/ψ -мезонов в кинематике эксперимента SPD NICA.

Ключевые слова: физика высоких энергий; квантовая хромодинамика; коллинеарная партонная модель; неколлинеарная факторизация; подход пересуммирования мягких глюонов; нерелятивистская квантовая хромодинамика; чармоний; SPD NICA.

Введение

Одним из основных пунктов программы экспериментальных исследований коллаборации SPD NICA [1] является измерение сечений рождения и спектров по поперечному импульсу и быстрой чармониев в столкновениях поляризованных и неполяризованных протонов при энергиях от $\sqrt{s} = 5$ ГэВ до $\sqrt{s} = 27$ ГэВ. Основным механизмом рождения связанных состояний $c\bar{c}$ -кварков является глюон-глюонное слияние, поэтому, изучая рождения чармониев, мы имеем возможность получить информацию о глюонных функциях распределения в протоне. Наиболее эффективным сигналом является рождение J/ψ -мезонов, которые детектируются по их распаду в лептонную пару. Рождение возбужденных состояний чармония, $\psi(2S)$ и χ_{cJ} , наблюдается в каскадных распадах через рождение J/ψ : $\psi(2S) \rightarrow J/\psi + X$ и $\chi_{cJ} \rightarrow J/\psi + \gamma$. Сечение рождения основного состояния чармония η_c -мезона по величине соизмеримо с сечением прямого рождения J/ψ -мезона, однако экспериментальное исследование таких процессов представляет серьезные трудности, так как основной канал распада η_c — это распад в легкие мезоны, что не позволяет выделить сигнал о рождении η_c из фона, который по величине на порядки его превышает. Проведенные ранее расчеты для «перспективных» каналов распада $\eta_c \rightarrow p\bar{p}$ и $\eta_c \rightarrow \gamma\gamma$ показали, что отношение сигнал – фон имеет порядок 10^{-3} [2].

В настоящей работе проведен расчет спектров J/ψ -мезонов по поперечному импульсу в области малых значений $p_T \sim 1$ ГэВ, где форма спектра однозначно определяется зависимостью неколлинеарных глюонных функций распределения от поперечного импульса, в рамках подхода пересуммирования мягких глюонов [3; 4]. Для описания спектров J/ψ -мезонов при больших $p_T > M_\psi$ применена стандартная коллинеарная партонная модель (КПМ) [5]. Для описания промежуточной области поперечных импульсов используется метод обратных погрешностей (МОП) [6]. Представлено описание экспериментальных данных по рождению J/ψ -мезонов при энергии $\sqrt{s} = 200$ ГэВ, и сделаны предсказания для будущего эксперимента SPD NICA при энергии $\sqrt{s} = 27$ ГэВ.

1. Подход пересуммирования мягких глюонов

За пределами области применимости стандартной коллинеарной партонной модели лежит область малых поперечных импульсов $p_T \ll M$, где M — масса состояния, рождающегося в столкновении адронов. Наиболее общий подход к описанию этой кинематической области носит название TMD-факторизации (Transverse Momentum Dependent) или неколлинеарной партонной модели (НКПМ) и представляет собой описание функций распределения партонов с малыми поперечными импульсами и их эволюции внутри протонов. Этот подход позволяет факторизовать сечение рождения частиц как произведение жесткой пертурбативной части, связанной с партонным глюонным или кварковым подпроцессом, и функций, описывающих распределение начальных партонов по импульсу. В партонных функциях распределения (ПФР) в общем случае не разделяются на распределения по продольной и поперечной компонентам импульса. Эволюция партонных распределений по жесткому масштабу факторизации μ_F и быстрой параметру ζ контролируется уравнением ренормгруппы и системой дифференциальных уравнений Коллинза – Сопера [5]. В нашем анализе мы рассматриваем и используем подход пересуммирования мягких глюонов (ПМГ) как один из вариантов НКПМ [3; 4].

В НКПМ партоны подразумеваются находящимися на массовой поверхности $q_{1,2}^2 = 0$ и их 4-импульсы q_1, q_2 в судаковском разложении записываются следующим образом:

$$q_1^\mu = x_1 p_1^\mu + y_1 p_2^\mu + q_{1T}^\mu, \quad q_2^\mu = x_2 p_2^\mu + y_2 p_1^\mu + q_{2T}^\mu,$$

где $p_{1,2} = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, \pm 1)$ — импульсы сталкивающихся протонов; x_i и $y_i = \vec{q}_{iT}^2 / (sx_i)$ — доли продольных импульсов; q_{iT} — поперечные компоненты импульсов ($q_{iT}^2 = -\vec{q}_{iT}^2$).

Поправками $\mathcal{O}(\vec{q}_T^2 / M^2)$ далее будем пренебрегать, т. е. в таком приближении $y_{1,2} \rightarrow 0$, а импульсы партонов с малыми поперечными компонентами представляют собой:

$$q_1 \approx \left(\frac{x_1 \sqrt{s}}{2}, \vec{q}_{1T}, \frac{x_1 \sqrt{s}}{2} \right), \quad q_2 \approx \left(\frac{x_2 \sqrt{s}}{2}, \vec{q}_{2T}, -\frac{x_2 \sqrt{s}}{2} \right). \quad (1.1)$$

Общая для НКПМ теорема описывает рождение конечного состояния как свертку ПФР с сечением рождения в партонном подпроцессе [5]:

$$d\sigma = \int dx_1 dx_2 d^2 q_{1T} d^2 q_{2T} F(x_1, \vec{q}_{1T}, \mu_F, \zeta_1) F(x_2, \vec{q}_{2T}, \mu_F, \zeta_2) d\hat{\sigma}, \quad (1.2)$$

где $d\hat{\sigma}$ — сечение жесткого партонного подпроцесса $2 \rightarrow 1$, в котором рождаются состояния с малыми поперечными импульсами:

$$d\hat{\sigma} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - p) \frac{|\mathcal{M}(2 \rightarrow 1)|^2}{I} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p_0},$$

здесь $I \approx 2x_1 x_2 s$ — потоковый фактор; $\mathcal{M}(2 \rightarrow 1)$ — амплитуда партонного подпроцесса, вычисленная методом фейнмановских диаграмм.

Партонные распределения в выражении (1.2) записаны в форме функций поперечного импульса, в которой — по крайней мере в лидирующем приближении — имеют очевидную вероятностную интерпретацию. Учесть эволюцию ПФР представляется возможным только в сопряженном пространстве: уравнения Коллинза — Сопера и ренормгруппы допускают совместное факторизованное решение (то есть такое, что вся «эволюционная» часть выделяется в отдельный множитель) в пространстве прицельного параметра \vec{b}_T , которое является Фурье-сопряженным пространству поперечного импульса [8]:

$$\hat{F}(x_1, b_T, \mu_F, \zeta) \hat{F}(x_2, b_T, \mu_F, \zeta) = e^{-S_P(b_T, \mu_F, \mu_{F0}, \zeta, \zeta_0)} \hat{F}(x_1, b_T, \mu_{F0}, \zeta_0) \hat{F}(x_2, b_T, \mu_{F0}, \zeta_0), \quad (1.3)$$

причем двумерное Фурье-преобразование ПФР:

$$\hat{F}(x, \vec{b}_T, \mu_F, \zeta) = \int d^2 q_T e^{i\vec{q}_T \vec{b}_T} F(x, \vec{q}_T, \mu_F, \zeta).$$

Эволюцию Фурье-образа ПФР с начальных масштабов (μ_{F0}, ζ_0) в конечные (μ_F, ζ) осуществляет судаковский фактор S_P , в лидирующем по константе связи приближении судаковский фактор выражается в виде интеграла [3; 9]:

$$S_P(Q, \mu_b, b_T) = \frac{C_A}{\pi} \int_{\mu_b^2}^{Q^2} \frac{d\mu'^2}{\mu'^2} \alpha_s(\mu') \left[\ln \frac{Q^2}{\mu'^2} - \left(\frac{11 - 2N_f/C_A}{6} + \frac{1}{2} \delta_{c8} \right) \right] + \mathcal{O}(\alpha_s), \quad (1.4)$$

где N_f — число кварковых ароматов; $C_A = 3$ — собственное значение оператора Казимира присоединенного представления цветовой группы $SU(3)$, δ_{c8} — дельта Кронекера, отличающая пересуммирование для синглетных и октетных состояний кваркония, в качестве конечного масштаба взят жесткий масштаб $Q = \mu_F = \sqrt{\zeta}$, а вместо начального — масштаб $\mu_b = \mu_{F0} = \sqrt{\zeta_0}$, выражение для которого приведено ниже.

Такой выбор связан с минимизацией больших значений логарифмов отношений масштабов $\mu_F/\Lambda_{\text{QCD}}$, μ_F/M [9]. В однопетлевом приближении для константы связи α_s можно получить явное аналитическое выражение для интеграла в S_P . Выражение для судаковского фактора применимо в диапазоне $b_0/Q \leq b_T \leq b_{T,\text{max}}$, где $b_0 = 2e^{-\gamma}$, γ — это постоянная Эйлера — Маскерони. Нижний предел диапазона задается выражением $\mu'_b = Qb_0/(Qb_T + b_0)$, а верхний предел определяется заменой прицельного параметра [7]:

$$b_T \rightarrow b_T^*(b_T) = \frac{b_T}{\sqrt{1 + (b_T/b_{T,\text{max}})^2}},$$

мы использовали наибольшее значение прицельного параметра $b_{T,\text{max}} = 1.5 \text{ ГэВ}^{-1}$. Как в выборе этого параметра, так и в форме ограничений на b_T существует определенная свобода выбора, иные возможные варианты и их обоснования приведены в [9].

Кроме этого, подавление ПФР при больших b_T гарантируется непертурбативным судаковским фактором S_{NP} , выражение для которого, по крайней мере на данном этапе, теоретически последовательно не выводится, поэтому зависимость $S_{NP}(b_T, Q)$ извлекается из эксперимента. В данной работе использовалась параметризация в гауссовой форме, полученная для начальных кварков [10]:

$$S_{NP}(b_T, Q) = \left[g_1 \ln \frac{Q}{2Q_{NP}} + g_2 \left(1 + 2g_3 \ln \frac{10xx_0}{x_0 + x} \right) \right] b_T^2, \quad (1.5)$$

из-за недостатка экспериментальных данных она применяется и для глюонов, но с дополнительным множителем C_A/C_F [9], где C_A, C_F — собственные значения оператора Казимира присоединенного и фундаментального представления группы $SU(3)$ соответственно.

В подходе ПМГ партонные распределения выражаются через коллинеарные, взятые на начальном масштабе μ'_b :

$$\hat{F}(x, b_T) = f(x, \mu'_b) + \mathcal{O}(\alpha_s) + \mathcal{O}(b_T \Lambda_{\text{QCD}}).$$

Теперь можем привести окончательное выражение для дифференциального сечения, где аналитически взяты все возможные интегралы:

$$\frac{d^2\sigma}{dp_T dy} = \frac{\pi p_T |\mathcal{M}(2 \rightarrow 1)|^2}{M^2 s} \int_0^\infty db_T b_T J_0(p_T b_T) e^{-S_P(Q, \mu'_b, b_T^*)} e^{-S_{NP}(b_T, Q)} \hat{F}(x_1, b_T^*) \hat{F}(x_2, b_T^*), \quad (1.6)$$

здесь J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка; p_T — поперечный импульс конечного состояния; y — быстрота конечного состояния.

2. Коллинеарная факторизация

В нашей работе мы пытаемся описать рождение чармониев во всем доступном диапазоне поперечных импульсов конечного состояния, поэтому в области $p_T \gg M$ пользуемся стандартным подходом коллинеарной партонной модели (КПМ) в лидирующем по α_s приближении.

В коллинеарной факторизации импульсы партонов, лежащих на массовой поверхности, прямо пропорциональны импульсам сталкивающихся протонов:

$$q_1^\mu = x_1 p_1^\mu, \quad q_2^\mu = x_2 p_2^\mu,$$

где x_1, x_2 — также продольные доли импульсов протонов, и тогда импульсы партонов, пренебрегая массой протонов при достаточно больших энергиях столкновений \sqrt{s} , можно записать следующим образом:

$$q_1 = \frac{x_1 \sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, 1), \quad q_2 = \frac{x_2 \sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, -1).$$

В приближении малых поперечных импульсов начальных партонов $q_T \ll \mu_F \equiv Q$ действует теорема о коллинеарной факторизации сечения рождения конечного наблюдаемого состояния:

$$d\sigma = \int dx_1 dx_2 f(x_1, \mu_F) f(x_2, \mu_F) d\hat{\sigma}, \quad (2.1)$$

где $f(x, \mu_F)$ — коллинеарные партонные распределения, эволюция которых по жесткому масштабу μ_F описывается уравнениями ДГЛАП; $d\hat{\sigma}$ — сечение жесткого партонного подпроцесса $2 \rightarrow 2$ (подпроцессы $2 \rightarrow 1$ запрещены кинематикой КПМ), которое выражается в виде

$$d\hat{\sigma} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - p - k) \frac{|\overline{\mathcal{M}}(2 \rightarrow 2)|^2}{I} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0},$$

где p и k — импульсы двух конечных частиц (p — импульс рожденного состояния чармония).

3. Описание области промежуточных поперечных импульсов

Для области промежуточных значений поперечных импульсов $p_T \sim M$ не существует подхода, основанного на пертурбативном разложении сечения в ряд и представления его в виде множителей, отвечающих за различные энергетические и пространственно-временные этапы в адронных процессах, как это сделано в моделях коллинеарной и неколлинеарной факторизаций. Вместо этого вклады двух факторизационных моделей «сшиваются» и описывают промежуточную область p_T как тем или иным образом определенную сумму вкладов КПМ и НКПМ. Мы пользуемся подходом МОП (метод обратных погрешностей, Inverse-Error Weighting, InEW), основанным на более общем статистическом методе обратных дисперсий (inverse-variance weighting) — методе выбора весов для вычисления взвешенной суммы нескольких случайных величин, при котором дисперсия этой суммы оказывается наименьшей [6].

В схеме «сшивания» факторизаций МОП вычисляемое при любом значении p_T сечение $\overline{d\sigma}$ представляется в виде суммы вкладов неколлинеарной \mathcal{W} и коллинеарной \mathcal{Z} факторизаций, взятых с некоторыми весами ω_1 и ω_2 :

$$\overline{d\sigma}(p_T, Q) = \omega_1 \mathcal{W}(p_T, Q) + \omega_2 \mathcal{Z}(p_T, Q). \quad (3.1)$$

В качестве весов берутся нормированные значения обратных квадратов степенных поправок, использованных в теоремах факторизации КПМ и НКПМ:

$$\omega_1 = \frac{\Delta_{\mathcal{W}}^{-2}}{\Delta_{\mathcal{W}}^{-2} + \Delta_{\mathcal{Z}}^{-2}}, \quad \omega_2 = \frac{\Delta_{\mathcal{Z}}^{-2}}{\Delta_{\mathcal{W}}^{-2} + \Delta_{\mathcal{Z}}^{-2}},$$

$$\Delta_{\mathcal{W}} = \left(\frac{p_T}{Q}\right)^2 + \left(\frac{m}{Q}\right)^2, \quad \Delta_{\mathcal{Z}} = \left(\frac{m}{p_T}\right)^2 \left(1 + \ln^2\left(\frac{Q_T}{p_T}\right)\right), \quad (3.2)$$

где m — масса адрона порядка 1 ГэВ, $Q_T = \sqrt{Q^2 + p_T^2}$.

Неопределенность вычисления результирующего сечения, определенного как среднее взвешенное двух вкладов, задается выражением:

$$\Delta \overline{d\sigma} = \frac{\Delta_{\mathcal{W}} \Delta_{\mathcal{Z}}}{\sqrt{\Delta_{\mathcal{W}}^2 + \Delta_{\mathcal{Z}}^2}} \overline{d\sigma}. \quad (3.3)$$

Таким образом, схема МОП позволяет вычислить сечение, которое совпадает с вкладами коллинеарной и неколлинеарной факторизаций в областях применимости соответствующих теорем и которое представляется как средневзвешенная сумма этих вкладов в области, где ни та, ни другая теоремы строго не выполняются. Погрешность итогового сечения оказывается максимальной именно в области промежуточных поперечных импульсов.

4. Нерелятивистская КХД

Нерелятивистская КХД — устоявшийся подход к описанию адронизации тяжелых кварков в наблюдаемые состояния. Достаточно большая масса очарованных кварков m_c позволяет рассматривать их как нерелятивистские ($v^2 \approx 0.3$), благодаря этому вполне надежно разделяются по порядку величины следующие динамические наблюдаемые [11]: масса кваркония, трехмерный импульс, кинетическая энергия и т. д. Оценка величины наблюдаемых, соответствующих квантовым операторам, дает право ввести иерархию фоковских состояний чармония в рождении J/ψ по степеням скорости v [12]:

$$|J/\psi\rangle = \mathcal{O}(v^0) |c\bar{c}[{}^3S_1^{(1)}]\rangle + \mathcal{O}(v^1) |c\bar{c}[{}^3P_J^{(8)}]g\rangle + \mathcal{O}(v^2) |c\bar{c}[{}^3S_1^{(1,8)}]gg\rangle + \mathcal{O}(v^2) |c\bar{c}[{}^1S_0^{(8)}]g\rangle + \dots,$$

лидирующим членом ряда является синглетное фоковское состояние, в котором находятся кварки в составе J/ψ . Если ограничиться им, то такое приближение будет называться моделью цветных синглетов (МЦС) [13], в отдельных случаях даже и его уже может быть достаточно для корректного и полного описания рождения чармония.

В НРКХД сечение рождения состояния чармония факторизуется в произведение сечения рождения кварковой пары в некотором фоковском состоянии и непертурбативного матричного элемента (НМЭ), который можно интерпретировать как описывающий адронизацию кварковой пары в связанное состояние:

$$d\hat{\sigma}(a + b \rightarrow \mathcal{C} + X) = \sum_n d\hat{\sigma}(a + b \rightarrow c\bar{c}[n] + X) \langle \mathcal{O}^c[n] \rangle / (N_{\text{col}} N_{\text{pol}}), \quad (4.1)$$

за кратким обозначением n стоят фоковские состояния, которые учитываются при анализе и расчетах рождения J/ψ , также здесь явно записано усреднение по поляризационным ($N_{\text{pol}} = 2J + 1$, где J — полный момент кварковой пары) и цветовым ($N_{\text{col}} = 2N_c$ для синглетов, $N_{\text{col}} = N_c^2 - 1$ для октетов, где N_c — число цветов) состояниям чармония. Амплитуда рождения кварковой пары в фоковском состоянии вычисляется в необходимом порядке по константе связи α_s с помощью техники фейнмановских диаграмм и последовательности проецирований на состояния с необходимыми значениями квантовых спиновых, орбитальных и цветовых чисел [14].

В подходе ПМГ мы учитываем рождение состояний ${}^1S_0^{(8)}$, ${}^3P_{0,2}^{(8)}$ для J/ψ и ${}^3P_{0,2}^{(1)}$, ${}^3S_1^{(8)}$ для χ_{cJ} в подпроцессах $2 \rightarrow 1$, в которых рождаются состояния с малыми поперечными импульсами. Матричные элементы данных подпроцессов:

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}(g + g \rightarrow \mathcal{C}[{}^3P_0^{(1)}])|^2} &= \frac{8\pi^2 \alpha_s^2}{3M^3} \langle \mathcal{O}^c[{}^3P_0^{(1)}] \rangle, & \overline{|\mathcal{M}(g + g \rightarrow \mathcal{C}[{}^3P_2^{(1)}])|^2} &= \frac{32\pi^2 \alpha_s^2}{45M^3} \langle \mathcal{O}^c[{}^3P_2^{(1)}] \rangle, \\ \overline{|\mathcal{M}(g + g \rightarrow \mathcal{C}[{}^3P_0^{(8)}])|^2} &= \frac{5\pi^2 \alpha_s^2}{M^3} \langle \mathcal{O}^c[{}^3P_0^{(8)}] \rangle, & \overline{|\mathcal{M}(g + g \rightarrow \mathcal{C}[{}^3P_2^{(8)}])|^2} &= \frac{4\pi^2 \alpha_s^2}{3M^3} \langle \mathcal{O}^c[{}^3P_2^{(8)}] \rangle, \\ \overline{|\mathcal{M}(g + g \rightarrow \mathcal{C}[{}^1S_0^{(8)}])|^2} &= \frac{5\pi^2 \alpha_s^2}{12M} \langle \mathcal{O}^c[{}^1S_0^{(8)}] \rangle, & \overline{|\mathcal{M}(q + \bar{q} \rightarrow \mathcal{C}[{}^3S_1^{(8)}])|^2} &= \frac{16\pi^2 \alpha_s^2}{9M} \langle \mathcal{O}^c[{}^3S_1^{(8)}] \rangle. \end{aligned}$$

Чармонии в области коллинеарной факторизации рождаются через состояния ${}^3S_1^{(1)}$, ${}^3S_1^{(8)}$, ${}^1S_0^{(8)}$ и ${}^3P_J^{(8)}$ для J/ψ , ψ' и через ${}^3P_J^{(1)}$, ${}^3S_1^{(8)}$ для χ_{cJ} . Соответствующие этим состояниям матричные элементы достаточно громоздки, поэтому не приведены здесь, но матричные элементы синглетных состояний можно найти в работе [15], а октетных состояний — в [16].

Все источники значений НМЭ в той или иной степени феноменологичны. Выражения для НМЭ синглетных состояний связаны со значениями волновой функции чармония или ее производной в нуле [17; 18]:

$$\langle \mathcal{O}^c [{}^3S_1^{(1)}] \rangle = 2N_c(2J+1)|\Psi(0)|^2, \quad \langle \mathcal{O}^c [{}^3P_J^{(1)}] \rangle = 2N_c(2J+1)|\Psi'(0)|^2.$$

Эти значения получают при расчетах в нерелятивистских потенциальных моделях с феноменологическими потенциалами или из экспериментальных данных по распаду чармониев. Октетные же состояния физически ненаблюдаемы, и поэтому наборы октетных НМЭ извлекают фитированием данных чармониев за вычетом синглетных вкладов. Хотя значения НМЭ предполагаются универсальными, результаты фитов НМЭ на разных наборах данных и особенно в различных порядках вычислений по α_s могут достаточно сильно различаться. Поэтому в работе мы приводим свои результаты фитирования данных по рождению J/ψ при $\sqrt{s} = 200$ ГэВ.

5. Результаты расчетов

Все описанные ниже численные расчеты осуществлялись с помощью библиотеки численного интегрирования CUBA [19] (алгоритм интегрирования Suave) при максимальной относительной погрешности расчетов, равной 1 %. Матричные элементы партонных подпроцессов в НРКХД вычислялись в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica с применением пакетов FeynArts [20] и FeynCalc [21]. Коллинеарные партонные распределения в лидирующем порядке по константе связи были взяты в виде численно заданных распределений MSTW2008LO [22].

Массы состояний чармония, использованные в расчетах [23]: $m_{J/\psi} = 3.096$ ГэВ, $m_{\psi'} = 3.686$ ГэВ, $m_{\chi_{c0}} = 3.415$ ГэВ, $m_{\chi_{c1}} = 3.510$ ГэВ, $m_{\chi_{c2}} = 3.556$ ГэВ. Бранчинги распадов чармониев (относительные вероятности распадов) в нижележащие состояния и в лептонные пары [23]: $\text{Br}(\chi_{c0} \rightarrow J/\psi + \gamma) = 0.014$, $\text{Br}(\chi_{c1} \rightarrow J/\psi + \gamma) = 0.343$, $\text{Br}(\chi_{c2} \rightarrow J/\psi + \gamma) = 0.19$, $\text{Br}(\psi' \rightarrow J/\psi + X) = 0.614$, $\text{Br}(J/\psi \rightarrow e^+e^-) = 0.05971$, $\text{Br}(J/\psi \rightarrow \mu^+\mu^-) = 0.05961$. Для синглетных состояний использовались следующие НМЭ [24]: $\langle \mathcal{O}^{J/\psi} [{}^3S_1^{(1)}] \rangle = 1.3$ ГэВ³, $\langle \mathcal{O}^{\psi'} [{}^3S_1^{(1)}] \rangle = 0.65$ ГэВ³, $\langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}} [{}^3P_0^{(1)}] \rangle = 0.089$ ГэВ⁵.

Основной вклад в рождение J/ψ вносят подпроцессы с начальными глюонами, оценка для вклада подпроцессов с кварками для полных сечений составляет (в улучшенной модели испарения цвета) около 10 % при $\sqrt{s} = 200$ ГэВ [25]. В данной работе мы оцениваем доли кварковых вкладов в НРКХД.

Вклад октетных состояний ψ' в рождение J/ψ мы не учитываем из-за их малости по сравнению с вкладами аналогичных состояний J/ψ и практически идентичной с ними зависимости от p_T на доступных нам областях фитирования НМЭ (так как оба вклада описываются одинаковыми матричными элементами). Можно считать малые октетные вклады ψ' эффективно включенными в прямое рождение соответствующих состояний J/ψ .

В качестве масштабов факторизации μ_F и перенормировки μ_R использовалась поперечная масса чармониев $M_T = \sqrt{M^2 + p_T^2}$ в коллинеарной модели и масса чармониев M в подходе ПМГ. Для корректного расчета распадов чармониев $C' \rightarrow C + X$ учитывался эффект отдачи в виде сдвига по поперечному импульсу $p_{TC} \approx (M_C/M_{C'})p_{TC'}$.

Фитирование октетных НМЭ проводилось на наборе экспериментальных данных коллабораций PHENIX [26; 27] и STAR [28; 29] по рождению J/ψ в протон-протонных столкновениях при $\sqrt{s} = 200$ ГэВ в различных быструх диапазонах, причем совместно в областях применимости ПМГ ($p_T < 1$ ГэВ) и КПМ ($p_T > 5$ ГэВ) в предположении независимости НМЭ от выбора модели факторизации. Одинаковая зависимость от p_T вкладов ${}^1S_0^{(8)}$ и ${}^3P_J^{(8)}$ в прямом

рождении J/ψ не позволяет разделять соответствующие им НМЭ в рамках одной модели факторизации, поэтому их значения находят обычно только в виде линейной комбинации, однако совместный фит в КПМ и ПМГ (куда НМЭ входят в двух разных линейных комбинациях) дает возможность найти оба значения $\langle \mathcal{O}^{J/\psi}[^1S_0^{(8)}] \rangle$ и $\langle \mathcal{O}^{J/\psi}[^3P_0^{(8)}] \rangle$. Кроме того, использовалась связь между НМЭ, обусловленная спиновой симметрией тяжелых кварков в лидирующем по v порядке НРКХД:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}}[^3P_J^{(1)}] \rangle &= (2J + 1) \langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}}[^3P_0^{(1)}] \rangle, & \langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}}[^3S_1^{(8)}] \rangle &= (2J + 1) \langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}}[^3S_1^{(8)}] \rangle, \\ \langle \mathcal{O}^{J/\psi}[^3P_J^{(8)}] \rangle &= (2J + 1) \langle \mathcal{O}^{J/\psi}[^3P_0^{(8)}] \rangle. \end{aligned}$$

Значения октетных НМЭ, полученные при фитировании экспериментальных данных, расположены в таблице, приведенная погрешность соответствует 1 среднеквадратичному отклонению. Результаты расчетов сечений для кинематики экспериментов PHENIX [26] и STAR [28] помещены на рис. 5.1, 5.2, 5.3 вместе с соответствующими им кривыми спектров (теоретические расчеты для экспериментальных данных 2007 года [27] здесь не приведены, так как они полностью совпадают с представленными на рис. 5.1 и 5.2). Светло-зеленым цветом на графиках показаны неопределенности при «сшивании» факторизаций, вычисленные с помощью выражения (3.3).

Таблица

Результаты фитирования НМЭ при $p_T < 1$ ГэВ (ПМГ) и $p_T > 5$ ГэВ (КПМ)
 Table
Result for LDMEs fitting within domains of $p_T < 1$ GeV (SGR) and $p_T > 5$ GeV (CPM)

$\langle \mathcal{O}^{J/\psi}[^1S_0^{(8)}] \rangle, \text{ ГэВ}^3$	$(9.66 \pm 0.52) \cdot 10^{-2}$
$\langle \mathcal{O}^{J/\psi}[^3P_0^{(8)}] \rangle, \text{ ГэВ}^5$	$(1.29 \pm 0.19) \cdot 10^{-2}$
$\langle \mathcal{O}^{J/\psi}[^3S_1^{(8)}] \rangle, \text{ ГэВ}^3$	$(1.95 \pm 1.59) \cdot 10^{-3}$
$\langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}}[^3S_1^{(8)}] \rangle, \text{ ГэВ}^3$	$(8.55 \pm 2.91) \cdot 10^{-3}$
$\chi^2/\text{n.d.f.}$	0.76

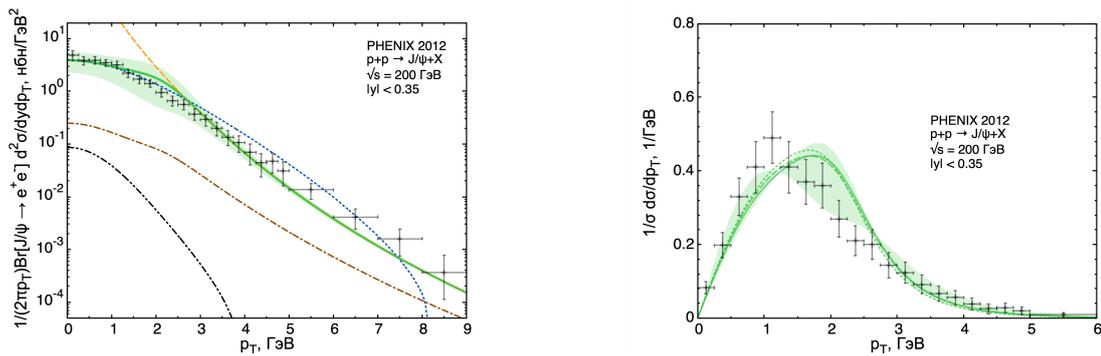


Рис. 5.1. Слева — данные PHENIX [26] и зависимость сечения рождения J/ψ от поперечного импульса: коллинеарный вклад (оранжевая штриховая линия, см. онлайн-версию статьи журнала здесь и далее), неколлинеарный (синяя пунктирная), от распадов χ_{cJ} (коричневая штрихпунктирная), кварковых подпроцессов (черная штрихпунктирная с двумя точками), «сшитое» сечение J/ψ (зеленая сплошная). Справа — спектр рождения J/ψ

Fig. 5.1. On the left — differential cross section of prompt J/ψ production versus transverse momentum p_T : the collinear (orange dashed line, see the online version of the article here and further), noncollinear (blue dotted), χ_{cJ} decay (brown dash-dotted), quark subprocesses (black dash-dot-dotted) contributions, the matched cross-section (green solid). Experimental data is taken from the PHENIX collaboration paper [26]. On the right — spectrum of J/ψ production

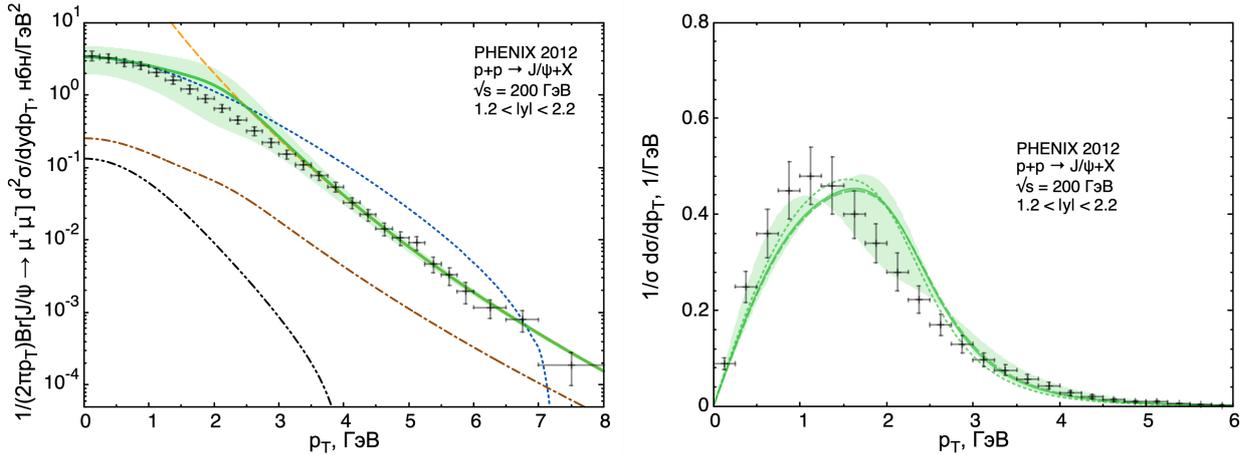


Рис. 5.2. Слева — данные PHENIX [27] и зависимость сечения рождения J/ψ от поперечного импульса: коллинеарный вклад (оранжевая штриховая линия), неколлинеарный (синяя пунктирная), от распадов χ_{cJ} (коричневая штрихпунктирная), кварковых подпроцессов (черная штрихпунктирная с двумя точками), «шитое» сечение J/ψ (зеленая сплошная). Справа — спектр рождения J/ψ

Fig. 5.2. On the left — differential cross section of prompt J/ψ production versus transverse momentum p_T : the collinear (orange dashed line), noncollinear (blue dotted), χ_{cJ} decay (brown dash-dotted), quark subprocesses (black dash-dot-dotted) contributions, the matched cross-section (green solid). Experimental data is taken from the PHENIX collaboration paper [27]. On the right — spectrum of J/ψ production

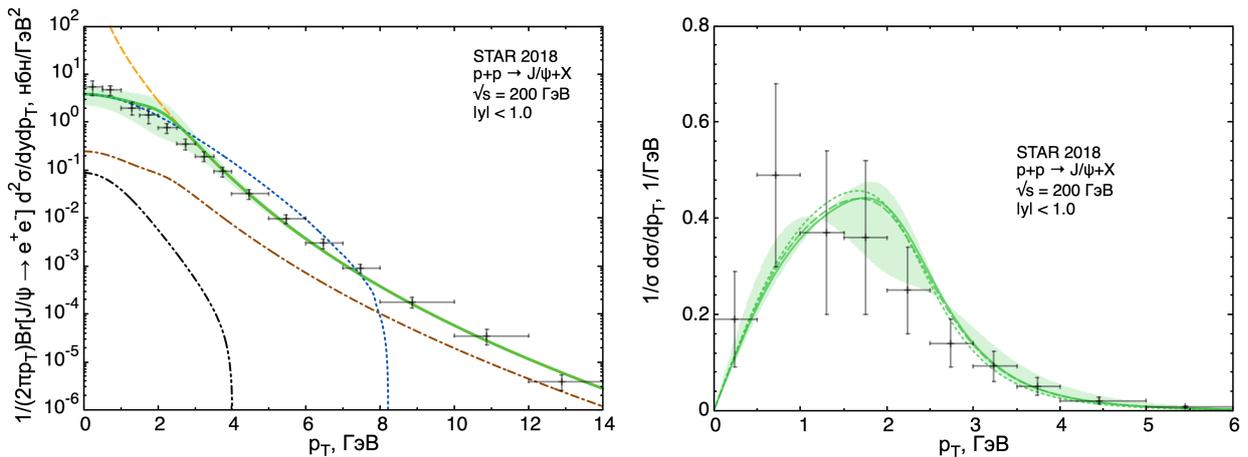


Рис. 5.3. Слева — данные STAR [28] и зависимость сечения рождения J/ψ от поперечного импульса: коллинеарный вклад (оранжевая штриховая линия), неколлинеарный (синяя пунктирная), от распадов χ_{cJ} (коричневая штрихпунктирная), кварковых подпроцессов (черная штрихпунктирная с двумя точками), «шитое» сечение J/ψ (зеленая сплошная). Справа — спектр рождения J/ψ

Fig. 5.3. On the left — differential cross section of prompt J/ψ production versus transverse momentum p_T : the collinear (orange dashed line), noncollinear (blue dotted), χ_{cJ} decay (brown dash-dotted), quark subprocesses (black dash-dot-dotted) contributions, the matched cross-section (green solid). Experimental data is taken from the STAR collaboration paper [28]. On the right — spectrum of J/ψ production

Дополнительную неопределенность в предсказания сечений вносят выбор жесткого масштаба и погрешность НМЭ. Однако при вычислении спектров эти неопределенности практически исчезают. На графиках изображены, кроме основных теоретически предсказанных спектров, также кривые, соответствующие минимальной неопределенности при варьировании разных масштабов в 2 раза в большую и меньшую сторону. Погрешность НМЭ влияет на форму кривой спектра крайне слабо, поэтому на графиках ее невозможно увидеть.

Наши расчеты показывают, что вклад подпроцессов с кварками составляет для центральной быстрой области при $\sqrt{s} = 200$ ГэВ около 3 %, а вклад от распадов $\chi_{cJ} \rightarrow J/\psi + \gamma$ ограничен 7 %, при этом экспериментальная оценка для вкладов от распадов χ_{cJ} составляет около 30 % [26].

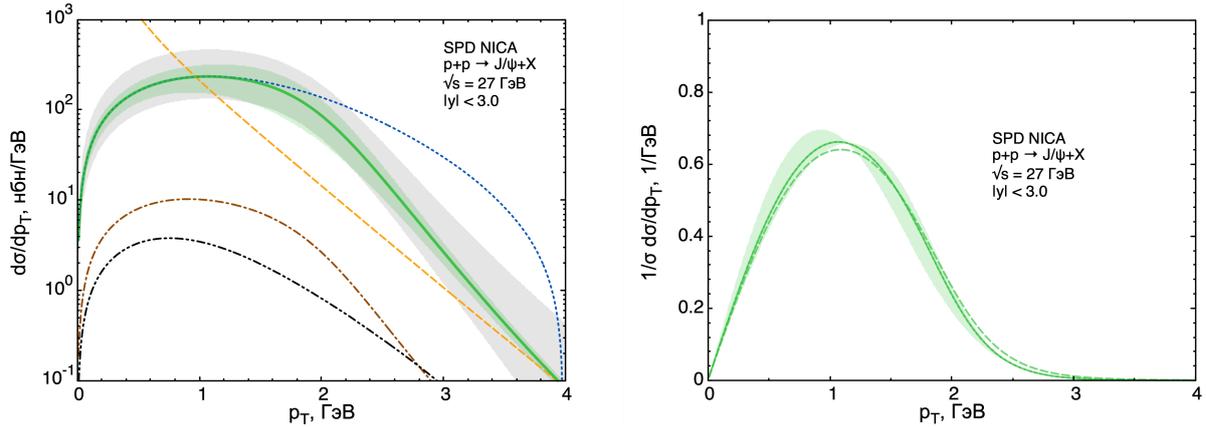


Рис. 5.4. Слева — сечение рождения J/ψ в кинематике SPD NICA: коллинеарный вклад (оранжевая штриховая линия), неколлинеарный (синяя пунктирная), от распадов χ_{cJ} (коричневая штрихпунктирная), от кварковых подпроцессов (черная штрихпунктирная с двумя точками), «сшитое» сечение J/ψ (зеленая сплошная), неопределенность от варьирования жесткого масштаба (серая область). Справа — спектр рождения J/ψ

Fig. 5.4. On the left — prediction for differential cross section of prompt J/ψ production versus transverse momentum p_T at SPD NICA kinematics: the collinear (yellow dashed line), noncollinear (blue dotted), χ_{cJ} decay (brown dash-dotted), quark subprocesses (black dash-dot-dotted) contributions, the matched cross-section (green solid), hard scale variation uncertainty (gray shaded area). On the right — spectrum of J/ψ production

Также мы приводим предсказания рождения J/ψ в кинематике SPD NICA при $\sqrt{s} = 27$ ГэВ с использованием фитированных НМЭ. Как видно на рис. 5.4, с уменьшением энергии \sqrt{s} область перехода из одной факторизации в другую смещается в сторону более малых значений p_T . Оценка вклада кварковых подпроцессов составляет меньше 4 %, доля распадов χ_{cJ} равна около 9 %.

Заключение

Показано, что спектры по поперечному импульсу J/ψ -мезонов в протон-протонных столкновениях хорошо описываются в нерелятивистской квантовой хромодинамике в модели, сочетающей метод пересуммирования мягких глюонов и коллинеарную партонную модель, с использованием метода обратных погрешностей для «сшивки» теоретических расчетов в промежуточной области поперечных импульсов. Используя экспериментальные данные, полученные при энергии $\sqrt{s} = 200$ ГэВ коллаборацией PHENIX, мы фитировали значения октетных непертурбативных матричных элементов, которые использовались для предсказания сечения рождения и спектра по поперечному импульсу J/ψ -мезонов в кинематике эксперимента SPD NICA при энергии $\sqrt{s} = 27$ ГэВ. Показано, что суммарный вклад от процесса кварк-кварковой аннигиляции и от распада вышележащих по массе состояний чармония в рождение J/ψ -мезонов не превышает 10 %.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС», грант № 24-1-1-16-5, и государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, № FSSS-2024-0027.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Цитирование. Салеев В.А., Шилиев К.К. Рождение J/ψ в подходе пересуммирования мягких глюонов и нерелятивистской КХД // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 4. С. 133–146.

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-133-146.

© Салеев В.А., Шилияев К.К., 2024

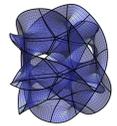
Владимир Анатольевич Салеев (saleev@samsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Кирилл Константинович Шилияев (kirill.k.shilyaev@gmail.com) – аспирант кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Литература

- [1] On the physics potential to study the gluon content of proton and deuteron at NICA SPD / A. Arbuzov [et al.] // Progress in Particle and Nuclear Physics. 2021. Vol. 119. P. 103858. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2021.103858>.
- [2] Anufriev A.V., Saleev V.A. High-Energy Production of η_c Mesons in Proton-Proton Collisions // Physics of Particles and Nuclei. 2024. Vol. 55, issue 4. P. 836–840. DOI: <https://doi.org/10.1134/S106377962470031X>.
- [3] Boer D., den Dunnen W.J. TMD evolution and the Higgs transverse momentum distribution // Nuclear Physics B. 2014. Vol. 886. P. 421–435. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2014.07.006>.
- [4] Sun P., Xiao B.-W., Yuan F. Gluon Distribution Functions and Higgs Boson Production at Moderate Transverse Momentum // Physical Review D. 2011. Vol. 84, issue 9. P. 094005. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.84.094005>.
- [5] Collins J. Foundation of Perturbative QCD. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. 624 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511975592.020>.
- [6] Echevarria M.G., Kasemets T., Lansberg J.-P., Pisano C., Signori A. Matching factorization theorems with an inverse-error weighting // Physics Letters. Section B. 2018. Vol. 781. P. 161–168. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.03.075>.
- [7] Collins J.C., Soper D.E., Sterman G.F. Transverse Momentum Distribution in Drell-Yan Pair and W and Z Boson Production // Nuclear Physics B. 1985. Vol. 250. P. 199–224. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(85\)90479-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(85)90479-1).
- [8] Collins J.C., Soper D.E. Back-To-Back Jets in QCD // Nuclear Physics B. 1981. Vol. 193, issue 2. P. 381–443. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(81\)90339-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(81)90339-4).
- [9] Bor J., Boer D. TMD evolution study of the $\cos 2\phi$ azimuthal asymmetry in unpolarized J/ψ production at EIC // Physical Review D. 2022. Vol. 106, issue 1. P. 014030. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.106.014030>.
- [10] Aybat S.M., Rogers T.C. TMD Parton Distribution and Fragmentation Functions with QCD Evolution // Physical Review D. 2011. Vol. 83, issue 11. P. 114042. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.114042>.
- [11] Lepage G.P., Magnea L., Nakhleh C. Improved nonrelativistic QCD for heavy-quark physics // Physical Review D. 1992. Vol. 46. P. 4052–4067. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.46.4052>.

- [12] Bodwin G.T., Braaten E., Lepage G.P. Rigorous QCD analysis of inclusive annihilation and production of heavy quarkonium // *Physical Review D*. 1995. Vol. 51. P. 1125–1171. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.55.5853>.
- [13] Kühn J.H., Kaplan J., Safiani E.G.O. Electromagnetic Annihilation of $e^+ e^-$ Into Quarkonium States with Even Charge Conjugation // *Nuclear Physics B*. 1979. Vol. 157. P. 125–144. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(79\)90055-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(79)90055-5).
- [14] Cho P., Leibovich A.K. Color-octet quarkonia production // *Physical Review D*. 1996. Vol. 53. P. 150–162. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.53.150>.
- [15] Gastmans R., Troost W., Wu T.T. Cross-Sections for $\text{Gluon}^+ + \text{Gluon} \rightarrow \text{Heavy Quarkonium} + \text{Gluon}$ // *Physics Letters. Section B*. 1987. Vol. 184, issues 2–3. P. 257–260. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(87\)90578-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(87)90578-8).
- [16] Cho P., Leibovich A. K. Color-octet quarkonia production. II // *Physical Review D*. 1996. Vol. 53, issue 11. P. 6203–6217. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.53.6203>.
- [17] Lucha W., Schoberl F.F., Gromes D. Bound states of quarks // *Physics Reports*. 1991. Vol. 200, issue 4. P. 127–240. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(91\)90001-3](https://doi.org/10.1016/0370-1573(91)90001-3).
- [18] Eichten E.J., Quigg C. Quarkonium wave functions at the origin // *Physical Review D*. 1995. Vol. 52, issue 3. P. 1726–1728. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.52.1726>.
- [19] Hanh T. Cuba — a library for multidimensional numerical integration // *Computer Physics Communications*. 2005. Vol. 168, issue 2. P. 78–95. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2005.01.010>.
- [20] Hahn T. Generating Feynman diagrams and amplitudes with FeynArts 3 // *Computer Physics Communications*. 2001. Vol. 140, issue 3. P. 418–431. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0010-4655\(01\)00290-9](https://doi.org/10.1016/s0010-4655(01)00290-9).
- [21] Shtabovenko V., Mertig R., Orellana F. FeynCalc 9.3: New features and improvements // *Computer Physics Communications*. 2020. Vol. 256. P. 107478. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2020.107478>.
- [22] Martin A.D., Stirling W.J., Thorne R.S., Watt G. Parton distributions for the LHC // *The European Physical Journal C*. 2009. Vol. 63. P. 189–285. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-009-1072-5>.
- [23] Review of Particle Physics / P.A. Zyla [et al.] // *Progress of Theoretical and Experimental Physics*. 2020. Vol. 2020, issue 8. P. 083C01. DOI: <https://doi.org/10.1093/ptep/ptaa104>.
- [24] Braaten E., Kniehl B.A., Lee J. Polarization of prompt J/ψ at the Fermilab Tevatron // *Physical Review D*. 2000. Vol. 62, issue 9. P. 094005. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.62.094005>.
- [25] Chernyshev A.A., Saleev V.A. Single and pair J/ψ production in the improved color evaporation model using the parton Reggeization approach // *Physical Review D*. 2022. Vol. 106, issue 11. P. 114006. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.106.114006>.
- [26] Ground and excited state charmonium production in $p + p$ collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV / A. Adare [et al.] // *Physical Review D*. 2012. Vol. 85. P. 092004. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.092004>.
- [27] J/ψ production versus transverse momentum and rapidity in p^+p collisions at $\sqrt{s} = 200$ -GeV / A. Adare [et al.] // *Physical Review Letters*. 2007. Vol. 98. P. 232002. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.232002>.



[28] J/ψ production cross section and its dependence on charged-particle multiplicity in $p + p$ collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV / J. Adam [et al.] // Physics Letters B. 2018. Vol. 786. P. 87–93. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.09.029>.

[29] J/ψ production at high transverse momentum in $p + p$ and Cu+Cu collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV / B.I. Abelev [et al.] // Physical Review C. 2009. Vol. 80, issue 4. P. 041902. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.80.041902>.

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-133-146

Production of J/ψ within the Soft Gluon Resummation Approach and Nonrelativistic QCD

Saleev V.A. , Shilyaev K.K. 

Samara National Research University, Samara, Russian Federation; saleev@samsu.ru (V.A.); kirill.k.shilyaev@gmail.com (K.K.);

Received: 11.08.2024
Revised: 22.10.2024
Accepted: 25.11.2024

Scientific article



Abstract. In our study we analyse prompt J/ψ production in proton-proton collisions within the Soft Gluon Resummation approach, collinear parton model and nonrelativistic QCD. We extract a set of long-distance matrix elements for octet color states from experimental data at $\sqrt{s} = 200$ GeV. We use the InEW scheme for matching cross section and description of J/ψ production in a domain of intermediate transverse momenta. We also provide prediction for J/ψ production using fitted matrix elements at the kinematics of SPD NICA.

Key words: high energy physics; quantum chromodynamics; collinear parton model; noncollinear factorisation; soft gluon resummation approach; nonrelativistic quantum chromodynamics; charmonium; SPD NICA.

Funding. The work was supported by the Foundation for the Development of Theoretical Physics and Mathematics "BASIS", grant No. 24-1-1-16-5, and the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, No. FSSS-2024-0027.

Information about the conflict of interests: the authors and reviewers declared no conflicts of interest.

Citation. Saleev V.A., Shilyaev K.K. Production of J/ψ within the Soft Gluon Resummation Approach and Nonrelativistic QCD. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 133–146. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-133-146. (In Russ.)

© Saleev V.A., Shilyaev K.K., 2024

Vladimir A. Saleev (saleev@samsu.ru) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

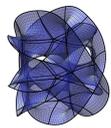
Kirill K. Shilyaev (kirill.k.shilyaev@gmail.com) – postgraduate student of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Arbutov A. [et al.] On the physics potential to study the gluon content of proton and deuteron at NICA SPD. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 2021, vol. 119, p. 103858. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2021.103858>.

- [2] Anufriev A.V., Saleev V.A. High-Energy Production of η_c Mesons in Proton-Proton Collisions. *Physics of Particles and Nuclei*, 2024, vol. 55, issue 4, pp. 836–840. DOI: <https://doi.org/10.1134/S106377962470031X>.
- [3] Boer D., den Dunnen W.J. TMD evolution and the Higgs transverse momentum distribution. *Nuclear Physics B*, 2014, vol. 886, pp. 421–435. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2014.07.006>.
- [4] Sun P., Xiao B.-W., Yuan F. Gluon Distribution Functions and Higgs Boson Production at Moderate Transverse Momentum. *Physical Review D*, 2011, vol. 84, issue 9, p. 094005. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.84.094005>.
- [5] Collins J. Foundation of Perturbative QCD. Cambridge: Cambridge University Press, 2011, 624 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511975592.020>.
- [6] Echevarria M.G., Kasemets T., Lansberg J.-P., Pisano C., Signori A. Matching factorization theorems with an inverse-error weighting. *Physics Letters. Section B*, 2018, vol. 781, pp. 161–168. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.03.075>.
- [7] Collins J.C., Soper D.E., Sterman G.F. Transverse Momentum Distribution in Drell-Yan Pair and W and Z Boson Production. *Nuclear Physics B*, 1985, vol. 250, pp. 199–224. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(85\)90479-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(85)90479-1).
- [8] Collins J.C., Soper D.E. Back-To-Back Jets in QCD. *Nuclear Physics B*, 1981, vol. 193, issue 2, pp. 381–443. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(81\)90339-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(81)90339-4).
- [9] Bor J., Boer D. TMD evolution study of the $\cos 2\phi$ azimuthal asymmetry in unpolarized J/ψ production at EIC. *Physical Review D*, 2022, vol. 106, issue 1, p. 014030. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.106.014030>.
- [10] Aybat S.M., Rogers T.C. TMD Parton Distribution and Fragmentation Functions with QCD Evolution. *Physical Review D*, 2011, vol. 83, issue 11, p. 114042. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.114042>.
- [11] Lepage G.P., Magnea L., Nakhleh C. Improved nonrelativistic QCD for heavy-quark physics. *Physical Review D*, 1992, vol. 46, pp. 4052–4067. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.46.4052>.
- [12] Bodwin G.T., Braaten E., Lepage G.P. Rigorous QCD analysis of inclusive annihilation and production of heavy quarkonium. *Physical Review D*, 1995, vol. 51, pp. 1125–1171. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.51.1125>.
- [13] Kühn J.H., Kaplan J., Safiani E.G.O. Electromagnetic Annihilation of e^+e^- Into Quarkonium States with Even Charge Conjugation. *Nuclear Physics B*, 1979, vol. 157, pp. 125–144. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(79\)90055-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(79)90055-5).
- [14] Cho P., Leibovich A.K. Color-octet quarkonia production. *Physical Review D*, 1996, vol. 53, pp. 150–162. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.53.150>.
- [15] Gastmans R., Troost W., Wu T.T. Cross-Sections for $\text{Gluon} + \text{Gluon} \rightarrow \text{Heavy Quarkonium} + \text{Gluon}$. *Physics Letters. Section B*, 1987, vol. 184, issues 2–3, pp. 257–260. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(87\)90578-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(87)90578-8).
- [16] Cho P., Leibovich A.K. Color-octet quarkonia production. II. *Physical Review D*, 1996, vol. 53, issue 11, pp. 6203–6217. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.53.6203>.
- [17] Lucha W., Schoberl F.F., Gromes D. Bound states of quarks. *Physics Reports*, 1991, vol. 200, issue 4, pp. 127–240. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(91\)90001-3](https://doi.org/10.1016/0370-1573(91)90001-3).

- [18] Eichten E.J., Quigg C. Quarkonium wave functions at the origin. *Physical Review D*, 1995, vol. 52, issue 3, pp. 1726–1728. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.52.1726>.
- [19] Hanh T. Cuba — a library for multidimensional numerical integration. *Computer Physics Communications*, 2005, vol. 168, issue 2, pp. 78–95. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2005.01.010>.
- [20] Hahn T. Generating Feynman diagrams and amplitudes with FeynArts 3. *Computer Physics Communications*, 2001, vol. 140, issue 3, pp. 418–431. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0010-4655\(01\)00290-9](https://doi.org/10.1016/s0010-4655(01)00290-9).
- [21] Shtabovenko V., Mertig R., Orellana F. FeynCalc 9.3: New features and improvements. *Computer Physics Communications*, 2020, vol. 256, p. 107478. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2020.107478>.
- [22] Martin A.D., Stirling W.J., Thorne R.S., Watt G. Parton distributions for the LHC. *The European Physical Journal C*, 2009, vol. 63, pp. 189–285. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-009-1072-5>.
- [23] Zyla P.A. [et al.] Review of Particle Physics. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2020, vol. 2020, issue 8, p. 083C01. DOI: <https://doi.org/10.1093/ptep/ptaa104>.
- [24] Braaten E., Kniehl B.A., Lee J. Polarization of prompt J/ψ at the Fermilab Tevatron. *Physical Review D*, 2000, vol. 62, issue 9, p. 094005. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.62.094005>.
- [25] Chernyshev A.A., Saleev V.A. Single and pair J/ψ production in the improved color evaporation model using the parton Reggeization approach. *Physical Review D*, 2022, vol. 106, issue 11, p. 114006. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.106.114006>.
- [26] Adare A. [et al.] Ground and excited state charmonium production in $p + p$ collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV. *Physical Review D*, 2012, vol. 85, p. 092004. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.092004>.
- [27] Adare A. [et al.] J/ψ production versus transverse momentum and rapidity in $p + p$ collisions at $\sqrt{s} = 200$ -GeV. *Physical Review Letters*, 2007, vol. 98, p. 232002. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.232002>.
- [28] Adam J. [et al.] J/ψ production cross section and its dependence on charged-particle multiplicity in $p + p$ collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV. *Physics Letters B*, 2018, vol. 786, pp. 87–93. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.09.029>.
- [29] Abelev B.I. [et al.] J/ψ production at high transverse momentum in $p + p$ and Cu+Cu collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. *Physical Review C*, 2009, vol. 80, issue 4, p. 041902. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.80.041902>.



Особенности использования марковских процессов принятия решений при моделировании атак на системы искусственного интеллекта

Ветров¹ И.А. , Подтопельный² В.В. 

¹ Балтийский федеральный университет имени И. Канта, г. Калининград, Российская Федерация; vetrov.gosha2009@yandex.ru (И.А.);

² Калининградский государственный технический университет (КГТУ), г. Калининград, Российская Федерация; ionprvv@mail.ru (В.В.);

Поступила: 14.10.2024

Рассмотрена: 20.11.2024

Принята: 25.11.2024

Научная статья



Аннотация. В данной работе проводится исследование особенностей моделирования атак на системы искусственного интеллекта. При построении модели используются марковские процессы принятия решений. Предлагается многоуровневый подход к интерпретации состояний системы, включающий несколько этапов детализации состояний. Этот подход основан на методологии MITRE ATLAS и Методике оценки угроз ФСТЭК. При формировании вектора учитывается специфика модели нарушителя и рассматриваются два основных режима моделирования: on-time и off-time. Описывается порядок формирования наград на абстрактном уровне (без конкретизации действий злоумышленника) построения модели.

Ключевые слова: сетевая атака; уязвимость; марковские процессы; моделирование; стратегия; политика; метод обучения.

Введение

Современные системы искусственного интеллекта становятся объектом хакерских атак. Специфика таких нападений заключается в возможности манипулирования логикой вычислительной модели и данными датасетов. При атаках часто используется внедрение ложной информации в общий поток данных при доступности интерфейса ввода данных. Для предотвращения подобных нападений необходимо выявить возможные векторы атак на системы искусственного интеллекта [1; 2]. При этом следует учитывать специфику реагирования различных вычислительных моделей ИИ на атакующие воздействия:

1. Нейронные сети и модели машинного обучения (линейная регрессия, решающие деревья) проявляют высокую уязвимость к состязательным атакам.
2. Средняя степень уязвимости наблюдается к атакам типа «отравление данными», которые могут ухудшить производительность всех типов моделей.
3. Атаки типа «кража модели» также имеют среднюю степень уязвимости; они особенно опасны для моделей с программными интерфейсами (API).
4. Атаки типа «определение принадлежности» направлены на поиск конкретных примеров из обучающих данных и уязвимы для нейронных сетей.
5. Атаки типа «смена меток» могут снизить производительность моделей всех типов.
6. Нейросети демонстрируют низкую степень уязвимости к атакам типа «инверсия модели».

При изучении атак следует учитывать специфику действий злоумышленника. В этом случае множество действий целесообразно разделить на несколько групп. Первая группа действий связана с возможностями злоумышленника взаимодействовать с вычислительной моделью ИИ, получать полный доступ к исходным данным и алгоритмам ее работы в течение атаки. Вторая группа связана с ограниченными возможностями злоумышленника. Подразумевается, что у злоумышленника отсутствует доступ к любым данным, раскрывающим параметры и особенности построения вычислительной модели, но при этом нарушителю доступен входящий и исходящий поток данных, используя который можно раскрыть характеристики системы ИИ (модель активно тестируется сконструированными запросами, или воссоздается вычислительная модель на стороне атакующего с последующим ее тестированием). Третья группа особенностей подразумевает наличие у злоумышленника возможностей первой группы с ограничениями следующего типа: отсутствует прямой отклик модели, присутствует неполнота сведений о классификационной модели ИИ. Кроме того, следует выделить те атаки, которые не связаны с активным взаимодействием с моделью ИИ (обычно это атаки на различные датасеты). В этом случае цель злоумышленника — исказить параметры при обучении модели таким образом, чтобы вызвать в процессе классификации данных необходимую злоумышленнику реакцию от системы ИИ. В целом можно отметить, что атакующие воздействия возможны при наличии следующего:

1. Известность и распространенность моделей (типовые или индивидуальные).
2. Доступность обучающих данных, прототипов и интерфейсов — чем больше данных для обучения модели находится в общем доступе, тем выше ее уязвимость.

Если рассмотреть действия злоумышленника более детально, можно выделить основные группы уязвимостей:

1. Общий доступ к базам данных и датасету проблемной области вычислительной модели.
2. Отсутствие верификации источников данных, что позволяет изменять данные или метки данных.

Также стоит отметить сопутствующие уязвимости:

1. Слабые механизмы аутентификации и авторизации.
2. Доступность программных интерфейсов.
3. Отсутствие регистрации и учета событий, связанных с изменением источников данных датасетов.
4. Возможность использования методов социальной инженерии.
5. Слабая сетевая защита и неправильная конфигурация сетевой инфраструктуры.

В условиях активного внедрения искусственного интеллекта в современные информационные системы вопрос доверия к исходным обучающим данным и технологиям, используемым в процессе обучения, становится ключевым фактором, определяющим безопасность вычислительных моделей. Соответственно, необходимо исследовать специфику моделирования атак с учетом доступности данных систем ИИ в процессах аудита, рассмотреть аспекты моделирования атакующих воздействий с учетом современных методик описания сценариев атак. При этом следует учитывать, что процедура моделирования должна быть соотнесена с существующими методиками построения сценариев атак, то есть применима в практике аудита информационной безопасности.

1. Исследование специфики атак на системы ИИ и определение специфики моделирования

Существуют множество методов, которые используются для построения и анализа сценариев атак (векторов атак):

1. Деревья атак.
2. Методы, связанные с использованием машинного обучения.
3. Байесовские сети доверия.
4. Сети Петри — Маркова.
5. Теория нечетких множеств.
6. Теория игр.
7. Теория графов.
8. Теория случайных процессов.

Для определения вектора атаки часто используют модель на основе марковских процессов. Это обусловлено тем, что марковские процессы позволяют учитывать фактор неопределенности (результаты действий злоумышленника не всегда предсказуемы), также присутствует возможность структурирования порядка изучаемых действий и состояний. Применение марковских процессов для исследования компьютерных атак рассматривается в ряде научных работ, что доказывает их применимость в задачах анализа атак в сфере информационной безопасности [3–7].

Отдельно нужно отметить преимущества моделирования на основе марковских процессов принятия решений (МППР): модель позволяет принимать оптимальные решения в условиях неопределенности и изменяющейся среды; учитывать последствия принятых решений и строить долгосрочные и оптимальные стратегии (посредством использования алгоритмов максимизации ожидаемой награды), что особенно полезно в задачах прогнозирования атакующих воздействий; применять методы динамического программирования и обучения с подкреплением.

При этом существуют ограничения у данного способа моделирования: марковский процесс принятия решений предполагает, что состояние системы полностью описывает текущую ситуацию и не учитывает историю действий и состояний. Этого может быть недостаточно для некоторых задач, где порядок прошедших действий и состояний играет важную роль; переходы между состояниями являются стохастическими и марковскими, то есть не зависят от предыдущих состояний и действий. В реальных задачах это может быть неверным предположением; существуют проблемы «проклятия размерности», когда количество состояний и действий становится слишком большим, что затрудняет решение и требует больших вычислительных ресурсов. Несмотря на эти ограничения, марковский процесс принятия решений остается мощным инструментом для моделирования и решения задач в различных областях, таких как робототехника, финансы, управление производством и другие. В целом марковский процесс принятия решений является важным инструментом для принятия оптимальных решений в условиях неопределенности. Марковская модель атаки на системы ИИ описывается кортежем состояний действий, наград (S, A, P, R, γ) . При построении модели используются следующие обозначения:

1. $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ — множество вершин-состояний системы, в которых находится атакуемая модель ИИ (состояние интерпретируется по методике MITRE) [8; 9].
2. $A = \{(s_i, s_j) \mid s_i, s_j \in S, a \in \{1, \dots, 11\}\}$ — множество действий злоумышленника в процессе атаки.

3. $R(s, a, s')$ — награда за успешное достижение состояний в результате реализации перехода.
4. $P(s, a, s')$ — вероятности перехода из состояния $s \in S$ при действии $a \in A$ в состояние $s' \in S'$.
5. $\pi(s, a), \pi(a|s) = P[A_i = a|S_i = s]$ — функция, описывающая распределение вероятностей выбора действий злоумышленника в состоянии $s \in S$, которое соответствует достигнутому этапу атаки.
6. $V_\pi(s)$ — ценность состояния — это величина характеризует вознаграждение нападающего. В данной модели она сопоставлена с метрикой уязвимости и набором эксплуатирующих действий в границах стратегии атаки π . Определяется в соответствии с формулой (1)

$$V_\pi(s) = M[R_{i+1} + \gamma V_\pi(S_{i+1})|S_i = s], s \in S. \quad (1)$$

7. $V_{i+1}^*(s)$ — функция ценности состояния как достигнутой тактики, которую возможно использовать для следующего перехода (2).

$$V_{i+1}^*(s) = \max_{a \in A} \sum_{s' \in S} P(s, a, s') [R(s, a, s') + \gamma V_i^*(s')], \forall s' \in S. \quad (2)$$

8. γ — коэффициент дисконтирования.
9. M — математическое ожидание случайной величины.
10. $G_i = R_{i+1} + \gamma R_{i+2} + \gamma^2 R_{i+3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{i+k+1}$ — функция ценности на i -м шаге.
11. $\pi^*(s)$ — функция оптимальной политики (3):

$$\pi^*(s) = \operatorname{argmax}_{a \in A} \sum_{s' \in S} P(s, a, s') [R(s, a, s') + \gamma V_i^*(s')]. \quad (3)$$

Количество состояний и переходов в системе зависит от ее инфраструктуры, логической организации вычислительной модели и ее алгоритмов. Чтобы определить стратегию поведения злоумышленника, можно использовать моделирование на основе марковских процессов принятия решений (МППР). В этом случае политики будут стационарными, то есть не зависящими от времени.

В процессе моделирования необходимо ввести параметры, которые описывают затраты на реализацию стратегии нападения. Эти затраты включают в себя обман механизмов классификации систем идентификации (СИИ) на уровне весов нейросети атак (модификация классифицирования) и на уровне разделения источников данных на доверенные и недоверенные (навязывание ложных обучающих данных).

Анализ параметров, влияющих на принятие оптимальных решений злоумышленником, является важной задачей. Оптимальная стратегия нападения строится с помощью уравнения Беллмана [7].

2. Формирование модели

Выбор типа состояния зависит от уровня абстракции модели и характера действий злоумышленника. При более детальном анализе используются состояния, определяемые как успех действий злоумышленника. Эти действия классифицируются как тактики и техники, соответствующие методологиям MITRE Atlas или ФСТЭК [8; 9].

Однако можно абстрагироваться от конкретных действий злоумышленника, сосредоточившись на общих фазах атаки. В этом случае можно выделить несколько состояний:

1. Контролируемое взаимодействие. В этом состоянии злоумышленник и атакуемая сторона полностью контролируют канал передачи данных и реакцию атакуемой вычислительной модели при осуществлении нелегитимных действий.
2. Легитимное взаимодействие. Злоумышленник может взаимодействовать с вычислительной моделью в обычном режиме, не оказывая на нее компрометирующего воздействия.
3. Доверенное взаимодействие. Злоумышленник взаимодействует с вычислительной моделью, которая не различает легитимные и компрометирующие воздействия на ее алгоритмы и данные.

Ключевым фактором в этой модели является вычисление наград. Изначально все награды равны нулю. Затем при переходах вычисляются новые награды, и для предотвращения неправильной оценки (максимизации ценности множества неэффективных действий) используется коэффициент дисконтирования, равный 0,9. Это позволяет найти наиболее эффективный путь, то есть набор действий злоумышленника, который приводит к наибольшим наградам. Логика получения наград определяется в зависимости от условий моделирования и типа атаки. В случае успешного перехода злоумышленник получает более высокую награду, что служит стимулом для продолжения его действий. Если же действия не приносят успеха, награды либо отсутствуют, либо становятся отрицательными.

Таким образом, можно выделить четыре основных состояния, которые наблюдаются в режиме онлайн, то есть когда происходит атака на вычислительную модель:

- контролируемое взаимодействие (C);
- легальное взаимодействие (L);
- доверенное взаимодействие (T);
- блокировка (B).

Модель взаимодействия приведена на рисунке 2.1. При моделировании атак на системы искусственного интеллекта используются абстрактные состояния действия, которые приводят к изменениям и появлению новых состояний системы. В результате выстраивается определенный порядок действий и состояний.

Важно отметить, что злоумышленник должен быть осведомлен об изменениях системы. В противном случае он будет использовать шаблонные действия или алгоритмы вредоносных программ, не имея возможности контролировать или отслеживать состояние атакуемой системы. Такой подход к моделированию соответствует типологии атак на системы ИИ. Если злоумышленник способен получать отклик от системы в реальном времени, эти атаки можно отнести к атакам «белого» или «серого ящика». В случае отсутствия отклика нападение может рассматриваться как атака типа «черный ящик». При моделировании важно учитывать логику злоумышленника. Если при моделировании определяется наилучший порядок действий без учета особенностей модели нарушителя, то считается, что он является высококвалифицированным и имеет максимальный доступ к атакующим инструментам. Такой режим можно отнести к режиму «вне контекста времени атаки», который ограничивает возможности нарушителя (режим off-time). Полностью учесть модель нарушителя сложно, так как она неизвестна в момент атаки. Однако, если учитывать вариативность модели нарушителя, можно вводить специальные действия, которые будут характеризовать нарушение логики наилучшего пути реализации атакующих воздействий. Это покажет, что злоумышленник не всегда действует наилучшим образом (режим on-time). В этой логике злоумышленник может возвращаться в нейтральное состояние при поиске наилучшего альтернативного пути. Если он продолжит атаковать действия в контексте контролируемого взаимодействия, система переведет систему в состояние блокировки. Таким образом, злоумышленник будет извещен о негативных последствиях для него, если у него нет доступа к интерфейсу вычислительной модели.

Приведенные состояния (рис. 1) описывают модель атаки типа «отравление данными» в контексте взаимодействия двух сторон в реальном режиме времени (режим on-time). При этом следует учитывать, что модель, описывающая сценарий предполагаемой атаки, определяемой при аудите информационных систем, создается с учетом поиска наилучшей последовательности действий злоумышленника вне контекста противодействия в реальном режиме времени защищающейся стороны (режим off-time).

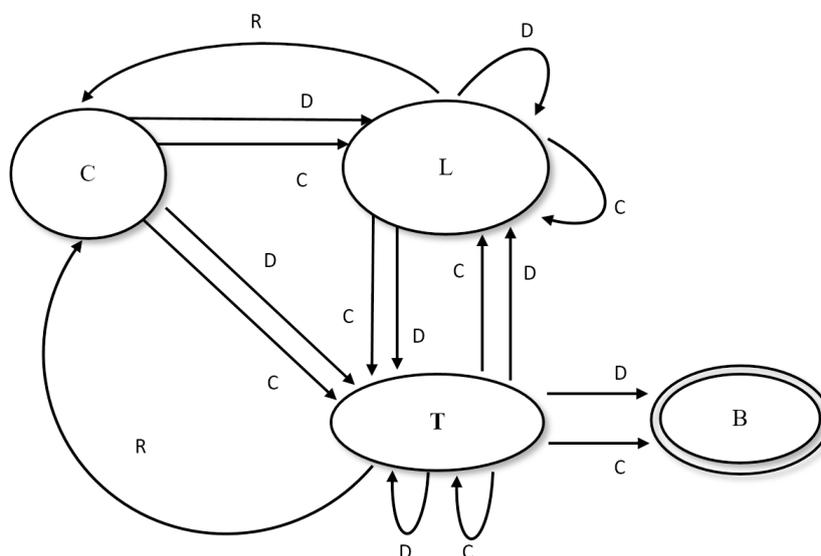


Рис. 1. Модель МППР для атак в режиме on-time
Fig. 1. MDP-model for on-time data poisoning attacks

Для построения сценария атак подобного рода часто используют методологию MITRE ATLAS (далее — MITRE) [4; 10]. На рисунке 2 приведена упрощенная (абстрагированная) классификация тактик MITRE, в которой тактики объединены на основе сходства функционального назначения техник в несколько классов, а именно:

1. Разведка предполагает выявление слабостей (уязвимостей к воздействию на системы ИИ), проводится на разных этапах атаки: на начальном и промежуточных этапах при продвижении в последовательности компрометирующих действий.
2. Сопровождение включает в свой состав подготовку средств эксплуатации уязвимостей и условий для успешного нападения. Также может осуществляться на начальном и промежуточных этапах.
3. Компрометация содержит действия, направленные на извращение порядка функционирования СИИ, в том числе ее вычислительной модели.
4. Компрометация — это заключительная фаза, наступление которой означает — достигнут успех атаки и злоумышленник нанес ущерб системе.

Изначально злоумышленнику доступно нейтральное состояние СИИ. Модель МППР для сценария атаки в режиме off-time на модели и системы ИИ предполагает также четыре состояния, с которыми злоумышленник может столкнуться при взаимодействии с СИИ [9]:

- разведка (T1);
- подготовка (T2);
- компрометация (T7);
- достижение целевого состояния (T12).



Рис. 2. Упрощение методологии MITRE ATLAS
 Fig. 2. Simplification of the MITER ATLAS methodology

Модель взаимодействия приведена на рисунке 3. Отсутствие обратных дуг, обозначающих действие R , в данной модели обусловлено характером построения сценария при пассивном аудите (определяется наилучший сценарий атаки злоумышленника при учете того, что злоумышленнику известно все об атакуемой системе, средства защиты предустановлены, а система при этом изменяется только под действиями злоумышленника). В этом случае откат в предыдущее состояние означает отсутствие успеха в выбранной стратегии поведения злоумышленника, и, следовательно, возникает потребность в смене вектора атаки.

При моделировании атакующих воздействий доступны следующие стратегии (действия):

1. Обход системы (обман) (D).
2. Легитимное взаимодействие с системой (C).
3. Откат до предыдущего состояния (R).

Злоумышленник начинает с предоставления легитимных данных, чтобы завоевать доверие системы искусственного интеллекта (ИИ). Затем он вводит возмущения, которые приводят к неверной классификации данных и получению вознаграждения R . Начальные значения этого вознаграждения отражают как выгоды, так и потери, которые он понес до достижения легального взаимодействия с системой.

Размер вознаграждения R за действия a определяется на основе следующего принципа: величина ресурсов, затраченных на обход модели (обман), должна превышать вознаграждение

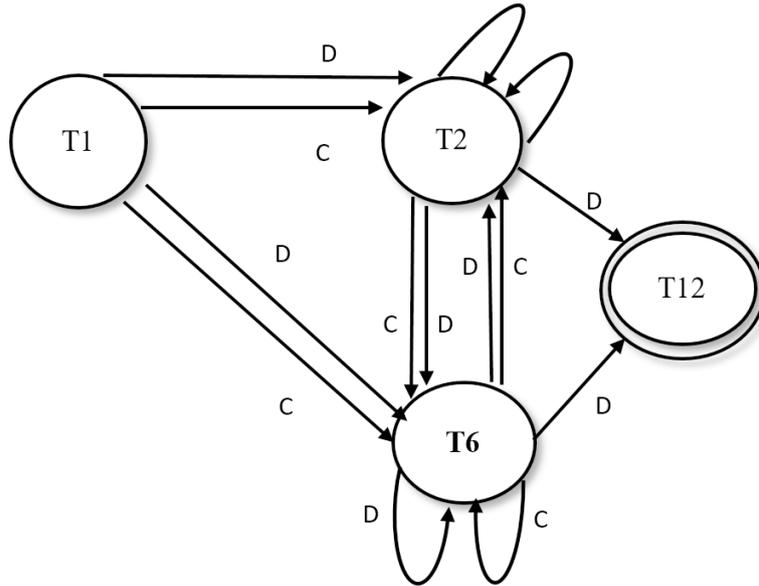


Рис. 3. MDP-модель для off-time, связанных с отравлением данных
 Fig. 3. MDP-model for off-time, connected with Data Poisoning attacks

за легальное взаимодействие. В случае отката (блокировки действий злоумышленника) вознаграждение отсутствует, а при переходе в предыдущее состояние оно заменяется штрафом. Таким образом, порядок вознаграждений R за каждое новое состояние будет соответствовать следующему набору правил:

1. Для моделирования в режиме on-time: $R(CT) > R(LT) > R(LC) > R(CC) > R(C-L) > R(TT) > R(TC) > R(TL) > R(CB)$.
2. Для моделирования в режиме off-time: $R(T1T7) > R(T2T7) > R(T2T1) > R(T1CT1) > R(T1 - T2) > R(T7T7) > R(T7T1) > R(T7T2) > R(T1T12)$.

При моделировании начальные значения для всех состояний устанавливаются равными нулю. Далее для каждого состояния вычисляются новые значения (3; 4). Этот процесс повторяется до тех пор, пока значения не достигнут равновесного состояния и не изменятся. Кроме того, учитывается максимальное количество повторений (например, 1000), чтобы избежать попадания в бесконечный цикл, когда значения меняются очень незначительно.

Итерация значений — это простой итерационный алгоритм для определения оптимальной функции значений V^* , которая сходится к правильным значениям.

При создании модели важно учитывать ряд ограничений, которые соответствуют логике осуществления атак на модель искусственного интеллекта. Во-первых, все переходы (множество A) из одного состояния в другое должны в сумме составлять 1. Это условие важно для направленных графов модели. Во-вторых, если одновременно применяются как легитимные, так и нелегитимные действия, то их суммарная вероятность должна превышать вероятности только легитимных или только нелегитимных переходов. Если реализуются нелегитимные действия, то вероятность попадания в состояние, при котором повышается вероятность последующего перехода в заблокированное состояние, должна быть выше, чем вероятность того, что новое состояние будет полностью доверенным (действия злоумышленника признаются легитимными).

Ключевым фактором в построении модели является определение величин ценности состояний, что позволяет выявить наилучшую последовательность фаз (состояний) атаки с точки зрения злоумышленника. Определение значений для каждого состояния с использованием функции полезности модели на основе МППР для общей атаки в режиме on-time на СИИ приведено в выражениях ниже. Нужно отметить, что подобный подход уже использовался при рассмотрении аспектов компрометации с применением социальной инженерии, но при этом не

использовалась интерпретация состояний с учетом специфики MITRE ATLAS, Методики ФСТ-ЭЖ, не применялись режимы построения модели (on-line, on-line), не учитывалось наличие намеренных действий, связанных со сбросом достигнутых состояний [11].

$$V_{i+1}^* (s = T) = \max_{a \in A} \sum_{s' \in S} P (s, a, s') \left[R (s, a, s') + \gamma V_i^* (s') \right]. \tag{4}$$

$$V_{i+1}^* (s = T) = \max \left\{ \begin{array}{l} P (T, D, L) [R (T, D, L) + \gamma V_i^* (L)] + \\ P (T, D, T) [R (T, D, T) + \gamma V_i^* (T)] < (D) > \\ \text{-----} \\ P (T, C, L) [R (T, C, L) + \gamma V_i^* (L)] + \\ P (T, D, T) [R (T, C, T) + \gamma V_i^* (T)] < (S) > \\ \text{-----} \\ P (T, R, C) [R (T, R, C) + \gamma V_i^* (C)] < (R) > \end{array} \right. . \tag{5}$$

$$V_{i+1}^* (s = L) = \max_{a \in A} \sum_{s' \in S} P (L, a, s') \left[R (L, a, s') + \gamma V_i^* (s') \right]. \tag{6}$$

$$V_{i+1}^* (s = L) = \max \left\{ \begin{array}{l} P (L, D, L) [R (L, D, L) + \gamma V_i^* (L)] + \\ P (L, D, B) [R (L, D, B) + \gamma V_i^* (B)] + \\ P (L, D, T) [R (L, D, T) + \gamma V_i^* (T)] < (D) > \\ \text{-----} \\ P (L, C, L) [R (L, C, L) + \gamma V_i^* (L)] + \\ P (L, C, B) [R (L, C, B) + \gamma V_i^* (B)] + \\ P (L, C, T) [R (L, C, T) + \gamma V_i^* (T)] < (S) > \\ \text{-----} \\ P (L, R, C) [R (L, R, C) + \gamma V_i^* (C)] < (R) > \end{array} \right. . \tag{7}$$

$$V_{i+1}^* (s = C) = \max_{a \in A} \sum_{s' \in S} P (C, a, s') \left[R (C, a, s') + \gamma V_i^* (s') \right]. \tag{8}$$

$$V_{i+1}^* (s = C) = \max \left\{ \begin{array}{l} P (C, D, L) [R (C, D, L) + \gamma V_i^* (L)] + \\ P (C, D, B) [R (C, D, B) + \gamma V_i^* (B)] < (D) > \\ \text{-----} \\ P (C, C, L) [R (C, C, L) + \gamma V_i^* (L)] + \\ P (C, C, C) [R (C, C, C) + \gamma V_i^* (C)] < (S) > \end{array} \right. . \tag{9}$$

При определении значений для каждого состояния с использованием функции полезности модели на основе МППР для общей атаки в режиме off-time на СИИ не предполагается возвратных состояний.

$$V_{i+1}^* (s = T6) = \max_{a \in A} \sum_{s' \in S} P (s, a, s') \left[R (s, a, s') + \gamma V_i^* (s') \right]. \tag{10}$$

$$V_{i+1}^* (s = T6) = \max \left\{ \begin{array}{l} P (T6, D, T2) [R (T6, D, T2) + \gamma V_i^* (T2)] + \\ P (T6, D, T12) [R (T6, D, T12) + \gamma V_i^* (T12)] + \\ P (T6, D, T6) [R (T6, D, T6) + \gamma V_i^* (T6)] < (D) > \\ \text{-----} \\ P (T6, C, T2) [R (T6, C, T2) + \gamma V_i^* (T2)] + \\ P (T6, D, T6) [R (T6, C, T6) + \gamma V_i^* (T6)] < (S) > \\ \text{-----} \\ P (T6, R, T1) [R (T6, R, T1) + \gamma V_i^* (T1)] < (R) > \end{array} \right. . \tag{11}$$

$$V_{i+1}^* (s = T2) = \max \left\{ \begin{array}{l} P(T2, D, T2) [R(T2, D, T2) + \gamma V_i^*(T2)] + \\ P(T2, D, T12) [R(T2, D, T12) + \gamma V_i^*(T12)] + \\ P(T2, D, T6) [R(T2, D, T6) + \gamma V_i^*(T6)] < (D) > \\ \text{-----} \\ P(T2, C, T2) [R(T2, C, T2) + \gamma V_i^*(T2)] + \\ P(T2, C, T6) [R(T2, C, T6) + \gamma V_i^*(T6)] < (S) > \\ \text{-----} \\ P(T2, R, T1) [R(T2, R, T1) + \gamma V_i^*(T1)] < (R) > \end{array} \right. \quad (12)$$

$$V_{i+1}^* (s = T2) = \max_{a \in A} \sum_{s' \in S} P(T2, a, s') [R(T2, a, s') + \gamma V_i^*(s')]. \quad (13)$$

$$V_{i+1}^* (s = T1) = \max_{a \in A} \sum_{s' \in S} P(T1, a, s') [R(T1, a, s') + \gamma V_i^*(s')] \quad (14)$$

$$V_{i+1}^* (s = T1) = \max \left\{ \begin{array}{l} P(T1, D, T2) [R(T1, D, T2) + \gamma V_i^*(T2)] + \\ P(T1, D, T6) [R(T1, D, T6) + \gamma V_i^*(T6)] < (D) > \\ \text{-----} \\ P(T1, C, T2) [R(T1, C, T2) + \gamma V_i^*(T2)] + \\ P(T1, C, C) [R(T1, C, T6) + \gamma V_i^*(T6)] < (S) > \end{array} \right. \quad (15)$$

Приведенные значения вознаграждений должны быть масштабированы в заранее определенном диапазоне, чтобы избежать поверхностного эффекта больших вознаграждений. При атаке, когда цели передаются компрометирующие данные, злоумышленник может быть заблокирован, то есть величина выгоды в этом случае будет стремиться к нулевым значениям. Моделирование в соответствии с приведенным порядком вычисления $V_{i+1}^*(s)$ должно показывать компромисс между затратами, действиями и последствиями различных стратегий, доступных злоумышленникам, что в итоге позволяет определить наилучшую стратегию нападения. Демонстрация работы модели для режима on-line показывает наилучшие пути реализации атак в ситуации «серый ящик» при заполненных матрицах вознаграждений и матрицах вероятностей переходных состояний (рис. 4). Атака производится на системы ИИ, которые используют нейросеть GAN. Состояния классифицируются в соответствии с фазами атак (упрощение методологии MITRE ATLAS, рис. 3).

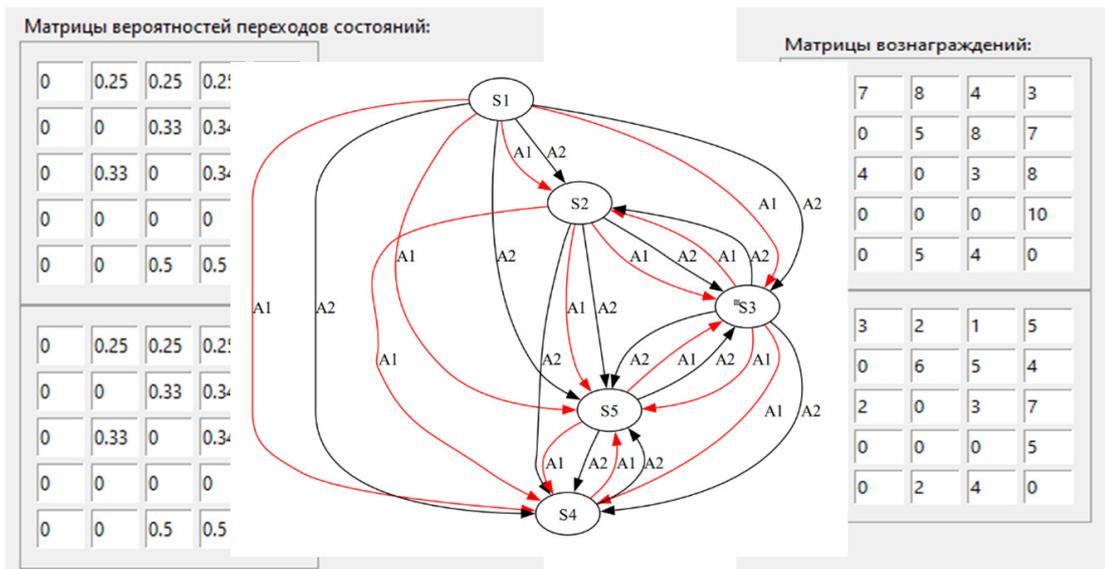


Рис. 4. MDP-модель для off-time, связанных с отравлением данных
 Fig. 4. MDP-model for off-time, connected with Data Poisoning attacks

В этом случае награды за переход $A1$ (успех) определяются как мера уязвимости в текущем состоянии. Награды за переход $A2$ (не успех) можно определять как величину возможного отката (результат осуществления контрмер, закрывающих уязвимость для действия $A1$). Контрмеры рассматриваются как противодействие влиянию нелегитимных данных методами машинного обучения [11; 12]. Таким образом, если $A1_{ij} < A2_{ij}$, то контрмеры перекрывают текущие уязвимости в данном элементе матрицы. Тогда все оптимальные действия для злоумышленника успешны. Злоумышленник может пойти по любому из предоставленных путей в случае равновероятных событий.

Выводы

Таким образом, в процессе исследования проблемной области атак на ИИ были сформированы модели определения наилучших политик (действий) нападения злоумышленника для режимов on-time и off-time с учетом методов MITRE ATLAS и методологии ФСТЭК. Порядок моделирования атак на системы ИИ с использованием МППР, учитывая требования оптимальной политики нападения, позволяет более точно формировать векторы атак, которые используют методы навязывания ложных данных, а также модифицирования логики вычислительной модели. Важной особенностью процесса моделирования является учет специфики формирования наград за переходы между состояниями развертываемой атаки.

Информация о конфликте интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Цитирование. Ветров И.А., Подтопельный В.В. Особенности использования марковских процессов принятия решений при моделировании атак на системы искусственного интеллекта // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara State University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 4. С. 147–160. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-147-160.

© Ветров И.А., Подтопельный В.В., 2024

Игорь Анатольевич Ветров (vetrov.gosha2009@yandex.ru) – кандидат технических наук, доцент, методический руководитель по УГСНП «Информационная безопасность», Образовательно-научный кластер «Институт высоких технологий», Балтийский федеральный университет имени И. Канта, 236041, Российская Федерация, г. Калининград, ул. Александра Невского, 14.

Владислав Владимирович Подтопельный (ionpvr@mail.ru) – старший преподаватель, Институт цифровых технологий, Калининградский государственный технический университет, 236022, Российская Федерация, г. Калининград, Советский пр., 1.

Литература

- [1] Котенко И.В., Саенко И.Б., Лаута О.С., Васильев Н.А., Садовников В.Е. Атаки и методы защиты в системах машинного обучения: анализ современных исследований // Вопросы кибербезопасности. 2024. № 1 (59). С. 24–37. DOI: <https://doi.org/10.21681/2311-2024-1-24-37>. EDN: <https://elibrary.ru/izqdl>.
- [2] Намиот Д.Е. Схемы атак на модели машинного обучения // International Journal of Open Information Technologies. 2023. Т. 11, № 5. С. 68–86. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/shemy-atak-na-modeli-mashinnogo-obucheniya?ysclid=m5dmh9jnct363700583>.
- [3] Xiaofan Zhou, Simon Yusuf Enoch, Dan Dong Seong Kim. Markov Decision Process For Automatic Cyber Defense. You I., Youn T.Y. (eds.) Information Security Applications. WISA

2022. Lecture Notes in Computer Science, vol 13720. Springer, Cham, 2023. P. 313–329. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-25659-2_23.
- [4] Booker L.B., Musman S.A. A Model-Based, Decision-Theoretic Perspective on Automated Cyber Response. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2002.08957>.
- [5] Zheng J., Namin A.S. Defending SDN-based IoT Networks Against DDoS Attacks Using Markov Decision Process. 2018 IEEE International Conference on Big Data (Big Data). DOI: <https://doi.org/10.1109/BigData.2018.8622064>.
- [6] Щеглов А.Ю. Защита компьютерной информации от несанкционированного доступа. Санкт-Петербург: Наука и Техника, 2004. 384 с. URL: <https://reallib.org/reader?file=523140>.
- [7] Кохендерфер М., Уилер Т., Рэй К. Алгоритмы принятия решений / пер. с англ. В.С. Яценкова. Москва: ДМК Пресс, 2023. 684 с. URL: <https://znanium.ru/catalog/document?id=445338>.
- [8] Методический документ «Методика оценки угроз безопасности информации» (утв. Федеральной службой по техническому и экспортному контролю 5 февраля 2021 г.). Москва, 2021. 83 с. URL: <https://fstec.ru/dokumenty/vse-dokumenty/spetsialnye-normativnye-dokumenty/metodicheskij-dokument-ot-5-fevralya-2021-g>.
- [9] MITRE ATLAS // MITRE ATT&CK [Электронный ресурс]. URL: <https://atlas.mitre.org>, свободный (дата обращения: 02.05.2024)
- [10] Горбачев И.Е., Глухов А.П. Моделирование процессов нарушения информационной безопасности критической инфраструктуры // Труды СПИИРАН. 2015. Вып. 1 (38). С. 112–135. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23342077>. EDN: <https://elibrary.ru/tquqzx>.
- [11] Faranak Abri, Jianjun Zheng, Akbar Siami Namin, Keith S. Jones. Markov Decision Process for Modeling Social Engineering Attacks and Finding Optimal Attack Strategies // IEEE Access. 2022. Vol. 10. P. 109949–109968. DOI: <http://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3213711>.
- [12] Горюнов М.Н., Мацкевич А.Г., Рыболовлев Д.А. Синтез модели машинного обучения для обнаружения компьютерных атак на основе набора данных CICIDS2017. // Труды института системного программирования РАН. 2020. Т. 32, вып. 5. С. 81–94. DOI: [https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2020-32\(5\)-6](https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2020-32(5)-6).
- [13] Горюнов М.Н., Рыболовлев А.А., Рыболовлев Д.А. Оценка применимости методов машинного обучения для обнаружения компьютерных атак // Информационные системы и технологии. 2020. № 6 (122). С. 103–111. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=44141046>. EDN: <https://elibrary.ru/bhyjls>.

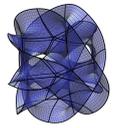
DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-147-160

Features of using Markov decision-making processes when modeling attacks on artificial intelligence systems

Vetrov¹ I.A. , Podtopelny² V.V. 

¹ Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russian Federation; vetrov.gosha2009@yandex.ru (I.A.);

² Kaliningrad State Technical University (KSTU), Kaliningrad, Russian Federation; ionpvv@mail.ru (V.V.);



Received: 14.10.2024
Revised: 20.11.2024
Accepted: 25.11.2024

Scientific article



Abstract. In this paper, we study the features of modeling attacks on artificial intelligence systems. Markov decision-making processes are used in the construction of the model. A multilevel approach to the interpretation of system states is proposed, which includes several stages of detailing the states. This approach is based on the MITRE ATLAS methodology and the FSTEC Threat Assessment Methodology. When forming the vector, the specifics of the intruder model are taken into account, and two main modeling modes are considered: on-time and off-time. The procedure for the formation of awards at the abstract level (without specifying the actions of the attacker) of building a model is described.

Key words: network attack; vulnerability; Markov process; modeling; strategy; policy; teaching method.

Information about the conflict of interests: the authors declared no conflicts of interest.

Citation. Vetrov I.A., Podtopelny V.V. Features of using Markov decision-making processes when modeling attacks on artificial intelligence systems. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 147–160. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-147-160. (In Russ.)

© Vetrov I.A., Podtopelny V.V., 2024

Igor A. Vetrov (vetrov.gosha2009@yandex.ru) – Candidate of Technical Sciences, associate professor, methodological supervisor for the UGSNP “Information Security”, Educational and Scientific Cluster “Institute of High Technologies”, Immanuel Kant Baltic Federal University, 14, Alexander Nevsky Street, Kaliningrad, 236041, Russian Federation.

Vladislav V. Podtopelny (ionpvv@mail.ru) – senior lecturer, Institute of Digital Technologies, Kaliningrad State Technical University, 1, Sovetsky Avenue, Kaliningrad, 236022, Russian Federation.

References

- [1] Kotenko I.V., Saenko I.B., Lauta O.S., Vasiliev N.A., Sadovnikov V. Attacks and defense methods in machine learning systems: analysis of modern research. *Voprosy kiberbezopasnosti*, 2024, no. 1 (59), pp. 24–37. DOI: <https://doi.org/10.21681/2311-2024-1-24-37>. EDN: <https://elibrary.ru/izqdl5>. (In Russ.)
- [2] Namiot D.E. Schemes of attacks on machine learning models. *International Journal of Open Information Technologies*, 2023, vol. 11, no. 5, pp. 68–86. Available at: <https://cyberleninka.ru/article/n/shemy-atak-na-modeli-mashinnogo-obucheniya?ysclid=m5dmh9jnct363700583>. (In Russ.)
- [3] Xiaofan Zhou, Simon Yusuf Enoch, Dan Dong Seong Kim. Markov Decision Process For Automatic Cyber Defense. In: You I., Youn T.Y. (eds) *Information Security Applications. WISA 2022. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 13720. Springer, Cham, 2023, pp. 313–329. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-25659-2_23.
- [4] Booker L.B., Musman S.A. A model-based, decision-theoretic perspective on automated cyber response. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2002.08957>.
- [5] Zheng J., Namin A.S. Defending SDN-based IoT Networks Against DDoS Attacks Using Markov Decision Process. In: *2018 IEEE International Conference on Big Data (Big Data)*. DOI: <https://doi.org/10.1109/BigData.2018.8622064>.
- [6] Shcheglov A.Yu. Protection of computer information from unauthorized access. Saint Petersburg: Nauka i Tekhnika, 2004, 384 p. Available at: <https://reallib.org/reader?file=523140>. (In Russ.)

- [7] Kochenderfer M., Wheeler T., Wray K. Algorithms for Decision Making. Translated from English by V.S. Yatsenkova. Moscow: DMK Press, 2023, 684 p. Available at: <https://znanium.ru/catalog/document?id=445338>. (In Russ.)
- [8] Methodological document “Methodology for assessing information security threats” (approved by the Federal Service for Technical and Export Control on February 5, 2021). Moscow, 2021, 83 p. Available at: <https://fstec.ru/dokumenty/vse-dokumenty/spetsialnye-normativnye-dokumenty/metodicheskij-dokument-ot-5-fevralya-2021-g.> (In Russ.)
- [9] MITRE ATLAS. Retrieved from the official website of MITRE ATT&CK. Available at: <https://atlas.mitre.org>, free (accessed 02.05.2024)
- [10] Gorbachev I.E., Gluhov A.P. Modeling of processes of information security violations of critical infrastructure. *SPIIRAS Proceedings*, 2015, no. 1 (38), pp. 112–135. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23342077>. EDN: <https://elibrary.ru/tquqzx>. (In Russ.)
- [11] Faranak Abri, Jianjun Zheng, Akbar Siami Namin, Keith S. Jones. Markov Decision Process for Modeling Social Engineering Attacks and Finding Optimal Attack Strategies. *IEEE Access*, 2022, vol. 10, pp. 109949–109968. DOI: <http://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3213711>.
- [12] Goryunov M.N., Matskevich A.G., Rybolovlev D.V. Synthesis of a Machine Learning Model for Detecting Computer Attacks Based on the CICIDS2017 Dataset. *Proceedings of the Institute for System Programming of the RAS (Proceedings of ISP RAS)*, 2020, vol. 32, no. 5, pp. 81–94. DOI: [https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2020-32\(5\)-6](https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2020-32(5)-6). (In Russ.)
- [13] Goryunov M.N., Ry’bolovlev A.A., Ry’bolovlev D.A. Evaluating the applicability of machine learning methods to detect computer attacks. *Information Systems and Technologies*, 2020, no. 6 (122), pp. 103–111. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=44141046>. EDN: <https://elibrary.ru/bhyjls>. (In Russ.)