

УДК 539.374

Динамика освоения предприятиями оптимальной предельной мощности

А.Л. Сараев¹, Л.А. Сараев²

¹Самарский государственный экономический университет, Россия 443090, Самара,
ул. Советской Армии, 141.

²Самарский национальный исследовательский университет имени академика
С. П. Королева, Россия, 443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Аннотация

В публикуемой статье исследованы особенности динамики освоения предприятиями их оптимальной предельной мощности. Рассмотрен вариант однофакторной модели предприятия, динамика роста ресурса, выручки, издержек и прибыли которого описывается дифференциальным уравнением. Кроме того, предложен вариант двухфакторной модели предприятия, динамика роста ресурса, выручки, издержек и прибыли которого описывается системой дифференциальных уравнений. Показано, что в обоих случаях оптимальные значения предельных мощностей предприятий соответствуют значениям максимальных прибылей. Отклонение от этих значений приводит к снижению эффективной работы предприятий и в конечном счете упущенной выгоде.

Ключевые слова: предельная мощность; выручка; издержки; прибыль; скорость освоения производственной мощности; производственная функция.

Получение: 21 декабря 2024 г. / Исправление: 21 января 2025 г. /

Принятие: 21 февраля 2025 г. / Публикация онлайн: 31 марта 2025 г.

Математические статистические и инструментальные методы экономики (научная статья)

© Коллектив авторов, 2025

© Самарский университет, 2025 (составление, дизайн, макет)

⌗ ©⌗ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International
(<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования:

Сараев А.Л., Сараев Л.А. Динамика освоения предприятиями оптимальной предельной мощности // *Вестник Самарского университета. Экономика и управление*, 2025. Т. 16, № 1. С. 144–158.
doi:<http://doi.org/10.18287/2542-0461-2025-16-1-144-158>.

Сведения об авторах:

Александр Леонидович Сараев  <http://orcid.org/0000-0002-9223-6330>

кандидат экономических наук, доцент; заведующий кафедрой прикладной информатики;

e-mail: alex.saraev@gmail.com

Леонид Александрович Сараев  <http://orcid.org/0000-0003-3625-5921>

доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры математики и бизнес-информатики;

e-mail: saraev_leo@mail.ru

Введение

Разработка моделей освоения производственных мощностей предприятиями является актуальной проблемой современной экономической теории, успешное решение которой способно помочь оптимизировать использование ресурсов и повысить эффективность производства.

К такого рода моделям относятся модели постепенного освоения мощностей, согласно которым производственные мощности вводятся поэтапно, по мере роста спроса или освоения технологий. Такие модели позволяют минимизировать риски перепроизводства и избыточных инвестиций.

Модели полного и мгновенного освоения предполагают одномоментный выход на проектную мощность, но при этом требуют больших начальных инвестиций и уверенности в рыночном спросе.

Модели адаптивного освоения (модели гибких мощностей) позволяют легко масштабировать производство в зависимости от спроса за счет модульных линий. Они, как правило, используются в условиях нестабильного рынка.

Модели освоения производственных мощностей, учитывающие узкие места, соответствуют теории ограничений систем (Theory of constraints, TOC) позволяют найти ключевые ограничения, определяющие успех и эффективность всей системы в целом. При этом усилия менеджмента предприятия фокусируются на выявлении и устранении ключевых ограничений (bottlenecks) в производстве, а мощности наращиваются точечно, в самых критичных участках.

Модели динамического освоения производственных мощностей учитывают жизненный цикл продукта. Мощности корректируются в зависимости от фазы этого цикла (запуск, рост, зрелость, спад). При этом на этапе роста мощности расширяются, на этапе спада мощности консервируются.

Модели аутсорсинга и кооперации требуют передачи части мощностей подрядчикам, чтобы избежать перегрузки собственного производства.

Модели бережливого производства (Lean Manufacturing) предполагают освоение мощностей с минимальными потерями, снижением простоев, устранением перепроизводства. Здесь акцент делается на вытягивающем производстве (pull system) и Just-in-Time.

Модели цифрового двойника (Digital Twin) предполагают виртуальное моделирование работы мощностей перед их физическим освоением. Такие модели позволяют оптимизировать загрузку и выявить проблемы до реального запуска.

На практике критериями выбора модели являются уровень неопределенности спроса, доступность инвестиций, гибкость технологий, отраслевые особенности. Поскольку каждая модель имеет свои преимущества и ограничения, предприятия часто комбинируют подходы. Например, они могут использовать поэтапное освоение вместе с аутсорсингом и т.д. [1–5].

Разработка моделей освоения предприятием предельных производственных мощностей (максимально возможного объема выпуска при существующих ресурсах) требует особых подходов, так как связано с высокой нагрузкой на оборудование, персонал и логистику.

К таким ключевым моделям относятся модели постоянной перегрузки (Overload Model), в рамках которых предприятия работают на мощности, превышающей номинальную. Здесь происходит максимальная отдача от активов, рост прибыли в краткосрочной перспективе, но при этом имеет место ускоренный износ оборудования, рост брака, повышенная аварийность.

Модели освоения производственных мощностей, учитывающие узкие места (Bottleneck-Centric Model) и соответствующие на теории ограничений систем фокусируют особое внимание на устранении ключевых ограничений, мешающих достичь предела мощности, выявляют самые медленные участки производства и оптимизируют его работы за счет дополнительных смен или модернизации.

Модели динамического масштабирования (Elastic Capacity Model) описывают гибкое изменение мощности за счет временного увеличения сменности, аренды дополнительного оборудования, привлечения временных работников.

Модели бережливого предела (Lean-to-Limit Approach), представляют собой комбинацию моделей Lean Manufacturing и работы на пределе. Для них характерно устранение всех потерь, простоев и избыточных запасов, оптимизация потоков для максимальной загрузки без перегрузки.

Модели цифровых двойников (Digital Twin Optimization) используют искусственный интеллект и цифровые модели для прогнозирования.

Модели резервных мощностей (Standby Capacity Model) описывают создание скрытых резервов (например, законсервированных линий), которые можно быстро ввести в строй.

Модели кооперации и аутсорсинга (Network-Based Capacity) прогнозируют достижение предела за счет распределения заказов между своими и сторонними мощностями.

Критериями выбора модели являются технологическая гибкость, экономическая целесообразность, риски износа оборудования, качество продукции, безопасность, влияние внешней среды на стабильность спроса и действия конкурентов.

Освоение производственных мощностей требует определенного баланса между выпуском продукции, издержками и прибылью предприятия, поэтому целью данной работы является разработка новых экономико-математических моделей, учитывающих оптимальные предельные мощности позволит более точно анализировать и прогнозировать эффективную динамику выпуска продукции [6–10].

1. Оптимальная предельная производственная мощность однофакторного предприятия

Пусть производственное предприятие выпускает некоторую однородную продукцию общим объемом V , ограниченным объемом предельной производственной мощностью предприятия V_∞ :

$$0 \leq V \leq V_\infty.$$

Объем выпуска продукции V является результатом переработки объемов определенных ресурсов, которые могут включать в себя объемы основного капитала, производственные фонды, трудовые ресурсы, используемые в производстве материалы, применяемые технологиями, инновации и т.д. Эти ресурсы можно условно объединить в один интегральный региональный ресурс в виде некоторого объема производственного фактора Q .

Объем выпуска продукции V полностью определяется фактором производства Q с помощью производственной функции, в качестве которой примем функцию Кобба–Дугласа

$$V = P \cdot Q^a. \quad (1)$$

Здесь P — стоимость продукции, произведенной на единичный объем ресурса, показатель степени a — представляет собой эластичность выпуска продукции по ресурсу Q , ($0 \leq a \leq 1$).

Выражение для объема пропорциональных издержек предприятия TC в общем случае имеет вид

$$TC = H \cdot Q + TFC. \quad (2)$$

Объем прибыли предприятия $PR = V - TC$ записывается с помощью выражения

$$PR = P \cdot Q^a - H \cdot Q - TFC. \quad (3)$$

Очевидно, что для эффективной работы предприятия объем предельной производственной мощности предприятия V_∞ и соответствующий ему объем ресурса Q_∞ должны соответствовать максимальной прибыли.

Уравнение для вычисления значения ресурса $Q_{\max}$ имеет вид

$$\frac{dPR}{dQ} = a \cdot P \cdot Q^{a-1} - H = 0. \quad (4)$$

Решение уравнения (4) имеет вид

$$Q_{\max} = \left(\frac{a \cdot P}{H} \right)^{\frac{1}{1-a}}. \quad (5)$$

Максимальная прибыль предприятия вычисляется по формуле

$$PR_{\max} = P \cdot \left(\frac{a \cdot P}{H} \right)^{\frac{a}{1-a}} - H \cdot \left(\frac{a \cdot P}{H} \right)^{\frac{1}{1-a}} - TFC. \quad (6)$$

Таким образом, в качестве предельной производственной мощности предприятия V_∞ и соответствующего ему объему ресурса Q_∞ следует выбирать выражения

$$\left\{ \begin{array}{l} V_\infty = V_{\max} = P \cdot \left(\frac{a \cdot P}{H} \right)^{\frac{a}{1-a}}, \\ PR_\infty = PR_{\max} = P \cdot \left(\frac{a \cdot P}{H} \right)^{\frac{a}{1-a}} - H \cdot \left(\frac{a \cdot P}{H} \right)^{\frac{1}{1-a}} - TFC, \\ Q_\infty = Q_{\max} = \left(\frac{a \cdot P}{H} \right)^{\frac{1}{1-a}}. \end{array} \right. \quad (7)$$

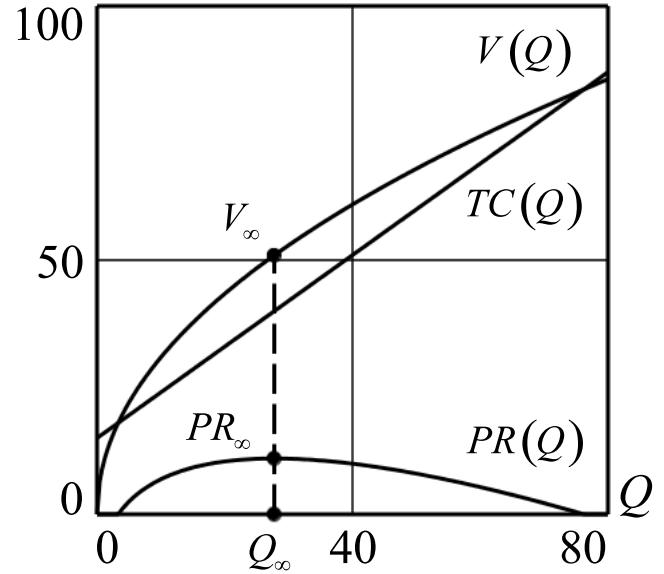
На рис. 1 показаны графики кривых производственной функции (1), функции издержек (2) и функции прибыли (3).

Объем фактора производства $Q = Q(t)$ предполагается непрерывно дифференцируемой и ограниченной величиной на числовой полуоси $0 \leq t < \infty$ функцией непрерывного аргумента времени t .

Единицей измерения времени t служит соответствующий обстоятельствам рыночный

Рис. 1: Графики кривых производственной функции (1), функции издержек (2) и функции прибыли (3). Точками обозначены значения максимальной прибыли PR_{∞} и предельной производственной мощности предприятия V_{∞} . Расчетные значения: $P = 10$; $a = 0.49$; $H = 0.9$; $TFC = 15$; $Q_0 = 0$; $Q_{\infty} = 27.736$; $V_{\infty} = 50.944$; $PR_{\infty} = 10.981$.

Fig. 1: Graphs of the curves of the production function (1), the cost function (2) and the profit function (3). The dots indicate the values of the maximum profit PR_{∞} and the marginal production capacity of the enterprise V_{∞} . Calculated values: $P = 10$; $a = 0.49$; $H = 0.9$; $TFC = 15$; $Q_0 = 0$; $Q_{\infty} = 27.736$; $V_{\infty} = 50.944$; $PR_{\infty} = 10.981$.



период (месяц, квартал, год). Ограниченная функция $Q = Q(t)$ удовлетворяет неравенству

$$Q_0 \leq Q(t) \leq Q_{\infty}$$

Здесь Q_0 — известное начальное значение фактора производства, Q_{∞} — его предельное значение, которое подлежит вычислению.

Для наблюдения за динамикой развития предприятия следует составить уравнение баланса для объема фактора производства $Q = Q(t)$.

За малый промежуток времени Δt объем фактора производства предприятия $Q(t)$ получит приращение

$$\Delta Q(t) = Q(t + \Delta t) - Q(t).$$

Будем предполагать, что прирост ресурса $\Delta Q(t)$ пропорционален использованному на момент времени t ресурсу $Q(t) - Q_0$ и недоиспользованной мощности предприятия $V_{\infty} - V(t)$:

$$\Delta Q(t) = \lambda \cdot \left(Q(t) - Q_0 \right) \cdot \left(1 - \frac{V(t)}{V_{\infty}} \right) \cdot \Delta t,$$

или, после подстановки формулы (1):

$$\Delta Q(t) = \lambda \cdot \left(Q(t) - Q_0 \right) \cdot \left(1 - \left(\frac{Q(t)}{Q_{\infty}} \right)^a \right) \cdot \Delta t. \quad (8)$$

Коэффициент пропорциональности λ характеризует скорость освоения предприятием производственных мощностей.

Выполняя в уравнении (8) предельный переход при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем дифференциальное уравнение первого порядка для освоения предприятием производственной мощности

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \lambda \cdot \left(Q(t) - Q_0 \right) \cdot \left(1 - \left(\frac{Q(t)}{Q_{\infty}} \right)^a \right). \quad (9)$$

Начальное условие для уравнения (9) может быть записано в виде

$$Q \Big|_{t=0} = Q(0) = Q_0. \quad (10)$$

Нелинейное дифференциальное уравнение (9) не имеет аналитического решения и его можно решить только численно.

На рис. 2 показаны график кривой функции производственного фактора $Q = Q(t)$, полученный в результате численного решения задачи Коши (9), (10), и графики производственной функции $V(t) = P \cdot Q^a(t)$ и функции издержек $TC(t) = H \cdot Q(t) + TFC$.

На рис. 3 показан график кривой функции прибыли $PR(t) = P \cdot Q^a(t) - H \cdot Q(t) - TFC$, полученный в результате численного решения задачи Коши (9), (10).

Если в качестве значений объема предельной производственной мощности предприятия V_∞ и соответствующего объема ресурса Q_∞ выбрать значения превышающие значения $V_{\max}$ и $Q_{\max}$, то предприятие с определенного момента времени, достигнув максимального значения прибыли $PR_{\max}$, начнет работать себе в убыток и достигнет меньшего значения прибыли PR_∞ .

На рис. 4 показан график кривой функции прибыли $PR(t) = P \cdot Q^a(t) - H \cdot Q(t) - TFC$, полученный в результате численного решения задачи Коши (9), (10), для значения $V_\infty \geq V_{\max}$.

2. Оптимальная предельная производственная мощность двухфакторного предприятия

Пусть теперь объем выпуска продукции V является результатом переработки объемов двух ресурсов K и L .

Здесь K — объемы основного капитала и объемы производственных фондов, L — трудовые ресурсы.

Объем выпуска продукции V такого предприятия будет обеспечиваться двухфакторной функцией Кобба–Дугласа

$$V = P \cdot K^a \cdot L^b. \quad (11)$$

Здесь P — стоимость продукции, произведенной на единичный объем ресурса, показатель степени a — представляет собой эластичность выпуска продукции по ресурсу K , показатель степени b — представляет собой эластичность выпуска продукции по ресурсу L , ($0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1$).

Выражение для объема пропорциональных издержек предприятия TC в общем случае имеет вид

$$TC = H_K \cdot K + H_L \cdot L + TFC. \quad (12)$$

Объем прибыли предприятия $PR = V - TC$ записывается с помощью выражения

$$PR = P \cdot K^a \cdot L^b - H_K \cdot K - H_L \cdot L - TFC. \quad (13)$$

Очевидно, что для эффективной работы предприятия объем предельной производственной мощности предприятия V_∞ и соответствующие ему объемы ресурсов K_∞, L_∞ должны соответствовать максимальной прибыли.

Рис. 2: График кривой функции производственного фактора $Q = Q(t)$, полученный в результате численного решения задачи Коши (9), (10), и графики производственной функции $V(t) = P \cdot Q^a(t)$ и функции издержек $TC(t) = H \cdot Q(t) + TFC$. Расчетные значения: $P = 10$; $a = 0.49$; $H = 0.9$; $TFC = 15$; $Q_0 = 0$; $Q_\infty = 27.736$; $V_\infty = 50.944$; $PR_\infty = 10.981$; $\lambda = 0.667$.

Fig. 2: Graph of the curve of the production factor function $Q = Q(t)$ obtained as a result of numerical solution of the Cauchy problem (9), (10), and graphs of the production function $V(t) = P \cdot Q^a(t)$ and the cost function $TC(t) = H \cdot Q(t) + TFC$. Calculated values: $P = 10$; $a = 0.49$; $H = 0.9$; $TFC = 15$; $Q_0 = 0$; $Q_\infty = 27.736$; $V_\infty = 50.944$; $PR_\infty = 10.981$; $\lambda = 0.667$.

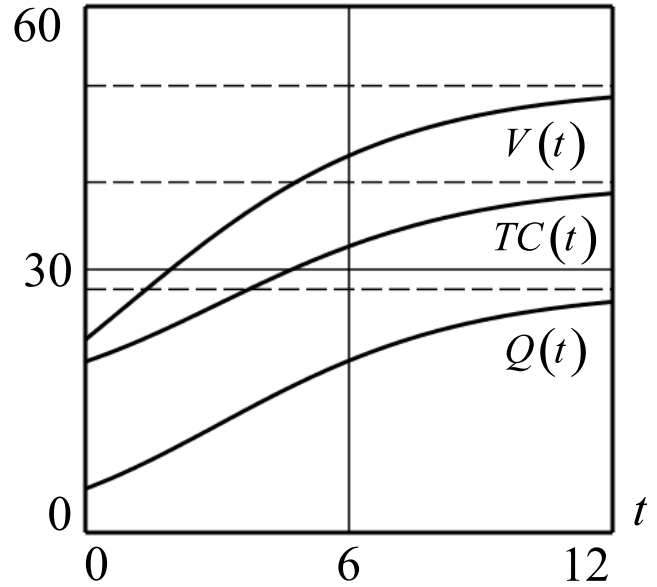


Рис. 3: График кривой функции прибыли $PR(t) = P \cdot Q^a(t) - H \cdot Q(t) - TFC$, полученный в результате численного решения задачи Коши (9), (10). Расчетные значения: $P = 10$; $a = 0.49$; $H = 0.9$; $TFC = 15$; $Q_0 = 0$; $Q_\infty = 27.736$; $V_\infty = 50.944$; $PR_\infty = 10.981$; $\lambda = 0.667$.

Fig. 3: The graph of the profit function curve $PR(t) = P \cdot Q^a(t) - H \cdot Q(t) - TFC$, obtained as a result of numerical solution of the Cauchy problem (9), (10). Calculated values: $P = 10$; $a = 0.49$; $H = 0.9$; $TFC = 15$; $Q_0 = 0$; $Q_\infty = 27.736$; $V_\infty = 50.944$; $PR_\infty = 10.981$; $\lambda = 0.667$.

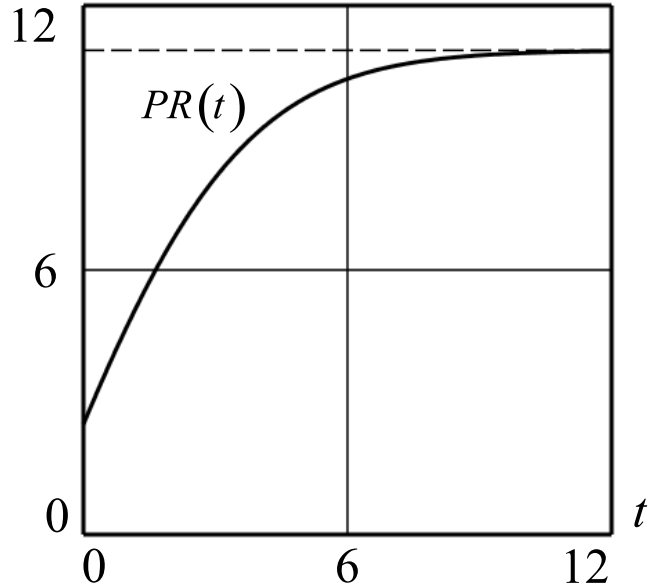
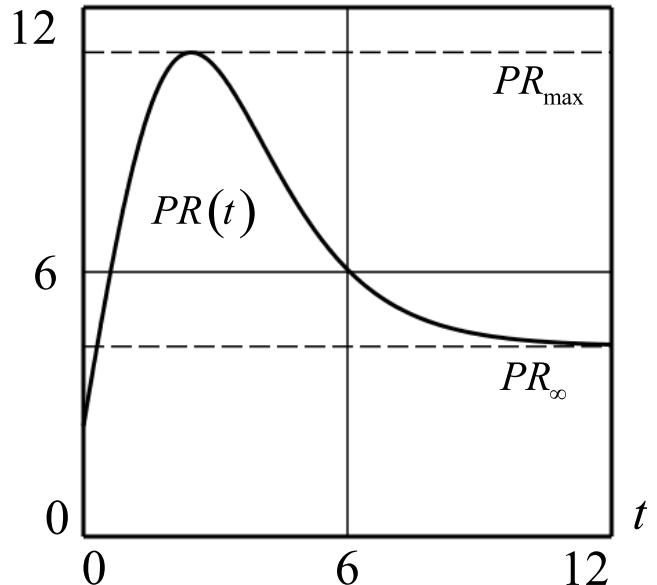


Рис. 4: График кривой функции прибыли $PR(t) = P \cdot Q^a(t) - H \cdot Q(t) - TFC$, полученный в результате численного решения задачи Коши (9), (10), для значения $V_\infty \geq V_{\max}$. Расчетные значения: $P = 10$; $a = 0.49$; $H = 0.9$; $TFC = 15$; $Q_0 = 0$; $Q_\infty = 27.736$; $V_\infty = 50.944$; $PR_\infty = 10.981$; $\lambda = 0.667$.

Fig. 4: The graph of the profit function curve $PR(t) = P \cdot Q^a(t) - H \cdot Q(t) - TFC$, obtained as a result of numerical solution of the Cauchy problem (9), (10), for the value $V_\infty \geq V_{\max}$. Calculated values: $P = 10$; $a = 0.49$; $H = 0.9$; $TFC = 15$; $Q_0 = 0$; $Q_\infty = 27.736$; $V_\infty = 50.944$; $PR_\infty = 10.981$; $\lambda = 0.667$.



Уравнение для вычисления значения ресурса $K_{\max}$, $L_{\max}$ имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial PR}{\partial K} = a \cdot P \cdot K^{a-1} \cdot L^b - H_K = 0, \\ \frac{\partial PR}{\partial L} = b \cdot P \cdot K^a \cdot L^{b-1} - H_L = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Решение системы (14) имеет вид

$$\begin{cases} K_{\max} = \left(\left(\frac{a \cdot P}{H_K} \right)^{1-b} \cdot \left(\frac{b \cdot P}{H_L} \right)^b \right)^{\frac{1}{1-a-b}}, \\ L_{\max} = \left(\left(\frac{b \cdot P}{H_L} \right)^{1-a} \cdot \left(\frac{a \cdot P}{H_K} \right)^a \right)^{\frac{1}{1-a-b}}. \end{cases} \quad (15)$$

Максимальная выручка и прибыль предприятия вычисляются по формулам

$$\begin{cases} V_{\max} = P \left(\left(\frac{a P}{H_K} \right)^{1-b} \left(\frac{b P}{H_L} \right)^b \right)^{\frac{a}{1-a-b}} \left(\left(\frac{b P}{H_L} \right)^{1-a} \left(\frac{a P}{H_K} \right)^a \right)^{\frac{b}{1-a-b}}, \\ PR_{\max} = P \left(\left(\frac{a P}{H_K} \right)^{1-b} \left(\frac{b P}{H_L} \right)^b \right)^{\frac{a}{1-a-b}} \left(\left(\frac{b P}{H_L} \right)^{1-a} \left(\frac{a P}{H_K} \right)^a \right)^{\frac{b}{1-a-b}} - \\ - H_K \left(\left(\frac{a P}{H_K} \right)^{1-b} \left(\frac{b P}{H_L} \right)^b \right)^{\frac{1}{1-a-b}} - H_L \left(\left(\frac{b P}{H_L} \right)^{1-a} \left(\frac{a P}{H_K} \right)^a \right)^{\frac{1}{1-a-b}} - TFC. \end{cases} \quad (16)$$

Таким образом, в качестве предельной производственной мощности предприятия V_{∞} и соответствующего ему объема ресурса Q_{∞} следует выбирать выражения

$$\begin{cases} V_{\infty} = V_{\max}, \\ PR_{\infty} = PR_{\max}, \\ K_{\infty} = K_{\max}, \\ L_{\infty} = L_{\max}. \end{cases} \quad (17)$$

Для наблюдения за динамикой развития предприятия следует составить систему уравнений баланса для объемов факторов производства $K = K(t)$ и $L = L(t)$.

За малый промежуток времени Δt объемы факторов производства предприятия $K = K(t)$

и $L = L(t)$ получают приращения

$$\begin{cases} \Delta K(t) = K(t + \Delta t) - K(t), \\ \Delta L(t) = L(t + \Delta t) - L(t). \end{cases}$$

Будем предполагать, что приросты ресурсов $\Delta K(t)$ и $\Delta L(t)$ пропорциональны использованным на момент времени t ресурсам $K(t) - K_0$ и $L(t) - L_0$, соответственно, и недоиспользованной мощности предприятия $V_\infty - V(t)$

$$\begin{cases} \Delta K(t) = \lambda_K \cdot \left(K(t) - K_0 \right) \cdot \left(1 - \frac{V(t)}{V_\infty} \right) \cdot \Delta t, \\ \Delta L(t) = \lambda_L \cdot \left(L(t) - L_0 \right) \cdot \left(1 - \frac{V(t)}{V_\infty} \right) \cdot \Delta t. \end{cases}$$

или, после подстановки формулы (11)

$$\begin{cases} \Delta K(t) = \lambda_K \cdot \left(K(t) - K_0 \right) \cdot \left(1 - \left(\frac{K(t)}{K_\infty} \right)^a \cdot \left(\frac{L(t)}{L_\infty} \right)^b \right) \cdot \Delta t, \\ \Delta L(t) = \lambda_L \cdot \left(L(t) - L_0 \right) \cdot \left(1 - \left(\frac{K(t)}{K_\infty} \right)^a \cdot \left(\frac{L(t)}{L_\infty} \right)^b \right) \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (18)$$

Коэффициенты пропорциональности λ_K и λ_L характеризуют скорость освоения предприятия производственных мощностей.

Выполняя в уравнении (18) предельный переход при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем систему дифференциальных уравнений первого порядка для освоения предприятием производственной мощности

$$\begin{cases} \frac{dK(t)}{dt} = \lambda_K \cdot \left(K(t) - K_0 \right) \cdot \left(1 - \left(\frac{K(t)}{K_\infty} \right)^a \cdot \left(\frac{L(t)}{L_\infty} \right)^b \right), \\ \frac{dL(t)}{dt} = \lambda_L \cdot \left(L(t) - L_0 \right) \cdot \left(1 - \left(\frac{K(t)}{K_\infty} \right)^a \cdot \left(\frac{L(t)}{L_\infty} \right)^b \right). \end{cases} \quad (19)$$

Начальные условия для системы уравнений (19) могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} K \Big|_{t=0} = K(0) = K_0, \\ L \Big|_{t=0} = L(0) = L_0. \end{cases} \quad (20)$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений (9) не имеет аналитического решения и ее можно решить только численно.

На рис. 5 показаны графики кривых функций производственных факторов $K = K(t)$ и $L = L(t)$, полученных в результате численного решения задачи Коши (19), (20).

На рис. 6 показаны графики кривых функции выпуска продукции $V = V(t)$ и функции издержек $TC = TC(t)$, полученные в результате численного решения задачи Коши (19),

Рис. 5: Графики кривых функций производственных факторов $K = K(t)$ и $L = L(t)$, полученные в результате численного решения задачи Коши (19), (20). Расчетные значения: $P = 10$; $a = 0.27$; $b = 0.25$; $H_K = 0.25$; $H_L = 0.23$; $TFC = 15$; $K_0 = 0$; $L_0 = 0$; $K_\infty = 142.698$; $L_\infty = 143.617$; $V_\infty = 132.128$; $PR_\infty = 48.421$; $\lambda_K = 0.667$; $\lambda_L = 0.5$.

Fig. 5: Graphs of the curves of the functions of production factors $K = K(t)$ and $L = L(t)$, obtained as a result of numerical solution of the Cauchy problem (19), (20). Calculated values: $P = 10$; $a = 0.27$; $b = 0.25$; $H_K = 0.25$; $H_L = 0.23$; $TFC = 15$; $K_0 = 0$; $L_0 = 0$; $K_\infty = 142.698$; $L_\infty = 143.617$; $V_\infty = 132.128$; $PR_\infty = 48.421$; $\lambda_K = 0.667$; $\lambda_L = 0.5$.

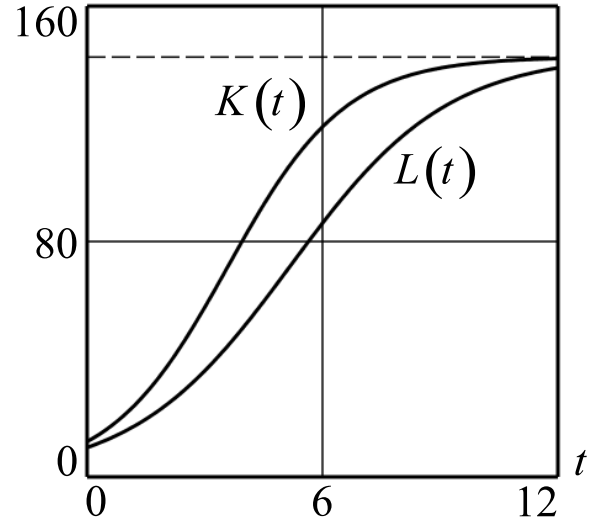


Рис. 6: Графики кривых функции выпуска продукции $V = V(t)$ и функции издержек $TC = TC(t)$, полученные в результате численного решения задачи Коши (19), (20) и формул (11), (12). Расчетные значения: $P = 10$; $a = 0.27$; $b = 0.25$; $H_K = 0.25$; $H_L = 0.23$; $TFC = 15$; $K_0 = 0$; $L_0 = 0$; $K_\infty = 142.698$; $L_\infty = 143.617$; $V_\infty = 132.128$; $PR_\infty = 48.421$; $\lambda_K = 0.667$; $\lambda_L = 0.5$.

Fig. 6: Graphs of the output function curves $V = V(t)$ and the cost function $TC = TC(t)$, obtained as a result of numerical solution of the Cauchy problem (19), (20) and formulas (11), (12). Calculated values: $P = 10$; $a = 0.27$; $b = 0.25$; $H_K = 0.25$; $H_L = 0.23$; $TFC = 15$; $K_0 = 0$; $L_0 = 0$; $K_\infty = 142.698$; $L_\infty = 143.617$; $V_\infty = 132.128$; $PR_\infty = 48.421$; $\lambda_K = 0.667$; $\lambda_L = 0.5$.

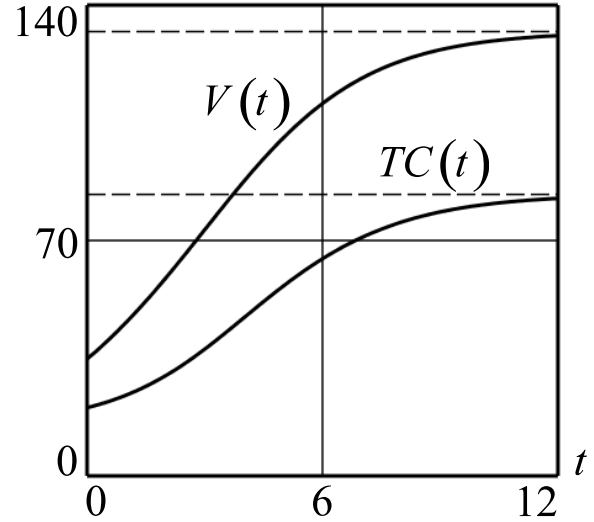
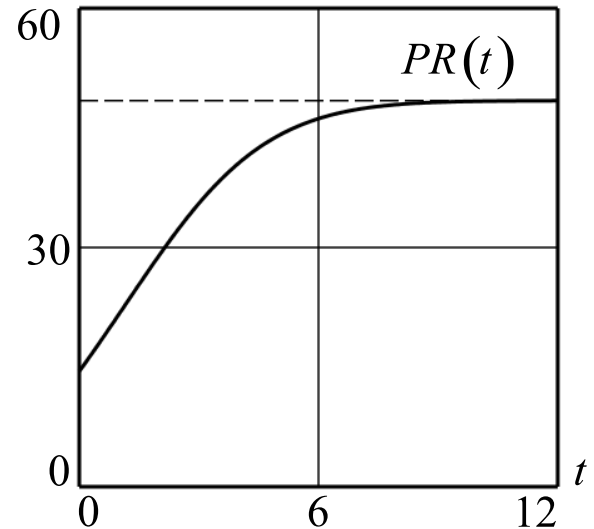


Рис. 7: График кривой функции прибыли $PR = PR(t)$, полученный в результате численного решения задачи Коши (19), (20) и рассчитанный по формуле (13). Расчетные значения: $P = 10$; $a = 0.27$; $b = 0.25$; $H_K = 0.25$; $H_L = 0.23$; $TFC = 15$; $K_0 = 0$; $L_0 = 0$; $K_\infty = 142.698$; $L_\infty = 143.617$; $V_\infty = 132.128$; $PR_\infty = 48.421$; $\lambda_K = 0.667$; $\lambda_L = 0.5$.

Fig. 7: The graph of the profit function curve $PR = PR(t)$ obtained as a result of numerical solution of the Cauchy problem (19), (20) and calculated using the formula (13). Calculated values: $P = 10$; $a = 0.27$; $b = 0.25$; $H_K = 0.25$; $H_L = 0.23$; $TFC = 15$; $K_0 = 0$; $L_0 = 0$; $K_\infty = 142.698$; $L_\infty = 143.617$; $V_\infty = 132.128$; $PR_\infty = 48.421$; $\lambda_K = 0.667$; $\lambda_L = 0.5$.



(20) и формул (11), (12).

На рис. 7 показан график кривой функции прибыли $PR = PR(t)$, полученный в результате численного решения задачи Коши (19), (20) и рассчитанный по формуле (13).

На рис. 8 показан пространственный вариант графика кривой функции прибыли $PR = PR(t)$, полученный в результате численного решения задачи Коши (19), (20) и рассчитанный по формуле (13). Здесь кривая $PR = PR(t)$ расположена на поверхности прибыли, достигая ее максимального значения.

Если в качестве значений объема предельной производственной мощности предприятия V_∞ и соответствующих объемов ресурсов K_∞ и L_∞ выбрать значения превышающие

Рис. 8: График кривой функции прибыли $PR = PR(t)$, полученный в результате численного решения задачи Коши (19), (20), рассчитанный по формуле (13) и расположенный на поверхности прибыли, достигая ее максимального значения. Расчетные значения: $P = 10$; $a = 0.27$; $b = 0.25$; $H_K = 0.25$; $H_L = 0.23$; $TFC = 15$; $K_0 = 0$; $L_0 = 0$; $K_\infty = 142.698$; $L_\infty = 143.617$; $V_\infty = 132.128$; $PR_\infty = 48.421$; $\lambda_K = 0.667$; $\lambda_L = 0.5$.

Fig. 8: The graph of the profit function curve $PR = PR(t)$, obtained as a result of numerical solution of the Cauchy problem (19), (20), calculated by the formula (13) and located on the profit surface, reaching its maximum value. Calculated values: $P = 10$; $a = 0.27$; $b = 0.25$; $H_K = 0.25$; $H_L = 0.23$; $TFC = 15$; $K_0 = 0$; $L_0 = 0$; $K_\infty = 142.698$; $L_\infty = 143.617$; $V_\infty = 132.128$; $PR_\infty = 48.421$; $\lambda_K = 0.667$; $\lambda_L = 0.5$.

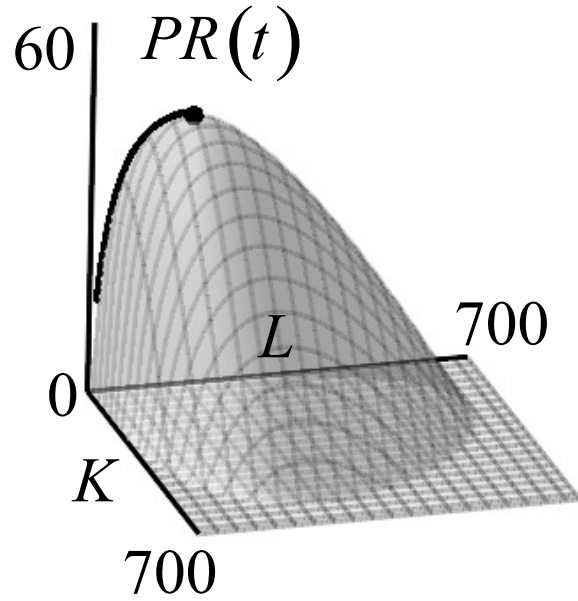
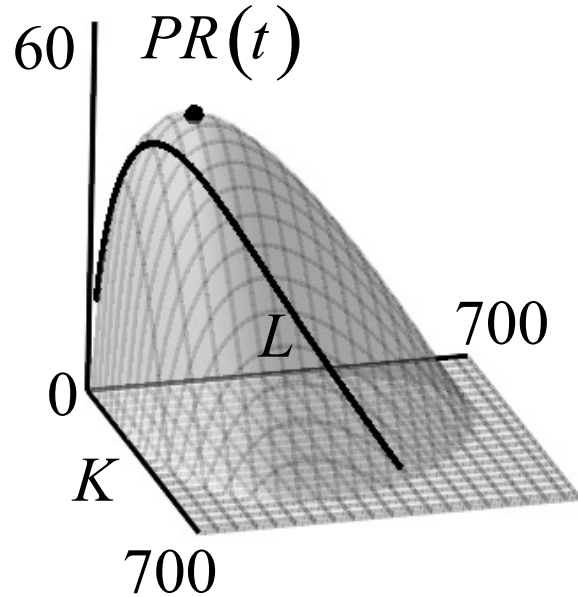


Рис. 9: График кривой функции прибыли $PR = PR(t)$, полученный в результате численного решения задачи Коши (19), (20), рассчитанный по формуле (13) и расположенный на поверхности прибыли, достигая ее максимального значения. Расчетные значения: $P = 10$; $a = 0.27$; $b = 0.25$; $H_K = 0.25$; $H_L = 0.23$; $TFC = 15$; $K_0 = 0$; $L_0 = 0$; $K_\infty = 142.698$; $L_\infty = 143.617$; $V_\infty = 132.128$; $PR_\infty = 48.421$; $\lambda_K = 0.667$; $\lambda_L = 0.5$.

Fig. 9: The graph of the profit function curve $PR = PR(t)$, obtained as a result of numerical solution of the Cauchy problem (19), (20), calculated by the formula (13) and located on the profit surface, reaching its maximum value. Calculated values: $P = 10$; $a = 0.27$; $b = 0.25$; $H_K = 0.25$; $H_L = 0.23$; $TFC = 15$; $K_0 = 0$; $L_0 = 0$; $K_\infty = 142.698$; $L_\infty = 143.617$; $V_\infty = 132.128$; $PR_\infty = 48.421$; $\lambda_K = 0.667$; $\lambda_L = 0.5$.



значения $V_{\max}$, $K_{\max}$ и $L_{\max}$, то предприятие с определенного момента времени, достигнув максимального значения прибыли $PR_{\max}$, начнет работать себе в убыток и достигнет меньшего значения прибыли PR_{∞} .

На рис. 9 показан пространственный вариант графика кривой функции прибыли $PR = PR(t)$, полученный в результате численного решения задачи Коши (19), (20) и рассчитанный по формуле (13) для значения $V_{\infty} \geq V_{\max}$.

Заключение

1. В публикуемой статье исследованы особенности динамики освоения предприятиями их оптимальной предельной мощности.
2. Рассмотрен вариант однофакторной модели предприятия, динамика роста ресурса, выручки, издержек и прибыли которого описывается дифференциальным уравнением.
3. Кроме того, предложен вариант двухфакторной модели предприятия, динамика роста ресурса, выручки, издержек и прибыли которого описывается системой дифференциальных уравнений.
4. Показано, что в обоих случаях оптимальные значения предельных мощностей предприятий соответствуют значениям максимальных прибылей.
5. Отклонение от этих значений приводит к снижению эффективной работы предприятий и в конечной счете упущенной выгоде.

Конкурирующие интересы: Конкурирующих интересов нет.

Библиографический список

1. Рыжов С.В., Рыльникова М.В. Обоснование структуры производственной мощности золотодобывающего предприятия на различных этапах развития открытых горных работ // Изв. ТулГУ. Науки о Земле. 2020. № 1. С. 458–470. EDN: OYTDPZ. DOI: <https://doi.org/10.46689/2218-5194-2020-1-1-458-470>.
2. Багриновский К.А., Бендиков М.А., Хрусталева Е.Ю. Прогнозные стратегии развития потенциала предприятия (модельный подход) // Проблемы прогнозирования. 2000. № 2. С. 34–47. EDN: HRTTFH.
3. Рыльникова М.В., Струков К.И., Федотенко Н.А. Влияние фактора распределения ценных компонентов в массиве месторождения “Светлинское” на структуру производственной мощности золотодобывающего предприятия АО “ЮЖУРАЛЗОЛОТО” // Изв. ТулГУ. Науки о Земле. 2022. № 2. С. 375–387. EDN: PCJRJZ. DOI: <https://doi.org/10.46689/2218-5194-2022-2-1-375-386>.
4. Радченко Д.Н., Лавенков В.С. Создание и апробация имитационной модели экологически сбалансированного цикла комплексного освоения рудного месторождения // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2016. № S36. С. 3–25. EDN: XQSAMP.
5. Гуринович В.Ю. Исследование влияния номенклатуры изделий на показатели производственной мощности предприятий индустриального домостроения // Наука и техника. 2024. Т. 23. № 2. С. 128–139. EDN: SJCPWU. DOI: <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-2-128-139>.
6. Клочков В.В., Критская С.С. Анализ влияния темпов освоения производства новой техники на ее конкурентоспособность // Экономический анализ: теория и практика. 2013. № 4. С. 11–22. EDN: PMOYHR.

7. Багриновский К.А., Бендиков М.А., Хрусталеv Е.Ю. Прогнозные стратегии развития потенциала предприятия (модельный подход) // Проблемы прогнозирования. 2000. № 2. С. 34–47. EDN: HRTTFH.
8. Оголева Л.Н., Радиковский В.М. Повышение инновационной активности предприятий // Экономический анализ: теория и практика. 2008. № 15. С. 2–8. EDN: JH1PLT.
9. Гринев В.Г., Череповский П.В., Деуленко А.И. Технологический аспект формирования объема добычи угля с позиции рыночных моделей // Физико-технические проблемы горного производства. 2014. № 17. С. 117–125.
10. Курский В.А., Васин Л.А. Подход к прогнозированию результатов от перспективных видов деятельности машиностроительного предприятия // Экономический анализ: теория и практика. 2019. Т. 18. № 6. С. 1030–1039. EDN: WKSMAR. DOI: <https://doi.org/10.24891/ea.18.6.1030>.

Dynamics of development of optimal maximum capacity by enterprises

A.L. Saraev¹, L.A. Saraev²

¹ Samara State Economic University, 141, Sovetskoi Armii st., Samara, 443090, Russian Federation.

² Samara National Research University, 34, Moskovskoe shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Abstract

The article examines the dynamics of enterprises mastering their optimal maximum capacity. A variant of a one-factor model of an enterprise is considered, the dynamics of resource growth, revenue, costs and profit of which is described by a differential equation. In addition, a variant of a two-factor model of an enterprise is proposed, the dynamics of resource growth, revenue, costs and profit of which is described by a system of differential equations. It is shown that in both cases the optimal values of the maximum capacities of enterprises correspond to the values of maximum profits. Deviation from these values leads to a decrease in the effective operation of enterprises and, ultimately, to lost profits.

Keywords: marginal capacity; revenue; costs; profit; rate of development of production capacity; production function.

Received: Saturday 21st December, 2024 / Revised: Tuesday 21st January, 2025 /

Accepted: Friday 21st February, 2025 / First online: Monday 31st March, 2025

Competing interests: No competing interests.

References

1. Ryzhov S.V., Rylnikova M.V. Justification of the structure of the production capacity of a gold mining enterprise at various stages of open-pit mining development // Bulletin of Tula State

Mathematical Statistical and Instrumental Methods of Economics (Research Article)

© Authors, 2025

© Samara University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

ⒹⒸⒾ The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Saraev A.L., Saraev L.A. Dynamics of development of optimal maximum capacity by enterprises, *Vestnik Samarskogo Universiteta. Ekonomika i Upravlenie = Vestnik of Samara University. Economics and Management*, 2025, vol. 16, no. 1, pp. 144–158. doi:<http://doi.org/10.18287/2542-0461-2025-16-1-144-158> (In Russian).

Authors' Details:

Alexander L. Saraev  <http://orcid.org/0000-0002-9223-6330>

Candidate of Economical Sciences, Associate Professor; Head of the Applied Informatics Department;
e-mail: alex.saraev@gmail.com

Leonid A. Saraev  <http://orcid.org/0000-0003-3625-5921>

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; Professor of the Mathematics and Business Informatics Department; e-mail: saraev_leo@mail.ru

- University. Earth Sciences. 2020. No. 1. Pp. 458–470. EDN: OYTDPZ. DOI: <https://doi.org/10.46689/2218-5194-2020-1-1-458-470>.
2. Bagrinovsky K.A., Bendikov M.A., Khrustalev E.Yu. Forecasting strategies for developing enterprise potential (model approach) // Problems of Forecasting. 2000. No. 2. Pp. 34–47. EDN: HRTTFH.
 3. Rylnikova M.V., Strukov K.I., Fedotenko N.A. Influence of the distribution factor of valuable components in the massif of the Svetlinskoye deposit on the structure of the production capacity of the gold mining enterprise JSC YUZHURALZOLOTO // Bulletin of the Tula State University. Earth Sciences. 2022. No. 2. Pp. 375–387. EDN: PCJRJZ. DOI: <https://doi.org/10.46689/2218-5194-2022-2-1-375-386>.
 4. Radchenko D.N., Lavenkov V.S. Creation and testing of a simulation model of an environmentally balanced cycle of integrated development of an ore deposit // Mining Information and Analytical Bulletin (scientific and technical journal). 2016. No. S36. Pp. 3–25. EDN: XQSAMP.
 5. Gurinovich V.Yu. Study of the influence of the product range on the production capacity indicators of industrial housing construction enterprises // Science and Technology. 2024. Vol. 23. No. 2. Pp. 128–139. EDN: SJCPWU. DOI: <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-2-128-139>.
 6. Klochkov V.V., Kritskaya S.S. Analysis of the influence of the rate of development of production of new equipment on its competitiveness // Economic Analysis: Theory and Practice. 2013. No. 4. Pp. 11–22. EDN: PMOYHR.
 7. Bagrinovsky K.A., Bendikov M.A., Khrustalev E.Yu. Forecasting strategies for the development of enterprise potential (model approach) // Problems of Forecasting. 2000. No. 2. Pp. 34–47. EDN: HRTTFH.
 8. Ogoleva L.N., Radikovsky V.M. Increasing the innovative activity of enterprises // Economic analysis: theory and practice. 2008. No. 15. Pp. 2–8. EDN: JHIPLT.
 9. Grinev V.G., Cherepovsky P.V., Deulenko A.I. Technological aspect of the formation of the volume of coal production from the standpoint of market models // Physical and technical problems of mining production. 2014. No. 17. Pp. 117–125.
 10. Kursky V.A., Vasin L.A. Approach to forecasting the results of promising types of activity of a machine-building enterprise // Economic analysis: theory and practice. 2019. Vol. 18. No. 6. Pp. 1030–1039. EDN: WKSMAR. DOI: <https://doi.org/10.24891/ea.18.6.1030>.