

## СРАВНЕНИЕ КВАЗИТРЕХМЕРНОЙ И ПОЛНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВОК РАБОТЫ УПОРНОГО ПОДШИПНИКА СКОЛЬЖЕНИЯ

© 2023

- Н. В. Соколов** кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Компрессорные машины и установки»; Казанский национальный исследовательский технологический университет; [sokol-88@list.ru](mailto:sokol-88@list.ru)
- М. Б. Хадиев** доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Компрессорные машины и установки»; Казанский национальный исследовательский технологический университет; [mullagali@gmail.com](mailto:mullagali@gmail.com)
- П. Е. Федотов** ассистент и аспирант кафедры «Прикладная математика и искусственный интеллект», Институт вычислительной математики и информационных технологий; Казанский (Приволжский) федеральный университет; [paulfedotov@mail.ru](mailto:paulfedotov@mail.ru)
- Е. М. Федотов** доктор физико-математических наук, доцент, заместитель директора; ООО «АСТ Поволжье», г. Казань; [eugeny.fedotov@mail.ru](mailto:eugeny.fedotov@mail.ru)

Проведено сравнение результатов расчёта характеристик упорного подшипника скольжения с неподвижными подушками центробежного или винтового компрессора, определёнными на основе численной реализации периодической термоупругогидродинамической (ПТУГД) математической модели в квазитрёхмерной и полной трёхмерной постановках. В первом случае уравнение энергии решается на среднем радиусе подшипника и результат расчёта распространяется на весь объём смазочного и пограничного слоёв (программа Sm2Px2T). Во втором случае решается полное трёхмерное уравнение энергии смазочного и пограничного слоёв, упорного диска и подушки с учётом теплообмена между рабочими областями подшипника и с внешней средой (программа Sm2Px3Tхт). Сделаны соответствующие выводы.

*Математическая модель гидродинамических процессов; подушка подшипника; упорный диск; квазитрёхмерная и трёхмерная постановки; смазочный и пограничный слои; несущая способность; потери мощности; максимальная температура*

---

**Цитирование:** Соколов Н.В., Хадиев М.Б., Федотов П.Е., Федотов Е.М. Сравнение квазитрёхмерной и полной трёхмерной постановок работы упорного подшипника скольжения // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2023. Т. 22, № 3. С. 143-159. DOI: 10.18287/2541-7533-2023-22-3-143-159

### Введение

Упорный подшипник скольжения с неподвижными подушками является ответственным узлом динамического оборудования, в котором присутствуют осевые нагрузки. Качество его работы во многом определяет надёжность эксплуатации компрессоров, в том числе при переходных режимах. В основном они находят применение в винтовых компрессорах высокого давления, мультипликаторных центробежных компрессорах (МЦК) для восприятия суммарного усилия от вал-шестерней и мультипликаторах с косозубым зацеплением без разгрузки со значительными осевыми усилиями. Как правило, на практике используются два наиболее применяемых в компрессоростроении профиля рабочей поверхности подушек: поверхность с параллельным межподушечному каналу скосом (рис. 1, а) и винтовая поверхность клинового скоса (рис. 1, б). Достоинства упорных подшипников с клинообразующими скосами заклю-

чаются в простоте самой конструкции: фактически сложность заключается в нарезании скоса определённого профиля глубиной, как правило, 0,04...0,09 мм [1], а также в возможности пуска компрессора под нагрузкой. В некоторых случаях перед пуском может возникнуть осевая нагрузка на подшипник, например, при перемещении валопровода от смещения привода компрессорного агрегата или от перепада давления компримируемого газа быстроходного ротора со свободной ступенью МЦК при заполнении корпуса. Плоскоклинной профиль рабочей поверхности подушки позволяет увеличить воспринимаемую удельную нагрузку до 2,8 МПа по сравнению с профилем подушки с чисто клиновым скосом [2]. Плоский участок профиля должен быть обработан на выходе по направлению вращения упорного диска и составляет около 10...20 % от общей площади (рис. 1). Это также положительно сказывается при пуске и остановке компрессора, когда увеличенный зазор из-за повышенного гидродинамического давления позволяет снизить износ поверхности подушки [3]. К недостаткам таких подшипников можно отнести оптимальные значения несущей способности  $P$  и максимальной температуры  $t_{\max}$  на ограниченном интервале частоты вращения и глубины скоса, а также стирание скоса при длительной работе. Особенно это становится заметным при низкой очистке масла, циркулирующего под давлением в маслосистеме компрессора (тонкость фильтрации масла должна составлять не выше 10...15 мкм). Трудности в моделировании гидродинамических подшипников скольжения привели к разным методикам оптимизации их работы. Далее рассмотрены наиболее успешно применяемые на практике.

### Постановка задачи

Описанием принципа действия, условий функционирования и математических основ работы подшипников скольжения занимается гидродинамическая теория смазки (ГТС) [4]. В 1886 году О. Рейнольдс [5] написал знаменательную статью, в которой представил математическое описание поведения смазочного слоя, находящегося между двумя цилиндрическими опорными поверхностями, действующими эксцентрично относительно друг друга. Эта статья заложила основу одного из направлений математического моделирования, связанного с выводом уравнения Рейнольдса для подшипника скольжения с гарантированным слоем смазки.

Ниже по отношению к упорному подшипнику представлены основные допущения, применяемые при выводе уравнений ГТС, которые позволяют преобразовать исходные дифференциальные уравнения неразрывности (сплошности), количества движения (Навье-Стокса), внутренней энергии и состояния жидкости к упрощённому виду для дальнейших исследований:

1) толщина смазочного слоя мала по сравнению с радиальным  $r$  и окружным  $\varphi$  направлениями. Для упорного подшипника это направление  $y$ , ограниченное поверхностью диска при  $y = 0$  и подушки при  $y = h$  (рис. 1). Стоит отметить, что, несмотря на малую величину относительного зазора  $\psi = h_2 / (R_{\text{cp}} \theta)$ , которое составляет порядка  $2 \cdot 10^{-3}$ , не стоит пренебрегать кривизной конструкции упорного подшипника. При переходе от цилиндрической системы координат к декартовой теряется возможность учёта центробежных сил инерции, которые могут вносить существенный вклад в распределение скоростей потока смазки и результаты расчёта упорного подшипника при высоких частотах вращения ротора компрессора;

2) градиент давления по толщине смазочного слоя принимается равным нулю ( $\partial p / \partial y = 0$ ) по сравнению с радиальным и окружным градиентами давления и при анализе не учитывается;

3) силы инерции незначительны, исходя из анализа порядка величин уравнений Навье-Стокса, то есть субстанциональные производные скоростей  $DV_{r(\varphi,y)}/dt = 0$ . Это означает также, что силы вязкости смазки преобладают над силами инерции. Однако последние исследования указывают на возрастающее влияние локальной составляющей сил инерции  $\partial V_{r(\varphi,y)}/\partial \tau$  при повышении частоты вращения ротора [6];

4) течение в смазочном слое предполагается ламинарным при отсутствии вихревого течения и турбулентности внутри слоя, что согласуется с пренебрежимо малыми силами инерции;

5) на смазочный слой не действуют массовые силы (центробежные, гравитационные и пр.), т. е.  $X = Y = Z = 0$ ;

6) на границе с поверхностью твёрдых элементов подшипника, т.е. диска при  $y = 0$  и подушки при  $y = h$ , смазка находится в неподвижном состоянии либо движется со скоростью этой поверхности (условие прилипания смазки);

7) анализ порядка величин скоростей в уравнении Навье-Стокса показал доминирующее влияние градиентов скоростей по толщине смазочного слоя  $\partial V_r/\partial y$  и  $\partial V_\varphi/\partial y$  над остальными;

8) смазка является ньютоновской и изотропной, т.е. физические свойства в каждой её точке одинаковы во всех направлениях.

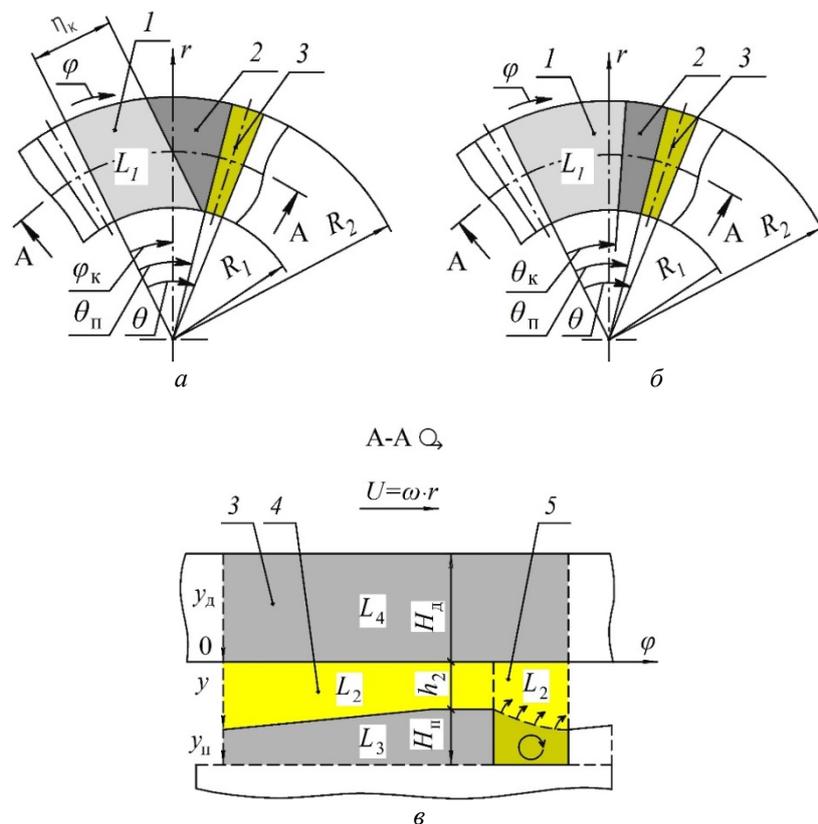


Рис. 1. Расчётная схема упорного подшипника скольжения:

*a* – профиль подушки с параллельным МПК скосом; *б* – профиль подушки с винтовой поверхностью; *в* – разрез по *A – A* вдоль среднего радиуса:

*1* – клиновидная часть; *2* – плоская часть подушки; *3* – упорный диск; *4* – смазочный слой; *5* – пограничный слой;  $L_i$  – области применения дифуравнений;  $U$  – окружная скорость диска;  $H_n, H_d$  – толщины подушки и диска;  $h_2$  – минимальная толщина слоя;  $\eta_k$  – ширина скоса;  $\theta_k, \theta_n$  – углы скоса и охвата подушки;  $\theta$  – угол элемента периодичности

Указанные выше допущения после сохранения доминирующих членов по методу Н.А. Слезкина через критерии подобия позволили упростить уравнения Навье-Стокса и свести их к двум измерениям, которые в размерном виде выглядят следующим образом [7]:

$$\begin{aligned} -\rho \frac{V_\varphi^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial V_r}{\partial y} \right), \\ 0 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial V_\varphi}{\partial y} \right), \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\rho, \mu$  – плотность и вязкость смазки;  $p$  – местное давление;  $V_r, V_\varphi$  – скорости потока смазки в радиальном и окружном направлениях;  $r, \varphi, y$  – координаты.

Преобразование уравнений (1) с предварительным выводом скоростей смазки  $V_r$  и  $V_\varphi$ , подстановкой их в полное уравнение сплошности и интегрированием в пределах толщины смазочного слоя приводит к уравнению Рейнольдса. Его наиболее обобщённая форма для упорного подшипника, описывающая распределение давления в смазочном слое области  $\bar{L}_1 (-1 \leq \bar{r} \leq 1, 0 \leq \bar{\varphi} \leq \theta_n, 0 \leq \bar{y} \leq 1)$  (рис. 1) в безразмерном (значок « $\bar{\rightarrow}$ » над величиной) нестационарном виде с учётом несжимаемости смазки, в котором плотность и вязкость смазки являются функциями всех трёх координат, имеет следующий вид [1; 7]:

$$\begin{aligned} -\lambda^2 \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[ (\sigma \bar{r} + 1) \bar{h}^3 \bar{f}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right] - \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} \left[ \frac{\bar{h}^3}{(\sigma \bar{r} + 1)} \bar{f}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\varphi}} \right] = \\ = -\text{Re} \psi \sigma \lambda^2 \frac{\partial (\bar{h}^3 \bar{f}_1)}{\partial \bar{r}} + \bar{\omega} (\sigma \bar{r} + 1) \frac{\partial (\bar{h} \bar{f}_2)}{\partial \bar{\varphi}} + Sh (\sigma \bar{r} + 1) \bar{A}, \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\bar{r}, \bar{\varphi}$  – безразмерные координаты;  $\bar{p} = p h_{20}^2 / (\mu_0 \omega_* R_{cp}^2 \theta)$  – местное безразмерное давление;  $\bar{A} = \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \left( \bar{h} \int_0^1 \bar{\rho} d\bar{y} \right) - \bar{\rho}_{\bar{y}=1} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\tau}}$  – нестационарный множитель;  $\bar{f}_0, \bar{f}_1, \bar{f}_2$  – функции,

учитывающие переменность вязкости смазки по толщине слоя. Такая форма уравнения наиболее близка к выводу D. Dowson для прямоугольной подушки [8].

Конструкция подшипника скольжения подразумевает относительно большие линейные размеры и малую величину толщины смазочного слоя  $h$ , рабочая величина которой примерно равна 20...80 мкм. Существенные градиенты скоростей  $\partial \bar{V}_r / \partial \bar{y}$  и  $\partial \bar{V}_\varphi / \partial \bar{y}$  являются причиной значительной неравномерности скоростей смазки по высоте зазора  $h$ . Это приводит к заметному вязкому трению между слоями смазки (сдвигу слоёв смазки), в результате которого выделяется существенное количество теплоты за счёт необратимой диссипации механической энергии, вызывая, таким образом, значительный рост местной температуры. Полученные в результате тепловые эффекты оказывают решающее влияние на характеристики упорного подшипника. Во-первых, вязкость смазки экспоненциально понижается с повышением температуры. Во-вторых, термическая деформация изменяет форму рабочего слоя, особенно для плоскопараллельных подушек [9]. Следует помнить, что максимальная температура подушек явля-

ется важным эксплуатационным параметром, указывающим на исправность подшипника. Предел температуры для подшипников с покрытием из баббита Б-83 составляет около 110°C [10], выше которого баббит может начинать ползти под поверхностным воздействием от возникающего гидродинамического давления.

Развитие гидродинамической теории смазки параллельно с развитием численных методов расчёта происходило от изотермной теории к термоупругогидродинамической (ТУГД) по мере возрастания скоростей скольжения и действующих нагрузок на подшипник, все большего учёта эксплуатационных факторов (силовых и температурных деформаций и др.) и распространения тепла: непосредственно в смазке, в теле подушки и упорном диске [4; 9; 11]. Указанные выше допущения ГТС совместно с преобразованиями W. F. Соре позволили упростить исходное уравнение баланса энергии [4; 12]. При этом для каждой теории в зависимости от количества учитываемых факторов соответствует своя форма уравнения энергии, основные из которых по отношению к упорному подшипнику следующие:

1. *Адиабатная теория*, при которой всё тепло, выделяющееся в смазочном слое, идёт на разогрев самой смазки, а стенки подшипника теплоизолированы. В случае изменения температуры только в направлении скольжения уравнение энергии для подушки бесконечной ширины имеет следующий вид [7]:

$$\frac{dt^*}{d\bar{\varphi}} = \frac{\mu(\sigma\bar{r} + 1)^2}{3\bar{h}_m\bar{h}} \left[ 1 + \frac{3(\bar{h} - \bar{h}_m)^2}{\bar{h}^2} \right], \quad (3)$$

где  $t^* = \bar{t}/6$ ,  $\bar{t}$  – местная температура;  $\bar{h}_m$  – высота смазочного слоя в сечении, где  $\partial P_\infty^*/\partial\bar{\varphi} = 0$ ,  $P_\infty^*$  – функция распределения давления в подушке бесконечной ширины.

2. *Термоупругогидродинамическая (ТУГД) теория*, при которой совместно решаются уравнения гидродинамики (Рейнольдса, энергии), теплопроводности и учитываются термоупругие деформации от разности температур по толщине подушки подшипника. Температура на входе в смазочный слой при  $\bar{\varphi} = 0$  предварительно рассчитывается через тепловой баланс либо через коэффициент переноса  $\lambda$  потока отработанной смазки с предыдущей подушки на следующую на основе эмпирических данных [3; 9]. Для среднего радиуса при  $\bar{r} = 0$  уравнение имеет вид [7]:

$$\bar{V}_\sigma \frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{\varphi}} + \left( \frac{\bar{V}_y}{\bar{h}} - \bar{V}_\varphi \frac{\bar{y}}{\bar{h}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\varphi}} \right) \frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{Pe\psi\bar{h}^2} \frac{\partial^2 \bar{t}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\bar{\mu}}{\bar{h}^2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{V}_\sigma}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right], \quad (4)$$

где  $\bar{r} = (r - R_{cp}) / (\sigma R_{cp})$ ,  $\bar{\varphi} = \varphi / \theta$ ,  $\bar{y} = y / h = y / h_2 \bar{h}$  – безразмерные координаты.

3. *Периодическая термоупругогидродинамическая (ПТУГД) теория*, при которой для уравнения энергии дополнительно задаются периодические тепловые граничные условия возле входной кромки подушки при  $\varphi = 0$  [1; 9; 13].

Первоначально получила развитие ПТУГД теория, при которой уравнение энергии решалось только для среднего сечения упорного подшипника при  $r = R_{cp}$ , а результат его решения (распределение температур) распространялся в радиальном направлении на весь объём смазочного и пограничного слоёв. Основанием для этой квазитрёхмерной постановки было незначительное изменение температуры подушки в

направлении поперёк вращения диска при экспериментальных исследованиях. Хотя при этом снижается влияние локальной окружной скорости диска: в некоторых случаях она может достигать 170 м/с [3]. Такая тепловая постановка является шагом вперёд при теоретических исследованиях подшипников из-за возможности непосредственного расчёта температуры  $t|_{\varphi=0}$ . В этом случае уравнение энергии, описывающее стационарное распределение температуры в смазочном и пограничном слоях области  $L_2 (R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \varphi \leq \theta_n, \theta_n \leq \varphi \leq \theta, 0 \leq y \leq h)$  (рис. 1, в), имеет следующий вид [1; 9]:

$$c\rho \left( \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial t}{\partial \varphi} + V_y \frac{\partial t}{\partial y} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \lambda_m \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_m \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \mu \left[ \left( \frac{\partial V_\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_r}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (5)$$

с граничным условием равенства температур  $t|_{\varphi=0} = t|_{\varphi=\theta}$  при  $\varphi = 0, R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq y \leq h_1$ , где  $h_1$  – толщина слоя на входе в подушку. Сеточная аппроксимация при численной реализации происходила в безразмерном виде после преобразования уравнения энергии с использованием безразмерной температуры  $\bar{t} = c_{p0} \rho_0 h_{20}^2 (t - t_0) / (\mu_0 \omega_* R_{cp}^2 \theta)$  и координаты  $\bar{y} = y / (h_2 \bar{h})$ , позволяющей рассматривать область  $L_2$  в прямоугольном виде.

Для адекватной оценки тепловой среды необходимо совместное решение уравнений распространения тепла в смазочном и пограничном слоях, упорном диске и подушках подшипника. Следовательно дальнейшее последовательное развитие ПТУГД теории состояло в разработке и численной реализации полной трёхмерной тепловой математической модели работы упорного подшипника скольжения [14].

Выведенная система уравнений позволяет учитывать изменение вязкости и плотности смазки в зависимости от температуры и обеспечивает полную связь уравнений Рейнольдса и энергии. Выделяющаяся из-за сдвига слоёв смазки теплота рассеивается в смазочном и пограничном слоях и далее распространяется как в упорный диск и подушки за счёт теплопроводности, так и уносится циркулирующей смазкой за счёт конвекции. В результате также учитывается важное влияние упорного диска в качестве теплового аккумулятора на перенос теплоты между подушками и смешивание потоков смазки с разными температурами в межподушечном канале (МПК) [15]. В этом случае уравнение энергии, описывающее нестационарное распределение температуры области  $L_2$  (см. рис. 1, в), имеет следующий дивергентный размерный вид [13; 14]:

$$c_p \frac{\partial(\rho t)}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (c_p \rho r V_r t) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{c_p \rho}{r} V_\varphi t - \frac{\lambda_m}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( c_p \rho V_y t - \lambda_m \frac{\partial t}{\partial y} \right) = \mu \left[ \left( \frac{\partial V_\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_r}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (6)$$

с граничным условием равенства температур и тепловых потоков при  $\varphi = 0, R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq y \leq h_1$ :

$$t|_{\varphi=0} = t|_{\varphi=\theta}, \left( \frac{c_p \rho}{r} V_\varphi t - \frac{\lambda_m}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=0} = \left( \frac{c_p \rho}{r} V_\varphi t - \frac{\lambda_m}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=\theta}, \quad (7)$$

где  $t$  – местная температура;  $c_p, \lambda_m$  – изобарная теплоёмкость и теплопроводность смазки.

Преобразование в безразмерный вид уравнения (6) также проведено на этапе численной реализации с необходимым условием сохранения дивергентной формы уравнения.

В данной статье представлено сравнение результатов расчёта характеристик упорного подшипника ПТУГД теории в квазитрёхмерной с использованием уравнения (5) и полной трёхмерной с использованием уравнения (6) постановках, лежащих в основе предыдущей Sm2Px2T [16] и последующей Sm2Px3Tхт [17] программ расчёта соответственно. С более подробным описанием математических моделей ПТУГД теории в разных постановках работы упорного подшипника с неподвижными подушками центробежного или винтового компрессора с необходимыми граничными условиями, особенностями численной реализации и описанием некоторых гидродинамических и тепловых процессов можно ознакомиться в статьях [1; 7; 9; 13; 14; 18; 19].

### Результаты расчётов

В качестве исходных данных для программ расчёта Sm2Px2T и Sm2Px3Tхт при численных экспериментах приняты геометрические размеры упорного подшипника скольжения центробежного компрессора, расположенного в лаборатории кафедры «Компрессорные машины и установки» ФГБОУ ВО «КНИТУ» (табл. 1) [13; 18; 19].

Таблица 1. Исходные данные для расчёта

№	Параметр	Обозначение и единица измерения	Значение
1	Профиль рабочей поверхности подушки	винтовая поверхность (рис. 1, б)	–
2	Частота вращения ротора	$n$ , мин <sup>-1</sup>	5000
3	Внутренний диаметр	$D_1$ , мм	70
4	Внешний диаметр	$D_2$ , мм	115
5	Количество подушек	$z$	8
6	Высота зазора	$h_2$ , мкм	50
7	Угловая протяжённость подушки	$\theta_n$	38,8° или переменная величина
8	Угловая протяжённость скоса	$\theta_k$	0,75 · $\theta_n$
9	Глубина скоса	$\delta_{ск}$ , мм	0,05 мм или переменная величина
10	Толщина упорного диска	$H_d$ , мм	25
11	Толщина подушки	$H_n$ , мм	5
12	Коэффициент теплопроводности материала подушки и упорного диска	$\lambda_n = \lambda_d$ , Вт/(м·град)	50
13	Теплоёмкость материала подушки и упорного диска	$c_n = c_d$ , Дж/(кг·град)	469
14	Температура подачи смазки	$t_0$ , °C	40
15	Давление по краям подушки, абс.	$p _r$ , МПа	0,24...0,26

На условной границе пограничного слоя задавалась температура смазки в МПК, т.е.  $t = t_0$ . Использовались характеристики турбинных масел класса вязкости ISO VG32: Тп-22С по ТУ 38.101821-83 или Тп-22Б по ТУ 38.401-58-48-92, а также класса вязкости ISO VG46: Тп-30 по ГОСТ 9972-74. Размеры аппроксимирующих сеток равны  $N_r = 51$ ,  $N_\varphi = 71$ ,  $N_y = 31$ ,  $N_{уп} = 9$ ,  $N_{уд} = 9$ .

Расчёты представлены в размерном виде для облегчения проведения сравнительных исследований. Как видно из рис. 2, а, при использовании программы Sm2Px3Tht увеличение глубины скоса  $\delta_{ск}$  приводит к постепенному возрастанию несущей способности  $P$ . Однако такое увеличение ограничено объёмом смазки, необходимым для создания гидродинамического давления. Излишнее увеличение скоса приводит к возрастанию боковых утечек смазки через внутреннюю при  $r = R_1$  и особенно внешнюю при  $r = R_2$  грани подушки, что «тормозит» дальнейшее увеличение  $P$ . При повышенных скосах также возможно образование вихрей возле входной кромки подушки при  $\varphi = 0$  непосредственно в смазочном слое [13; 18; 19], что уменьшает рабочую область слоя и приводит к циркуляции нагретого объёма смазки.

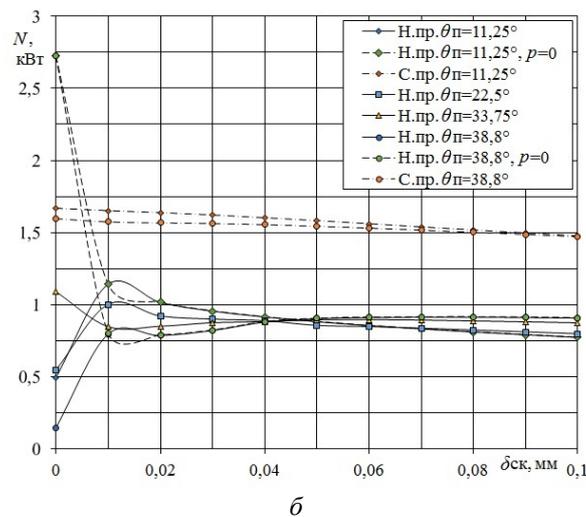
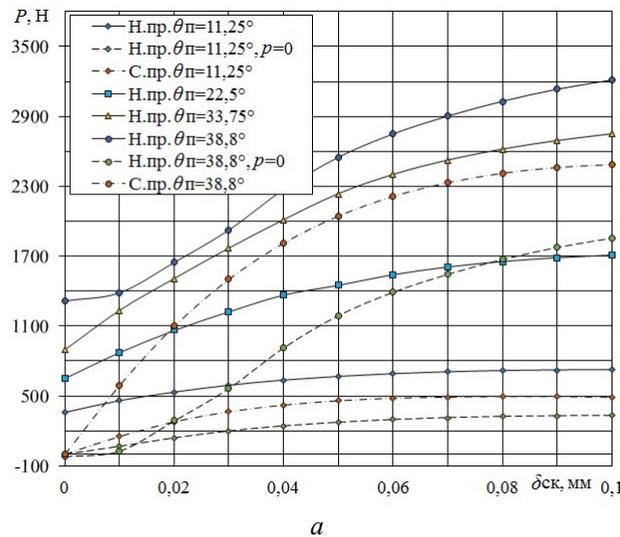


Рис. 2. Зависимость от скоса  $\delta_{ск}$  при разных  $\theta_n$  и граничных условиях  $p|_r$ : а – несущей способности  $P$ ; б – потерь мощности  $N$

Возрастание рабочей площади подушки при увеличении угловой протяжённости  $\theta_{\Pi}$  предсказуемо приводит к увеличению несущей способности. Например, при скосе  $\delta_{\text{ск}} = 0,05$  мм и последовательном изменении  $\bar{\theta}_{\Pi} = \theta_{\Pi}/\theta = \{0,25; 0,5; 0,75\}$  несущая способность  $P$  одинаково увеличивается на 783 Н. При этом при дальнейшем увеличении  $\theta_{\Pi}$  на форме кривой  $P$  сказывается уменьшение протяжённости МПК ( $\theta - \theta_{\Pi}$ ) и снижение поступления свежей смазки с температурой  $t = t_0$  из внешней среды.

Сравнение программ расчёта Sm2Px2T и Sm2Px3Tхт проведено при нулевом граничном условии  $p|_{\Gamma} = 0$  к уравнению Рейнольдса из-за невозможности первой изменять граничное давление подушки (из условия того, что давление на границе подушки много меньше давления внутри смазочного слоя). Как видно из рис. 2, а, первоначально разница между значениями несущей способностями  $P$  двух программ увеличивается, однако при  $\delta_{\text{ск}} > 0,02$  мм эта арифметическая разница становится постоянной. Например, при  $\delta_{\text{ск}} = 0,05$  мм и  $\theta_{\Pi} = 11,25^{\circ}$  несущая способность, вычисленная по программе Sm2Px2T, выше на  $(458,3 - 273,49904) = 184,5$  Н или 67,6%, а при  $\theta_{\Pi} = 38,8^{\circ}$  – на  $(2045 - 1191,2398) = 853,8$  Н или 71,7%. Дополнительные численные исследования показали, что при  $\delta_{\text{ск}} > 0,02$  мм и числе подушек  $z = 8$ , независимо от угловой протяжённости подушки  $\theta_{\Pi}$ , отношение несущих способностей  $P_{\text{Sm2Px2T}}/P_{\text{Sm2Px3Tхт}}$ , вычисленное с помощью двух программ расчёта Sm2Px2T и Sm2Px3Tхт, стремится к 1,5, а при числе подушек  $z = 10$  – к 2,1. Стоит отметить, что при  $\theta_{\Pi} = 11,25^{\circ}$  для программы Sm2Px2T кривая несущей способности при  $\delta_{\text{ск}} = 0,08$  мм достигает максимального значения  $P_{\text{max}} = 495,3$  Н, за которым следует небольшой спад (при  $\theta_{\Pi} = 38,8^{\circ}$  максимум отсутствует). Для программы Sm2Px3Tхт максимальное значение  $P$  в рассматриваемом интервале  $\delta_{\text{ск}}$  отсутствует: кривая несущей способности постепенно возрастает.

Из рис. 2, а также можно заметить, что при нулевом граничном условии  $p|_{\Gamma} = 0$  при малых значениях  $\delta_{\text{ск}}$  в процессе перестройки течения смазки при переходе от плоскопараллельного профиля подушки к плоскоклиновому с конфузорным зазором возможно появление отрицательной несущей способности. При малых  $\delta_{\text{ск}}$  отрицательные значения  $P$  связаны с изменением вязкости как вдоль слоя по  $\varphi$ , так и поперёк слоя вдоль  $y$ , и образованием «вязкостной» диффузорности в смазочном слое [9; 15]. На поверхности подушки возле входной кромки образуется устойчивая зона пониженных температур и, соответственно, повышенной вязкости, представляющая собой ограничение для протекания смазки, и течение смазки вдоль  $\varphi$  в смазочном слое происходит с некоторой диффузорностью [9]. В соответствии с уравнением (2) это приводит к падению давления внутри подушки и подсосыванию жидкости через боковые сечения в смазочный слой. С увеличением относительной клиновидности  $\varepsilon_0 = (h_1 - h_2)/h_2$ , т.е. при уменьшении зазора  $h_2$  или при увеличении глубины скоса  $\delta_{\text{ск}} = (h_1 - h_2)$  за счёт температурных деформаций или глубины токарной расточки подушки, влияние «вязкостной» диффузорности существенно ослабевает. Возникновение отрицательного давления также исключается путём повышения граничного давления  $p|_{\Gamma}$ . При ненулевом граничном условии  $p|_{\Gamma} \neq 0$  увеличивается гидростатическая составляющая несущей способности и кривые  $P$  при двух граничных условиях программы Sm2Px3Tхт стано-

вятся параллельными. Например, при  $p|_r = 0,24 \dots 0,26$  МПа и  $\theta_{\Pi} = 11,25^\circ$  постоянная разница составляет 393,3 Н, а при  $\theta_{\Pi} = 38,8^\circ$  – 1357,8 Н.

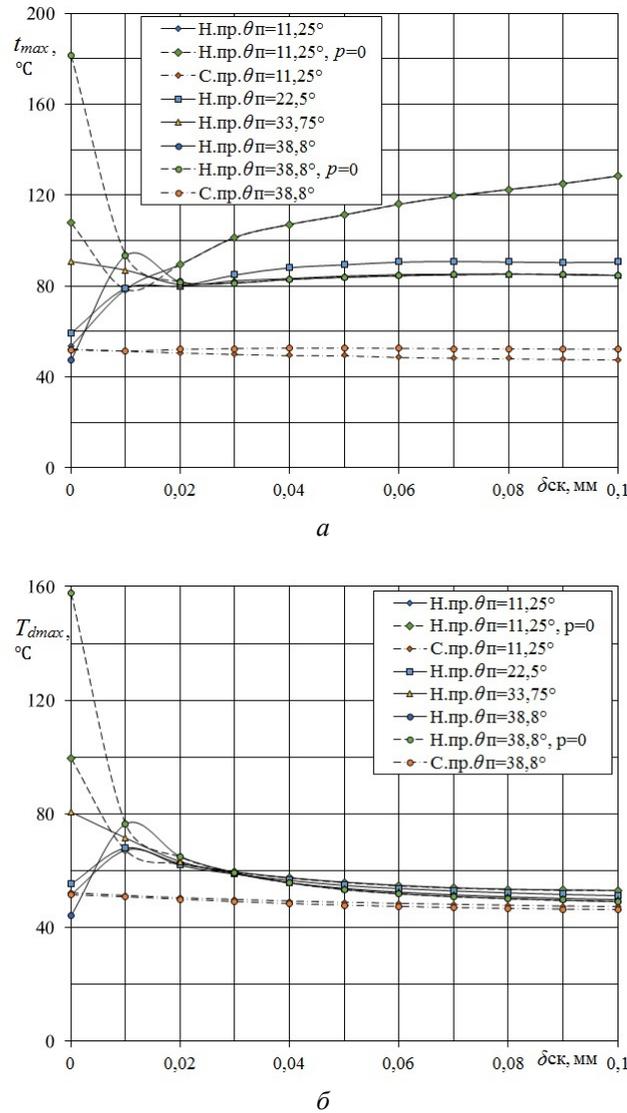


Рис. 3. Зависимость максимальных температур от скоса  $\delta_{ск}$  при разных  $\theta_{\Pi}$  и граничных условиях  $p|_r$ :  
 а – смазки  $t_{max}$ ; б – диска  $T_{dmax}$

Как видно из рис. 3, а, в случае программы Sm2Px3Txt учёт трёхмерного температурного поля смазочного и пограничного слоёв упорного подшипника и влияние в радиальном направлении окружной скорости диска приводит к повышенной максимальной температуре  $t_{max}$ . При малых значениях  $\delta_{ск}$ , когда происходит перестройка течения смазки, величина  $t_{max}$  может несколько изменяться. Однако при нулевом граничном условии  $p|_r = 0$  и ское  $\delta_{ск} < 0,02$  мм наблюдаются повышенные температуры  $t_{max}$ , а при ское  $\delta_{ск} > 0,02$  мм максимум температуры стабилизируется и равен некоторому значению  $t_{max} \approx 85^\circ$  С. Далее необходимо учитывать угловую протяжённость подушки: увеличение  $\theta_{\Pi}$  от  $11,25^\circ$  до  $38,8^\circ$  приводит к возрастанию боковых утечек смаз-

ки через боковые сечения и снижению максимальной температуры  $t_{\max}$ . По этой причине максимальная температура  $t_{\max}$  при малом значении  $\theta_{\Pi} = 11,25^{\circ}$  непрерывно возрастает, а максимум при  $\theta_{\Pi} = 22,5^{\circ}$  несколько выше, чем при  $\theta_{\Pi} = 33,75^{\circ}$  (рис. 3, а). Следует отметить, что при разработке программы Sm2Px3Tхт введено дополнительное условие баланса расходов по граням подушки [13], что повышает точность результата. В дальнейшем при  $\delta_{\text{ск}} > 0,02$  мм кривые максимальной температуры при нулевом и ненулевом граничном условии  $p|_{\Gamma}$  сходятся воедино. Программа Sm2Px3Tхт показывает, что температура  $t_{\max}$  расположена ближе к выходной кромке подушки при  $\varphi = \theta_{\Pi}$  по направлению вращения диска и смещена к внешнему радиусу подушки при  $r = R_2$  [13; 19]. На практике используется эталонная точка t75/75, закреплённая в стандарте API-670, 4-е издание. Следовательно расчёт температуры  $t_{\max}$  на среднем радиусе подушки при  $r = R_{\text{cp}}$  программы Sm2Px2T будет вносить существенную неточность в определении ограничивающего температурного параметра. По этой причине на рис. 3, а наблюдается ощутимая разница между максимальными температурами  $t_{\max}$ , определёнными с помощью программ Sm2Px2T и Sm2Px3Tхт. Например, при  $\delta_{\text{ск}} = 0,05$  мм разница составляет примерно 33 °С.

Повышенное температурное поле смазочного и пограничного слоёв программы Sm2Px3Tхт приводит, с одной стороны, к снижению несущей способности  $P$  из-за пониженной вязкости  $\mu$  смазки (рис. 2, а). С другой стороны, это приводит к снижению потерь мощности на трение  $N$  из-за пониженной диссипации при вязком сдвиге слоёв смазки относительно результатов расчёта программы Sm2Px2T (см. рис. 2, б). В целом распределение кривых потерь мощности  $N$  схоже с распределением кривых максимальной температуры  $t_{\max}$  с некоторыми отличиями. Во-первых, кривые  $N$  после перестройки течения смазки с увеличением глубины скоса при  $\delta_{\text{ск}} = 0,045$  мм и  $N \approx 0,875$  кВт сходятся в одну точку с дальнейшим некоторым распределением по вертикали. Во-вторых, потери мощности  $N$  с учётом потока смазки в МПК несущественно зависят от угловой протяжённости подушки  $\theta_{\Pi}$ , несмотря на уменьшение максимальной температуры  $t_{\max}$  при увеличении  $\theta_{\Pi}$  (рис. 3, а). Это позволяет судить о том, что, несмотря на увеличение глубины скоса  $\delta_{\text{ск}}$ , общий объём смазки при постоянной высоте зазора, проходящий через упорный подшипник и приводящий к увеличению потерь мощности с учётом переноса потока с подушки на подушку, изменяется незначительно. На рис. 3, б можно увидеть, что полноценный учёт теплообмена смазочного и пограничного слоёв с упорным диском программы Sm2Px3Tхт также приводит к отличиям результатов решения программы Sm2Px2T. Максимум  $T_{d \max}$  трёхмерного поля распределения температуры упорного диска, обменивающегося теплотой с окружающей средой и перераспределяющего теплоту между разными участками смазочного и пограничного слоёв, после перестройки течения несущественно зависит от глубины скоса  $\delta_{\text{ск}}$  и протяжённости  $\theta_{\Pi}$ . Следует понимать, что максимум  $T_{d \max}$  диска программы Sm2Px2T также определяется на среднем радиусе и принимает фактически завышенные значения. Полный трёхмерный учёт тепловых потоков программы Sm2Px3Tхт приводит к смещению максимума  $T_{d \max}$  к внешней кромке диска и снижению общего температурного поля диска за счёт интенсивного теплообмена [13]. По этой причине результаты расчёта двух программ сближаются по своим значениям.

На рис. 4 представлены кривые подвижного равновесия упорного подшипника двух программ расчёта при разных классах вязкости смазки. Результаты расчёта программы Sm2Px2T получены ожидаемо завышенными, чем программы Sm2Px3Tхт. Например, при зазоре  $h_2 = 50$  мкм и ISO VG32 несущая способность  $P$  выше на  $(2045 - 1191,236) / 1191,236 \cdot 100 = 71,7\%$ , при ISO VG46 – на  $(2315 - 1284,5248) / 1284,5248 \cdot 100 = 80,2\%$ . При этом разница в несущей способности при разном классе вязкости смазки больше для программы Sm2Px2T из-за недостаточно точного учёта теплообмена.

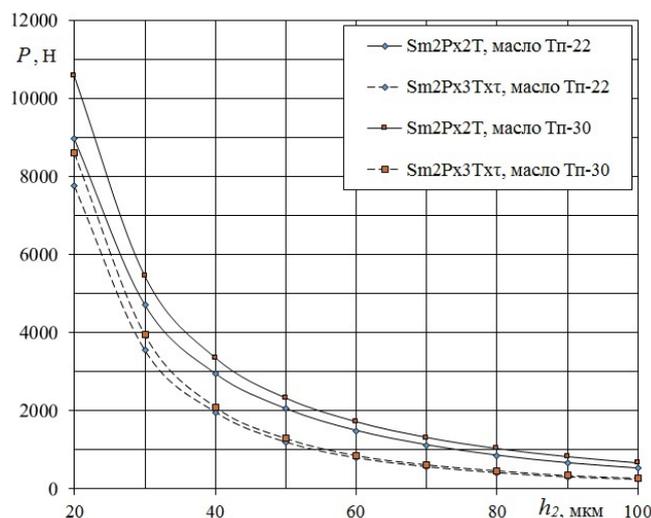


Рис. 4. Кривые подвижного равновесия упорного подшипника скольжения, рассчитанные по двум программам Sm2px2T и Sm2px3Tхт

### Заключение

Проведённые численные исследования, направленные на сравнение результатов расчёта интегральных и локальных характеристик программ Sm2Px2T и Sm2Px3Tхт упорного подшипника скольжения центробежного или винтового компрессора, позволили сделать следующие выводы:

1. Увеличение глубины скоса  $\delta_{ск}$  программы Sm2Px3Tхт приводит к постепенному возрастанию несущей способности  $P$ . Однако такое увеличение ограничено боковыми утечками смазки и постепенно замедляется. Увеличение площади подушки за счёт угловой протяжённости  $\theta_{п}$  приводит к равномерному увеличению  $P$ .

2. При глубине скоса  $\delta_{ск} < 0,02$  мм расчёты по программе Sm2Px3Tхт показывают, что происходит перестройка течения смазки в смазочном слое при изменении профиля поверхности подушки от параллельных стенок к плоскоклиновому профилю с конфузурным зазором. При этом при использовании нулевых граничных условий в интервале скоса  $0 \leq \delta_{ск} \leq 0,008$  мм и увеличенной протяжённости  $\theta_{п} = 38,8^\circ$  возможно возникновение отрицательной несущей способности  $P$ , которая исчезает при увеличении давления вдоль границы подушки  $p|_r$ .

3. При  $\delta_{ск} > 0,02$  мм и числе подушек  $z = 8$  независимо от протяжённости  $\theta_{п}$  отношение несущих способностей двух программ расчёта  $P_{Sm2Px2T} / P_{Sm2Px3Tхт}$  стремится к 1,5, а при числе подушек  $z = 10$  – к 2,1.

4. Нулевые граничные условия  $p|_r = 0$  при скосе  $\delta_{ск} < 0,01$  мм приводят к повышенным значениям потерь мощности  $N$  и максимальных температур  $t_{max}$  и  $T_{dmax}$ . В дальнейшем кривые характеристик при разных граничных условиях сходятся воедино. Фактически условие  $p|_r = 0$  влияет только на значение несущей способности  $P$ , увеличивая гидростатическую составляющую.

5. Полное трёхмерное температурное поле программы Sm2Px3Tхт позволяет точнее определять значения максимальной температуры  $t_{max}$  и координаты её расположения. Это одна из основных причин различий значений  $t_{max}$  двух программ расчёта. При этом на характер кривой температуры  $t_{max}$  влияет протяжённость  $\theta_n$ .

6. Повышенные тепловыделения, учитываемые программой Sm2Px3Tхт, приводят к снижению вязкости протекающей в смазочном и пограничном слоях смазки и, следовательно, потерь мощности на трение  $N$  и несущей способности  $P$ .

7. Незначительные отличия максимальной температуры диска продиктованы завышенными значениями  $T_{dmax}$  программы Sm2Px2T из-за ограниченного учёта теплообмена, определёнными на среднем радиусе подшипника при  $r = R_{cp}$ , и заниженными локальными значениями  $T_{dmax}$  программы Sm2Px3Tхт из-за учёта всего теплопотока при вращении диска.

8. Результаты расчёта грузоподъёмности программы Sm2Px2T получены ожидаемо завышенными, чем программы Sm2Px3Tхт. Например, при зазоре  $h_2 = 50$  мкм и ISO VG32 несущая способность  $P$  выше на 71,7 %, при ISO VG46 – на 80,2% независимо от класса вязкости смазки.

### Библиографический список

1. Соколов Н.В. Упорные подшипники скольжения компрессорных машин с профилированными рабочими поверхностями. Дис. ... канд. техн. наук. Казань, 2014. 250 с.
2. Dadouche A., Fillon M., DeCamillo S.M. Hydrodynamic fixed geometry thrust bearings // Encyclopedia of Tribology. 2013. P. 1718-1729. DOI: 10.1007/978-0-387-92897-5\_48
3. He M., Byrne J.M. Fundamentals of fluid film thrust bearing operation and modeling // Proceedings of the 48th Turbomachinery and 35th Pump Symposia (September, 9-12, 2019, Houston, Texas).
4. Усков М.К., Максимов В.А. Гидродинамическая теория смазки: этапы развития, современное состояние, перспективы. М.: Наука, 1985. 143 с.
5. Reynolds O. On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamps Tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil // Proceedings of the Royal Society of London. 1886. V. 40, Iss. 242-245. P. 191-203. DOI: 10.1098/rspl.1886.0021
6. He M., Hunter Cloud C., Vázquez J.A. The effects of temporal fluid inertia on tilting pad journal bearing dynamics // Mechanisms and Machine Science. 2015. V. 21. P. 805-819. DOI: 10.1007/978-3-319-06590-8\_66
7. Хадиев М.Б. Исследование и расчёт гидродинамических упорных подшипников с неподвижными подушками. Дис. ... канд. техн. наук. Казань, 1979. 309 с.

8. Dowson D. A generalized Reynolds equation for fluid-film lubrication // *International Journal of Mechanical Sciences*. 1962. V. 4, Iss. 2. P. 159-170. DOI: 10.1016/S0020-7403(62)80038-1

9. Хадиев М.Б. Гидродинамические, тепловые и деформационные характеристики смазочных слоев опорно-уплотнительных узлов турбомашин. Дис. ... докт. техн. наук. Казань, 2002. 410 с.

10. Хадиев М.Б., Хамидуллин И.В. Компрессоры в технологических процессах. Расчёт подшипников скольжения центробежных и винтовых компрессоров. Казань: КНИТУ, 2021. 260 с.

11. Fedotov E.M. Limit Galerkin-Petrov schemes for a nonlinear convection-diffusion equation // *Differential Equations*. 2010. V. 46, Iss. 7. P. 1042-1052. DOI: 10.1134/S0012266110070116

12. Cope W.F. The hydrodynamical theory of film lubrication // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*. 1949. V. 197, Iss. 1049. P. 201-217. DOI: 10.1098/rspa.1949.0059

13. Соколов Н.В., Хадиев М.Б., Федотов П.Е., Федотов Е.М. Трёхмерное периодическое термоупругогидродинамическое моделирование гидродинамических процессов упорного подшипника скольжения // *Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение*. 2021. Т. 20, № 3. С. 138-151. DOI: 10.18287/2541-7533-2021-20-3-138-151

14. Sokolov N.V., Khadiev M.B., Maksimov T.V., Fedotov E.M., Fedotov P.E. Mathematical modeling of dynamic processes of lubricating layers thrust bearing turbochargers // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. V. 1158. DOI: 10.1088/1742-6596/1158/4/042019

15. Редукторы энергетических машин: справочник / под общ. ред. Ю.А. Державца. Л.: Машиностроение, 1985. 232 с.

16. Федотов Е.М., Хадиев М.Б., Соколов Н.В. Sm2Px2T – Течение жидкости в зазорах и каналах между подушками упорного подшипника: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013615688, 2013.

17. Федотов П.Е., Федотов Е.М., Соколов Н.В., Хадиев М.Б. Sm2Px3Tхт – Динамически нагруженный упорный подшипник скольжения при постановке прямой задачи: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020615227, 2020.

18. Sokolov N.V., Khadiev M.B., Fedotov P.E., Fedotov E.M. Mathematical model of a dynamically loaded thrust bearing of a compressor and some results of its calculation // *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. 2022. V. 141. P. 461-473. DOI: 10.1007/978-3-030-87809-2\_35

19. Соколов Н.В., Хадиев М.Б., Федотов П.Е., Федотов Е.М. Влияние температуры подачи смазочного материала на работу упорного подшипника скольжения // *Вестник машиностроения*. 2023. № 1. С. 47-55. DOI: 10.36652/0042-4633-2023-102-1-47-55

## COMPARISON OF QUASI-THREE-DIMENSIONAL AND FULL THREE-DIMENSIONAL FORMULATIONS OF THRUST BEARING OPERATION

© 2023

- N. V. Sokolov** Candidate of Science (Engineering), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Compressor Machines and Units; Kazan National Research Technological University, Kazan, Russian Federation; [sokol-88@list.ru](mailto:sokol-88@list.ru)
- M. B. Khadiev** Doctor of Science (Engineering), Professor, Professor of the Department of Compressor Machines and Units; Kazan National Research Technological University, Kazan, Russian Federation; [mullagali@gmail.com](mailto:mullagali@gmail.com)
- P. E. Fedotov** Postgraduate Student and Teaching Assistant of the Department of Applied Mathematics and Artificial Intelligence, Institute of Computational Mathematics and Information Technologies; Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russian Federation; [paulfedotov@mail.ru](mailto:paulfedotov@mail.ru)
- E. M. Fedotov** Doctor of Science (Phys. & Math.), Associate Professor, Deputy Director ; AST Volga region LLC, Kazan, Russian Federation; [eugeny.fedotov@mail.ru](mailto:eugeny.fedotov@mail.ru)

The results of calculating the characteristics of a thrust bearing with fixed pads of a centrifugal or screw compressor, determined on the basis of a numerical implementation of a periodic thermoelastohydrodynamic mathematical model in quasi-three-dimensional and full three-dimensional formulations, are compared. In the first case, the energy equation is solved on the middle radius of the bearing, and the result of the calculation is extended to the entire fluid flow of the lubricant film and boundary layer (Sm2Px2T program). In the second case, the full three-dimensional equation of the energy of the lubricant film and boundary layer, the thrust collar and the pad is solved, taking into account the heat exchange between the working areas of the bearing and with the environment (Sm2Px3T $\tau$  program). Appropriate conclusions are made.

*Mathematical model of hydrodynamic processes; bearing pad; thrust collar; quasi-three-dimensional and three-dimensional formulations; lubricant film and boundary layer; load bearing capacity; power loss; maximum temperature*

---

*Citation:* Sokolov N.V., Khadiev M.B., Fedotov P.E., Fedotov E.M. Comparison of quasi-three-dimensional and full three-dimensional formulations of thrust bearing operation. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2023. V. 22, no. 3. P. 143-159. DOI: 10.18287/2541-7533-2023-22-3-143-159

### References

1. Sokolov N.V. *Upornye podshipniki skol'zheniya kompressornykh mashin s profilirovannymi rabochimi poverkhnostyami. Dis. ... kand. tekhn. nauk* [Thrust bearings of compressor machines with profiled working surfaces. Thesis for a Candidate Degree (Engineering)]. Kazan, 2014. 250 p.
2. Dadouche A., Fillon M., DeCamillo S.M. Hydrodynamic fixed geometry thrust bearings. *Encyclopedia of Tribology*. 2013. P. 1718-1729. DOI: 10.1007/978-0-387-92897-5\_48
3. He M., Byrne J.M. Fundamentals of fluid film thrust bearing operation and modeling. *Proceedings of the 48th Turbomachinery and 35th Pump Symposia (September, 9-12, 2019, Houston, Texas)*.
4. Uskov M.K., Maksimov V.A. *Gidrodinamicheskaya teoriya smazki: etapy razvitiya, sovremennoe sostoyanie, perspektivy* [Hydrodynamic lubrication theory: stages of development, current state, prospects]. Moscow: Nauka Publ., 1985. 143 p.

5. Reynolds O. On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamps Tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil. *Proceedings of the Royal Society of London*. 1886. V. 40, Iss. 242-245. P. 191-203. DOI: 10.1098/rspl.1886.0021

6. He M., Hunter Cloud C., Vázquez J.A. The effects of temporal fluid inertia on tilting pad journal bearing dynamics. *Mechanisms and Machine Science*. 2015. V. 21. P. 805-819. DOI: 10.1007/978-3-319-06590-8\_66

7. Khadiev M.B. *Issledovanie i raschet gidrodinamicheskikh upornykh podshipnikov s nepodvizhnymi podushkami*. Dis. ... kand. tekhn. nauk [Research and calculation of fluid film thrust bearings with fixed pads. Thesis for a Candidate Degree (Engineering)]. Kazan, 1979. 309 p.

8. Dowson D. A generalized Reynolds equation for fluid-film lubrication. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1962. V. 4, Iss. 2. P. 159-170. DOI: 10.1016/S0020-7403(62)80038-1

9. Khadiev M.B. *Gidrodinamicheskie, teplovye i deformatsionnye kharakteristiki smazochnykh sloev oporno-uplotnitel'nykh uzlov turbomashin*. Dis. ... dokt. tekhn. nauk [Hydrodynamic, thermal and stress-related characteristics of lubricating films of bearing and sealing units of turbomachines]. Kazan, 2002. 410 p.

10. Khadiev M.B., Khamidullin I.V. *Kompressory v tekhnologicheskikh protsessakh. raschet podshipnikov skol'zheniya tsentrobezhnykh i vintovykh kompressorov* [Compressors in technological processes. Calculation of plain bearings of centrifugal and screw compressors]. Kazan: Kazan National Research Technological University Publ., 2021. 260 p.

11. Fedotov E.M. Limit Galerkin-Petrov schemes for a nonlinear convection-diffusion equation. *Differential Equations*. 2010. V. 46, Iss. 7. P. 1042-1052. DOI: 10.1134/S0012266110070116

12. Cope W.F. The hydrodynamical theory of film lubrication. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*. 1949. V. 197, Iss. 1049. P. 201-217. DOI: 10.1098/rspa.1949.0059

13. Sokolov N.V., Khadiev M.B., Fedotov P.E., Fedotov E.M. Three-dimensional periodic thermoelastichydrodynamic modeling of hydrodynamic processes of a thrust bearing. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2021. V. 20, no. 3. P. 138-151. (In Russ.). DOI: 10.18287/2541-7533-2021-20-3-138-151

14. Sokolov N.V., Khadiev M.B., Maksimov T.V., Fedotov E.M., Fedotov P.E. Mathematical modeling of dynamic processes of lubricating layers thrust bearing turbochargers. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. V. 1158. DOI: 10.1088/1742-6596/1158/4/042019

15. *Reduktory energeticheskikh mashin: spravochnik / pod obshch. red. Yu.A. Derzhavitsa* [Reducers of energy machines: reference book / under the general editorship of Yu.A. Derzhavets]. Leningrad: Mashinostroenie Publ., 1985. 232 p.

16. Fedotov E.M., Khadiev M.B., Sokolov N.V. *Sm2Px2T – Techenie zhidkosti v zazorakh i kanalakh mezhdru podushkami upornogo podshipnika* [Sm2Px2T – Fluid flow in gaps and grooves between thrust bearing pads]. Certificate of state registration for a computer program, no. 2013615688, 2013.

17. Fedotov P.E., Fedotov E.M., Sokolov N.V., Khadiev M.B. *Sm2Px3Txτ – Dinamicheski nagruzhenny uporny podshipnik skol'zheniya pri postanovke pryamoy zadachi* [Sm2Px3Txτ – Dynamically loaded thrust plain bearing in a direct problem setting]. Certificate of state registration for a computer program, no. 2020615227, 2020.

18. Sokolov N.V., Khadiev M.B., Fedotov P.E., Fedotov E.M. Mathematical model of a dynamically loaded thrust bearing of a compressor and some results of its calculation. *Lecture*

*Notes in Computational Science and Engineering.* 2022. V. 141. P. 461-473.  
DOI: 10.1007/978-3-030-87809-2\_35

19. Sokolov N.V., Khadiev M.B., Fedotov P.E., Fedotov E.M. Influence of the lubricant's supply temperature on the operation of a fluid film thrust bearing. *Russian Engineering Research.* 2023. V. 43, Iss. 3. P. 264-271. DOI: 10.3103/S1068798X23040329