

УДК 550.3, 532.135, 523.4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АНДРАДЕ В МАНТИИ ЗЕМЛИ НА ОСНОВЕ ЧИСЕЛ ЛЯВА ПОЛУСУТОЧНОГО ЛУННОГО ПРИЛИВА M_2

© 2024 г. Д. О. Аморим^{1,*}, Т. В. Гудкова^{2,**}

Представлено академиком РАН А. О. Глико 02.10.2023 г.

Поступило 02.10.2023 г.

После доработки 10.10.2023 г.

Принято к публикации 11.10.2023 г.

Впервые показано, что часто используемое приближение реологической модели Андраде с одним свободным параметром для описания реологических свойств мантии Земли является слишком упрощенным и может привести к неверным выводам при изучении внутреннего строения планет Солнечной системы. В данной работе использована реология Андраде с двумя эмпирическими параметрами: α и ζ . Рассчитаны вязкоупругие приливные числа Лява полусуточного лунного прилива на Земле для двух распределений вязкости и для 16100 различных комбинаций значений параметров Андраде α и ζ . Сравнение модельных чисел Лява с измеренными позволило определить диапазоны значений параметров Андраде, которые достоверно описывают реологические свойства мантии Земли.

Ключевые слова: реология Андраде, приливные числа Лява, полусуточный лунный прилив, Земля, планеты

DOI: 10.31857/S2686739724020146

ВВЕДЕНИЕ

Приливные числа Лява, полученные из данных наблюдений, накладывают ограничения на модели внутреннего строения планет и спутников Солнечной системы (см., например, [1–5]). Для того чтобы правильно вычислить эти числа теоретически, необходимо учесть вязкоупругость планеты, используя какую-либо реологическую модель.

Реология характеризует вязкоупругость твердого тела и зависит от состава, температуры и скорости деформации. Пластичность у минералов обычно наблюдается при высоких температурах, когда вязкость уменьшается на порядки, а вместе с ней уменьшается и добротность материала. Аналогичный эффект имеют медленные деформации: чем больше период, тем заметнее проявляются текучесть и неупругость [5–9]. Ярким примером такого свойства является

гляциоизостазия на Земле (опускание и поднятие коры при появлении или снятии ледниковой нагрузки) — за десятки тысяч лет воздействия даже самые твердые горные породы текут.

Так как затухание механических колебаний определяется в основном сдвиговыми процессами, реологические модели задают законы преобразования упругого модуля сдвига в вязкоупругий при учете вязкости материала и конечности периода внешнего воздействия. Модуль сдвига становится комплексной величиной. Его мнимая часть увеличивается вместе с периодом, а абсолютная величина уменьшается. В случае очень быстрого воздействия (как сейсмические волны) мнимая часть незначительна, добротность высокая и комплексный модуль сдвига близок к своему упругому значению. Для процессов длительностью порядка суток или больше (как приливы) ситуация обратная и тело начинает себя вести как вязкая жидкость. Конкретная зависимость модуля сдвига от вязкости и периода воздействия зависит от рассматриваемой реологической модели [5–9].

Лабораторные эксперименты [6] показали, что реология Андраде хорошо описывает свойства оливина при высоких температурах, и именно

¹Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия

²Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта
Российской Академии наук, Москва, Россия

*E-mail: amorim.dargilan@gmail.com

**E-mail: gudkova@ifz.ru

эта реология чаще всего используется при исследовании планет и спутников. Однако модель Андраде зависит от эмпирических параметров, которые точно не определены в условиях мантии Земли и других планет, где давление достигает сотни кбар, а температура составляет тысячи градусов. Из-за этого часто применяются их экстраполяционные значения, полученные в лабораторных условиях. Цель данной работы — определить характерные значения параметров реологии Андраде в мантии Земли на основе наблюдений приливной деформации планеты, сопоставляя наблюдаемые и теоретически рассчитанные значения чисел Лява для полусуточного лунного прилива.

РЕОЛОГИЯ АНДРАДЕ

Реологическая модель Андраде имеет вид [7]

$$J(\chi) = J_0 + \beta(i\chi)^{-\alpha} \cdot \Gamma(1+\alpha) - i(\eta\chi)^{-1}, \quad (1)$$

где J — комплексная податливость среды, χ — частота, J_0 — упругая податливость среды, Γ — гамма-функция, η — вязкость, α и β — эмпирические параметры. Упругая податливость равна обратному упругому модулю сдвига среды ($J_0 = \mu_0^{-1}$), а $J(\chi)$ аналогичным образом определяет комплексный модуль сдвига: $\mu(\chi) = J(\chi)^{-1}$.

В работе [7] предлагается заменить β следующим образом

$$\beta = J_0 \tau_A^{-\alpha}, \quad (2)$$

где величина τ_A называется “время Андраде”.

Следуя [7], определим также “время Максвелла” $\tau_M = \eta J_0$ и обозначим отношение τ_A / τ_M как ζ . Используя эти обозначения, получим новое соотношение для реологии Андраде, которая теперь зависит от двух безразмерных параметров α и ζ :

$$J(\chi) = J_0 \left[1 + (i\chi\zeta\tau_M)^{-\alpha} \Gamma(1+\alpha) - i(\chi\tau_M)^{-1} \right] = \mu(\chi)^{-1}. \quad (3)$$

Параметр α описывает частотную зависимость добротности среды $Q \sim \chi^\alpha$ и, согласно экспериментальным данным, обычно находится в пределах от 0.15 до 0.4, но может заметно уменьшаться при наличии частичного плавления [10]. На основе различных наблюдений имеются оценки, что для Земли в целом параметр α находится в интервале 0.1–0.3 (см., например, [11, 12]).

О параметре ζ известно очень мало. Экспериментально показано, что для оливина выполняется условие $\beta \approx J_0 \tau_M^{-\alpha}$, что в новой параметризации соответствует $\zeta^\alpha \approx 1$. Однако, как отмечено в [7], это условие может не выполняться в планетных мантиях и ядрах. Несмотря на отсутствие обоснования, параметр ζ часто принимается тождественно равным единице в геофизических моделях планет и спутников. В этой работе мы проверяем эту гипотезу, используя широкие диапазоны значений параметров α и ζ для моделей Земли ($\alpha \in [0.04, 0.51]$, $\zeta \in [10^{-5}, 10^{11}]$).

Для применения реологии Андраде необходимо также знать распределение вязкости в недрах Земли. На основе современных оценок (см., например, [13, 14]), нами приняты два распределения вязкости в качестве нижнего и верхнего пределов. Обозначим их как РНВ (распределение низкой вязкости) и РВВ (распределение высокой вязкости) (табл. 1).

ДАННЫЕ НАБЛЮДЕНИЙ И МЕТОД

Используя современные оценки чисел Лява Земли для лунного прилива M_2 (см., например, [15]), мы составили интервалы возможных значений шести величин: $\Re\{k_2\}$, ε , $\Re\{h_2\}$, $\Im\{h_2\}$, $\Re\{l_2\}$ и $\Re\{k_3\}$, где ε обозначает приливный сдвиг фазы, который равен $\arcsin(|\Im\{k_2\}| / \Re\{k_2\}|)$ (табл. 2). Эти величины используются ниже в качестве ограничений для определения реологических свойств мантии Земли.

Таблица 1. Модельные предельные распределения вязкости в Земле (Па·с)

Модель вязкости	Кора	Верхняя мантия	Переходная зона	Нижняя мантия	Внешнее ядро	Внутреннее ядро
РНВ	10^{21}	10^{19}	10^{21}	10^{22}	0	10^{14}
РВВ	10^{24}	10^{21}	10^{22}	10^{23}	0	10^{22}

Таблица 2. Диапазон значений чисел Лява и сдвига фазы полусуточного лунного прилива M_2 , используемых как ограничения при определении вязкоупругих параметров моделей Земли

Параметры	$\Re\{k_2\}$	ε	$\Re\{h_2\}$	$\Im\{h_2\}$	$\Re\{l_2\}$	$\Re\{k_3\}$
Max	0.299	0.1°	0.605	−0.0040	0.084	0.089
Min	0.304	0.3°	0.620	−0.0005	0.089	0.097

В качестве модели Земли (распределение плотности, давления и упругих модулей) используется модификация модели PREM без океана. Для упругой модели Земли получаем следующие значения чисел Лява: $k_2 = 0.2987$, $h_2 = 0.6049$, $l_2 = 0.08399$, $k_3 = 0.09203$. Выбирая одно из двух распределений вязкости и пару значений α и ζ можно рассчитать профиль комплексного модуля сдвига по формуле (3) и затем вычислить вязкоупругие числа Лява. Их значения сильно зависят от выбора значений вязкости η и от параметров α и ζ .

В этой работе твердые слои Земли (кора, верхняя мантия, переходная зона, нижняя мантия и внутреннее ядро) описываются разными вязкостями (табл. 1), но используется приближение, где параметры Андраде α и ζ постоянны. Очевидно, что они должны зависеть от давления и от температуры (и тем самым меняться с глубиной), но точность моделей и измерений чисел Лява не позволяет определить характерные значения α и ζ для каждого слоя по отдельности. Мы оцениваем средние (по всей Земле) значения параметров Андраде, которые успешно объясняют наблюдаемый приливный отклик планеты.

Важно знать вклад каждого слоя в общую неупругость планеты. С этой целью мы построили фиктивные тестовые реологические модели Земли, в которых поочередно только один из слоев описывается реологией Андраде, а остальные считаются идеально упругими. Вклад данного слоя можно оценить из разницы полученных чисел Лява по сравнению с их упругими значениями. Изменение чисел Лява в моделях, где нижняя мантия считается вязкоупругой, примерно в 10 раз больше, чем в моделях, где вязкоупругими приняты верхняя мантия или переходная зона. Вклад коры и внутреннего ядра еще на один или два порядка меньше в зависимости от используемой вязкости. Это означает, что большая часть (>70%) общей неупругости Земли определяется нижней мантией, а оставшаяся доля в основном распределяется между верхней мантией и переходной зоной. Действительно, нижняя мантия занимает 55% объема Земли, верхняя мантия — примерно 17%, переходная зона — 10%, а кора и внутреннее ядро дают по 1%. Это означает, что полученные ниже оценки параметров α и ζ характерны для нижней мантии, так как основной вклад в числа Лява приносит именно этот слой. Вклад других слоев настолько мал, что даже если они обладают совершенно другими значениями α и ζ , их определение через приливные деформации невозможно при имеющейся точности.

РЕЗУЛЬТАТЫ

По нашим расчетам, в приближении $\zeta = 1$ параметр α должен быть в интервале от 0.19 до 0.33, чтобы одновременно удовлетворить всем шести условиям из табл. 2 хотя бы при одном из двух распределений вязкости. Этот интервал хорошо согласуется с оценкой работы [1], в которой также использовалось это приближение.

Рассмотрим теперь общий случай, когда варьируются одновременно оба параметра. Для этого рассчитаны числа Лява для 32200 пробных моделей Земли — двух вариантов распределения вязкости и 16100 комбинаций параметров α и ζ . На рис. 1 выделяются черными пикселями области, в которых для моделей РВВ выполняется по отдельности каждое из шести используемых условий.

На рис. 2 оттенками серого цвета продемонстрировано количество выполненных условий при каждой комбинации α и ζ для обоих распределений вязкости. Нас интересуют области, где все 6 условий выполняются одновременно. Обозначим эти области как A_{PHV} и A_{PVB} . Эти зоны показаны на рис. 3, где также отдельным цветом выделено их пересечение. Наиболее вероятный интервал для α на основе геодезических наблюдений: $0.1 < \alpha < 0.3$. При таком условии мы получаем, что параметр ζ предпочтительно находится в интервале от 1 до 10^5 .

Для каждого значения ζ в интервале $[1-10^5]$ имеется набор значений α , при которых все 6 условий (табл. 2) выполняются хотя бы для одного распределения вязкости: $[\alpha_{min}(\zeta), \alpha_{max}(\zeta)]$. Функции $\alpha_{min}(\zeta)$ и $\alpha_{max}(\zeta)$ хорошо аппроксимируются параболами, изображенными черными линиями на рис. 3. Мы считаем, что именно область, заключенная между этими двумя параболлами, наиболее подходит для описания реологии мантии Земли. Обозначим ее как A .

Внутри области A пока невозможно определить, какие из значений параметров Андраде наиболее вероятны. Если геодезические наблюдения укажут на высокие значения α (0.2–0.3), то параметр ζ должен действительно быть близким к единице, как это часто принимается. Если наоборот окажется, что у Земли в целом низкие значения α (0.1–0.2), то в нижней мантии параметр ζ может достигать значения 10^5 .

Стоит отметить, что даже в моделях с очень большими значениями ζ оценка $\zeta^\alpha \approx 1$ из работы [5] все же приблизительно выполняется. Например, при $\zeta = 10^5$ и $\alpha = 0.14$ удовлетворяются все шесть условий и $\zeta^\alpha \approx 5$.

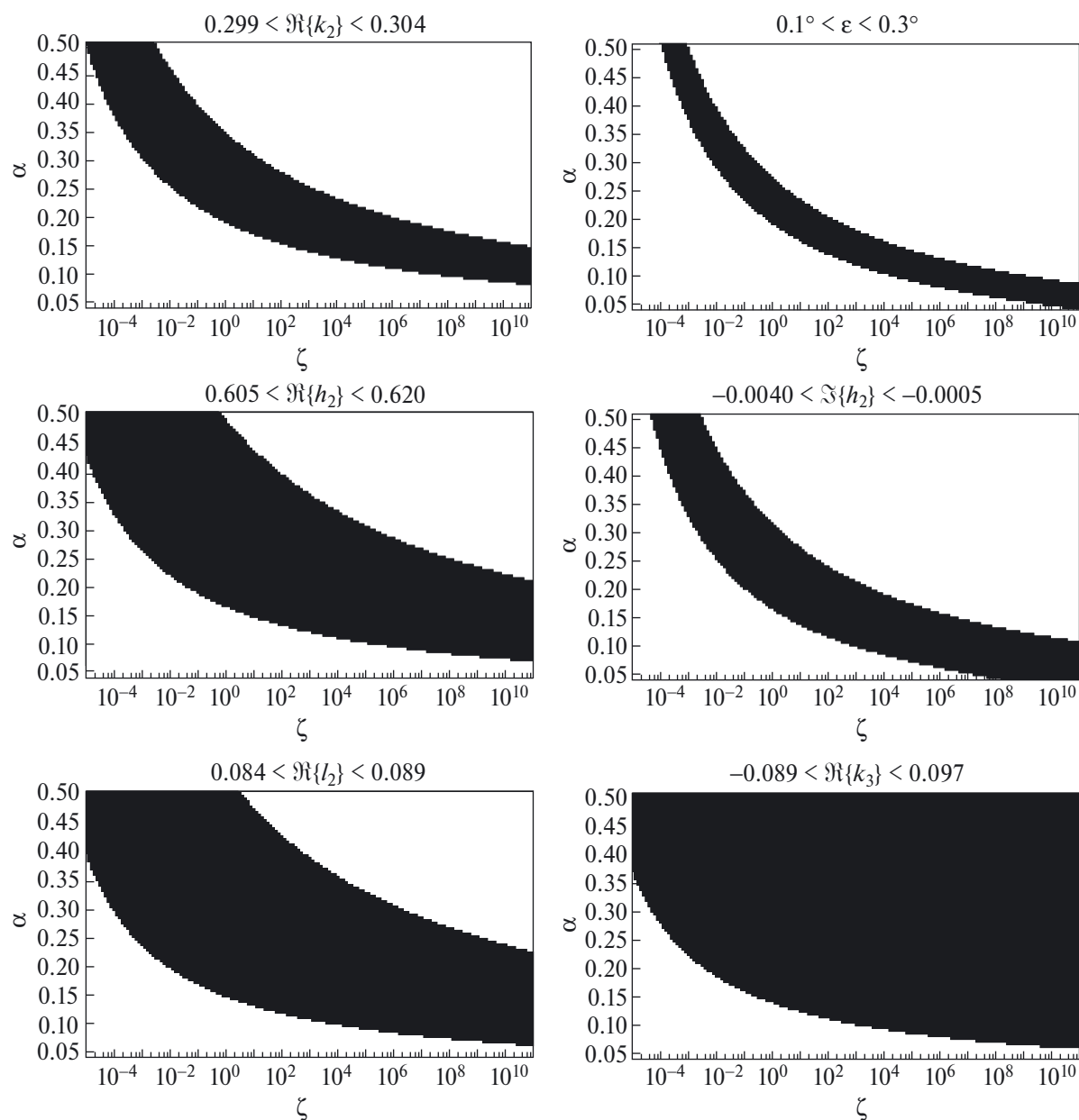


Рис. 1. Черным изображены области, в которых по отдельности выполняется каждое из 6 используемых условий из табл. 2 при РВВ.

Значения параметров Андраде могут сильно зависеть от глубины. Эксперименты показывают, что приближение к температуре плавления сопровождается уменьшением значения α , поэтому можно предположить, что в верхней мантии α меньше, чем в нижней (за исключением слоя “D”). Например, реологическая модель с $\zeta = 10$ во всей Земле, $\alpha = 0.1$ в верхней мантии, $\alpha = 0.2$ в переходной зоне и $\alpha = 0.25$ в нижней мантии также удовлетворяет всем шести условиям.

Изучение различных реологических моделей позволило нам впервые обнаружить следующий факт: одним и тем же значениям $\Re\{k_2\}$, $\Re\{h_2\}$, $\Re\{l_2\}$ и $\Re\{k_3\}$ можно удовлетворить с хорошей точностью несчетным количеством комбинаций параметров α и ζ , но при этом одновременно получить и конкретное значение приливного сдвига фазы ϵ можно только одним способом. Это подчеркивает важность использования двухпараметрической

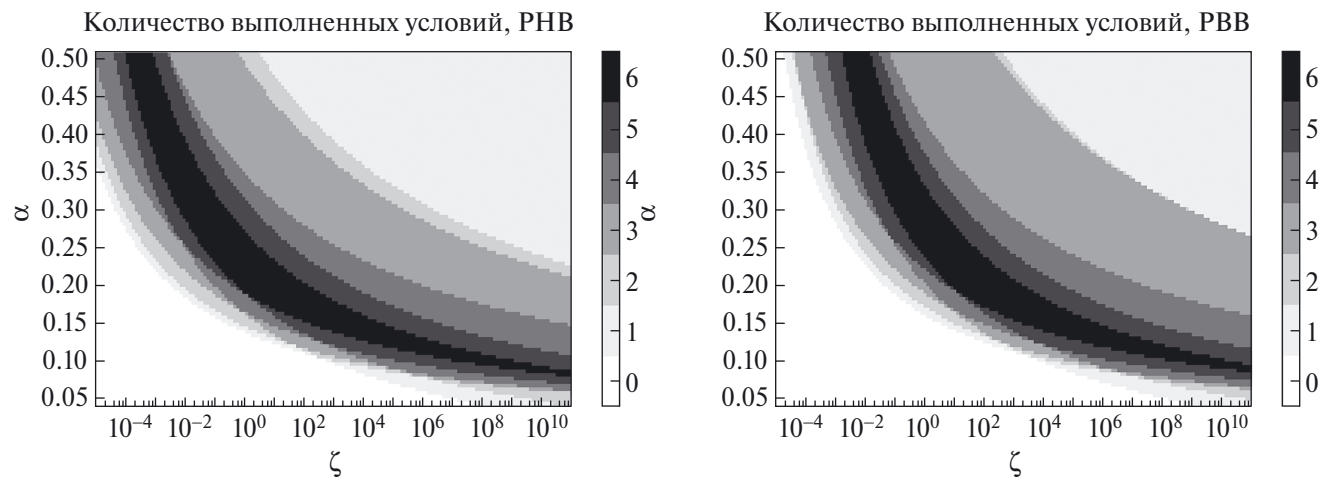


Рис. 2. Количество выполненных условий в зависимости от α и ζ для различных распределений вязкости η : модель РНВ (слева), модель РВВ (справа). Черными пикселями показаны области $\mathcal{A}_{\text{РНВ}}$ и $\mathcal{A}_{\text{РВВ}}$, в которых все шесть условий из табл. 2 выполняются одновременно.

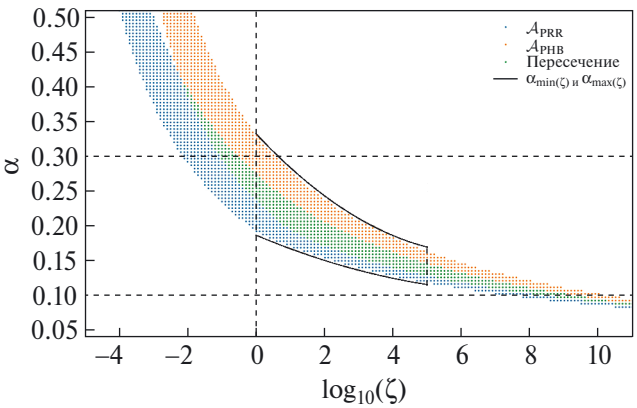


Рис. 3. Интервалы значений α и ζ , при которых одновременно выполняются все 6 условий из табл. 2 при РНВ и РВВ. Их пересечение изображено зеленым цветом. Комбинации параметров Андраде, которые наиболее подходят для описания реологии Земли, находятся между параболой $\alpha_{\min}(\zeta)$ и $\alpha_{\max}(\zeta)$.

Таблица 3. Примеры комбинаций параметров α и ζ , удовлетворяющих одному и тому же значению $\Re\{k_2\}$, но приводящих к очень разным значениям приливного сдвига фазы

α, ζ	$\Re\{k_2\}$	$\Re\{h_2\}$	$\Re\{l_2\}$	$\Re\{k_3\}$	ε , град
0.250, 1	0.3021	0.6107	0.08548	0.09324	0.2572
0.218, 10	0.3021	0.6108	0.08547	0.09325	0.2227
0.193, 10^2	0.3021	0.6109	0.08547	0.09327	0.1974
0.174, 10^3	0.3021	0.6109	0.08544	0.09325	0.1751
0.158, 10^4	0.3021	0.6109	0.08544	0.09326	0.1585
0.145, 10^5	0.3021	0.6110	0.08546	0.09328	0.1468

реологической модели вместо того, чтобы необоснованно отождествлять параметр ζ единице. В табл. 3 показаны значения $\Re\{k_2\}$, $\Re\{h_2\}$, $\Re\{l_2\}$, $\Re\{k_3\}$ и ε для набора реологических

моделей. В то время как действительные части чисел Лява отличаются на доли процента, значение сдвига фазы может отличаться на десятки процентов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В геофизических исследованиях Земли и других планет часто используется упрощение реологии Андраде, где параметр ζ принимается равным единице, и варьируется только параметр α . В данной работе мы доказали, что этот подход не является корректным.

Впервые проведено исследование реологии мантии Земли, используя двухпараметрическую модель Андраде. Полученные значения параметра α согласуются с оценками других авторов, а для параметра ζ впервые получены оценки в условиях планетных недр. Реологические модели с очень высокими значениями ζ могут удовлетворять наблюдаемым значениям чисел Лява и приливного сдвига фазы с таким же успехом, что и модели с $\zeta = 1$.

Разные комбинации α и ζ могут давать одинаковые значения действительной части чисел Лява, но удовлетворить одновременно и условиям на их мнимые части можно только одним способом. Это иллюстрирует важность использования двух свободных параметров в реологии Андраде.

Наши результаты имеют важное значение для планетарной геофизики. Представим себе, что мы исследуем внутреннее строение какой-либо планеты и для нее измерены с хорошей точностью $\Re\{k_2\}$ и ϵ . Зафиксировав $\zeta = 1$ и варьируя α , мы, например, получили что для одной из моделей внутреннего строения планеты удовлетворяется только одно условие. В таком случае, естественно, было бы эту модель исключить. Однако это могло быть просто результатом применения неправильной реологии к правильной модели. Аналогичным образом мы могли бы принять неверную модель.

Проведенное подробное исследование реологии Земли доказывает, что модель Андраде должна использоваться с двумя параметрами вместо упрощенной формы, где параметр ζ необоснованно фиксируется равным единице в любых условиях.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено по госзаданию ИФЗ РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dumoulin C., Tobie G., Verhoeven O., et al. Tidal constraints on the interior of Venus // *Journal of Geophysical Research: Planets*. 2017. V. 122(6). P. 1338–1352.
2. Steinbrugge G., Padovan S., Hussmann H., et al. Viscoelastic tides of Mercury and the determination of its inner core size // *Journal of Geophysical Research: Planets*. 2018. V. 123(10). P. 2760–2772.
3. Bagheri A., Khan A., Al-Attar D., et al. Tidal response of mars constrained from laboratory-based viscoelastic dissipation models and geophysical data // *Journal of Geophysical Research: Planets*. 2019. V. 124(11). P. 2703–2727.
4. Gudkova T., Zharkov V. Models of the internal structure of the Earth-like Venus // *Solar System Research*. 2020. V. 54. P. 20–27.
5. Castillo-Rogez J. C., Efroimsky M., Lainey V. The tidal history of Iapetus: Spin dynamics in the light of a refined dissipation model // *Journal of Geophysical Research: Planets*. 2011. V. 116 (E9).
6. Jackson I., Fitz Gerald J. D., Faul U. H., Tan B. H. Grain-size-sensitive seismic wave attenuation in polycrystalline olivine // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2002. V. 107(B12). P. ECV-5.
7. Efroimsky M. Tidal dissipation compared to seismic dissipation: In small bodies, earths, and super-earths // *The Astrophysical Journal*. 2012. V. 746(2). P. 150.
8. Молоденский С.М. Приливы и нутация Земли. 1. Модели Земли с неупругой мантией и однородным невязким жидким ядром // *Астрон. вестник*. 2004. Т. 38 (6). С. 542–558.
9. Молоденский С.М. Сравнение моделей неупругой Земли, построенных по астрономическим и приливным гравиметрическим данным // *Физика Земли*. 2006. Т. 7. С. 12–16.
10. Fontaine F.R., Ildefonse B., Bagdassarov N.S. Temperature dependence of shear wave attenuation in partially molten gabbro-norite at seismic frequencies // *Geophysical Journal International*. 2005. V. 163(3). P. 1025–1038.
11. Kang K., Wahr J., Heflin M., Desai S. Stacking global gps verticals and horizontals to solve for the fortnightly and monthly body tides: Implications for mantle anelasticity // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2015. V. 120(3). P. 1787–1803.
12. Ding H., Chen Z., Pan Y., Zou C. The complex love numbers of long-period zonal tides retrieved from global gps displacements: Applications for determining mantle anelasticity // *J. Geophys. Res.: Solid earth*. 2021. V. 126 (9). P. e2021JB022380.
13. Nakada M., Okuno J., Yokoyama Y. Total meltwater volume since the last glacial maximum and viscosity structure of earth's mantle inferred from relative sea level changes at barbados and bonaparte gulf and gia-

- induced j2 // *Geophysical Journal International*. 2016. V. 204(2). P. 1237–1253.
14. *Reusen J. M., Root B. C., Szwillus W., Fullea J., van der Wal W.* Long wavelength gravity field constraint on the lower mantle viscosity in North America // *J. Geophys. Res.: Solid earth*. 2020. V. 125 (12). P.e2020JB020484.
15. *Petit G., Luzum B.* IERS technical note no. 36, IERS conventions (2010). International Earth Rotation and Reference Systems Service: Frankfurt, Germany. 2010.

CONSTRAINING THE PARAMETERS OF THE ANDRADE RHEOLOGICAL MODEL IN EARTH'S MANTLE BASED ON THE LOVE NUMBERS OF THE M_2 LUNAR SEMIDIURNAL TIDE

D. O. Amorim^{a,#}, T. V. Gudkova^{b,##}

^a*Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russian Federation*

^b*Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[#]*E-mail: amorim.dargilan@gmail.com*

^{##}*E-mail: gudkova@ifz.ru*

For the first time we showed that the often-used approximation of the Andrade rheology with only one parameter is oversimplified and might lead to incorrect conclusions when studying the internal structure of the planets of the Solar System. Instead, we used an Andrade rheology with two empirical parameters: α and ζ . Earth's viscoelastic Love numbers for the principal lunar semidiurnal tide M_2 were computed for two viscosity profiles and for 16100 different combinations of α and ζ values. The comparison of the computed Love numbers with its measured values allowed us to constrain the set of values of both parameters that successfully describe the rheological properties of Earth's mantle.

Keywords: Andrade rheology, tidal Love numbers, lunar semidiurnal tide, Earth, planets