НАУЧНАЯ СТАТЬЯ
УДК 512.1

Задача Пифагора и ее применение

Александра Александровна ИЛЯСОВА ✉
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
✉ 19alexandra99@mail.ru

Аннотация. На примере одной из самых древних теоретико-числовых задач – задаче Пифагора – школьникам можно продемонстрировать связи между различными математическими дисциплинами, на первый взгляд, совершенно не связанными друг с другом. Задача Пифагора устанавливает связь между теорией чисел, геометрией и математическим анализом. Рассмотрена краткая история возникновения задачи Пифагора, приведены арифметический и геометрический способы ее решения, связь с диофантовыми уравнениями, применение решений задачи Пифагора для получения рациональной параметризации конических сечений, а также для вычисления интегралов, содержащих иррациональность.
Ключевые слова: задача Пифагора, арифметический способ, геометрический способ, рациональная параметризация, вычисление интегралов

Для цитирования: *Илясова А.А.* Задача Пифагора и ее применение // Державинский форум. 2023. Т. 7. № 4. С. 574-582.

ORIGINAL ARTICLE
UDC 512.1

The Pythagorean problem and its application

Alexandra A. ILYASOVA ✉
Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov, 392000, Russian Federation
✉ 19alexandra99@mail.ru

Abstract. Using the example of one of the most ancient number-theoretic problems – the Pythagorean problem – schoolchildren can demonstrate the connections between various mathematical disciplines, at first glance, completely unrelated to each other. The Pythagorean problem establishes a connection between number theory, geometry, and mathematical analysis. The paper considers a brief history of the Pythagorean problem, provides arithmetic and geometric ways of solving it, the connection with Diophantine equations, the use of solutions to the Pythagorean problem to obtain rational parametrization of conic sections, as well as for calculating integrals containing irrationality.
Keywords: Pythagorean problem, arithmetic method, geometric method, rational parametrization, calculation of integrals

For citation: Ilyasova, A.A. (2023). The Pythagorean problem and its application. *Derzhavinskii forum = Derzhavin forum*, vol. 7, no. 4, pp. 574-582. (In Russ., abstract in Eng.)

© Илясова А.А., 2023

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования заключается в том, что пифагоровы тройки имеют немалое количество свойств, связывающих их с разными разделами математики, поэтому исследование этой темы помогает осознать взаимосвязь разделов математики. Цель исследования заключается в расширении границ познания школьников и в вовлечении их в занятия научной деятельностью. Данную цель можно выполнить с помощью решения таких задач, как поиск и изучение теоретических материалов, применения теории на практике и в обобщении полученных знаний. В работе используются геометрические, аналитические, алгебраические методы исследования.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Одна из образовательных целей при изучении математики состоит в том, чтобы научить школьников отличать, формулировать и систематизировать изученные понятия. Умение устанавливать причинно-следственные связи между двумя взаимосвязанными изменяемыми величинами является очень важным. Всегда интересна взаимосвязь различных математических дисциплин как между собой, так и с другими научными дисциплинами. В данном исследовании отражены некоторые способы решения задачи Пифагора и ее применение в различных разделах современной математики.

Для начала необходимо познакомиться с историей возникновения задачи Пифагора, а затем мы перейдем к способам решения этой задачи. Изучив данный материал, можно будет сделать вывод о том, в каких же областях применима данная теория.

История возникновения задачи Пифагора. *Задачей Пифагора* называют задачу нахождения решений уравнения

$$k^2 + o^2 = l^2, \qquad (1)$$

где $k, o, l \in \mathbb{N}$.

Название задачи возникло из-за очевидной связи уравнения с геометрической теоремой Пифагора, которую знает каждый школьник среднего или старшего звена.

Уравнение (1) называют диофантовым уравнением. Частные решения уравнения (1) известны еще со времен Вавилона. Решения уравнения (1) – это так называемые «**Пифагоровы тройки**»:

1) $(k, o, l) = (3,4,5)$;
2) $(k, o, l) = (8,15,17)$;
3) $(k, o, l) = (36,77,85)$;
4) $(k, o, l) = (44,117,125)$;
5) $(k, o, l) = (120,209,241)$ и т. д.

Задача Пифагора была известна еще древним вавилонянам почти за 2000 лет до Пифагора. Вопрос о нахождении всех решений уравнения (1) был поставлен и решен в школе пифагорейцев.

Вспомним всеми любимую теорему Пифагора.

Теорема 1. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов [1].

По теореме Пифагора каждому прямоугольному треугольнику с целочисленными сторонами (т.е. $k, o - \textit{катеты}$, $al - \textit{гипотенуза}$) соответствует некоторая пифагорова тройка целых чисел: $0 < k < o < l$, и наоборот.

Отсюда следует, что задача Пифагора имеет прозрачный геометрический смысл (рис. 1).

Арифметический способ решения задачи Пифагора. Очевидно то, что тройка чисел $(n \cdot k, n \cdot o, n \cdot l)$ – пифагорова, если:

1. $n \in \mathbb{Z} > 0$,
2. (k, o, l) – пифагорова тройка.

Для решения задачи (1) достаточно перечислить примитивные тройки.

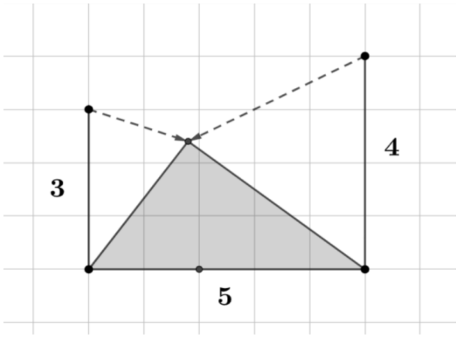

Рис. 1. Геометрический смысл задачи Пифагора
Fig. 1. The geometric meaning of the Pythagorean problem

Определение 1. *Примитивная тройка* – пифагорова тройка (k, o, l), для которой не существует числа $n \in \mathbb{Z} > 1$, являющегося делителем каждого из чисел k, o, l [2].

Легко доказать следующее утверждение:

Теорема 2. Пусть существуют числа $\mathrm{p}, \mathrm{d} \in \mathbb{N}$, такие что

1. НОД $(p, d) = 1$,
2. $p > d$,
3. p, d – разной четности.

Тогда тройка чисел

$$(k, o, l) = (p^2 - d^2, 2 \cdot p \cdot d, p^2 + d^2) \quad (2)$$

является примитивной пифагоровой тройкой [3].

■ Действительно, $k^2 + o^2 = (p^2 - d^2)^2 + (2 \cdot p \cdot d)^2 = p^4 - 2 \cdot p^2 \cdot d^2 + +d^4 + 4 \cdot p^2 \cdot d^2 = p^4 + 2 \cdot p^2 \cdot d^2 + d^4 = (p^2 + d^2)^2 = l^2$

Отсюда $(p^2 - d^2, 2 \cdot p \cdot d, p^2 + d^2)$ – пифагорова тройка.

Общий множитель чисел k, o, l – общий множитель чисел $l + k = 2p^2$ и $l - k = 2d^2$, но НОД$(p, d) = 1$. Поэтому тройка $(p^2 - d^2, 2 \cdot p \cdot d, p^2 + d^2)$ – примитивная пифагорова тройка. ■

Данный способ решения задачи Пифагора всегда дает примитивную тройку. Поэтому все пифагоровы тройки мы можем получить способом, описанным в доказательстве Теоремы 2, используя формулу (2).

В настоящее время примитивные пифагоровы тройки используются в криптографии в качестве случайных последовательностей и для генерации ключей.

Геометрический способ решения задачи Пифагора. Дадим геометрическую интерпретацию решений уравнения (1), используя метод координат.

Пусть (k, o, l) – примитивная тройка, удовлетворяющая уравнению (1). Тогда все остальные решения уравнения (1) получим путем умножения на $\forall\, n \in \mathbb{N}$, то есть будут тройки вида $(n \cdot k, n \cdot o, n \cdot l)$.

Разделив на l^2 обе части равенства (1), получим

$$\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{o}{l}\right)^2 = 1. \quad (3)$$

Равенство (3) задает на плоскости переменных $\frac{k}{l}, \frac{o}{l} \in \mathbb{Q}$, где $k, o, l \in \mathbb{Z}_+$ уравнение окружности $\omega\ (0, 1)$: $x^2 + y^2 = 1$.

Следовательно, всем примитивным решениям (k, o, l) уравнения (1) соответствует точка $\left(\frac{k}{l}; \frac{o}{l}\right)$ с рациональными координатами, лежащая на окружности $\omega\ (0, 1)$.

Определение 2. Точку с рациональными координатами называют *рациональной точкой* [4].

Верно и обратное:

Координаты любой рациональной точки $(x; y) = \left(\frac{n_1}{m_1}; \frac{n_2}{m_2}\right)$, лежащей на окружности ω, с центром в точке O(0,0) радиуса 1, определяют примитивную пифагорову тройку.

Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между рациональными точками, лежащими на окружности ω, и примитивными пифагоровыми тройками.

Отсюда вытекает геометрический способ получения примитивных пифагоровых троек: для этого достаточно найти все рациональные точки, лежащие на окружности ω, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 1$.

Установим связь между геометрическим и арифметическим способами решения задачи Пифагора.

Проведем всевозможные прямые через точку $A_1(-1; 0) \in \omega$ (рис. 2). Если какая-то прямая p, проходящая через точку A_1, не является касательной к окружности, то она пересечет эту окружность еще в одной точке $A_2(x_2; y_2)$ (то есть $A_2 = \omega \cap p$). Тогда семейство таких прямых задается уравнением $y = n \cdot (x + 1)$, где n – угловой коэффициент прямой, принадлежащей семейству. Таким образом, координаты точки A_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} y = n \cdot (x+1), \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Решим систему (4) относительно y, x. Подставив первое уравнение во второе, получим $x^2 + n^2 \cdot (x+1)^2 = 1$. Откуда после упрощения получим уравнение относительно x.

$$(1 + n^2) \cdot x^2 + 2n^2 \cdot x + n^2 - 1 = 0.$$

Если x удовлетворяет этому уравнению, то x является абсциссой точки пересечения прямой $y = n \cdot (x + 1)$ с окружностью ω, то есть либо $x = x_1 = -1$, либо $x = x_2$. По теореме Виета имеем:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2n^2}{1+n^2}. \quad (5)$$

Из (5) при $x_1 = -1$ находим

$$x_2 = 1 - \frac{2n^2}{1+n^2} = \frac{1-n^2}{1+n^2}.$$

Так как точка A_2 лежит на прямой $y = n \cdot (x+1)$, то при $x_2 = \frac{1-n^2}{1+n^2}$ получаем $y_2 = n \cdot \left(\frac{1-n^2}{1+n^2} + 1\right) = \frac{2n}{1+n^2}$. Следовательно, координаты точки A_2, лежащей на окружности ω, зависят от параметра n:

$$A_2\left(\frac{1-n^2}{1+n^2}; \frac{2n}{1+n^2}\right). \quad (6)$$

Верно и обратное:

Каждой точке $(x; y)$, лежащей на окружности ω и не совпадающей с точкой A_1, соответствует только одно значение параметра n:

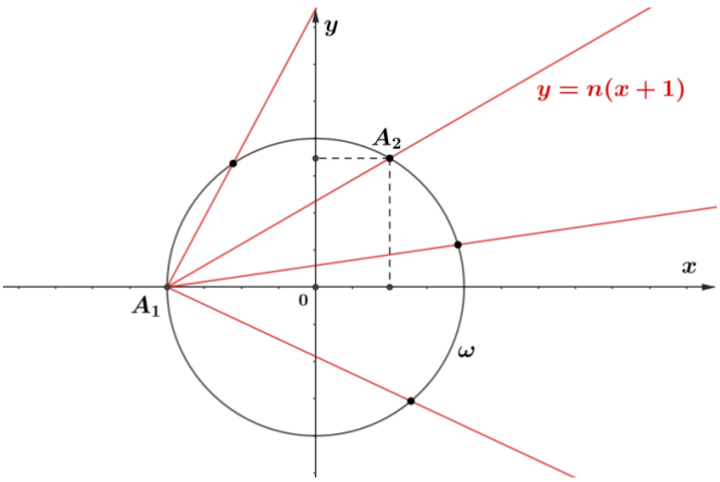

Рис. 2. Нахождение связи геометрического и алгебраического решения задачи (1)
Fig. 2. Finding the connection between geometric and algebraic solutions of the problem (1)

$$n = \frac{y}{x+1}\ . \qquad (7)$$

Стоит отметить, что при $n \in \mathbb{Q}$ точка A_2, определяемая формулой (6), имеет рациональные координаты. Таким образом, между точками прямой и окружности устанавливается взаимно однозначное соответствие (исключение составляет точка A_1).

Перебирая все рациональные значения $n \in (-\infty; +\infty)$, мы переберем все точки с рациональными координатами на окружности ω (исключение – точка A_1) и так найдем все примитивные решения задачи Пифагора.

Пусть $n = \frac{p}{d}, d > 0$, НОД $(p; d) = 1$. Тогда

$$(x_2; y_2) = \left(\frac{d^2-p^2}{p^2+d^2}; \frac{2pd}{p^2+d^2}\right). \qquad (8)$$

Формула (8) равносильна формуле (2). Чтобы получить такой же результат, как при работе с формулой (2), нужно поработать с четностью.

Использование пифагоровых троек, позволяющих задать координаты точек на чертеже в целых числах и обыкновенных дробях, целесообразно в техническом черчении.

Рациональная параметризация конических сечений. Пусть задан квадратный многочлен $ax^2 + bx + c = 0$. Этим уравнением задается линия второго порядка $\gamma(x; y)$ на плоскости. В зависимости от коэффициентов такой линией может быть гипербола, парабола или эллипс. Покажем, что методы решения задачи Пифагора позволяют найти рациональную параметризацию линий второго порядка на плоскости.

Определение 3. *Рациональной параметризацией кривой* γ называется выражение координат точки на этой кривой с помощью рациональных функций от одного параметра n.

Пусть фиксированная точка $P_1(x_1; y_1)$ лежит на кривой $\gamma(x; y)$. Через точку P_1 проведем прямую с угловым коэффициентом n (рис. 3). Найдем координаты точки пересечения γ и прямой. Координаты искомых точек удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ y - y_1 = n \cdot (x - x_1). \end{cases} \qquad (9)$$

Решая систему (9) относительно y и x, находим координаты точки P_2

$$P_2(x_2; y_2) = \left(\frac{A(n)}{B(n)}; \frac{C(n)}{B(n)}\right),$$

где $A(n), B(n), C(n)$ – многочлены, степени не выше второй, зависящие от рациональной параметризации n линии γ.

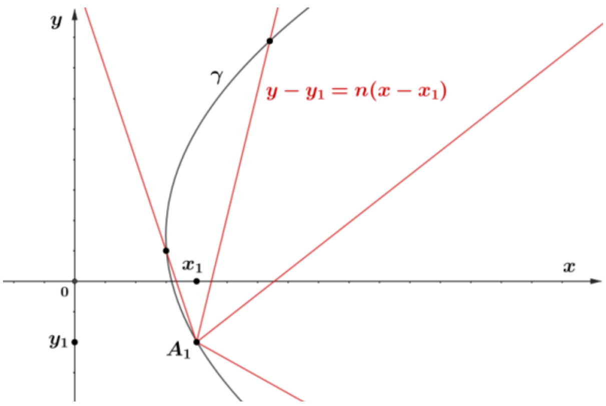

Рис. 3. Коническое сечение
Fig. 3. Conic section

Формула (9), как и формула (8), позволяет находить рациональные точки на γ. Чтобы получить такой же результат, как в (2), нужно поработать с четностью.

Рациональная параметризация кривых широко используется в алгебраической геометрии и коммутативной алгебре.

Пример 1. Найдите рациональную параметризацию гиперболы.

$y^2 x^2 + 5x - 9.$

Решение

1) Возьмем кривую $\gamma(x;y) = y^2 - (x^2 + 5x - 9)$;

2) Отметим на ней т. $P_1(-9;0) \in \gamma: y(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 9}$;

3) Рассмотрим прямые $y = n \cdot (x + 9)$;

4) Найдем вторую точку пересечения прямой $y = n \cdot (x + 9)$ и кривой γ, используя формулу (9).

5) Координаты искомой точки удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y = n \cdot (x + 9), \\ y^2 = x^2 + 5x - 9. \end{cases} \tag{10}$$

Решим систему (10) относительно y, x. Подставив первое уравнение во второе, получим $n^2 \cdot (x + 9)^2 = x^2 + 5x - 9$, а если перегруппировать относительно x, то $(n^2 - 1) \cdot x^2 + (18n^2 - 5) \cdot x + 81n^2 + 9 = 0$.

Если x удовлетворяет последнему уравнению, то x является абсциссой точки пересечения прямой $y = n \cdot (x + 9)$ с кривой γ, то есть либо $x = x_1 = -9$, либо $x = x_2$. Из теоремы Виета следует, что

$$x_1 + x_2 = -\frac{18n^2 - 5}{n^2 - 1}\ . \tag{11}$$

При

$$x_1 = -9 \overset{(11)}{\Longrightarrow} x_2 = 9 - \frac{18n^2 - 5}{n^2 - 1} = \frac{4 + 9n^2}{1 - n^2}.$$

Так как точка A_2 удовлетворяет уравнению $y = n \cdot (x + 9)$, то при $x_2 = \frac{4 + 9n^2}{1 - n^2}$ получаем $y_2 = n \cdot \left(\frac{4 + 9n^2}{1 - n^2} + 9\right) = \frac{13n}{1 - n^2}$, то есть точка P_2 имеет координаты

$$P_2(x_2; y_2) = \left(\frac{4 + 9n^2}{1 - n^2}; \frac{13n}{1 - n^2}\right).$$

Задача Пифагора имеет также и другие применения. В частности, ее можно использовать для вычисления интегралов, нахождения экстремумов функций, а также решения тригонометрических задач.

Пример 2. Вычислить интеграл

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}} = \int \frac{dx}{y(x)}.$$

Решение

1) Возьмем кривую $\gamma(x;y) = y^2 - (x^2 + 3x - 4)$;

2) Отметим на ней т. $P_1(-4;0) \in \gamma: y(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$;

3) Рассмотрим прямые $y = n \cdot (x + 4)$;

4) Найдем вторую точку пересечения прямой $y = n \cdot (x + 4)$ и кривой γ, используя формулу (9).

5) Координаты искомой точки удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y = n \cdot (x + 4), \\ y^2 = x^2 + 3x - 4. \end{cases} \tag{12}$$

Решим систему (12) относительно y, x. Подставив первое уравнение во второе, получим $n^2 \cdot (x + 4)^2 = x^2 + 3x - 4$, а если перегруппировать относительно x, то $(n^2 - 1) \cdot x^2 + (8n^2 - 3) \cdot x + 16n^2 + 4 = 0$.

Если x удовлетворяет последнему уравнению, то x является абсциссой точки пересечения прямой $y = n \cdot (x + 4)$ с кривой γ, т. е. либо $x = x_1 = -4$, либо $x = x_2$. Из теоремы Виета следует, что

$$x_1 + x_2 = -\frac{8n^2-3}{n^2-1}\ . \qquad (13)$$

При $x_1 = -4$ из формулы (13) имеем

$$x_2 = 4 - \frac{8n^2-3}{n^2-1} = \frac{1+4n^2}{1-n^2}.$$

Так как точка A_2 удовлетворяет уравнению $y = n \cdot (x+4)$, то при $x_2 = \frac{1+4n^2}{1-n^2}$ получаем $y_2 = n \cdot \left(\frac{1+4n^2}{1-n^2} + 4\right) = \frac{5n}{1-n^2}$, то есть точка P_2 имеет координаты

$$P_2(x_2; y_2) = \left(\frac{1+4n^2}{1-n^2}; \frac{5n}{1-n^2}\right);$$

6) $x = x_2$. Тогда

$$dx = \left(\frac{1+4n^2}{1-n^2}\right)' dn = \frac{8n(1-n^2)+2n(1+4n^2)}{(1-n^2)^2} dn = \frac{10n}{(1-n^2)^2} dn;$$

$$y = y_2 \Rightarrow I = \int \frac{\frac{10n}{(1-n^2)^2} dn}{\frac{5n}{1-n^2}} = \int \frac{2dn}{1-n^2} = ln\left|\frac{1+n}{1-n}\right| + C.$$

Сделаем в этом равенстве обратную замену:

$$n = \frac{y}{x+4} = \frac{\sqrt{x^2+3x-4}}{x+4}.$$

Тогда окончательно получим

$$I = ln\left|\frac{x+4+\sqrt{x^2+3x-4}}{x+4-\sqrt{x^2+3x-4}}\right| + C.$$

Метод, с помощью которого был вычислен интеграл I, позволяет вычислять и другие интегралы, содержащие иррациональность.

Пример 3. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+4} + \sqrt{z^2+9},$$

если числа x, y, z положительны и $x + y + z = 8$.

Решение

Эту задачу решим, используя теорему Пифагора. Изобразим ломаную $ABCD$, где каждое звено AB, BC, CD является гипотенузой прямоугольного треугольника (рис. 4) с катетами длины x и 1, y и 2, z и 3 соответственно. Легко видеть, что длина этой ломаной $ABCD$ не меньше AD. При этом длина одного из катетов прямоугольного треугольника с гипотенузой AD по условию задачи $x + y + z = 8$, а длина другого катета $1 + 2 + 3 = 6$. Следовательно, $AD = 10$.

Минимум суммы $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+4} + \sqrt{z^2+9}$ достигается только тогда, когда ломаная $ABCD$ совпадет с отрезком AD. Поэтому $f_{min}(x,y,z) = 10$.

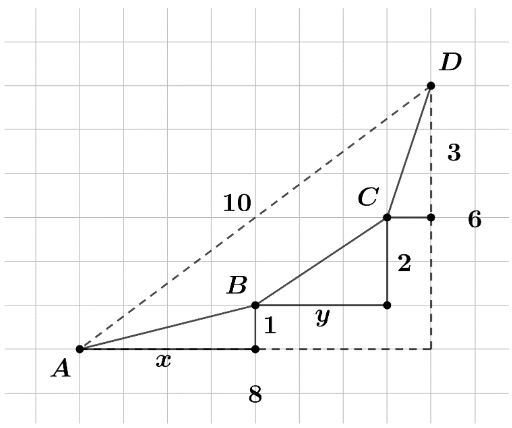

Рис. 4. Применение теоремы Пифагора для ломанной $ABCD$
Fig. 4. Application of the Pythagorean theorem for the polyline ABCD

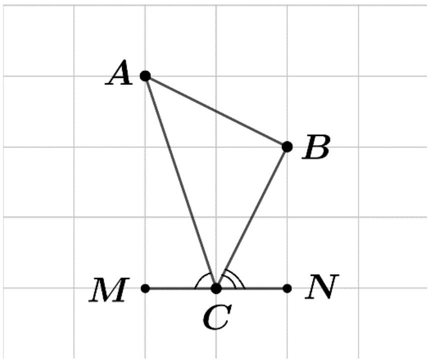

Рис. 5. Тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике
Fig. 5. Tangent of an acute angle in a right triangle

Пример 4. Вычислить $arctg2 + arctg3 + arctg1$.

Решение

Используем определение тангенса острого угла в прямоугольном треугольнике (рис. 5): ΔAMC: $arctg3 = \measuredangle ACM, AM = 3, MC = 1, AC = \sqrt{10}$; ΔBNC: $arctg2 = \measuredangle BCN, CN = 1, BN = 2, BC = \sqrt{5}$.

Тогда $BA = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} = BC$. Поэтому по теореме, обратной теореме Пифагора, имеем, что ΔABC – прямоугольный равнобедренный треугольник с прямым углом в вершине B:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 5 + 5 = 10.$$

Поэтому $\measuredangle ABC = 90°$, $\measuredangle BAC = \measuredangle BCA = 45° = arctg1$. Таким образом, $arctg2 + arctg3 + arctg1 = \measuredangle BCN + \measuredangle ACM + \measuredangle BCA = \measuredangle MCN = 180°$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что одним и тем же методом можно решать диофантовы уравнения, тригонометрические и экстремальные задачи, а также задачи интегрирования функций, получить рациональную параметризацию кривых второго порядка на плоскости, то есть решать задачи, относящиеся к совершенно разным разделам математики.

Данную тему можно предлагать школьникам на таком элективном предмете, как проектная деятельность.

Список источников

1. *Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др.* Математика. Геометрия: 7–9-е классы: базовый уровень: учебник. 4-е изд., перераб. М.: Просвещение, 2023. 416 с.
2. *Литцман В.* Теорема Пифагора. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. 114 с.
3. *Оре О.* Приглашение в теорию чисел. М.: Наука, 1980. 128 с.
4. *Острик В.В., Цфасман М.А.* Алгебраическая геометрия и теория чисел: рациональные и эллиптические. М.: Моск. центр непрерывного мат. образования, 2011. 48 с.

References

1. Atanasyan L.S., Butuzov V.F., Kadomtsev S.B. et al. (2023). *Matematika. Geometriya: 7–9-e klassy: bazovyi uroven’* [Mathematics. Geometry: 7th–9th Grades: Basic Level]. Moscow, Prosveshchenie Publ., 416 p. (In Russ.)
2. Littsman V. (1960). *Teorema Pifagora* [Pythagorean Theorem]. Moscow, Gosudarstvennoe izdatel’stvo fiziko-matematicheskoi literatury, 114 p. (In Russ.)
3. Ore O. (1980). *Priglashenie v teoriyu chisel* [An Invitation to Number Theory]. Moscow, Nauka Publ., 128 p. (In Russ.)

4. Ostrik V.V., Tsfasman M.A. (2011). *Algebraicheskaya geometriya i teoriya chisel: ratsional'nye i ellipticheskie krivye* [Algebraic Geometry and Number Theory: Rational and Elliptic]. Moscow, Moskovskiy tsentr nepreryvnogo matematicheskogo obrazovaniya Publ., 48 p. (In Russ.)

Информация об авторе

Илясова Александра Александровна, магистрант по направлению подготовки «Математика», Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, 19alexandra99@mail.ru

Information about the author

Alexandra A. Ilyasova, Master's Degree Student in "Mathematics (Teaching Mathematics and Computer Science)" Programme, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation, 19alexandra99@mail.ru

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 04.09.2023
Одобрена после рецензирования / Approved after reviewing 14.11.2023
Принята к публикации / Accepted for publication 23.11.2023