

УДК 556

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ РАСТЕКАНИЕ НЕФТЕПРОДУКТОВ ПО ПОВЕРХНОСТИ ЛЬДА

© 2024 г. Т. О. Чаплина*, А. В. Кистович, В. П. Пахненко

Представлено академиком РАН Д.М. Климовым 08.01.2024 г.

Поступило 08.01.2024 г.

После доработки 22.01.2024 г.

Принята к публикации 23.01.2024 г.

Представлены результаты экспериментального и теоретического исследования разлива пятен нефтепродуктов по поверхности льда, основанная на законах сохранения массы и полной энергии системы. В рамках этой модели получено приближённое уравнение, описывающее динамику площади растекания во времени. Сравнение теоретических и экспериментальных результатов показывает их хорошее соответствие друг другу.

Ключевые слова: моделирование, растекание, машинное масло, сырая нефть, шероховатость поверхности

DOI: 10.31857/S2686739724050211

В данной работе представлена упрощённая математическая модель, в которой химический состав и все термодинамические параметры сред считаются постоянными величинами, масса растекающегося пятна предполагается неизменной, все среды однородны и изотропны. Так как скорости переноса воды и нефти значительно ниже, чем скорости звука в них, все среды считаются несжимаемыми в любой модели распространения.

Для упрощения изложения все виды нефтепродуктов далее будут называться просто нефтью, но в случае непосредственного представления экспериментальных результатов и их сравнения с теоретическими расчётами тип нефтепродукта будет конкретизироваться.

Механизм растекания нефти по поверхности льда требует учёта следующих основных факторов:

– Переход потенциальной энергии системы нефть–лёд–воздух в кинетическую энергию в гравитационном поле из-за изменения геометрических характеристик разлива с течением времени.

– Изменение количества поверхностной энергии системы “нефть на льду” по причине

изменения площадей контактных границ “нефть–воздух”, “нефть–лёд”, “воздух–лёд”.

– Торможение растекания нефти за счёт шероховатости поверхности льда и за счёт увлечения водной массы (в случае разлива подо льдом).

– Образование застойных зон в местах заполнения шероховатостей нефтью, что приводит к уменьшению массы нефти, участвующей в процессе растекания.

Как было показано в [1], в приближённой модели допустимо пренебречь вязкими тепловыми потерями в нефти и воздухе, но теперь необходимо учесть влияние шероховатой поверхности на динамику процесса. Модель шероховатого льда и процесса растекания по нему нефти основывается на ряде статистических характеристик, позволяющих описывать изучаемое явление в среднем. Лабораторные эксперименты [2] и наблюдения за разливами нефти по льду в природе [3] показывают, что нефтяной разлив в большинстве случаев представляет собой пятно неправильной формы. Аналитическое описание динамики пятен неправильной формы, постоянно изменяющейся во времени, представляет собой неразрешимую задачу. По этой причине в дальнейшем изучается растекание пятен, которые в среднем являются осесимметричными.

Понятие “осесимметричные в среднем” не сёт в себе следующий смысл. Пусть в момент

Институт проблем механики Российской Академии наук
им. А.Ю. Ишлинского, Москва, Россия
*E-mail: tanya75.06@mail.ru

времени t граница пятна описывается функцией $R(\varphi, t)$ в цилиндрической

системе координат (r, φ, z) с началом в точке O , расположенной на поверхности льда (ось z направлена против вектора силы тяжести). Вводится понятие среднего радиуса пятна

$$R(t) = \overline{R(\varphi, t)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(\varphi, t) d\varphi$$

и его среднеквадратичного отклонения

$$\begin{aligned} \delta_R(t) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R(\varphi, t) - R(t))^2 d\varphi} = \\ &= \sqrt{\langle (R(\varphi, t) - \overline{R(\varphi, t)})^2 \rangle} = \\ &= \sqrt{\overline{R^2(\varphi, t)} - R^2(t)} \end{aligned}$$

откуда следует соотношение

$$\overline{R^2(\varphi, t)} = R^2(t) + \delta_R^2(t).$$

Если при этом выполняется условие $\delta_R(t)/R(t) \ll 1$ для всех моментов времени, то растекающиеся пятна считаются в среднем осесимметричными. Для того чтобы оценить, является ли растекание нефтяного пятна в эксперименте или в реальной ситуации осесимметричным в среднем или нет, проводится следующая процедура. Сначала по форме пятна вычисляются величины $R(t)$ и $\delta_R(t)$ согласно ранее приведённым соотношениям, а затем проверяется справедливость условия $\delta_R(t)/R(t) \ll 1$. В дальнейшем, при сравнении теоретических и экспериментальных результатов, усреднение по ансамблю реализаций процесса растекания проводится именно для таких нефтяных пятен. Результаты измерений для пятен, нарушающих условие $\delta_R(t)/R(t) \ll 1$, отбраковываются и в усреднении по ансамблю реализаций не участвуют.

Таким образом, модель осесимметричного в среднем растекания нефтяного пятна представляет собой цилиндрическую область с изменяющимся во времени радиусом её границы $R(t)$, верхняя горизонтальная граница которой (контактная поверхность “нефть–воздух”) описывается координатой $z = h(t)$, а нижняя (контактная поверхность “нефть–лёд”) – координатой $z = \zeta(r, \varphi)$. Учёт шероховатостей поверхности льда требует создания их статистической

модели, в основе которой лежит предположение о том, что среднее значение отклонений $\zeta(r, \varphi)$ поверхности льда от горизонтали равно нулю

$$\overline{\zeta(r, \varphi)} = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R(\varphi, t)} \zeta(r, \varphi) r dr}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R(\varphi, t)} r dr} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R(t)} \zeta(r, \varphi) r dr}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R(t)} r dr} + O\left(\frac{\delta_R}{R(t)}\right) \approx \\ &\approx \frac{1}{\pi R^2(t)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R(t)} \zeta(r, \varphi) r dr = 0 \end{aligned}$$

а среднее квадратичное отклонение определяется некоторой постоянной величиной

$$\delta_\zeta = \sqrt{\langle (\zeta(r, \varphi) - \overline{\zeta(r, \varphi)})^2 \rangle} = h_*,$$

которая определяет характерный размер шероховатостей.

На основании предложенной модели нефтяного пятна и представленных выше соотношений постоянный объём нефти V определяется выражением

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R(t)} r dr \int_\zeta^h dz + O\left(\frac{\delta_R^2}{R^2(t)}\right) = \\ &= \pi R^2 h + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R(t)} \zeta(r, \varphi) r dr + O\left(\frac{\delta_R^2}{R^2(t)}\right) = \quad (1) \\ &= \pi R^2 h + O\left(\frac{\delta_R^2}{R^2(t)}\right) \approx \pi R^2 h \end{aligned}$$

Полная масса разлитой нефти определяется выражением $M_o = V\rho_o$, где ρ_o – плотность нефти, но при этом её масса, участвующая в поддержании процесса разлива по льду, задаётся соотношением

$$\begin{aligned}\tilde{M}_o &= 2\pi\rho_o \int_0^R \int_{h_*}^h r dr dz = \\ &= \pi R^2 (h - h_*) \rho_o = V \left(1 - \frac{h_*}{h}\right) \rho_o,\end{aligned}$$

которое, по причине того, что $\dot{h} < 0$, описывает уменьшение этой массы со временем. Здесь и далее точка над символом означает дифференцирование по времени.

Для реализации энергетического подхода, описанного в [1], необходимо вычислить потенциальную, кинетическую и поверхностную энергии рассматриваемой системы.

Потенциальная энергия определяется выражением

$$\Pi = 2\pi\rho_o g \int_0^R \int_{h_*}^h r z dr dz = \frac{\pi R^2}{2} \rho_o g (h^2 - h_*^2). \quad (2)$$

Кинетическая энергия, вычисляемая по аналогии с [1] на основе приближённого распределения поля скорости в нефти ($v_r = r\dot{R}/R$, $v_z = -2(z - h_*)\dot{R}/R$), задаётся соотношением

$$\begin{aligned}T_o &= \pi\rho_o \int_0^R \int_{h_*}^h (v_r^2 + v_z^2) r dr dz = \\ &= \frac{\pi\rho_o}{4} \dot{R}^2 (h - h_*) \left(R^2 + \frac{8}{3} (h^2 - h_*^2) \right)\end{aligned} \quad (3)$$

Поверхностная энергия системы описывается формулой

$$\begin{aligned}E_s &= \pi R^2 (k\sigma_{oi} + \sigma_{oa} - k\sigma_{ai}) = \pi R^2 \sigma, \\ \sigma &= k\sigma_{oi} + \sigma_{oa} - k\sigma_{ai}\end{aligned} \quad (4)$$

где σ_{ij} — коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела i -той и j -той сред (“ o ” — нефть, “ i ” — лёд, “ a ” — воздух),

$$k = \frac{\sqrt{1 + (\nabla\zeta)^2}}{\int_0^{2\delta} \int_0^{R(\varphi,t)} \sqrt{1 + \zeta_r'^2 + \zeta_\varphi'^2 / r^2} r dr d\varphi} = \frac{\int_0^{2\delta} \int_0^{R(\varphi,t)} r dr d\varphi}{\int_0^{2\delta} \int_0^{R(\varphi,t)} r dr d\varphi}$$

— средний коэффициент увеличения площади шероховатой поверхности льда по сравнению с гладкой.

Количество энергии, теряемой нефтью за счёт торможения о шероховатости, описывается выражением

$$\begin{aligned}T_r &= \int_{t_0}^t C_r \frac{h_*}{h} \dot{R}^2 dt = \int_{t_0}^t C_r \varepsilon(t) \dot{R}^2 dt, \\ \varepsilon(t) &= \frac{h_*}{h} = \frac{\pi R^2 h_*}{V} = \frac{R^2}{R_*^2},\end{aligned} \quad (5)$$

где C_r — некоторый коэффициент энергетических потерь, определяемый для реальных льдов только эмпирически; $R_* = \sqrt{V/\pi h_*}$ — средний по ансамблю реализаций предельный радиус пятна (при фиксированном объёме V), когда вся нефть распределена во впадинах шероховатостей.

Как было показано в [1], потери энергии системы на увлечение в движение воздуха пренебрежимо малы по сравнению с вышеописанными причинами, и потому на основе выражений, полученных выше, приближённое уравнение динамики энергии системы при разливе нефти надо льдом записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (T_o + \Pi + E_s + T_r) = 0,$$

подстановка в которое соотношений (2–5) с учётом выражения (1) и малости величины $V/\pi R^3 \ll 1$, придаёт ему окончательный вид

$$\ddot{R}(1 - \varepsilon) - \varepsilon \frac{\dot{R}^2}{R} - \frac{2Vg}{\pi R^3} (1 + \varepsilon^2) + \frac{4\pi R}{M_o} \sigma + \varepsilon \frac{2C_r}{M_o} \dot{R} = 0, \quad (6)$$

где M_o — постоянная масса нефти, обозначение σ дано в (4).

Посредством величины ε , определённой в (5), уравнению (6) придаётся вид

$$2\varepsilon\ddot{\varepsilon}(1 - \varepsilon) - \dot{\varepsilon}^2 - a(1 + \varepsilon^2) + b\varepsilon^2 + c\varepsilon^2\dot{\varepsilon} = 0, \quad (7)$$

где $a = 8\pi Vg/S_*^2 = 8\pi h_*^2 g/V$,

$b = 16\pi\sigma/M_o = 16\pi\lambda_s^2 \text{sign}(\sigma)/V$,

$c = 4C_r/M_o = 4C_r/\rho_o V$, $\lambda_s^2 = |\sigma|/\rho_o g$ — капиллярная постоянная контактной линии “воздух–лед–нефть”, а величина $S_* = \pi R_*^2 = V/h_*$ — средняя

по ансамблю предельная площадь, которую может занять нефть, растекающаяся по шероховатому льду.

В предельном случае $\varepsilon \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow \sigma_{oi} + \sigma_{oa} - \sigma_{ai}$, $C_r = 0$, то есть при растекании по гладкому либо подтаявшему льду, уравнение (7) принимает вид

$$2S\ddot{S} - \dot{S}^2 + bS^2 - 8\pi Vg = 0, \tag{8}$$

где $S = \pi R^2$ – площадь растекающегося пятна.

Решение уравнения (7) проводится для трёх временных отрезков, соответствующих началу растекания, середине процесса и, наконец, завершению растекания.

Начало растекания. На этом этапе малыми величинами являются $\varepsilon \ll 1$ (площадь пятна на этом этапе существенно меньше его предельной площади) и $\dot{\varepsilon} = 2\varepsilon \dot{R}/R \ll \dot{R}/R$. В этом случае ещё малы сила сопротивления и относительное уменьшение массы растекающейся нефти за счёт заполнения впадин шероховатостей льда. Также мало влияние сил поверхностного натяжения по сравнению с инерциальной силой. В этом случае (7) сводится к виду

$$2\varepsilon\ddot{\varepsilon} - a = 0. \tag{9}$$

Решение (9) представляется в неявном виде относительно переменной ε :

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\varepsilon_b e^{-\dot{\varepsilon}_b^2/a} \left(\operatorname{erfi} \left(\sqrt{\ln(\varepsilon/\varepsilon_b) + \dot{\varepsilon}_b^2/a} \right) - \operatorname{erfi} \left(\dot{\varepsilon}_b/\sqrt{a} \right) \right) = t - t_b, \tag{10}$$

где t_b – время начала этапа, $\varepsilon_b = \varepsilon|_{t=t_b}$, $\dot{\varepsilon}_b = \dot{\varepsilon}|_{t=t_b}$,

$$\operatorname{erfi}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{x^2} dx.$$

Так как в начальный момент времени t_b $\varepsilon = \varepsilon_b$, то для анализа поведения площади пятна в самом начале его растекания используется представление $\varepsilon = \varepsilon_b(1 + \lambda)$, $\lambda < 1$, использование которого позволяет разложить в ряд левую часть выражения (10). В результате, в начальные моменты времени после начала разлива при $\dot{\varepsilon}_b = 0$ имеет место

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda}(1 + o(\lambda)) \frac{2\varepsilon_b}{\sqrt{a}} &= (t - t_b) \Rightarrow \\ \Rightarrow \varepsilon - \varepsilon_b &= \lambda\varepsilon_b = \frac{a(t - t_b)^2}{4\varepsilon_b}, \end{aligned}$$

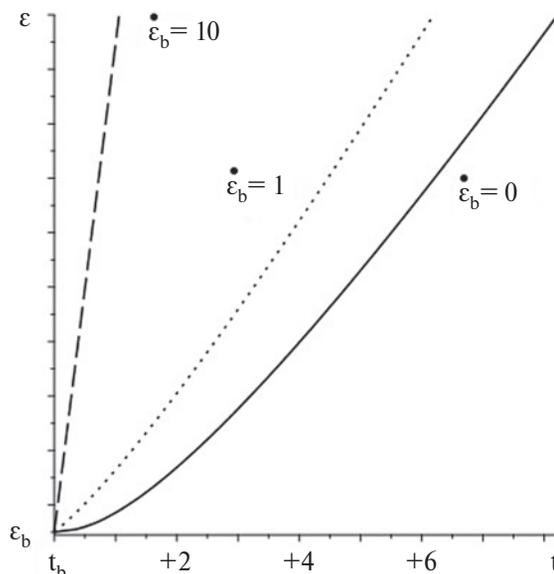


Рис. 1. Графики зависимости площади пятна на начальном этапе растекания, рассчитанные согласно (10) для единого значения начальной площади ε_b и различных значений начальных скоростей роста площади $\dot{\varepsilon}_b$.

а при $\dot{\varepsilon}_b \neq 0$ получается иной результат

$$\begin{aligned} \lambda(1 + o(\lambda)) \frac{\varepsilon_b}{\dot{\varepsilon}_b} &= t - t_b + \frac{a}{4\varepsilon_b \dot{\varepsilon}_b} (t - t_b)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \varepsilon - \varepsilon_b &= \lambda\varepsilon_b = \dot{\varepsilon}_b(t - t_b) + \frac{a}{4\varepsilon_b^2} (t - t_b)^2 \end{aligned}$$

Поведение решения $\varepsilon(t)$, рассчитываемое по формуле (10), существенно зависит от начальных условий. Если в начальный момент края пятна неподвижны ($\dot{\varepsilon}_b = 0$), то в первые моменты растекания площадь пятна растёт пропорционально квадрату временного промежутка, отсчитываемого от момента начала движения t_b . При наличии начальной ненулевой скорости роста площади ($\dot{\varepsilon}_b \neq 0$) закон приращения площади пятна отличается от квадратичного, и чем больше начальная скорость, тем ближе закон роста к линейному.

Иллюстрация этих результатов приведена на рис. 1, где приведены графики расчётов по формуле (10) при $\dot{\varepsilon}_b = 0$ (сплошная кривая), $\dot{\varepsilon}_b = 1$ (точки) и $\dot{\varepsilon}_b = 10$ (пунктир).

Временные отсчёты и абсолютные значения площади пятна $\varepsilon(t)$ приведены в условных единицах, так как для сравнительных

количественных расчётов не хватает исходных данных – величин h_* и C_r . Тем не менее, рис. 2 передаёт основные качественные свойства решения (10).

Середина процесса. В этом случае $\varepsilon = \frac{1}{2} + \mu$, $\mu \ll 1$. На этом этапе все члены уравнения влияют на процесс растекания и (7) преобразуется в уравнение

$$2\ddot{\mu} - 4\dot{\mu}^2 + c\dot{\mu} + b - 5a = 0, \quad (11)$$

решение которого имеет вид

$$\mu = \mu_m + \frac{c-d}{8}(t-t_m) + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{c-8\dot{\mu}_m}{d} + \left(1 - \frac{c-8\dot{\mu}_m}{d} \right) e^{-\frac{d(t-t_m)}{2}} \right), \quad (12)$$

где

$$d = \sqrt{c^2 - 16(5a - b)}, \quad \mu_m = \mu|_{t=t_m}, \quad \dot{\mu}_m = \dot{\mu}|_{t=t_m},$$

t_m – время начала средней стадии процесса растекания.

В случае гладкого шлифованного льда, когда шероховатость равна нулю ($c = 0$), или лёд покрыт тонким слоем воды, заполняющим шероховатости и играющим роль смазки при растекании нефти, решение уравнения (11) имеет вид

$$\mu = \mu_m - \frac{1}{2} \ln \left(\sqrt{1 + 4\dot{\mu}_m^2 / (5a - b)} \cos \left(\arctg \left(\frac{2\dot{\mu}_m}{\sqrt{5a - b}} \right) + \sqrt{5a - b} (t - t_m) \right) \right), \quad (13)$$

который описывает неограниченное возрастание площади разлива при $\delta < 0$.

Расчёты по формулам (12, 13) представлены на графиках рис. 2. При вычислениях в начальных условиях для наглядности результатов использовались значения $\mu_m = 0.1$ – для всех кривых, $\dot{\mu}_m = 0.1$ и $\dot{\mu}_m = 0.2$. График разлива по шлифованному льду на рис. 2 рассчитывался при $\dot{\mu}_m = 0.2$. Знак “плюс” при числах на шкале времени означает, что в этой точке текущее время превосходит начальное на указанную величину.

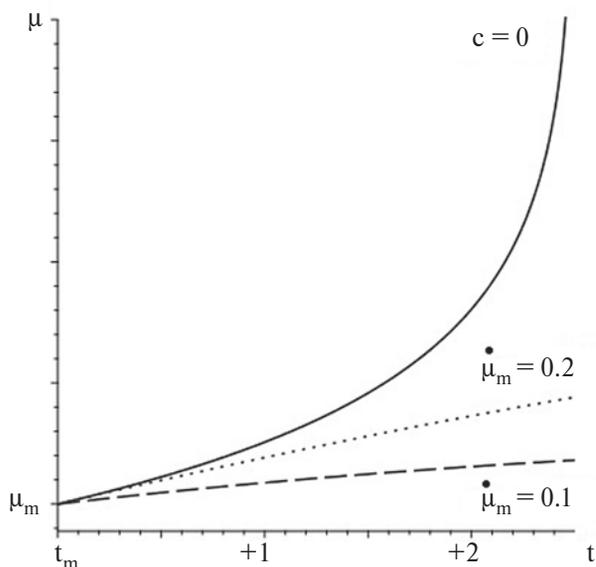


Рис. 2. Графики зависимости площади пятна в начале срединного этапа растекания, рассчитанные согласно (12) (точки и пунктир) и (13) (сплошная линия, $c = 0$, $\sigma < 0$) для единого значения площади пятна μ_m в момент времени t_m и различных значений начальных скоростей $\dot{\mu}_m$.

На больших временах $t - t_m \gg 2/d$ скорость роста площади пятна, как следует из (12), имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{S} &= S_* \dot{\mu} = \frac{Vc}{8h_*} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{5a - b}{c^2}} \right) = \\ &= \frac{C_r}{2h_* \rho_o} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\delta}{2} \rho_o V \frac{5h_*^2 \rho_o g - 2\sigma}{C_r^2}} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

и не зависит от начальных условий μ_m и $\dot{\mu}_m$, а определяется только объёмом разлитого нефтепродукта, коэффициентами поверхностного натяжения на границах раздела сред и коэффициентом сопротивления движению за счёт шероховатостей льда. Этот вывод подтверждается видом графиков на рис. 3 а для различных начальных скоростей растекания при фиксированном объёме V .

Экспериментальные результаты по начальному и срединному этапам разлива по льду машинного масла Volga представлены на рис. 3 б для различных объёмов нефтепродукта. Согласно теоретической модели (14), отношение скоростей роста площади разлива для различных объёмов

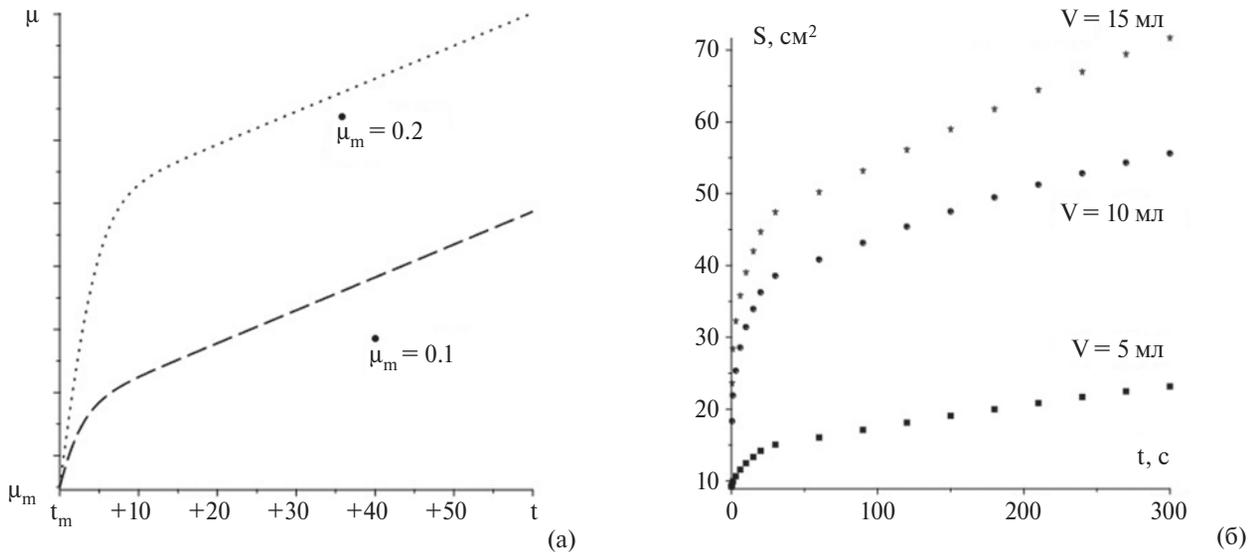


Рис. 3. Серединная стадия процесса (12) для различных значений начальных скоростей $\dot{\mu}_m$ и фиксированном объёме (а) и экспериментальные данные по разливу машинного масла разных объёмов, обработанные по методу [4] (б).

приближенно равно отношению этих объёмов при выполнении условия $\frac{\pi}{2} \rho_o V \frac{5h_*^2 \rho_o g - 2\sigma}{C_r^2} \ll 1$, так что пятна объёмом 10 и 15 мл разливаются в 2 и 3 раза быстрее, чем пятно объёмом 5 мл. Экспериментальные данные в этих случаях дают результаты 2.09 и 2.99 соответственно.

Но при разливе по шлифованному или по подтаявшему льду из решения (13) следует, что чем больше начальная скорость $\dot{\mu}_m$ роста площади пятна, тем больше скорость увеличения его площади в дальнейшем.

Завершение растекания. В этом случае $\epsilon = 1 - \delta$, $0 \leq \delta \ll 1$ и (2.7) приобретает вид

$$2\delta\ddot{\delta} + c\dot{\delta} + 2a - b = 0. \quad (15)$$

Решение этого уравнения представляется в форме квадратуры

$$\int_{\delta(t)}^{\delta_e} \frac{dx}{1 + W(-\beta e^{-\beta(x/\delta_e)^\alpha})} = \frac{2a - b}{c}(t - t_e)$$

$$\alpha = \frac{c^2}{2(2a - b)}, \quad \beta = 1 + \frac{c}{2a - b} \dot{\delta}_e, \quad (16)$$

$$\delta_e = \delta|_{t=t_e}, \quad \dot{\delta}_e = \dot{\delta}|_{t=t_e}$$

где $W(x)$ – функция Ламберта, которая является решением функционального уравнения

$W(x)e^{W(x)} = x$, t_e – время начала конечной стадии процесса растекания.

Проведённые расчёты по формуле (16) показывают, что достижение максимально возможного значения $\epsilon = 1$ при $\sigma < 0$ связано с исчерпанием запасов разлитой нефти, находящейся вне заполненных шероховатостей.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках Государственного задания Министерства образования и науки России № 123021700046-4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kistovich A. V., Chaplina T. O.* Energy Approach To The Description Of The Dynamics Of Hydrocarbon Spills // *Physics of Fluids*. 2023. V. 35. P. 072109. <https://doi.org/10.1063/5.0159629>
2. *Konno A., Izumiyama K., Sakai S.* Experimental study on spreading of oil under ice cover / *Proceedings of the Twelfth International Offshore and Polar Engineering Conference (Kitakyushu, Japan, 2002)*. P. 821–826.
3. *Mackay D., Leinonen P. J., Overall J. C. K., Wood B. R.* The behavior of crude oil spilled on snow // *Geology. Arctic*. 1975. P. 10–20.
4. *Solodkii D. M., Kistovich A. V.* Modified shift algorithm for processing measured data // *Measurement Techniques*. 2015. V. 57. № 11. P. 1287–1292. <https://doi.org/10.1007/s11018-015-0622-5>

AXISYMMETRIC SPREADING OF HYDROCARBONS OVER THE ICE COVER

T. O. Chaplina[#], A. V. Kistovich, V. P. Pachnenko

Presented by Academician of the RAS D.M. Klimov January 8, 2024.

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

[#]E-mail: tanya75.06@mail.ru

The results of experimental and theoretical investigations of hydrocarbon's spills spreading over the ice cover are presented. On the basement of the mass and energy conservation model the approximate equation, describing the dynamics of spreading area in a time, is constructed. The comparison of theoretical and experimental results shows its good correspondence.

Keywords: modelling, spreading, engine oil, crude oil, surface roughness