

ВИБРОЗАЩИТНАЯ СИСТЕМА С УПРАВЛЯЕМЫМ ИНЕРЦИОННЫМ ГАСИТЕЛЕМ

© 2025

- В. И. Чернышев** доктор технических наук, профессор;
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева;
chernyshev_46@mail.ru
- Р. Н. Поляков** доктор технических наук, профессор; заведующий кафедрой мехатроники,
механики и робототехники;
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева;
romanpolak@mail.ru
- О. В. Фомина** кандидат технических наук, доцент;
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева;
gari1@list.ru

В результате применения теории динамического программирования к системам виброзащиты, как к объектам управления циклического действия, получены соотношения, которые, связывая компоненты вектора состояния системы и управления, позволяют реализовать процедуру принципа локального минимума для нахождения оптимальной позиционной функции управления применительно к типовым показателям качества, явно не зависящих от управления. Приведены примеры нахождения оптимальной позиционной функции управления колебаниями активной системы виброзащиты. Показано, что, в случае гармонических колебаний, для принятой базовой модели с двумя степенями свободы необходимая регулировка амплитуды и фазы осуществляется посредством управляющих сигналов дискретного типа, что гарантированно обеспечивает достижение требуемых показателей вибрационной безопасности для защищаемого объекта по принятому функциональному критерию.

Виброзащитные системы; оптимальное управление; принцип локального минимума в методе динамического программирования; инерциальный гаситель

Цитирование: Чернышев В.И., Поляков Р.Н., Фомина О.В. Виброзащитная система с управляемым инерционным гасителем // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2025. Т. 24, № 1. С. 164-173. DOI: 10.18287/2541-7533-2025-24-1-164-173

Введение

В процессе эксплуатации вертолёты подвергаются различным по интенсивности динамическим воздействиям вибрационного типа, что повышает вероятность возникновения неисправностей и отказов техники, а также оказывает негативное воздействие на физиологическое состояние экипажа и пассажиров [1 – 3]. В этой связи задача по разработке и внедрению эффективных виброзащитных систем, которые позволяют снижать интенсивность динамических воздействий в широком диапазоне частот за счёт формирования оптимальных компенсационных воздействий, является актуальной [4 – 6]. Известно, что такими возможностями обладают только управляемые виброзащитные системы. [7 – 10].

Анализ технической литературы и патентных источников позволяет утверждать, что особый интерес и перспективы практического использования имеют виброзащитные системы с управляемым инерционным гасителем [11 – 14]. Можно предположить, что при оптимальном управлении угловой скоростью вращения инерционными звеньями и перемещением подвижных масс данные системы могут обеспечить положительный эффект виброзащиты в заданной точке вертолёта, сопоставимый с тем, который достигается эталонными активными системами (рис. 1).

Элементы теории

Сформулируем достаточно общую оптимизационную задачу для управляемых систем виброзащиты. Требуется найти оптимальное позиционное управление $\tilde{u} = u(x) \in U$ для динамической системы

$$\dot{x} = f(x, u, \tau), \quad (1)$$

при котором принятый показатель качества (функционал)

$$J = \int_0^T F(x) d\tau \quad (2)$$

на интервале $0 \dots T$ будет иметь минимальное значение.

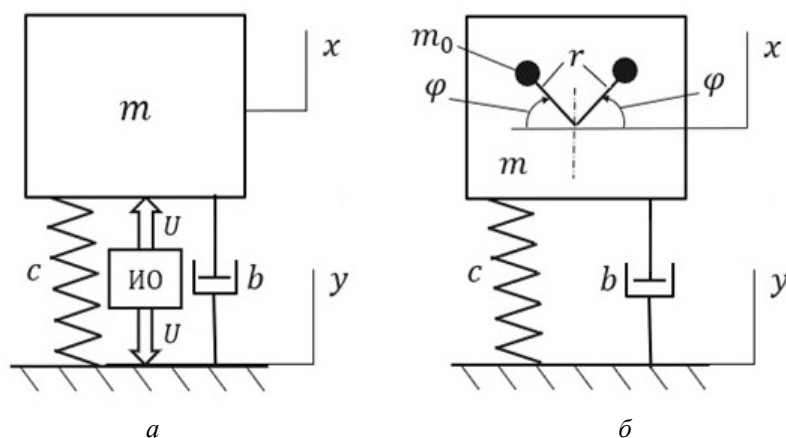


Рис. 1. Расчётно-структурные схемы эталонной активной системы (а) и виброзащитной системы с управляемым инерционным гасителем (б):
 m – масса защищаемого объекта; x, y – перемещения защищаемого объекта и основания;
ИО – исполнительный орган; U – компенсационное воздействие (прямое управление);
 c, b – коэффициенты жёсткости и демпфирования; m_0 – масса инерционного звена;
 r – радиус (расстояние от оси вращения до центра масс инерционных звеньев);
 φ – угол поворота инерционного звена

Поставленную задачу будем решать, используя метод динамического программирования [8 – 10]. В соответствии с принципом оптимальности, который положен в основу метода динамического программирования, следует, что функционал (2) достигает минимального значения на любом конечном участке оптимальной траектории. Математически данный принцип отображается посредством функции Беллмана

$$V(x, \tau) = \min_u \int_\tau^T F(x) d\tau, \quad (3)$$

которая, при наличии связи (1), позволяет свести нахождение оптимального управления к решению функционального уравнения Беллмана

$$-\frac{\partial V}{\partial \tau} = \min_u \left[\frac{\partial V}{\partial x} f(x, u, \tau) + F(x) \right]. \quad (4)$$

Преобразуем уравнение (4), используя для этого функцию (3). В результате получим следующее выражение:

$$\min_u \left[\int_{\tau}^T \frac{\partial F}{\partial x} d\tau \cdot f(x, u, \tau) \right]. \quad (5)$$

Известно, что в общем случае процесс оптимизации осуществляется численно с использованием дискретных алгоритмов прямой и обратной прогонки. Покажем, что применительно к управляемым системам виброзащиты возможно использовать качественно новые подходы оптимизации, в основе которых лежат фундаментальные аналитические зависимости, следующие из (5).

Виброзащитные системы относятся к классу динамических объектов, которые совершают колебательные движения, то есть в фазовом пространстве изображающая точка описывает периодически замкнутые фазовые траектории. Очевидно, что это свойство виброзащитных систем должно сохраняться при любом допустимом управлении. Но самое главное состоит в том, что верхний предел T в выражении (5) можно соотнести с циклом прохождения изображающей точки по замкнутой траектории. Причём начальное и конечное положения изображающей точки на фазовой траектории будут совмещены. Отсюда следует, что принцип оптимальности, положенный в основу метода динамического программирования, применим для произвольно выбранной точки фазовой траектории соответственно на интервале $(T - \Delta\tau) \dots T$. При этом значение оптимального управления можно определять непосредственно на каждом шаге интегрирования динамической системы (1), обеспечивая при этом локальный минимум соотношению

$$\min_u \left[\frac{\partial F}{\partial x} f(x, u, \tau) \Delta\tau \right] = \min_u (\nabla F \cdot f). \quad (6)$$

Здесь

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} \right), \quad f = (f_1 \quad \dots \quad f_n)^T.$$

Соотношение (6) определяет принцип локального минимума в методе динамического программирования и позволяет реализовать формальную процедуру нахождения оптимального позиционного управления из условия минимума выражения в квадратных скобках. Важно подчеркнуть, что следующая цепочка преобразований подынтегральной функции показателя качества (2) также приводит к соотношению (6):

$$\min_u F(x) \rightarrow \min_u \frac{dF}{dt} = \min_u (\nabla F \cdot f). \quad (7)$$

Принцип локального минимума (6) может быть использован не только для пошаговой оценки оптимальности управления непосредственно в процессе интегрирования динамической системы (1) и соответствующего его определения в виде числового массива, но также и для нахождения его в виде позиционной функции $\tilde{u} = u(x)$. Следует отметить, что получить такого типа аналитическую зависимость для позиционного управления возможно только тогда, когда векторное произведение $\nabla F \cdot f$ в соотношении (7) явно зависит от управления. В случае же, когда данное векторное произведение зависит от управления неявно (по умолчанию), то по аналогии с цепочкой преобразований (7) следует воспроизвести последующую цепочку преобразований

$$\min_u \frac{dF}{dt} \rightarrow \min_u \frac{d^2F}{dt^2} = \min_u (\nabla G \cdot fd) \quad (8)$$

и убедиться, что векторное произведение $\nabla G \cdot fd$ явно зависит от управления.

В соотношении (8)

$$G(x, f) = \nabla F \cdot f, \quad \nabla G = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial G}{\partial x_n} & \frac{\partial G}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial G}{\partial f_n} \end{pmatrix},$$

$$fd = \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n & \dot{f}_1 & \dots & \dot{f}_n \end{pmatrix}^T.$$

Поскольку в любой точке оптимальной траектории соотношения (7) и (8) должны достигать минимально-допустимого значения, то в общем случае для решения поставленной оптимизационной задачи эти соотношения можно объединить в одно результирующее выражение

$$\min_u [(\nabla F \cdot f)(\nabla G \cdot fd)]. \quad (9)$$

Таким образом, в результате применения теории динамического программирования к системам виброзащиты, как к объектам управления циклического действия, получены соотношения, которые, связывая компоненты вектора состояния системы и управления, позволяют реализовать процедуру принципа локального минимума для нахождения оптимальной позиционной функции управления применительно к типовым показателям качества, явно не зависящим от управления.

Базовые модели и оптимальное управление

1. Рассмотрим базовую модель эталонной активной системы (рис. 1, а)

$$m\ddot{x} + b(\dot{x} - \dot{y}) + c(x - y) = U, \quad (10)$$

которая предназначена для защиты объекта (массы m) от кинематического возмущения $y = y_0 \sin \omega t$.

Безразмерный аналог модели (10) представим в форме Коши

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\varepsilon \eta^{-1} (x_2 - \cos \tau) - \eta^{-2} (x_1 - \sin \tau) + u \quad (11)$$

со следующими переменными и параметрами:

$$x_1 = \frac{x}{y_0}, \quad x_2 = \frac{\dot{x}}{y_0 \omega}, \quad \tau = \omega t, \quad \varepsilon = \frac{b}{\sqrt{mc}}, \quad \eta = \frac{\omega}{\sqrt{c/m}}, \quad u = \frac{U}{my_0 \omega^2}.$$

Произведём оптимизацию по управлению для двух случаев, когда подынтегральная функция показателя качества (2) $F(x) = x_1^2$ и $F(x) = x_2^2$.

В первом случае

$$\nabla F = (2x_1 \quad 0), \quad G(x, f) = 2x_1 f_1, \quad \nabla G = (2f_1 \quad 0 \quad 2x_1 \quad 0), \quad \nabla G \cdot fd = 2f_1^2 + 2x_1 \dot{f}_1.$$

Поскольку $f_1 = x_2$, а $\dot{f}_1 = \dot{x}_2 = f_2$, то из выражения (9)

$$\min_u [(\nabla F \cdot f)(\nabla G \cdot fd)] = \min_u [2x_1 x_2 (2x_2^2 + 2x_1 f_2)] \rightarrow \min_u x_2 f_2 \rightarrow \min_u x_2 u$$

находим, что при наличии ограничений $-\bar{u}_1 \leq u \leq \bar{u}_2$ оптимальное позиционное управление является релейной функцией

$$\tilde{u} = \begin{cases} +\bar{u}_2, & x_2 < 0; \\ -\bar{u}_1, & x_2 > 0. \end{cases} \quad (12)$$

Зависимость (12) определяет типовую позиционную функцию управления активной виброзащитной системы (11) с ограниченным по мощности источником энергии.

Во втором случае $\nabla F = (0 \quad 2x_2)$ и, соответственно, из соотношения (7)

$$\min_u (\nabla F \cdot f) = \min_u 2x_2 f_2 \rightarrow \min_u x_2 u$$

также находим оптимальное позиционное управление в виде (12).

Этот результат свидетельствует о том, что оптимальный релейный процесс управления в системах виброзащиты данного типа обеспечивается при минимизации показателя качества (2) как с подынтегральной функцией $F(x) = x_1^2$, так и с подынтегральной функцией $F(x) = x_2^2$.

Результаты моделирования колебаний системы (11) представлены на рис. 2.

При симметричных ограничениях, в частности, когда $|u| \leq 0,5$ (рис. 2, а), управление изменяется по релейному закону с переключениями при смене знака скорости защищаемого объекта. Если $|u| > 0,5$, то наблюдается сужение интервалов «чисто» релейных и появление скользящих режимов управления. При этом в пределе кинематическое возмущение полностью компенсируется, когда

$$\tilde{u} = \varepsilon \eta^{-1} \cos \tau - \eta^{-2} \sin \tau. \quad (13)$$

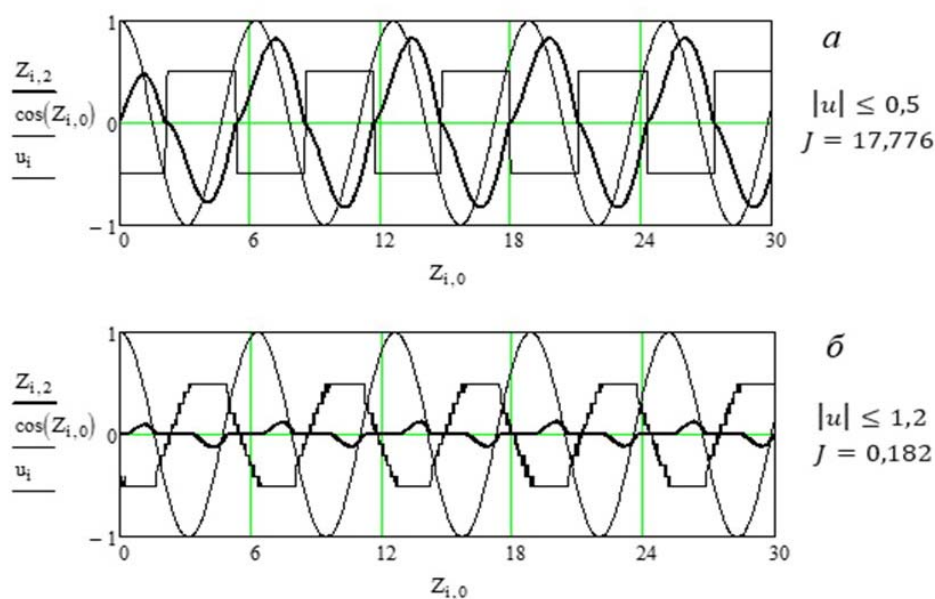


Рис. 2. Графики сигналов на входе и выходе активной системы виброзащиты и графики оптимальных управлений: $\eta = 1,0$; $\varepsilon = 0,2$; $u_i = \tilde{u}$; $Z_{i,0} \leftrightarrow \tau$; $Z_{i,2} \leftrightarrow x_2$

2. Если вместо внешнего источника энергии в активной системе (10) использовать инерционный гаситель (рис. 1, б) и, соответственно, полагать, что компенсационное воздействие

$$U = 2m_0 r \dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \quad (14)$$

то получим, пренебрегая силами инерции в переносном движении, альтернативную базовую модель виброзащитной системы с инерционным гасителем:

$$m\ddot{x} + b(\dot{x} - \dot{y}) + c(x - y) = 2m_0 r \dot{\varphi}^2 \sin \varphi. \quad (15)$$

По аналогии с эталонной активной системой при кинематическом возмущении $y = y_0 \sin \omega t$ и оптимальном управлении должны выполняться следующие соотношения для амплитуды и фазы компенсационного воздействия (14):

$$2m_0 r \omega^2 = y_0 \sqrt{(b\omega)^2 + c^2}, \quad \varphi = \omega t + \arctan(b\omega c^{-1}).$$

Учитывая данные соотношения и полагая, что система автоматического управления обеспечивает равномерное вращение инерционных звеньев с частотой ω , а также необходимую регулировку амплитуды и фазы посредством формируемых управляющих сигналов u_1 и u_2 дискретного типа преобразуем базовую модель (15) к следующему безразмерному каноническому виду:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\varepsilon \eta^{-1} (x_2 - \cos \tau) - \eta^{-2} (x_1 - \sin \tau) + u_1 \left[\varepsilon \eta^{-1} \cos(\tau + \beta + u_2) + \eta^{-2} \sin(\tau + \beta + u_2) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь угол β характеризует возможное рассогласование фаз между компонентами вектора кинематического возмущения и вектора компенсационного воздействия. Поскольку имитируется синхронно-противоположное вращение инерционных звеньев, то значения угла β следует принимать из интервала $-\pi/2 \dots \pi/2$.

Работа системы автоматического управления по обеспечению оптимального режима колебаний связана с поэтапным достижением следующих пределов:

$$u_1 \rightarrow 1, \quad \beta + u_2 \rightarrow 0. \quad (17)$$

Первый предел достигается посредством позиционирования (управления корректирующим поворотом) инерционных звеньев относительно защищаемого объекта, а второй – посредством позиционирования (управлением синхронным перемещением) масс m_0 вдоль инерционных звеньев.

Необходимым условием достижения оптимального режима колебаний защищаемого объекта при любом из возможных вариантов реализации пределов (17) заключается в использовании информации о значениях функционала (2) J_i и J_{i+1} ($i=1, 2, \dots$) на последовательных интервалах движения и принятии соответствующих решений об изменении управлений посредством дискретного приращения Δu .

Результаты моделирования базовой модели (16) при гармоническом кинематическом возмущении показали, что предложенный алгоритм оптимизации гарантированно

обеспечивает достижение требуемых показателей вибрационной безопасности для защищаемого объекта по функциональному критерию (2).

На рис. 3 приведены выборочные результаты моделирования в виде графиков колебаний защищаемого объекта. Данные графики получены при следующих системных параметрах и начальных значениях управлений: $\eta = 1,4$; $\varepsilon = 0,2$; $u_1 = 1$; $u_2 = 0$.

При значениях $\beta = \pm 0,4$ и $\Delta u = 0,4$, как это следует из рис. 3, а и рис. 3, б, для достижения «нулевого уровня» интенсивности колебаний защищаемого объекта потребовалось соответственно четыре и две итерации. Причина увеличения числа итераций в первом случае (рис. 3, а) вполне очевидна. Поскольку на первых двух интервалах движения выполнялось неравенство $J_1 < J_2$, то на последующих интервалах движения потребовалось изменить знак приращения Δu на противоположный.

Далее, соответственно, при значениях $\beta = \pm 0,8$ и $\Delta u = 0,5$ для резкого снижения уровня интенсивности колебаний защищаемого объекта (рис. 3, в и рис. 3, г) также потребовалось четыре и две итерации.

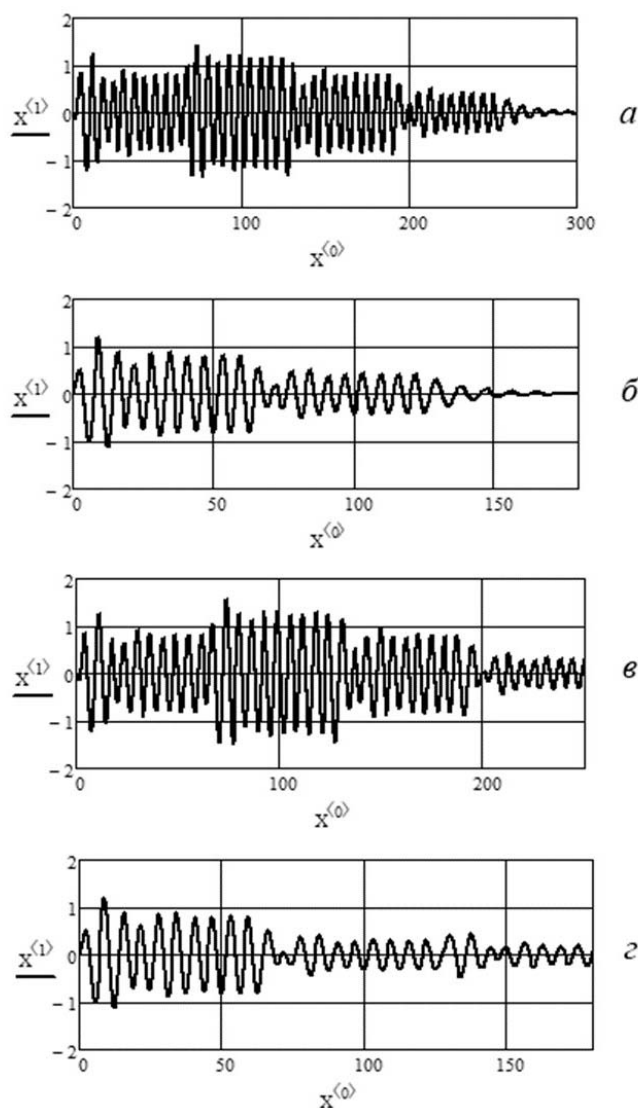


Рис. 3. Графики динамических процессов на выходе базовой модели с управляемым инерционным гасителем: $X^{(0)} \leftrightarrow \tau$; $X^{(1)} \leftrightarrow x_i$

Заключение

В результате применения теории динамического программирования к системам виброзащиты как к объектам управления циклического действия получены соотношения, которые, связывая компоненты вектора состояния системы и управления, позволяют реализовать процедуру принципа локального минимума для нахождения оптимальной позиционной функции управления применительно к типовым показателям качества, явно не зависящих от управления.

Приведены примеры нахождения оптимальной позиционной функции управления колебаниями активной системы виброзащиты. Установлено, что с увеличением мощности внешнего источника энергии наблюдаются скользкие режимы управления, которые, в пределе, позволяют полностью компенсировать диссипативные и упругие силы, воспринимаемые защищаемым объектом при кинематическом возмущении. В этой связи виброзащитная система с управляемым инерционным гасителем, как базовый аналог активной системы, должна отслеживать и регулировать не только частоту кинематического возмущения и амплитуду сил инерции, но также и фазовую составляющую оптимального процесса во времени. Показано, что в случае гармонических колебаний для принятой базовой модели с двумя степенями свободы необходимая регулировка амплитуды и фазы осуществляется посредством управляющих сигналов дискретного типа, что гарантированно обеспечивает достижение требуемых показателей вибрационной безопасности для защищаемого объекта по принятому функциональному критерию.

Работа выполнена в Орловском государственном университете имени И.С. Тургенева в рамках государственного задания № 075-00196-24-08 на 2024 год и на плановый период 2025 и 2026 годов от 23.08.2024 г., проект 1024041900021-8-2.3.1;2.2.3. Разработка конструкторских и программно-аппаратных решений управления вибрационными процессами в вертолётном транспорте, обеспечивающих формирование оптимальных компенсационных воздействий (FSGN-2024-0013).

Библиографический список

1. Говердовский В.Н., Зобов А.В. Состояние и методы повышения качества виброзащиты вертолёт // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2009. № 4 (24). С. 191-196.
2. Калашников В.С., Кузина Е.А., Яшин Д.С. Анализ причин возникновения вибрации в изделиях авиационной техники // Труды международного симпозиума «Надёжность и качество». 2016. Т. 1. С. 165-167.
3. Kim D.-H., Kwak D., Song Q. Demonstration of active vibration cancellation system on Korean utility helicopter // International Journal of Aeronautical and Space Sciences. 2019. V. 20. P. 249-259. DOI: 10.1007/s42405-018-0106-3
4. Рандин Д.Г. Исследование динамических характеристик управляемого демпфера // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. 2013. № 2 (38). С. 64-70.
5. Сорокин В.Н., Захаренков Н.В. Повышение эффективности виброзащиты на базе пневматических резинокордных устройств // Омский научный вестник. Серия Авиационно-ракетное и энергетическое машиностроение. 2017. Т. 1, № 1. С. 50-57.
6. Воронов А.В., Карасева Т.В. Анализ возникновения вибрации в летательных аппаратах с целью внедрения технологий и систем для её исследования // Universum: технические науки. 2023. № 1 (106). <https://universum.com/ru/tech/archive/item/14874>
7. Генкин М.Д., Яблонский В.В. Активные виброзащитные системы // В сб.: «Виброизолирующие системы в машинах и механизмах». М.: Наука, 1977. С. 3-11.

8. Фомина О.В., Савин Л.А., Чернышев В.И. Теоретические аспекты формирования оптимальных управляемых процессов виброзащиты // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. 2013. № 3. С. 44-50.

9. Чернышев В.И., Савин Л.А., Фомина О.В. Непрямое управление колебаниями: элементы теории // Труды СПИИРАН. 2019. Т. 18, № 1. С. 148-175. DOI: 10.15622/sp.18.1.148-175

10. Чернышев В.И., Фомина О.В. Управляемые виброзащитные системы: динамическое программирование и оптимизация // Мир транспорта и технологических машин. 2022. № 4-1 (79). С. 55-61. DOI: 10.33979/2073-7432-2022-1(79)-4-55-61

11. Paulitsch C., Gardonio P., Elliott S.J. Active vibration control using an inertial actuator with internal damping // The Journal of the Acoustical Society of America. 2006. V. 119, Iss. 4. P. 2131-2140. DOI: 10.1121/1.2141228

12. Swanson D., Black P., Girondin V., Bachmeyer P., Jolly M. Active vibration control using circular force generators // European Rotorcraft Forum 2015 (September, 01-04, 2015, Munich, Germany).

13. Prakash K., Lesieutre G.A. Optimization of circular force generator placement for rotorcraft hub force and moment // Journal of the American Helicopter Society. 2019. V. 64, Iss. 1. DOI: 10.4050/jahs.64.012002

14. Black P.R., Swanson D.A., Badre-Alam A., Janowski M.D., Altieri R.E., Meyers A.D., Ryu J. Circular force generator devices, systems, and methods for use in an active vibration control system. Patent US, 2015/0321753 A1. (Publ. 12.11.2015)

VIBRATION PROTECTION SYSTEM WITH CONTROLLED INERTIAL DAMPER

© 2025

V. I. Chernyshev Doctor of Science (Engineering), Professor;
Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russian Federation;
chernyshev_46@mail.ru

R. N. Polyakov Doctor of Science (Engineering), Professor, Head of the Department
of Mechatronics, Mechanics and Robotics;
Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russian Federation;
romanpolak@mail.ru

O. V. Fominova Candidate of Science (Engineering), Associate Professor;
Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russian Federation;
garil@list.ru

As a result of applying the theory of dynamic programming to vibration protection systems as cyclic control objects, relations were obtained that, by linking the components of the system state vector and control, allow implementing the procedure of the local minimum principle to find the optimal positional control function in relation to typical quality indicators that are clearly independent of control. Examples of finding the optimal positional control function for oscillations of an active vibration protection system are given. It is shown that, in the case of harmonic oscillations, for the adopted basic model with two degrees of freedom, the necessary adjustment of the amplitude and phase is carried out by means of discrete-type control signals, which ensures the achievement of the required vibration safety indicators for the protected object according to the adopted functional criterion.

Vibration protection systems; optimal control; local minimum principle in the dynamic programming method; inertial damper

Citation: Chernyshev V.I., Polyakov R.N., Fominova O.V. Vibration protection system with controlled inertial damper. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2025. V. 24, no. 1. P. 164-173. DOI: 10.18287/2541-7533-2025-24-1-164-173

References

1. Goverdovskiy V.N., Zobov A.V. Status and methods of improving the quality of helicopter vibration protection. *Modern Technologies. System Analysis. Modeling*. 2009. No. 4 (24). P. 191-196. (In Russ.)
2. Kalashnikov V.S., Kuzina E.A., Yashin D.S. Analysis of the causes of vibration in aviation products. *Trudy Mezhdunarodnogo Simpoziuma «Nadezhnost' i Kachestvo»*. 2016. V. 1. P. 165-167. (In Russ.)
3. Kim D.-H., Kwak D., Song Q. Demonstration of active vibration cancellation system on Korean utility helicopter. *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*. 2019. V. 20. P. 249-259. DOI: 10.1007/s42405-018-0106-3
4. Randin D.G. Research of dynamic characteristics of controlled damper. *Vestnik of Samara State Technical University. Technical Sciences Series*. 2013. No. 2 (38). P. 64-70. (In Russ.)
5. Sorokin V.N., Zakharenkov N.V. Increasing efficiency of vibration protection system by using pneumatic rubber cord devices. *Omsk Scientific Bulletin. Series Aviation-Rocket and Power Engineering*. 2017. V. 1, no. 1. P. 50-57. (In Russ.)
6. Voronov A.V., Karaseva T.V. Analysis of the appearance of vibration in aircraft with the purpose of introducing technologies and systems for its study. *Universum: Technical Sciences*. 2023. No. 1 (106). (In Russ.). Available at: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/14874>
7. Genkin M.D., Yablonskiy V.V. Active vibration protection systems. *V sb.: «Vibroizoliruyushchie Sistemy v Mashinakh i Mekhanizмах»*. Moscow: Nauka Publ., 1977. P. 3-11. (In Russ.)
8. Fominova O.V., Savin L.A., Chernyshev V.I. Theoretical aspects of the optimal controllable vibroprotection processes synthesis. *Proceedings of the Southwest State University. Series: Engineering and Technology*. 2013. No. 3. P. 44-50. (In Russ.)
9. Chernyshev V.I., Savin L.A., Fominova O.V. Indirect control of oscillations: elements of theory. *SPIIRAS Proceedings*. 2019. V. 18, no. 1. P. 148-175. (In Russ.). DOI: 10.15622/sp.18.1.148-175
10. Chernyshev V.I., Fominova O.V. Controlled vibration protection systems: dynamic programming and optimization. *World of Transport and Technological Machines*. 2022. No. 4-1 (79). P. 55-61. (In Russ.). DOI: 10.33979/2073-7432-2022-1(79)-4-55-61
11. Paulitsch C., Gardonio P., Elliott S.J. Active vibration control using an inertial actuator with internal damping. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2006. V. 119, Iss. 4. P. 2131-2140. DOI: 10.1121/1.2141228
12. Swanson D., Black P., Girondin V., Bachmeyer P., Jolly M. Active vibration control using circular force generators. *European Rotorcraft Forum 2015 (September, 01-04, 2015, Munich, Germany)*.
13. Prakash K., Lesieutre G.A. Optimization of circular force generator placement for rotorcraft hub force and moment. *Journal of the American Helicopter Society*. 2019. V. 64, Iss. 1. DOI: 10.4050/jahs.64.012002
14. Black P.R., Swanson D.A., Badre-Alam A., Janowski M.D., Altieri R.E., Meyers A.D., Ryu J. Circular force generator devices, systems, and methods for use in an active vibration control system. Patent US, 2015/0321753 A1. (Publ. 12.11.2015)