

УДК 532.5:551.465

ДАЛЬНИЕ ПОЛЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ГЛУБОКОГО ОКЕАНА И ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА ОТ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

© 2023 г. В. В. Булатов^{1,*}, И. Ю. Владимиров^{2,**}, Е. Г. Морозов^{2,***}

Представлено академиком РАН М. В. Флинтом 06.04.2023 г.

Поступило 06.04.2023 г.

После доработки 05.06.2023 г.

Принято к публикации 13.06.2023 г.

Решена задача о дальних волновых полях, возникающих на границе раздела льда и бесконечно глубокой однородной жидкости при обтекании локализованного источника возмущений. Получено интегральное представление решения и с помощью метода стационарной фазы построено асимптотическое представление решения для различных режимов волновой генерации. Численные расчеты показывают, что при изменении скоростей потока и толщины льда происходит заметная качественная перестройка фазовых картин возбуждаемых дальних волновых полей на границе раздела льда и жидкости.

Ключевые слова: ледяной покров, возвышение поверхности раздела, глубокий океан, дальние поля, локализованный источник

DOI: 10.31857/S2686739723600716, **EDN:** DUBBLE

Изучение волновых процессов в море с плавающим ледяным покровом актуально для изучения его реакции на различные гидродинамические возмущения, движущиеся надводные и подводные суда, процессы распада ледяных полей в интересах судоходства, а также совершенствования методов дистанционного зондирования поверхности ледяного покрытия. Поверхностные возмущения ледяного покрова, которые могут быть зарегистрированы с помощью специальных радиолокационных и оптических систем, несут информацию не только об источниках возмущений, но и о характеристиках морской среды под льдом [2, 4, 8, 10, 15, 16]. Плавающий ледяной покров, определяющий динамическое взаимодействие между океаном и атмосферой, влияет на динамику не только морской поверхности, но и подповерхностных вод, так как в общем движении по вертикали участвует как ледяной покров, так и вся масса жидкости под ним. Одним из заметных источников возбуждения ледяного по-

крова могут являться интенсивные внутренние гравитационные волны, в частности в [12, 13] показано, что колебания ледяного покрова за счет внутренних волн могут быть от нескольких сантиметров (прилив) до 2–3 м (цунами), амплитуды до 30 см регистрировались при наличии ветровых волн [15–18].

Обычно предполагается, что ледяной покров является сплошным (его горизонтальные масштабы превышают длины возбуждаемых волн), и при достаточно общих условиях моделируется тонкой упругой физически линейной пластиной, деформации которой малы [2, 4, 9, 10, 19]. Для проведения прогнозных расчетов возмущений ледяного покрова можно подбирать параметры модели генерации так, чтобы приблизить смоделированную волновую систему к реально наблюдаемым в природных условиях картинам возмущения поверхности льда [2, 7, 8, 10, 15, 19, 20].

Целью настоящей работы является решение ранее не рассматриваемой задачи о построении асимптотик дальних волновых возмущений ледяного покрова, возбуждаемых локализованным источником в потоке однородной жидкости бесконечной глубины. Рассматривается поток идеальной бесконечно глубокой жидкости, который обтекает точечный источник мощности массы q ($q = \text{const}$). Сверху течение ограничено ледяным покровом толщины h . Горизонтальная плоскость

¹Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского
Российской академии наук, Москва, Россия

²Институт океанологии им. П. П. Шишова
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: internalwave@mail.ru

**E-mail: iyuvladimirov@rambler.ru

***E-mail: egmorozov@mail.ru

ξy совпадает с невозмущенной границей раздела жидкости плотности ρ_0 и льда плотности ρ_1 . Скорость потока жидкости направлена вдоль оси ξ и равна V , источник расположен в точке $(0, 0, z_0)$, $z_0 < 0$. Обозначим через $\varphi(\xi, y, z)$ установившийся во времени потенциал возмущений скорости: $\nabla\varphi = (u, v, w)$, и через $\eta(\xi, y)$ — установившуюся величину возвышения поверхности раздела жидкости и ледового покрова. Тогда $(V + u, v, w)$ — вектор скорости произвольной частицы жидкости. В линейном приближении математическая постановка задачи формулируется следующим образом [2, 4, 7]

$$\left(\Delta + \frac{\partial^2}{z^2}\right)\varphi = q\delta(\xi)\delta(y)\delta(z - z_0),$$

$$\frac{D\varphi}{Dt} + g\eta - C\Delta\eta + B\Delta^2\eta + A\frac{D^2\eta}{Dt^2} = 0,$$

$$z = 0; \quad \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad z = 0; \quad \varphi \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty,$$

$$\text{где} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \frac{D}{Dt} = V \frac{\partial}{\partial\xi}, \quad A = \frac{h\rho_1}{\rho_0},$$

$$B = \frac{Eh^3}{12\rho_0(1 - v_0^2)}, \quad C = \frac{\sigma h}{\rho_0}, \quad g - \text{ускорение свободно-}$$

го падения, E — модуль Юнга льда, v_0 — коэффициент Пуассона, σ — начальное напряжение. Характерные значения этих величин в морских условиях равны [2, 4, 14]: $\rho_0 = 1025 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\rho_1 = 0.9\rho_0$,

$E = 3 \times 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$, $v_0 = 0.3$, $\sigma = 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$. Тогда выражение для возвышения имеет вид

$$\begin{aligned} \eta(\xi, y) &= \frac{-iqV}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ivy) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mu, v)}{b(\mu, v)} \exp(-i\mu\xi) d\mu dv, \\ f(\mu, v) &= \frac{\mu \exp(kz_0)}{Ak + 1}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$b(\mu, v) = \Omega^2(k) - \mu^2 V^2, \quad k^2 = \mu^2 + v^2,$$

$$\Omega(k) = \frac{k(g + Ck^2 + Bk^4)}{Ak + 1}.$$

Решение в форме (1) представляет сложную в вычислительном плане задачу из-за возникающих в расчетных формулах сингулярностей. Рассмотрим поведение функции $\eta(\xi, y)$ вдоль некоторого направления S_α , составляющего угол α с

положительным направлением оси ξ , т.е. будем считать, что $\xi = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$, $0 \leq \alpha \leq \pi$. Чтобы найти асимптотику интеграла (1) при $r = \sqrt{\xi^2 + y^2} \rightarrow \infty$ необходимо перевести контур интегрирования по переменной μ в нижнюю полуплоскость. Интеграл в нижней полуплоскости экспоненциально мал при $r \rightarrow \infty$. Основной вклад в (1) будет определяться двумя полюсами подынтегральной функции, расположенными на действительной оси. Полюса (дисперсионные кривые) $\mu = \pm\mu(v)$ находятся из решения уравнения $b(\mu, v) = 0$, т.е. $\mu^2 V^2 = \Omega^2(\sqrt{\mu^2 + v^2})$. Это уравнение имеет действительные корни лишь при выполнении условия: $V > V_* = \Omega(k_*)/k_*$, где k_* — единственный положительный корень уравнения: $2ABk^5 + 3Bk^4 + Ck^2 - 2Agk - g = 0$ [5, 7]. Далее предполагается, что $V > V_*$, поскольку только в этом случае источник генерирует в набегающем потоке волновые возмущения. Тогда для суммарного вклада вычетов $\mu = \pm\mu(v)$ можно получить

$$\begin{aligned} \eta(\xi, y) &= \frac{-iqV}{4\pi} \int_{L_+(\alpha)} \frac{f(\mu, v)}{G(\mu, v)} \cos(\mu\xi + vy) dv, \\ G(\mu, v) &= \frac{\partial b(\mu, v)}{\partial \mu}, \quad \mu = \mu(v), \end{aligned} \quad (2)$$

где $L_+(\alpha)$ — та часть дисперсионной кривой $\mu = \mu(v)$, для которой проекция вектора групповой скорости на направление S_α положительна, т.е. выполнено следующее неравенство: $(V - \Omega'(k)\frac{\mu}{k})\cos(\alpha) - \Omega'(k)\frac{v}{k}\sin(\alpha) > 0$. Это условие (условие излучения) означает, что волновая энергия распространяется наружу от источника возмущений. На рис. 1 представлены результаты расчетов дисперсионных соотношений $\mu = \mu(v)$

для значений $h = 0.05$ м и $V = 6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, а также при отсутствии ледяного покрова. Дисперсионные зависимости при наличии льда — замкнутые кривые, при отсутствии ледяного покрова — разомкнутые линии. Нормаль к штриховой линии в точке касания с дисперсионной кривой определяет пространственную границу волновой зоны впереди и за источником возмущений. Дуга дисперсионной кривой слева от точек касания отвечает относительно длинным волнам вниз по потоку, и, соответственно, дуга справа от точек касания описывает коротковолновую систему вверх по потоку (волны предвестники).

Асимптотика интеграла (2) при $r = \sqrt{\xi^2 + y^2} \rightarrow \infty$ вычисляется методом стационарной фазы [3]

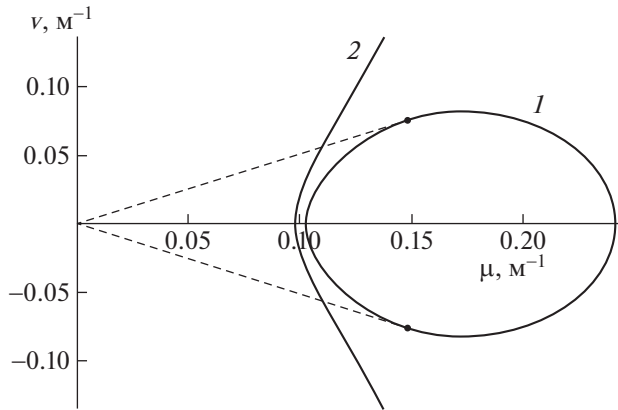


Рис. 1. Дисперсионные кривые при наличии (кривая 1) и отсутствии (кривая 2) ледяного покрова.

$$k = k_0(\alpha), \quad \mu(k) = \frac{\Omega(k)}{V},$$

$$v(k) = \sqrt{k^2 - (\Omega(k)/k)^2},$$

где $k_0(\alpha)$ — единственный корень уравнения $\mu'(k) \cos(\alpha) - v'(k) \sin(\alpha) = 0$. На рис. 2, 3 представлены результаты расчетов фазовых картин возвышения ледяного покрова для различных значений толщины льда h и скоростей потока V . Остальные параметры, характерные для реальных гидрофизических условий, были следующие [2,

14, 15]: $q = 5 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$, $z_0 = -2$ м, что в соответствии с общими принципами теории гидродинамического подобия течений и в данной постановке позволяет, например, моделировать обтекание затупленного полубесконечного тела с диаметром D ,

где $D = \sqrt{\frac{q}{\pi V}}$ [3, 6]. В более общих случаях, используя операцию свертки, можно в дальнейшем рассчитать волновые возмущения ледяного покрова, возбуждаемых распределенными в пространстве источниками различной физической природы, как естественного, так и антропогенного характера [2–4, 10, 19].

Численные расчеты показывают, что при изменении параметров волновой генерации (изменение скоростей потока и толщины льда) происходит заметная качественная перестройка фазовых картин возбуждаемых волновых полей на границе раздела льда и жидкости. Дисперсион-

$$\eta(\xi, y) \approx -\frac{qV}{4\pi\sqrt{2\pi r|D(k)|}} \times$$

$$\mu_1(k) \exp(kz_0) \cos\left(\mu(k)\xi - v(k)y + \frac{\pi}{4} \text{sign}(D(k))\right)$$

$$\times \frac{(Ak+1)T}{(Ak+1)T}$$

$$T = \left(\Omega(k)\Omega'(k)\frac{\mu(k)}{k} - \mu(k)V^2\right) \cos(\alpha) +$$

$$+ \Omega(k)\Omega'(k)\frac{v(k)}{k} \sin(\alpha)$$

$$D(k) = (-\mu'(k)v''(k) + v'(k)\mu''(k)) \times$$

$$\times ((\mu(k))^2 + (v(k))^2)^{-3/2}$$

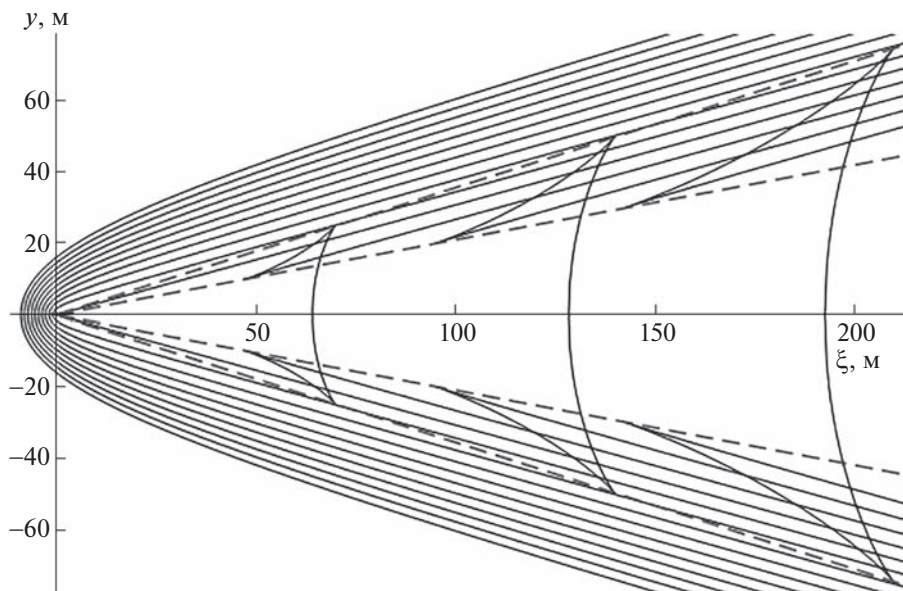


Рис. 2. Фазовая картина возвышения ледяного покрова при $h = 0.01$ м и $V = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

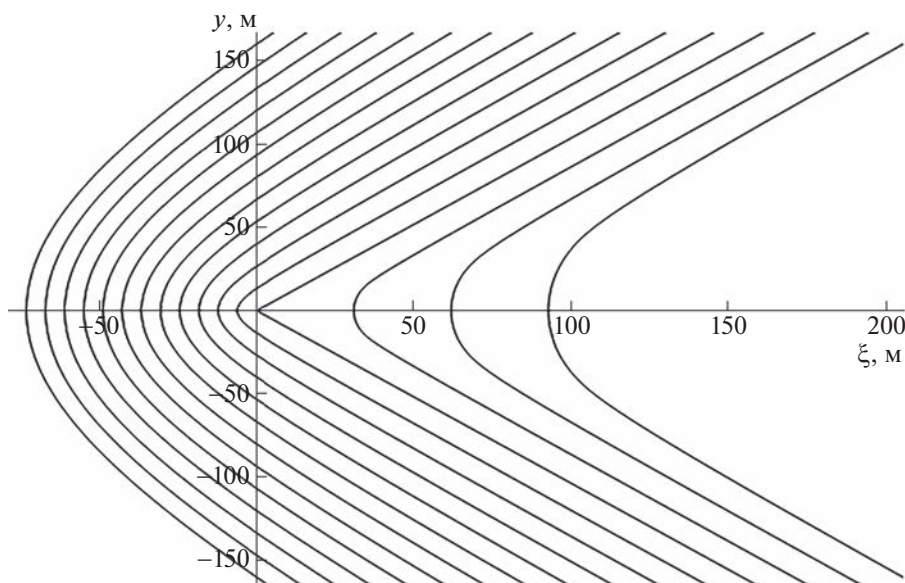


Рис. 3. Фазовая картина возвышения ледяного покрова при $h = 0.05$ м и $V = 7 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

ные зависимости $\mu(v)$ могут представлять замкнутые, всюду выпуклые кривые, а также могут иметь две пары точек перегиба, которые существуют только при достаточно малых значениях волновых чисел и расположены симметрично относительно оси $v = 0$. Такое усложнение топологии дисперсионных зависимостей приводит к генерации дополнительной системы поперечных волн и появлению соответствующих пар волновых фронтов (штриховые линии на рис. 2). Уравнения волновых фронтов определяются как $\xi = \pm \mu'(v_{1,2}^*)y$, где $v_{1,2}^*$ — два корня уравнения $\mu''(v_{1,2}^*) = 0$. В этом случае фазовые картины демонстрируют пространственные структуры типа “ласточкина хвоста” (рис. 2), когда в фиксированной точке наблюдения происходит качественная перестройка одновременно приходящих волновых фронтов [1]. Наиболее интересными с практической точки зрения являются локальные экстремумы дисперсионных зависимостей $\mu'(v)$, так как асимптотики дальних волновых полей в окрестности соответствующих волновых фронтов и каустик, отвечающих этим экстремумам, можно описать с помощью метода эталонных интегралов. Сложность топологии рассчитанных дисперсионных зависимостей $\mu(v)$ требует для корректного асимптотического исследования дальних полей применения специального математического аппарата [1, 3].

Численный анализ решений показал, что основными параметрами, которые могут приводить к существенной изменчивости качественных ха-

рактеристик дисперсионных соотношений, являются толщина льда h и скорость потока V . Остальные параметры (модуль Юнга, коэффициент Пуассона, напряжение, плотность сред), также определяющие постоянные A, B, C , в пределах естественных масштабов их природной изменчивости практически не влияют на динамику поведения дисперсионных зависимостей. Поэтому усложнение наблюдаемых волновых картин возвышения ледяного покрова может являться одним из признаков заметного изменения только таких параметров морской среды, как скорость течения и толщина льда.

Увеличение скорости течения при неизменной толщине льда приводит к расширению (в пространстве волновых чисел) дисперсионных кривых. Кривая, соответствующая меньшей скорости потока, целиком находится внутри кривой, отвечающей большей скорости потока. Поэтому при увеличении скорости течения V длина волны вдоль положительной направления оси 0ξ возрастает, а вдоль отрицательного направления оси 0ξ убывает. Также при увеличении скорости потока V происходит уменьшение пространственной области, где существуют волновые колебания. Вне этой зоны амплитуды дальних волновых полей экспоненциально малы. Этот же эффект наблюдается при изменении толщины льда h при неизменном значении скорости потока V . При увеличении толщины льда h происходит сужение (в пространстве волновых чисел) дисперсионных кривых, и, соответственно, расширение пространственной области волновых колебаний.

Длина волны вдоль положительного направления оси $O\xi$ возрастает, а вдоль отрицательного оси $O\xi$ — убывает.

Численный анализ асимптотик показал хорошее совпадение с точным решением уже на расстояниях, начиная с десяти и более метров от источника, т.е. на таких расстояниях можно использовать понятие дальних волновых полей. Поэтому, исходя из результатов рассмотрения подобного класса задач и оценок пространственных масштабов возможного затухания волновых возмущений в природных условиях [2, 4, 5, 10, 19], представляется вполне обоснованным использование линейного приближения и метода стационарной фазы для расчета возмущений ледяного покрова и получения физически адекватных результатов.

Построенные асимптотики дальних полей дают возможность эффективно рассчитывать основные характеристики волновых возмущений на границе раздела ледяного покрова и качественно анализировать полученные решения. Полученные асимптотические результаты с различными значениями входящих в них физических параметров позволяют провести оценку характеристик возмущений ледяного покрова, наблюдаемых в реальных морских условиях и рассчитывать дальние волновые поля, в том числе, и от нелокальных источников возмущений различной физической природы [2–4, 8, 15, 19]. В результате проведения модельных многовариантных расчетов по асимптотическим формулам смоделированная волновая система может быть приближена к наблюдаемым в натурных условиях волновым картинам, что дает возможность оценить физические параметры реальных источников в морской среде с ледовым покрытием и определить основные характеристики начальных возмущений, варьируя модельные значения исходных параметров [2, 10–12, 14, 16–19]. Таким образом, модели волновой генерации на поверхности раздела морской воды и льда могут быть не только верифицированы, но и использованы для проведения прогнозных оценок.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена по темам государственного задания: В.В. Булатов (FFGN-2023-0004), И.Ю. Владимиров, Е.Г. Морозов (№ FMWE-2021-0002). Данные измерений получены в рейсах судов ИО РАН при поддержке гранта РФФИ № 21-77-20004.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд А.И. Волновые фронты и топологии кризов. М.: Фазис, 2002. 118 с.
2. Булатов А.Е. Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: ФГБУН МГИ, 2017. 360 с.

3. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука. 2015. 735 с.
4. Ильичев А.Т. Уединенные волны в моделях гидродинамики. М.: Физматлит, 2003. 256 с.
5. Ильичев А.Т. Эффективные длины волн огибающей на поверхности воды под ледяным покровом: малые амплитуды и умеренные глубины // ТМФ. 2021. Т. 28. № 3. С. 387–408.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Физматлит, 1987. 784 с.
7. Савин А.С., Савин А.А. Пространственная задача о возмущениях ледяного покрова движущимся в жидкости диполем // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 5. С. 16–23.
8. Свирикунов П.Н., Калашник М.В. Фазовые картины диспергирующих волн от движущихся локализованных источников // УФН. 2014. Т. 184. № 1. С. 89–100.
9. Стурова И.В. Движение нагрузки по ледяному покрову с неравномерным сжатием // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 4. С. 63–72.
10. Das S., Sahoo T., Meylan M.H. Dynamics of flexural gravity waves: from sea ice to Hawking radiation and analogue gravity // Proc. R. Soc. A. 2018. V. 474. P. 20170223.
11. Dinvey E., Kalisch H., Parau E.I. Fully dispersive models for moving loads on ice sheets // J. Fluid Mech. 2019. V. 876. P. 122–149.
12. Marchenko A., Morozov E., Muzylev S. Measurements of sea ice flexural stiffness by pressure characteristics of flexural-gravity waves // Ann. Glaciology. 2013. V. 54. P. 51–60.
13. Marchenko A.V., Morozov E.G. Surface manifestations of the waves in the ocean covered with ice // Russian J. Earth Sciences. 2016. V. 16 (1). ES1001.
14. Mei C.C., Stiassnie M., Yue D.K.-P. Theory and applications of ocean surface waves. Advanced series of ocean engineering. V. 42. London: World Scientific Publishing, 2018. 1240 p.
15. Morozov E.G. Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.
16. Morozov E.G., Marchenko A.V., Filchuk K.V., Kowalik Z., Marchenko N.A., Ryzhov I.V. Sea ice evolution and internal wave generation due to a tidal jet in a frozen sea // Applied Ocean Research. 2019. V. 87. P. 179–191.
17. Morozov E.G., Pisarev S.V. Internal tides at the Arctic latitudes (numerical experiments) // Oceanology. 2002. V. 42 (2). P. 153–161.
18. Morozov E.G., Zuev O.A., Zamshin V.V., Krechik V.A., Ostroumova S.A., Frey D.I. Observations of icebergs in Antarctic cruises of the R/V “Akademik Mstislav Keldysh” // Russian J. Earth Sciences. 2022. V. 2. P. 1–5.
19. Pogorelova A.V., Zemlyak V.L., Kozin V.M. Moving of a submarine under an ice cover in fluid of finite depth // J. Hydrodynamics. 2019. V. 31 (3). P. 562–569.
20. Sturova I.V. Radiation of waves by a cylinder submerged in water with ice floe or polynya // J. Fluid Mech. 2015. V. 784. P. 373–395.

PERTURBATIONS FAR FIELDS OF THE INTERFACE SURFACE OF THE DEEP OCEAN AND THE ICE COVER FROM LOCALIZED SOURCES**V. V. Bulatov^{a,#}, I. Yu. Vladimirov^{b,##}, and E. G. Morozov^{b,###}**^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*^b*Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*[#]*E-mail: internalwave@mail.ru*^{##}*E-mail: iyuvladimirov@rambler.ru*^{###}*E-mail: egmorozov@mail.ru*

Presented by Academician of the RAS M.V. Flint April 6, 2023

The problem of far wave fields arising at the interface between ice and an infinitely deep homogeneous liquid in the flow around a localized source of perturbations is solved. An integral representation of the solution is obtained and, using the stationary phase method, an asymptotic representation of the solution is constructed for various modes of wave generation. Numerical calculations show that with a change in the flow velocities and ice thickness, a noticeable qualitative rearrangement of the phase patterns of the excited far wave fields at the interface between ice and liquid occurs.

Keywords: ice cover, interface elevation, deep ocean, far fields, localized source