
ИССЛЕДОВАНИЕ ЗЕМЛИ ИЗ КОСМОСА

УДК 550.8, 523.43

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ МЕРКУРИЯ

© 2024 г. И. Э. Степанова^{1,*}, И. И. Колотов², Д. В. Лукьяненко², А. В. Щепетиллов²

Представлено академиком РАН А.О. Глико 17.08.2023 г.

Поступило 21.08.2023 г.

После доработки 22.08.2023 г.

Принято к публикации 30.08.2023 г.

Рассмотрена проблема однозначной разрешимости обратной коэффициентной задачи для системы уравнений магнитной гидродинамики, с помощью которой описываются процессы генерации магнитного поля планет, обладающих динамо.

Ключевые слова: метод регуляризации, магнитное поле, магнитная гидродинамика, обратная коэффициентная задача

DOI: 10.31857/S2686739724010214

ВВЕДЕНИЕ

С каждым годом объем информации о физических полях Земли и планет многократно возрастает, в основном благодаря работе различных спутниковых миссий. Проблема создания аналитических моделей магнитного поля планет, обладающих динамо, остается актуальной на протяжении последних трех-четырех десятилетий. Увеличение производительности вычислительной техники может в какой-то степени облегчить задачу исследователей по интерпретации данных дистанционного зондирования планет Солнечной системы, однако, без ответа на принципиальные вопросы о целесообразности и эффективности применения той или иной методики добиться прогресса в построении непротиворечивой теории возникновения и устойчивого существования динамо не удастся.

При интерпретации данных о магнитном и гравитационном полях мы предложили использовать различные модификации метода линейных интегральных представлений [1]. В работе [2] впервые был рассмотрен вариант метода модифицированных S-аппроксимаций с учетом явной и неявной зависимости модели магнитного поля от

времени. Миссия MESSENGER позволила уточнить внутреннее строение Меркурия, разработать новые математические модели физических полей планеты (различные разложения гравитационного и магнитного полей, например представление Гаусса-Мия).

Благодаря данным Mariner-10 исследователи сделали вывод о внутреннем происхождении магнитного поля Меркурия [3–6]. Меркурий – ближайшая к Солнцу планета, обладающая целым рядом особенностей, в частности, достаточно сильным магнитным полем.

Миссия Messenger позволила изучить поверхность Меркурия, историю геологического развития, химический состав и магнитосферу [6, 7]. Роль этого космического зонда в исследованиях Меркурия весьма велика: данные, отправленные Messenger на Землю, свидетельствуют о существовании жидкой части ядра планеты [6], что противоречит существовавшей до 1970-х годов гипотезе о наличии в ядре Меркурия лишь твердой фазы. Токи во внешнем, жидком ядре создают внутреннее магнитное поле Меркурия.

Решения нелинейных обратных задач определяются, как правило, неоднозначно в силу того, что существует несчетное множество эквивалентных по внешнему полю распределений масс. Безусловно, для восстановления всей полноты картины, следует рассматривать только трехмерные распределения неизвестных источников физических полей, и классы функций,

¹Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта
Российской Академии наук, Москва, Россия

²Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Москва,
Россия

*E-mail: tet@ifz.ru

к которым должны принадлежать эти источники, следует выбирать, опираясь на априорную информацию о носителях. В этой связи необходимо исследовать условия однозначной разрешимости начально-краевых задач, с помощью постановки которых можно описать протекающие внутри планеты процессы.

МЕТОД

При решении нелинейных обратных задач геофизики мы применяем, как уже упоминалось во введении, региональный вариант метода линейных интегральных представлений [1]. Задание ключевых параметров этого метода в региональной версии — радиусов сфер, на которых распределяются эквивалентные по внешнему магнитному полю источники, и числа таких носителей — позволяют достаточно гибко подходить к решению проблемы построения регуляризирующего алгоритма. Планета при таком моделировании магнитного поля представляет собой шар известного среднего радиуса.

В качестве входных данных выступают измерения магнитного поля, полученные в глобальном масштабе с помощью спутниковых измерений [8].

Как известно [9], существует теория кинематического динамо, согласно которой движение несжимаемой жидкости в магнитном поле описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\{\bar{v}, \bar{B}\} + \eta \Delta \bar{B}, \\ \operatorname{div} \bar{B} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\bar{B}(\bar{r}, t)$ — это вектор магнитной индукции в некоторой области пространства M , $\bar{v}(\bar{r}, t)$ — скорость жидкости, а η — малый безразмерный параметр, представляющий собой магнитную вязкость. $\{\bar{v}, \bar{B}\}$ — это скобка Пуассона двух бездивергентных векторных полей. В трехмерном пространстве ее можно записать как $\{\bar{v}, \bar{B}\} = -\operatorname{rot}(\bar{v} \times \bar{B})$. В более общей постановке магнитное поле $\bar{B}(\bar{r}, t)$ и поле скоростей $\bar{v}(\bar{r}, t)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\{\bar{v}, \bar{B}\} + \eta \Delta \bar{B}, \\ \operatorname{div} \bar{B} = 0, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\{\bar{v}, \bar{v}\} + \operatorname{rot} \bar{B} \times \bar{B} + \bar{v} \Delta \bar{v} - \nabla p. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь ∇p — градиент давления, $\Delta \bar{B}$ — лапласиан вектор-функции $\bar{B}(\bar{r}, t)$. Это — система уравнений магнитной гидродинамики.

Предлагаемые в данной работе аналитические аппроксимации магнитного поля Меркурия в дальнейшем могут рассматриваться как нулевые или первые приближения к решению нелинейной системы уравнений в частных производных (2) при решении прямых начально-краевых задач магнитной гидродинамики, а также служить ориентиром при построении регуляризирующих операторов для широкого спектра обратных задач в этой области науки. Математические модели физических полей планет Солнечной системы, помимо чисто теоретического интереса, имеют и некоторую практическую ценность — с их помощью можно уточнять внутреннее строение небесных тел, а также изучать движение заряженных частиц вблизи планет.

Если к системе уравнений (1) добавить граничные и начальные условия и рассмотреть ее в верхнем полупространстве, то получим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \bar{B}(\bar{r}, t), \bar{v} = \bar{v}(\bar{r}, t), \bar{B}, \bar{v} \in C^2(R_3^+ \times (0, T)), \\ \bar{r} &= (x, y, z) \in R_3^+ = \\ &= \{(x, y, z) : -\infty < x, y < +\infty, 0 < z < +\infty\}. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\{\bar{v}, \bar{B}\} + \eta \Delta \bar{B}, \\ \operatorname{div} \bar{B} = 0, \\ \bar{B}(x, y, 0, t) = \bar{\varphi}(x, y, t); \bar{B}_z(x, y, z, 0) = \bar{\psi}(x, y, t); \\ \bar{v}(x, y, 0, t) = \bar{g}(x, y, 0, t); \bar{v}_z(x, y, z, 0) = \bar{u}(x, y, t), \\ \bar{B}(x, y, z, t_1) = \bar{\varphi}_1(x, y, z); \bar{v}(x, y, z, t_1) = \bar{g}_1(x, y, t). \end{cases} \quad (3)$$

В (3) через $C^2(R_3^+)$ обозначено пространство дважды непрерывно дифференцируемых в верхнем полупространстве функций; $\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{g}, \bar{u}, \bar{\varphi}_1, \bar{g}_1$ — непрерывно дифференцируемые вектор-функции в соответствующих областях изменения переменных. $t_1 \in (0, T)$ — некоторый момент времени, отличный от начального и конечного. Фактически задание компонент вектора магнитной индукции и поля скоростей в некоторый момент времени t_1 позволяет восстановить не только вектор-функции, описывающие поведение магнитного поля и поля скоростей, но и коэффициент диффузии магнитной индукции как функцию только пространственных координат.

Далее, нам понадобятся карлемановские оценки [10] для решений дифференциальных уравнений параболического типа второго порядка в некоторой области трехмерного пространства. Известно, что в случае, если функция

пространственных переменных времени $u(\bar{r}, t)$ удовлетворяет в открытой области следующему неравенству:

$$\Omega_\eta = \left\{ \begin{aligned} &x, y, z; 0 < X < 1, 0 < T < 1, \\ &\eta > 0: 0 < z < \frac{1}{2} \left(2\eta - \frac{x^2}{X^2} - \frac{y^2}{X^2} - \frac{t^2}{T^2} \right) \end{aligned} \right\} \subset R^3 \times R_+.$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t} - \eta \Delta u \right| \leq A |u| + |\nabla u|$$

и на пересечении $\bar{\Omega}_{1/2}$ с плоскостью $z = 0$ известны данные Коши для функции $u(\bar{r}, t)$: $u(x, y, 0, t); u_1(x, y, 0, t)$, то $u(\bar{r}, t)$ в Ω_η определяется однозначно. При этом предполагается, что $\eta(\bar{r}) \geq \eta_0 > 0$. Относительно $u(\bar{r}, t)$ можно сказать, что верно следующее включение:

$$u(\bar{r}, t) \in C^2(\Omega_{1/2}) \cap C^1(\bar{\Omega}_{1/2}).$$

Введем также обозначения для границы области Ω_η :

$$\begin{aligned} \partial\Omega_\eta &= \omega_\eta^1 \cup \omega_\eta^2, \omega_\eta^1 = \\ &= \left\{ (t, \bar{r}) : z = 0, \frac{1}{2X^2}(x^2 + y^2) + \frac{t^2}{2T^2} \leq \eta \right\}, \\ \omega_\eta^2 &= \left\{ (t, \bar{r}) : z \geq 0, z = \eta - \frac{1}{2X^2}(x^2 + y^2) - \frac{t^2}{2T^2} \right\}, \\ \Omega_{\eta, \tau} &= \left\{ \begin{aligned} &x, y, z; 0 < X < 1, 0 < T < 1, \\ &\eta > 0: 0 < z < \frac{1}{2} \left(2\eta - \frac{x^2}{X^2} - \frac{y^2}{X^2} - \frac{(t-\tau)^2}{T^2} \right) \end{aligned} \right\} \subset R^3 \times R_+. \end{aligned} \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 1

Пусть $\eta(\bar{r}) \geq \eta_0 > 0$. Предположим также, что $\Delta \bar{B} \neq 0$ в $\bar{\Omega}_{1/2}$ и $\{\bar{v}, \bar{B}\} = -rot[\bar{v}, \bar{B}] = 0$ в $\bar{\Omega}_{1/2}$.

Тогда существует не более одного решения системы (3) по нахождению компонент векторов магнитной индукции и поля скоростей, а также коэффициента диффузии магнитного поля

$$\bar{U} = \{\bar{B}(\bar{r}, t), \bar{v}(\bar{r}, t), \eta(\bar{r})\} \in C^2(\Omega_{1/2}) \times$$

$$\times C^2(D), D = \bar{\Omega}_{1/2} \cap \{-\infty < x < \infty; -\infty < y < \infty; z \geq 0\}$$

при заданных $\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{g}, \bar{u}, \bar{\varphi}_1, \bar{g}_1$.

Доказательство. Рассмотрим какие-либо два решения $\bar{B}_1(\bar{r}, t), \bar{B}_2(\bar{r}, t); \bar{v}_1(\bar{r}, t), \bar{v}_2(\bar{r}, t)$ системы (3). Составим разности $\delta \bar{B} = \bar{B}_1(\bar{r}, t) - \bar{B}_2(\bar{r}, t); \delta \bar{v} = \bar{v}_1(\bar{r}, t) - \bar{v}_2(\bar{r}, t), \delta \eta = \eta_1 - \eta_2$. Разности векторов магнитной индукции и скоростей

заряженных частиц удовлетворяют тогда следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \delta \bar{B} &= \delta \bar{B}(\bar{r}, t), \delta \bar{v} = \delta \bar{v}(\bar{r}, t), \delta \bar{B}, \delta \bar{v} \in C^2(\Omega_{1/2}), \\ \bar{r} &= (x, y, z) \in R_3^+ = \\ &= \{(x, y, z) : -\infty < x, y < +\infty, 0 < z < +\infty\}. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta \bar{B}}{\partial t} = -\{\delta \bar{v}, \bar{B}_1\} + \eta_1 \Delta \delta \bar{B} - \{\bar{v}_2, \delta \bar{B}\} + \delta \eta \Delta \bar{B}_2, \\ \operatorname{div} \delta \bar{B} = 0, \\ \delta \bar{B}(x, y, 0, t) = 0; \delta \bar{B}(x, y, z, t_1) = 0; \\ \delta \bar{v}(x, y, 0, t) = 0; \delta \bar{v}(x, y, z, t_1) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

В силу условия $\{\bar{v}, \bar{B}\} = -rot[\bar{v}, \bar{B}] = 0$ в рассматриваемой области (что означает потенциальность векторного произведения поля скоростей и магнитного поля) выражения в фигурных скобках в (5) равны нулю. Сделаем замену переменной: $\tau = t - t_1$.

Аналогично [11], введем в рассмотрение вектор-функции

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \delta \bar{B}_\tau - h \delta \bar{B}; \\ h &= \begin{bmatrix} \frac{(\Delta B_{2x})_\tau}{\Delta B_{2x}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(\Delta B_{2y})_\tau}{\Delta B_{2y}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(\Delta B_{2z})_\tau}{\Delta B_{2z}} \end{bmatrix}, \bar{w} \equiv \delta \bar{B}_\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначим через $\nabla \delta \bar{B}$ 9-вектор, состоящий из производных по координатам различных компонент вектора магнитной индукции:

$$\nabla \delta \bar{B} = \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \delta B_x}{\partial x}, \frac{\partial \delta B_x}{\partial y}, \frac{\partial \delta B_x}{\partial z}, \frac{\partial \delta B_y}{\partial x}, \\ &\frac{\partial \delta B_y}{\partial y}, \frac{\partial \delta B_y}{\partial z}, \frac{\partial \delta B_z}{\partial x}, \frac{\partial \delta B_z}{\partial y}, \frac{\partial \delta B_z}{\partial z} \end{aligned} \right\}.$$

Тогда из первого уравнения системы (5):

$$\frac{\partial \delta \bar{B}}{\partial \tau} = \eta_1 \Delta \delta \bar{B} + \delta \eta \Delta \bar{B}_2$$

мы можем получить соотношение

$$\frac{\partial \delta \bar{B}}{\partial \tau} - \eta_1 \Delta \delta \bar{B} = \delta \eta \Delta \bar{B}_2. \quad (7)$$

Из (7) следует, что верны следующие выражения:

$$\delta\eta = \frac{\frac{\partial \delta B_x}{\partial \tau}}{\Delta \delta B_{2x}} = \frac{\frac{\partial \delta B_y}{\partial \tau}}{\Delta \delta B_{2y}} = \frac{\frac{\partial \delta B_z}{\partial \tau}}{\Delta \delta B_{2z}},$$

$$\delta\eta_\tau = 0 = \left(\frac{\frac{\partial \delta B_x}{\partial \tau}}{\Delta \delta B_{2x}} \right)_\tau = \left(\frac{\frac{\partial \delta B_y}{\partial \tau}}{\Delta \delta B_{2y}} \right)_\tau = \left(\frac{\frac{\partial \delta B_z}{\partial \tau}}{\Delta \delta B_{2z}} \right)_\tau. \quad (8)$$

Так как справедливо векторное равенство $\bar{f} = \bar{w} + h \int_0^\tau \bar{w} d\tau$, то $\bar{w} = \bar{f} + \int_0^\tau \mathbf{S}(\bar{r}, \tau, \tau) \bar{f}(\bar{r}, \tau) d\tau$ – резольвента неоднородного интегрального уравнения Вольтерра второго рода, $\mathbf{S}(\bar{r}, \tau, \tau) \in C^1(\bar{\Omega}_{1/2, t_1}) \times [-t_1, T - t_1]$. Из (8) можно получить оценку для вектор-функции $\bar{f}$:

$$\nabla \bar{f} = \left\{ \frac{\partial f_x}{\partial x}, \frac{\partial f_x}{\partial y}, \frac{\partial f_x}{\partial z}, \frac{\partial f_y}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial y}, \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_z}{\partial y}, \frac{\partial f_z}{\partial z} \right\}$$

$$\left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial \tau} - \eta_1 \Delta \bar{f} \right| \leq A |\bar{f}| + |\nabla \bar{f}| + \left| \int d\tau (|\bar{f}| + |\nabla \bar{f}|) \right|, \quad (9)$$

где через $\nabla \bar{f}$ обозначен 9-вектор производных по координатам компонент вектор-функции $\bar{f}$. Согласно [10], $\bar{f} \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_{1/2, t_1}$. Следовательно, и $\bar{w} \equiv 0$ в той же самой области, а также верно тождественное равенство $\delta \bar{B} \equiv 0$, поскольку

$$\delta \bar{B} = \int_0^\tau \bar{f} d\tau + \int_0^\tau d\tau \int_0^\tau \mathbf{S}(\bar{r}, \tau, \tau) \bar{f}(\bar{r}, \tau) d\tau.$$

Условие $\{\bar{v}, \bar{B}\} = -\text{rot}[\bar{v}, \bar{B}] = 0$ можно переформулировать в следующем виде:

$$\{\bar{v}, \bar{B}\} = \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j} - B_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dv_1}{dl} = \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial B_1}{\partial x_j}, \\ \frac{dv_2}{dl} = \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial B_2}{\partial x_j}, \\ \frac{dv_3}{dl} = \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial B_3}{\partial x_j}, \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{d}{dl} \equiv \sum_{j=1}^3 B_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \bar{r} = (x_1, x_2, x_3).$$

Если считать в (10) вектор-функцию $\bar{B}(\bar{r}, \tau)$ известной в рассматриваемой области изменения переменных, то (10) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений

относительно функций $v_i(l), i=1,2,3$. При задании начальных значений $v_i(0) = v_{i0}, i=1,2,3$, такая система имеет единственное решение.

Таким образом, мы показали, что векторные поля скоростей и магнитной индукции определяются однозначно в $\bar{\Omega}_{1/2, t_1}$. Для доказательства единственности решения обратной задачи в $\bar{\Omega}_{1/2}$ [12] достаточно вещественной аналитичности функций, описывающих значения компонент вектора магнитной индукции, и их производные по координатам. В этом случае начальные значения вектора магнитной индукции и поля скоростей оказываются излишними. Помимо этого, можно сделать заключение о том, что коэффициент диффузии магнитного поля также определяется при выполнении условий теоремы однозначно.

В самом деле для $\delta\eta$ можно выписать следующие соотношения:

$$\delta\eta = \frac{\frac{\partial \delta \bar{B}_x}{\partial t} - \eta_1 \Delta \delta \bar{B}_x}{\Delta \bar{B}_{2x}} =$$

$$= \frac{\frac{\partial \delta \bar{B}_y}{\partial t} - \eta_1 \Delta \delta \bar{B}_y}{\Delta \bar{B}_{2y}} = \frac{\frac{\partial \delta \bar{B}_z}{\partial t} - \eta_1 \Delta \delta \bar{B}_z}{\Delta \bar{B}_{2z}} = 0, \quad (11)$$

так как $\delta \bar{B} \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_{1/2, t_1}$.

Однозначную разрешимость начально-краевой задачи для вектора магнитной индукции на всем временном интервале можно установить еще следующим образом.

При заданном коэффициенте диффузии вектор магнитной индукции удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial \delta \bar{B}}{\partial t} = \eta \Delta \delta \bar{B}, \text{div} \delta \bar{B} = 0,$$

$$\delta \bar{B}(x, y, 0, t) = 0; \delta \bar{B}_z(x, y, z, 0) = 0;$$

$$\delta \bar{B}(x, y, z, t_1) = 0. \quad (12)$$

Согласно [13], если функция удовлетворяет в некоторой области неравенству

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t} - \eta \Delta u \right| \leq C_0 u^2 + C_1 |\nabla u|^2, C_0, C_1 \geq 0,$$

и на границе этой пространственно-временной области она равна нулю, то и внутри области $u(\bar{r}, t) \equiv 0$. Поэтому задание значений поля скоростей и вектора магнитной индукции в момент времени $t = t_1$ является избыточным.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ МЕРКУРИЯ

Аппроксимация компонент магнитного поля Меркурия находится с помощью регионального варианта метода линейных интегральных представлений [13], который основан на идеализированном представлении планеты в виде шара радиуса R_0 . Реальная планета трактуется как область, расположенная внутри указанного выше шара и имеющая кусочно-непрерывную границу, незначительно отличающуюся от сферы радиуса R_0 . Предполагается, что на поверхности сферы заданы приближенные значения функции $V(x)$, гармонической вне этой сферы, на произвольном множестве $x^{(i)}, i = 1, N$:

$$f_{i,\delta} = f_i + \delta f_i, f_i = V(x^{(i)}), i = 1, N. \quad (13)$$

Поскольку функция $V(x)$ гармонична при $r > R_0$, то для нее имеет место интегральное представление в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев, распределенных на сфере радиуса R_0 . Плотности простого и двойного слоев находятся из решения некоторой системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), как это было описано в [13]:

$$A\lambda = f_\delta = f + \delta f, \quad (14)$$

где, вообще говоря, под A понимается прямоугольная $M \times N$ матрица с действительными элементами $a_{ij}, i = 1, M, j = 1, N$, λ — это вектор, подлежащий определению; f — M -вектор описывающий полезный сигнал, символ f_δ означает, что поле содержит помеху, δf характеризует M -вектор случайного шума.

Основная вычислительная проблема заключается в нахождении устойчивых приближенных решений системы (14). Необходимо построение регуляризирующих алгоритмов.

В случае симметрической положительно полуопределенной матрицы $A = A^T > 0$ ее элементы имеют вид

$$a_{ij} = a_{ji} = \frac{2\pi}{r_i r_j \sqrt{h_i h_j}} \left(1 + \frac{1}{4r_i r_j h_i h_j} \right) \times \\ \times F \left(2 \tan^{-1} \left(\sqrt{h_i h_j} \right), \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha_{ij})}{2}} \right) - \\ - \frac{\pi (3h_i^2 h_j^2 - 4h_i h_j \cos(\alpha_{ij}) + 1)}{r_i^2 r_j^2 h_i h_j \left(\sqrt{1 - 2h_i h_j \cos(\alpha_{ij}) + h_i^2 h_j^2} \right)^3}. \quad (15)$$

Здесь $h_i = R_0 / r_i, i = 1, N, h_j = R_0 / r_j, j = 1, N, \alpha_{ij}$ — угол между векторами x_i и x_j, r_i — модуль вектора x_i .

Функция $F(\varphi, k)$ — это эллиптический интеграл первого рода.

Если ограничиться представлением элементов магнитного поля Меркурия в виде потенциала простого слоя, то элементы матрицы системы (17) принимают тогда вид

$$a_{ij} = \frac{2\pi}{(h_i h_j)^{1/2} r_i r_j} F(2 \arctg(\sqrt{h_i h_j}), \\ \sqrt{0.5 \cdot (1 + \cos \alpha_{ij})}). \quad (16)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Данные миссии Messenger за несколько дней полета были интерпретированы с помощью региональной модификации метода линейных интегральных представлений. Точек в наборе было 10 000. В файлах, содержащих “сырые данные”, указывались декартовы координаты точек наблюдения в километрах, при этом начало системы координат совпадает с центром масс Меркурия. Носители простого и двойного слоев при аппроксимации магнитного поля располагались в коре Меркурия, т. е. на расстоянии от 0.1 до 100 км от поверхности планеты, а проводящая среда — на расстоянии 500–600 км. Предполагалось, что известны значения для компоненты поля B_z .

Для указанной компоненты поля строятся региональные S-аппроксимации: компоненты вектора магнитной индукции представляются в виде суммы простого и двойного слоев, распределенных на двух или более сферах. При этом применяется структурно-параметрический подход: для каждого из носителей определяется свой вектор решения [2]. Во всех случаях СЛАУ, к которым редуцируется решение обратной задачи по восстановлению магнитного поля Меркурия, решаются с помощью метода регуляризации Холецкого (БМХР) и усовершенствованного блочного метода решения СЛАУ (УБМ) [2]. При этом мы полагали, что Меркурий представляет собой шар радиуса $R_0 = 2439.0$ км. Результаты аппроксимации представлены в табл. 1.

На рис. 1 изображены значения z-компоненты вектора магнитной индукции по измерениям станции Messenger. На рис. 2 приводятся результаты региональных S-аппроксимаций указанной компоненты в точках орбиты. Орбита космической миссии в некоторые моменты времени достаточно далеко уходила от поверхности Меркурия (на расстояние до 0.6 среднего радиуса планеты), поэтому для выделения из “сырых”

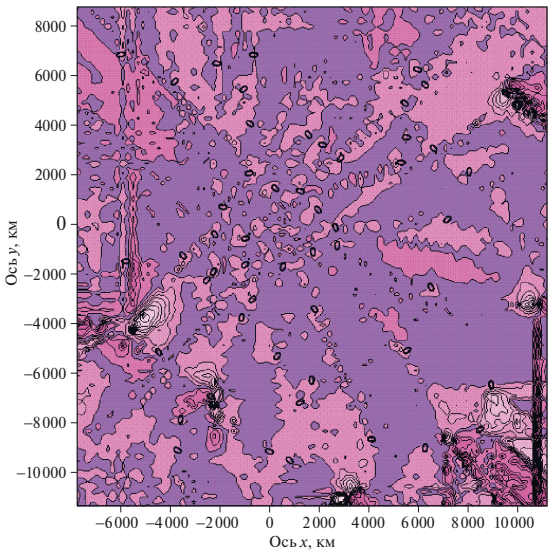


Рис. 1. Магнитное поле Меркурия по данным миссии MESSENGER.

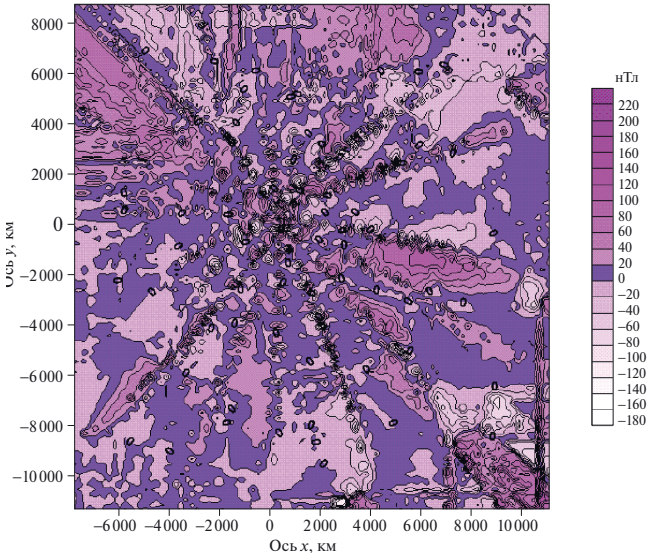


Рис. 2. Магнитное поле Меркурия. Результат локальных модифицированных S-аппроксимаций.

данных составляющих магнитной индукции, генерируемых токами в жидком ядре и коре — так называемого внутреннего магнитного поля Меркурия — можно воспользоваться приближением “the thin shell approximation” [15]. При таком подходе точки наблюдения должны находиться в пределах тонкой (по сравнению с некоторыми параметрами, характеризующими топологию планеты) оболочки, окружающей Меркурий. Полоидальное и тороидальное магнитные поля, создаваемые токами в плазме вокруг Меркурия, “исчезают” в этом случае. Математическое

моделирование магнитного поля Меркурия мы выполняли, опираясь на упомянутый выше принцип “тонкой оболочки”: каждый отрезок из некоторого набора данных, полученных при движении спутника, не выходит за пределы сферической оболочки, толщина которой составляет приблизительно 0.1 радиуса Меркурия, т. е. 240 км. Аппроксимация магнитного поля Меркурия строится следующим образом:

1) моделируются значения компонент вектора магнитной индукции, измеренные вдоль всех траекторий;

Таблица 1. Модифицированные S-аппроксимации z-компонент магнитного поля Меркурия по данным Messenger.

№	$\frac{B}{N}$	R_0 , км	Метод решения СЛАУ	$\sigma_{\min}$, нТл	$\sigma_{\max}$, нТл	σ_0 , нТл	$\frac{\Delta}{t}$
1	B_z 10000	2400	БМХР	0.012	0.024	0.017	1.1×10^{-3} 41 : 12
2	B_z 10000	2400, 2380	УБМ	0.001	0.0015	0.0012	1.45×10^{-8} 43 : 14

Обозначения, принятые в табл. 1. Здесь $\sigma = \frac{\|Ax - f_\delta\|_E}{\sqrt{N}}$ — среднеквадратическое отклонение, $\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{\delta_{\max}^2}{N}}$, $\sigma_{\min} = \sqrt{\frac{\delta_{\min}^2}{N}}$, $\Delta = \frac{\|Ax - f_\delta\|_E}{\|f_\delta\|_E}$ — показатель качества решения, σ_0 — среднеквадратическое отклонение, полученное в результате решения СЛАУ, t — время в часах, минутах и секундах.

2) находятся компоненты вектора магнитной индукции в нескольких шаровых слоях, толщина которых не превышает 240 км, с помощью определенных на предыдущем этапе распределений эквивалентных источников;

3) значения магнитного поля на произвольной сети точек и распределения эквивалентных источников определяются по синтезированным на втором этапе данным.

Для того чтобы в наборе, по которому выполнялись аппроксимации, оставалось 10 000, мы синтезировали, если можно так выразиться, дополнительные промежуточные узлы и “приписывали” им некоторые усредненные значения элементов магнитного поля. По найденным распределениям эквивалентных источников мы находили пространственное распределение элементов магнитного поля, таким образом продолжая, или экстраполируя, аппроксимированное поле в другие точки рассматриваемых орбит спутника.

За счет того, что процесс аппроксимации “сырых” данных о векторе магнитной индукции разбивается на несколько этапов, предлагаемая методика может применяться при выполнении аналитических продолжений полей вниз, в сторону источников.

Если выборка данных не удовлетворяет условиям принципа “тонкой оболочки”, то мы получим не соответствующие реальности распределения эквивалентных магнитных масс в коре.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемый в настоящей работе подход позволяет восстановить эквивалентные источники при наличии любой информации об изучаемом поле. Чем более детальной является съемка, тем точнее получается регуляризованное решение обратной задачи. Наша методика позволяет реконструировать как глобальное, так и аномальное поля. Последнее можно достаточно точно восстановить, если из “сырых” данных, получаемых с помощью космических аппаратов, вычистить длинноволновые компоненты, соответствующие полю ядра. Однако можно аппроксимировать и исходные “сырые” данные.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В настоящей работе мы построили аналитические аппроксимации B_z -компоненты магнитного поля Меркурия в сферической системе

координат, начало которой жестко связано с центром масс планеты. При рассмотрении региональных моделей считается, что поверхность планеты — сфера заданного радиуса. Эллиптичность планеты не учитывалась. Измерения выполнялись с помощью аппаратуры, установленной на станции MESSENGER, при ее пролетах вокруг Меркурия (мы постарались учесть результаты наблюдений на не слишком больших расстояниях от поверхности планеты). Относительная точность математического моделирования поля на спутниковой орбите оказалась достаточно высокой — она не превышала 1.1×10^{-3} . Магнитометры, установленные на MESSENGER, могли измерять поле с точностью до 0.0004 нТл, но при оценке показателя качества решения,

$$\Delta = \frac{\|Ax - f_\delta\|_E}{\|f_\delta\|_E},$$

необходимо учитывать ввиду существенной неоднозначности решения обратных задач геофизики нахождение эквивалентных по внешнему полю распределений масс является одним из возможных способов интерпретации разнородных и разноточных данных. Таким образом, можно сделать вывод о том, что своеобразный “след”, оставляемый физическими процессами в недрах планет на данных спутниковых измерений, может быть выявлен с помощью решения обратных задач геофизики и анализа условий однозначной разрешимости этих задач. Хотелось бы подчеркнуть, что без исследований свойств решений системы магнитогидродинамических уравнений (1)–(2) эффективную методику интерпретации спутниковых данных разработать нельзя: эквивалентных по внешнему магнитному полю распределений магнитных диполей существует несчетное множество. Важно задавать адекватные действительности ограничения на свойства решений указанных систем. Поле скоростей заряженной жидкости (плазмы) во внешнем ядре Меркурия нужно восстанавливать более детально, и наша методика математического моделирования компонент вектора магнитной индукции может быть полезна при решении такого рода задач.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках госзадания ИФЗ РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Strakhov V.N., Stepanova I.E.* Solution of gravity problems by the S-approximation method (regional

- version) // *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*. 2002. V. 38. № 7. P. 535–544.
2. *Stepanova I.E., Shchepetilov A.V., Mikhailov P.S.*, Analytical Models of the Physical Fields of the Earth in Regional Version with Ellipticity // *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*. 2022. V. 58. No 3. P. 406–419. DOI: 10.1134/S1069351322030089
 3. *Johnson C.L., et al.* MESSENGER observations of Mercury's magnetic field structure // *J. Geophys. Res.* 2012. 117. E00L14. DOI:10.1029/2012JE004217.
 4. *Ness N.F., Behannon K.W., Lepping R.P., Whang Y.C., Schatten K.H.* Magnetic field observations near Mercury: Preliminary results from Mariner 10 // *Science* 1974. 185. 151–160. DOI:10.1126/science.185.4146.151.
 5. *Alexeev I.I., et al.* Mercury's magnetospheric magnetic field after the first two MESSENGER flybys // *Icarus*. 2010. 209. 23–39, DOI:10.1016/j.icarus.2010.01.024
 6. *Anderson B.J., et al.* The magnetic field of Mercury // *Space Sci. Rev.* 2010. 152. 307–339. DOI:10.1007/s11214-009-9544-3.
 7. *Benkhoff J.J., van Casteren H., Hayakawa M., Fujimoto H., Laakso M., Novara P., Ferri H.R., Middleton, Zithe R.* BepiColombo—Comprehensive exploration of Mercury: Mission overview and science goals // *Planet. Space Sci.* 2010. 58. 2–20. DOI:10.1016/j.pss.2009.09.020.
 8. *Kolotov I.I., Lukyanenko D.V., Stepanova I.E., Yanfei W., Yagola A.G.* Recovering the Near-Surface Magnetic Image of Mercury from Satellite Observations // *Remote Sens.* 2023. 15(8). 2125; <https://doi.org/10.3390/rs15082125>
 9. *Арнольд В.И., Хесин Б.А.* Топологические методы в гидродинамике. М. Изд-во МЦНМО. 2007. 393 с.
 10. *Лаврентьев М.А., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. Москва. Наука. 1980. 286 с.
 11. *Гласко В.Б., Степанова И.Э.* О единственности в одной из коэффициентных обратных задач, связанных с технологическими процессами // *Вестник Моск. Университета. Сер. Физика. Астрономия*. 1992. Т. 33. № 1. С. 20–23.
 12. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М. Наука. 1983. 391 с.
 13. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М. Мир. 1968. 427 с.
 14. *Toepfer S., Narita Y., Glassmeier K.H., et al.* The Mie representation for Mercury's magnetic field // *Earth Planets Space*. 2021. 73. 65. <https://doi.org/10.1186/s40623-021-01386-4>

ON THE UNIQUENESS OF AN INVERSE COEFFICIENT PROBLEM WHEN BUILDING ANALYTICAL MODELS OF MERCURY'S MAGNETIC FIELD

I. E. Stepanova^{a, #}, I. I. Kolotov^b, D. V. Lukyanenko^b, A. V. Shchepetilov^b

Presented by Academician of the RAS A.O. Gliko August 17, 2023

^a*Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^b*Moscow State Lomonosov University, Department of Physics, Moscow, Russian Federation*

[#]*E-mail: tet@ifz.ru*

We consider the uniqueness conditions of the inverse coefficient problem arising in analytical models of Mercury's magnetic field.

Keywords: regularization method, magnetic field, magnetic hydrodynamics, inverse coefficient problem