

**В. М. ГЛУЩЕНКО**

Научный руководитель Университета Правительства Москвы, доктор экономических наук, доктор военных наук, профессор, почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации

V. M. GLUSCHENKO

Academic Supervisor of Moscow Metropolitan Governance Yury Luzhkov University, Doctor of Economics, Doctor of Military Sciences, Professor, Honorary Worker of Higher Professional Education of the Russian Federation

**Р. В. ШАМИН**

Заведующий кафедрой информационных технологий и математики Университета Правительства Москвы, доктор физико-математических наук

R. V. SHAMIN

Chair of Information Technologies and Mathematics of Moscow Metropolitan Governance Yury Luzhkov University, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

Математика управления городом

The Mathematics of City Management

Управление мегаполисом – это сложный многогранный процесс, который требует координации множества самых различных служб для обеспечения комфортной и безопасной жизни жителей. Используя методы топологии на графах и теоретико-игровой подход, можно создать математическую модель схемы принятия решений при управлении городом. Данные построения подходят для последующего имитационного моделирования, которое найдет практическое применение в управлении городским хозяйством. Модели такого рода можно использовать в оценке и мониторинге для повышения эффективности работы Правительства Москвы. При построении математических моделей важно учитывать управленческие решения, принимаемые не только исполнительной, но и законодательной властью.

Managing a megacity is a complex, multifaceted process that requires the coordination of numerous diverse services to ensure the comfort and safety of its residents. By employing methods of graph topology and game theory, a mathematical model can be constructed to represent decision-making processes within city management. This framework serves as a foundation for subsequent simulation modeling, offering practical applications in urban administration. Such models can be employed for evaluation and monitoring purposes to enhance the effectiveness of the City of Moscow Government's operations. When developing these mathematical models, it is crucial to incorporate decisions made not only by the executive branch but also by the legislative body.



Ключевые слова: городское управление, математическая модель, теория игр, теория графов.

Key words: city management, mathematical model, game theory, graph theory.

Для цитирования: Глущенко В. М., Шамин Р. В. Математика управления городом // Вестник Университета Правительства Москвы. 2024. № 4. С. 30–35.

For citation: Gluschenko V. M., Shamin R. V. The Mathematics of City Management. *MMGU Herald*, 2024, no. 4, pp. 30-35. (In Russ.).

Управление крупными городами, такими как Москва, охватывает множество различных направлений – транспортную инфраструктуру, жилищно-коммунальное хозяйство, здравоохранение и социальное обеспечение, образование и культуру, экономическое развитие и занятость населения, безопасность и правопорядок, городское планирование и благоустройство, устойчивое развитие, управление финансами, общественные связи и др. Для эффективного и гармоничного развития перечисленных направлений требуется, чтобы управление на всех уровнях городской администрации было качественным. Поэтому принципиально важно обеспечить хорошо скоординированную систему принятия решений различными органами исполнительной власти.

На современном уровне цифровизации нашего общества в управлении мегаполисом используются большие данные (big data), что также требует соответствующих новых методов решения управленческих задач.

Система управления городом не может быть строго математизирована, поскольку ключевая роль в ней принадлежит человеку, как заметил Мэр Москвы С. С. Собянин: «У нас много механизмов электронного правительства, информационных потоков, их обработки и так далее. Но это все-таки подсобные механизмы, которые позволяют более эффективно принимать те или иные решения. Но идеологически, я считаю, что на сегодняшнем этапе, что бы мы про цифру ни говорили, доминирующим остается человек, его ощущения, его понимание и философия» [5]. В этом смысле математические методы и информационные технологии, включая технологии искусственного интеллекта, представляют собой полезные, а иногда и необходимые, но все-таки лишь инструменты для эффективного управления сложными системами, коими являются и современные города. Вместе с тем именно математические модели позволяют рассмотреть возможности и пределы использования цифровых технологий в управлении городом. Математические методы формализуют механизмы принятия решений. Это, в свою очередь, дает возможность обнаружить узкие места

в системе принятия управленческих решений и оптимизировать рабочие процессы [2].

Ниже представлена математическая модель формализации системы городского управления, основанная на топологии графов и теоретико-игровом подходе. Методы топологии графов позволяют провести формальный анализ системы и представить в унифицированном виде механизмы распространения и передачи управленческих решений на различных уровнях. Более того, в реализации городских проектов мегаполиса, как правило, параллельно участвует несколько различных департаментов и служб, поскольку городское хозяйство многоплановое. Иначе говоря, система имеет сложную иерархическую топологию. Методами алгебраической топологии можно получить количественную оценку структурной сложности системы.

Математические модели позволяют рассмотреть возможности и пределы использования цифровых технологий в управлении городом

Для детального представления процессов принятия управленческих решений используем модель Штакельберга, которая учитывает несимметричность игроков при выборе стратегий. Равновесие Штакельберга позволяет находить оптимальные управленческие решения с учетом сложности системы управления городом.

Построим математическую модель иерархической структуры городской системы управления, применяя методы теории графов [7]. Множество центров принятия решения (должностное лицо, коллегиальный орган) обозначим через V .

Предположим, что для реализации некоторого проекта несколько центров принимают управленческие решения. Если решение, принятое каким-либо центром v_i из V , требует дальнейших шагов от другого центра (v_j), то будем рассматривать пару $e_{12} = (v_i, v_j)$. Эту пару будем называть дугой (которая обычно обозначается стрелкой) распространения управленческих решений.

Разумеется, каждый центр из V может инициировать принятие управленческих решений во многих других центрах. Кроме того, не исключены кратные дуги распространения решений и дуги с одинаковыми центрами принятия решений. Такая ситуация возникает в случае, когда одно принятое решение требует следующего принятия решения тем же центром. Множество всех дуг распространения управленческих решений обозначим через E . Таким образом, пара $[V, E]$ задает ориентированный мультиграф распространения управленческих решений. Обозначим его через G . Подчеркнем, что мультиграф G строится отдельно для каждого рассматриваемого проекта, поскольку множество дуг распространения управленческих решений всякий следующий раз может быть своим.

Система управления городом не может быть строго математизирована, поскольку ключевая роль в ней принадлежит человеку

Для каждого проекта при рассмотрении мультиграфа G будем без ограничения общности в качестве множества V рассматривать только вершины, которые являются связанными, игнорируя изолированные центры принятия решений, не участвующие в реализации проекта.

Построим по ориентированному мультиграфу G неориентированный граф, обозначив его через T . Для этого в ориентированном

мультиграфе G заменим каждую дугу на ребро, не имеющее ориентации.

Хорошо известно, что неориентированный граф задает топологическое пространство. Сложность каждого топологического пространства можно оценить, используя понятие фундаментальной группы F [6]. Фундаментальную группу топологического пространства, задаваемого конечным неориентированным графом T , можно представить группой целых чисел по умножению: $F = \mathbb{Z}^n$, где n – это количество элементарных циклов, которые содержатся в графе T . В простейшем случае (система управления представляет собой простую иерархию) фундаментальная группа является тривиальной, состоящей из одного единичного элемента: $F = \{e\}$.

Система управления городом представляется, как правило, довольно сложным топологическим пространством, и его сложность оценивается с помощью фундаментальной группы F . Важное достоинство использования фундаментальной группы для оценки сложности системы принятия решений состоит в том, что фундаментальная группа не зависит от тривиальных изменений неориентированного графа T , а отражает только существенные взаимосвязи.

Система управления городом обладает своей спецификой: в ней принимаемые решения носят директивный характер для исполнителей. При этом исполнители могут по-разному реагировать на поступающие решения. Выбор ответа на полученное предписание зависит от возможностей исполнителя и его мотивации. Таким образом, очевидно, результат управленческого решения зависит не только от центра, создавшего это решение, но и от реакции исполнителя, который, в частности, сам может быть центром принятия последующих управленческих решений. Поэтому последний, делая выбор, должен учитывать возможную реакцию на выбранный им шаг.

Приведенная схема принятия управленческих решений может быть описана в терминах теории игр. Наиболее подходящая теоретико-игровая модель – это модель Штакельберга, которая формализует несимметричные игры. В названной модели несимметричность



Студенты Университета Правительства Москвы на занятиях (фото А. Красавина, 2024 г.)

игровой ситуации состоит в том, что два игрока имеют разные возможности [3], есть ведущий и ведомый игроки. Игра как модель принятия решений состоит в том, что первый игрок (ведущий) принимает управленческое решение x из возможного множества решений X . Второй игрок (ведомый) получает решение x , выбранное первым игроком, и в ответ выбирает свою реакцию y на решение из множества возможных реакций Y . Таким образом, возникает *ситуация*, т.е. пара выбранных решений (x, y) .

В теории игр выбираемые решения называются стратегиями, а множества, из которых они выбираются, – множествами стратегий. После того как оба игрока последовательно выбрали свои стратегии и в игре (модель Штакельберга) возникла ситуация (x, y) , первый игрок (принимавший управленческое решение) получает результат, который в теории игр представляется в виде числа, называемого выигрышем. Этот результат зависит не только от управленческого решения, выбранного первым игроком, но и от реакции, выбранной вторым игроком. Функция, задающая это решение, называется функцией выигрыша и обозначается $H(x, y)$, где x – выбранное первым игроком управленческое решение, а y – выбранная вторым игроком реакция на управленческое решение первого игрока.

Теоретико-игровая модель должна учитывать не только функцию выигрыша первого игрока, но и мотивацию второго игрока. Обычно последняя задается с помощью другой функции выигрыша, которую можно обозначить через $K(x, y)$. Заметим, что эта функция также зависит и от стратегии первого игрока, и от стратегии второго игрока. При этом второй игрок выбирает свой ответ на основании известной ему стратегии первого игрока.

Считая, что оба игрока делают рациональный выбор, который в теории игр означает максимизацию их выигрыша, мы можем найти оптимальные стратегии для обоих игроков. Действительно, первый игрок выбирает свою стратегию y^* таким образом, чтобы:

$$\max_{y \in Y} K(x^*, y) = K(x^*, y^*).$$

Эта формула задает функцию оптимального ответа $R(x^*)$ на управленческое решение x^* . Таким образом, мы имеем

$$y^* = R(x^*).$$

Используя эту функцию, можно вывести оптимальное правило, с помощью которого центр принятия решений должен принимать решение x^* , являющееся оптимальным в рассматриваемой модели:

$$\max_{x \in X} H(x, R(x)) = H(x^*, R(x^*)).$$

Данная формула отражает оптимальный выбор управленческого решения, учитывающего не только желания центра принятия решений, но и реальные условия, в которых сделанный выбор реализуется исполнителями.

Рассмотрим случай, когда управленческое решение направляется нескольким исполнителям, что естественно для системы управления городом. При оценке управленческого решения необходимо усреднить получаемый выигрыш от ситуаций с участием центра принятия решений и всех исполнителей. Для этого следует воспользоваться формулой ниже. Приведем ее для случая с двумя исполнителями:

$$\begin{aligned} \max_{x \in X} [H_1(x, R_1(x)) + H_2(x, R_2(x))] = \\ = H_1(x^*, R_1(x^*)) + H_2(x^*, R_2(x^*)). \end{aligned}$$

Для случаев с большим числом исполнителей формула обобщается очевидным образом.

Заметим, что в реальности управленческие решения обычно принимаются без использования теоретико-игровых моделей, и эти решения, как правило, близки к оптимальным, а теоретико-игровой подход позволяет оценивать возможные варианты решений.

Выше рассмотрена математическая модель для системы городского управления при реализации только одного проекта, и уже в этом случае обычна ситуация, когда один и тот же центр принятия решений создает решения многократно. В реальности же мы имеем динамический поток управленческих решений в рамках разных проектов, поскольку жизнеобеспечение мегаполиса необходимо поддерживать непрерывно. Для описания этих

процессов можно построить математическую модель, используя мультиграф распространения управленческих решений в системе городского администрирования.

Хорошо известно, что потоки событий описываются случайными процессами Пуассона, а временные интервалы между возникающими событиями – экспоненциальным распределением [1]. Процесс Пуассона и экспоненциальное распределение характеризуются интенсивностью – неотрицательной величиной, обозначаемой λ . Для каждого центра принятия управленческих решений нужно рассмотреть свою интенсивность. Пронумеруем все центры принятия решений: $v_1, v_2, \dots, v_N$. Тогда для каждого из них интенсивность принятия решений будет равна соответственно: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$.

Математические модели и цифровые инструменты расширяют возможности руководителя

Вычисление интенсивностей принятия решений обычно не представляет сложности: данную величину можно рассматривать как среднее количество решений в единицу времени, генерируемых центром, и легко получить из статистических данных. Найденные интенсивности можно использовать для поиска ключевых центров принятия решений. Для расчета этого показателя каждому центру принятия решений сопоставим число $w(v_k)$, которое отражает количество дуг распространения управленческих решений, исходящих из центра v_k . Вычислим индекс важности центра принятия решений v_k в системе управления городом по следующей формуле:

$$I(v_k) = \frac{\lambda_k}{w(v_k) \left(\frac{\lambda_1}{w(v_1)} + \frac{\lambda_2}{w(v_2)} + \dots + \frac{\lambda_N}{w(v_N)} \right)} \times 100\%.$$

Этот показатель измеряется в процентах и отражает относительную важность того или иного центра принятия решений в системе городского управления. Его можно использовать для повышения эффективности работы

отдельных центров и оптимизации системы управления городом в целом.

При построении математической модели управления городом возникает еще одна важнейшая задача. Нужно определить и в случае необходимости изменить функции выигрыша и функции мотивации центров принятия решений и исполнителей. Как показывает построенная модель, именно эти функции определяют выбор, который делают как центры принятия решений, так и исполнители, реагируя на предоставленное решение. Надо добавить, что для жизни мегаполиса принципиальное значение имеет работа законодательной власти. Поэтому для определения функций выигрыша и функции мотивации необходимо учитывать данный фактор в модели управления мегаполисом. В частности, в российской столице городские органы исполнительной власти функционируют в тесном контакте с Московской городской Думой. Как отметил Мэр Москвы С. С. Собянин, «работа Московской городской Думы имеет огромное значение для нашего города. Ежегодно парламент принимает порядка 40 различных законов, из которых важнейшим является городской бюджет... Депутаты ведут огромную работу с гражданами, представляют их интересы и помогают решить множество повседневных проблем» [4].

В представленной математической модели влияние Московской городской Думы учитывается при рассмотрении списка проектов, которые реализуются системой управления городом, а также при определении топологии системы принятия решений. Кроме того, влияние законодательной власти учитывается при задании функций выигрыша в теоретико-игровых моделях, что определяет и функции мотивации при выборе акторами стратегий.

Математические модели управления городом – важное звено цифровизации процессов управления городским хозяйством. Тотальная цифровизация наиболее эффективна лишь в том случае, когда удастся выявить узкие места в рабочих процессах, которые требуют человеческого вмешательства с переводом системы управления в «ручной режим». С другой стороны, накопленный опыт применения

цифровых технологий и большие данные являются основанием для дальнейшего развития и конкретизации математических моделей.

Принятие ключевых, принципиальных управленческих решений невозможно без участия ответственного руководителя, который является не только профессиональным управленцем, но и разносторонне развитой личностью. Таких специалистов для российской столицы уже тридцать лет готовит Университет Правительства Москвы. При грамотном использовании

математические модели и цифровые инструменты расширяют возможности руководителя. Поэтому в последние годы существенно увеличивается представленность математики, математических моделей и цифровых инструментов в обучении управлению мегаполисами. В Университете Правительства Москвы эти изменения охватывают образовательные программы различных направлений, от экономики и менеджмента до управления персоналом и юриспруденции.



ИНФОРМАЦИОННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Афонин В. В., Никулин В. В. Анализ и моделирование типовых систем массового обслуживания: учебное пособие. М.; Вологда: Инфра-Инженерия, 2023. 232 с.
2. Гневанов М. В., Иванов Н. А. Технологии «больших данных» (Big Data) и их применение в градостроительном планировании // Промышленное и гражданское строительство. 2018. № 4. С. 83–87.
3. Захаров А. В. Теория игр в общественных науках: учебник для вузов / ВШЭ. М.: Издательский дом Высшей школы экономики, 2020. 307 с.
4. О первом заседании Московской городской Думы нового созыва // Сергей Собянин. Личный блог: [сайт]. 17.09.2024. URL: <https://www.sobyanin.ru/o-pervom-zasedanii-mgd-novogo-sozyva> (дата обращения: 20.10.2024).
5. Сергей Собянин: Технологии помогают эффективно принимать управленческие решения, но главным для города остается человек // Официальный портал Мэра и Правительства Москвы: [сайт]. 15.06.2023. URL: <https://www.mos.ru/mayor/themes/9601050/> (дата обращения: 20.10.2024).
6. Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. Курс гомотопической топологии. М.: URSS, 2014. 512 с.
7. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. М.: Мир, 1977. 328 с.

REFERENCES

1. Afonin V. V., Nikulin V. V. *Analiz i Modelirovanie Tipovyh Sistem Massovogo Obsluzhivaniya* [Analysis and Modeling of Typical Mass Service Systems]: a Textbook. Moscow; Vologda: Infra-Inzheneriya Publ., 2023. 232 p. (In Russ.).
2. Gnevanov M. V., Ivanov N. A. Application of Technologies "Big Data" in Urban Planning. *Industrial And Civil Construction*, 2018, No. 4, pp. 83–87. (In Russ.).
3. Zakharov A. V., HSE. *Teoriya Igr v Obshchestvennyh Naukakh* [Game Theory in the Social Sciences]: a Textbook for Universities. Moscow: Publishing house of the Higher School of Economics, 2020. 307 p. (In Russ.).
4. On the First Meeting of the Moscow City Duma of the New Convocation. *Sergey Sobyenin. Personal Blog*: [website], 17.09.2024. Available at: <https://www.sobyanin.ru/o-pervom-zasedanii-mgd-novogo-sozyva> (accessed: 20.10.2024). (In Russ.).
5. Sergey Sobyenin: Technologies Help to Make Effective Managerial Decisions, But the Main Thing for the City Remains a Person. *The Mayor and the Government of Moscow Official Portal*: [website], 15.06.2023. Available at: <https://www.mos.ru/mayor/themes/9601050/> (accessed: 20.10.2024). (In Russ.).
6. Fomenko A. T., Fuchs D. B. *Kurs Gomotopicheskoy Topologii* [A Course in Homotopic Topology]. Moscow: URSS Publ., 2014. 512 p. (In Russ.).
7. Harari F., Palmer E. *Enumeration of Graphs*. New York: Wiley, 1977. 324 p.