

УДК 539.3

О РОЛИ КОЭФФИЦИЕНТА СВЯЗАННОСТИ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

© 2023 г. Академик РАН Н. Ф. Морозов^{1,2,*}, член-корреспондент РАН Д. А. Индейцев, К. Л. Муратиков³, Д. С. Вавилов^{1,4,**}, А. А. Кудрявцев^{5,***}

Поступило 22.03.2023 г.

После доработки 22.03.2023 г.

Принято к публикации 07.05.2023 г.

Рассматривается динамическая задача термоупругости в среде с сосредоточенным включением. Показано, что в резонансном режиме важную роль приобретает коэффициент связанности полей температуры и деформации. Связанность задачи и наличие дискретного спектра приводят к появлению в выражении для температуры дополнительного слагаемого, имеющего локализованный характер и не описывающего диффузионный процесс.

Ключевые слова: включение, динамическая термоупругость, коэффициент связанности

DOI: 10.31857/S2686740023050103, **EDN:** ZOAHEN

Одним из важных вопросов при исследовании динамики систем с различного рода дефектами и включениями является поиск условий существования локализованного решения, когда энергия не распространяется в виде волны в среде, а оказывается сосредоточенной вблизи включений. Этот вопрос сводится к доказательству существования вещественного дискретного спектра собственных частот колебаний, который может располагаться как отдельно от участка непрерывного спектра, так и быть включенным в него. Наиболее простым примером подобной модели с единственной характерной частотой являются продольные колебания полубесконечного стержня на упругом основании с инерционным включением на границе. Оно приводит к возникновению в сплошном спектре колебаний дискретной частоты, которой соответствует локализованная вблизи сосредоточенной массы форма, наиболее

ярко проявляющаяся в резонансном режиме. Данная частота расположена ниже так называемой частоты отсечки, отделяющей дискретный спектр частот от непрерывного. Здесь рассматривается обобщение этой задачи на случай теплового воздействия.

Задача об определении температурных напряжений в динамической постановке впервые была решена в работе В.И. Даниловской в 1950 г. [2]. В отсутствие массовых сил и тепловых источников и с учетом малости термических возмущений и деформаций система уравнений, описывающая распространение термоупругой волны, имеет вид [3, 4]

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \rho \ddot{\mathbf{u}} = (3\lambda + 2\mu) \nabla \Theta, \quad (1)$$

$$\chi \Delta \Theta - \dot{\Theta} = v \dot{v}.$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор перемещения, Θ — изменение температуры по сравнению с ее равновесным значением T_0 , λ и μ — постоянные Ламе, χ — коэффициент температуропроводности. Через $v = \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha T_0}{c_V}$, где α — это линейный коэффициент

теплового расширения и c_V — удельная теплоемкость, обозначен так называемый коэффициент связанности, определяющий влияние деформаций на распределение температуры. Система уравнений (1), дополненная соответствующими граничными условиями, описывает связанную динамическую задачу термоупругости в общей постановке, поиск решения которой представляет собой сложную математическую проблему. Правда, в работах [5, 6] отмечается, что в боль-

¹Институт проблем машиноведения
Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

²Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия

³Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе
Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

⁴Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского,
Санкт-Петербург, Россия

⁵Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: n.morozov@spbu.ru,

**E-mail: londr@yandex.ru,

***E-mail: kudryavtsev_aa@spbstu.ru

шинстве практических случаев влиянием связанности можно пренебречь и сначала независимо решать уравнение теплопроводности, а затем по найденному температурному полю определять напряженно-деформированное состояние.

В данном сообщении будет показано, что этот вывод может оказаться несостоятельным в присутствии дефектов в деформируемом теле. В качестве примера рассмотрим одномерную модель полубесконечного стержня с плотностью ρ и модулем Юнга E , на торце которого находится сосредоточенная масса. Стержень опирается на упругое основание с коэффициентом жесткости k . Колебания данной системы описываются уравнением баланса импульса

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \ddot{u} - ku = 0. \quad (2)$$

Если связь между напряжением σ и деформацией ϵ задается с помощью соотношения Дюамеля–Неймана $\sigma = E(\epsilon - \alpha \Theta)$, а процесс распространения тепла в стержне подчиняется закону Фурье, то динамические уравнения термоупругости имеют вид

$$\begin{aligned} \chi \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} - \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= \frac{\alpha E T_0}{c_V} \dot{\epsilon}, \\ \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2} - \frac{k}{E} \epsilon &= \alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $c_0^2 = \frac{E}{\rho}$ — скорость звука. После введения без-

размерных переменных $\xi = \frac{c_0 x}{\chi}$, $\tau = \frac{c_0^2 t}{\chi}$, $\vartheta = \frac{\Theta}{T_0}$ система уравнений (3) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} &= \eta \dot{\epsilon}, \\ \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \tau^2} - \omega_c^2 \epsilon &= \alpha T_0 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\eta = \frac{\alpha E}{c_V}$ — коэффициент связанности,

$\omega_c = \frac{\chi}{c_0^2} \sqrt{\frac{k}{\rho}}$ — безразмерная частота отсечки. Данную систему необходимо дополнить граничными условиями. В случае абсолютно жесткого контакта стержня с включением, когда их перемещения совпадают, деформация на торце при выполнении соотношения Дюамеля–Неймана удовлетворяет условию

$$\epsilon|_{\xi=0} = \alpha T_0 \vartheta_0 + \beta \ddot{u}_0, \quad (5)$$

где u_0 и ϑ_0 — перемещение и температура на торце,

$\beta = \frac{\kappa h c_0}{\chi}$ — коэффициент, значение которого зависит от параметров сосредоточенной массы и стержня. Через h обозначен линейный размер включения, а через κ — отношение его плотности к плотности материала. Действие теплового источника на границе задается в виде потока тепла, определяемого функцией $W(t)$:

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{W(t)}{c_0 T_0}. \quad (6)$$

На бесконечности ставится условие ограниченности решения. При $\eta = 0$ решение несвязанной задачи с нулевыми начальными условиями нетрудно получить, используя преобразование Лапласа. Изображения температуры ϑ_{nc} и деформации ϵ_{nc} определяются выражениями

$$\vartheta_{nc}^L = \frac{W^L e^{-\sqrt{p} \xi}}{c_0 T_0 \sqrt{p}}, \quad (7)$$

$$\epsilon_{nc}^L = \frac{\alpha W^L}{c_0 (\gamma_0^2 - p) \sqrt{p}} \left(\frac{\gamma_0 \left(\gamma_0^2 + \beta p^2 \right) e^{-\gamma_0 \xi}}{\gamma_0 + \beta p^2} - p e^{-\sqrt{p} \xi} \right), \quad (8)$$

где $\gamma_0 = \sqrt{p^2 + \omega_c^2}$. На границе области, где размещена сосредоточенная масса, выражение (8) может быть представлено в форме, аналогичной закону Дюамеля–Неймана при свободном расширении тела:

$$\epsilon_{nc}^L|_{x=0} = \alpha_D(p) \Theta_{nc}^L, \quad (9)$$

однако коэффициент линейного теплового расширения α_D в этом случае уже не является константой, а имеет динамический характер и определяется передаточной функцией [7]:

$$F(p) = \frac{\alpha_D}{\alpha} = \frac{1}{\gamma_0^2 - p} \left(\frac{\gamma_0 \left(\gamma_0^2 + \beta p^2 \right)}{\gamma_0 + \beta p^2} - p \right), \quad (10)$$

пример спектральной характеристики которой в зависимости от параметра β изображен на рис. 1, где ω_d — безразмерная частота.

Эффективный коэффициент линейного теплового расширения ранее был введен в работе [8] на основе эволюционного уравнения для дефектов с целью описания их влияния на термоакустический сигнал в алюминиевых мембранах. С учетом сил инерции данный параметр обращается в бесконечность в точке, являющейся полюсом

выражения (10) и удовлетворяющей условию $\gamma_0 + \beta p^2 = 0$, которое при подстановке $p = i\omega$ записывается в виде

$$\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2} = \beta\omega^2 \quad (11)$$

и означает существование дискретного спектра, лежащего ниже частоты отсечки. Полученный результат является следствием неучета связанности полей деформации и температуры.

Обратимся к случаю, когда $\eta \neq 0$. Обозначая через LF двойное интегральное преобразование (синус-преобразование Фурье над преобразованием Лапласа) и принимая во внимание граничное условие (5), из системы (3) находим

$$\varepsilon^{LF} = \frac{s\alpha T_0 \vartheta_0^L + s\beta p^2 u_0^L - \alpha T_0 p \vartheta^{LF}}{s^2 + \gamma^2}, \quad (12)$$

где $\gamma = \sqrt{\gamma_0^2 + \delta p}$. Через s и p обозначены аргументы изображений по Фурье и Лапласу соответственно. Параметр $\delta = \alpha T_0 \eta$ пропорционален коэффициенту связанности и для большинства материалов $\delta \ll 1$ [9]. После применения обратного преобразования Фурье с использованием уравнения свертки выражение (12) приводится к виду

$$\begin{aligned} \varepsilon^L = & \alpha T_0 \vartheta_0^L e^{-\gamma \xi} + \beta p^2 u_0^L e^{-\gamma \xi} + \\ & + \alpha T_0 p \int_0^\infty \vartheta^L(v) f(\xi - v) dv, \end{aligned} \quad (13)$$

где $f(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(s\xi)}{s^2 + \gamma^2} ds$. Перемещение на торце u_0^L можно найти, интегрируя уравнение (13):

$$u_0^L = -\frac{\alpha T_0 \vartheta_0^L}{\gamma + \beta p^2} - \frac{\gamma \alpha T_0 p J}{\gamma + \beta p^2}, \quad (14)$$

где $J = \int_0^\infty \vartheta(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta$. Через $\psi(\xi)$ обозначен интеграл от функции $f(\xi)$. После подстановки выражения (13) в первое из уравнений (4) задача сводится к интегро-дифференциальному уравнению относительно температуры:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vartheta^L}{d\xi^2} - p \vartheta^L = \\ = \delta p \left(\frac{e^{-\gamma \xi} \gamma}{\gamma + \beta p^2} (\vartheta_0^L - \beta p^3 J) + p \int_0^\infty \vartheta^L(\zeta) f(\xi - \zeta) d\zeta \right), \end{aligned} \quad (15)$$

решить которое в общем случае вряд ли возможно. Поэтому здесь мы ограничимся рассмотрением частного случая, когда тепловой поток на границе $W(t)$ задается гармонической функцией с амплитудой W_0 и частотой ω , совпадающей с собственной частотой дискретного спектра, яв-

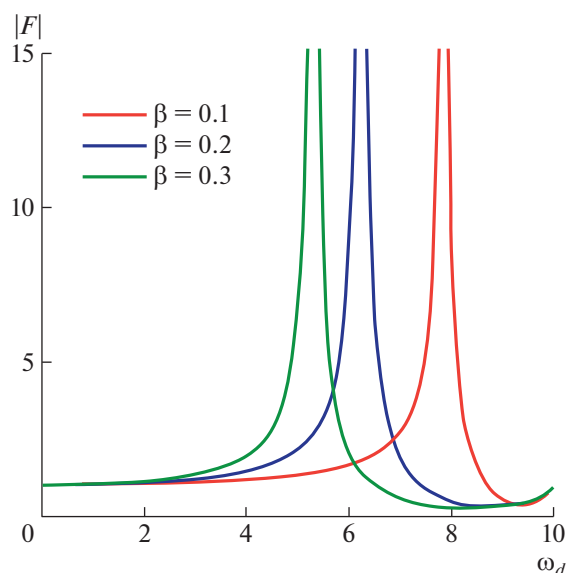


Рис. 1. Спектральная характеристика функции $F(p)$, $\omega_c = 10$.

ляющейся корнем уравнения (11). Разложив в ряд выражение $\gamma = \sqrt{\gamma_0^2 + \delta p}$ по малому параметру δ , получим для него следующее приближенное выражение: $\gamma = \gamma_0 + \frac{\delta p}{2\gamma_0}$. Тогда очевидно, что основ-

ной вклад в правую часть уравнения (15) вносит первое слагаемое, так как при нем происходит сокращение малого параметра. В данном приближении решение уравнения (15) с учетом граничного условия (6) имеет вид

$$\begin{aligned} \vartheta^L = & \left(\frac{W^L}{c_0 T_0 \sqrt{p}} - \frac{2\gamma_0^3 (\vartheta_0^L - \beta p^3 J)}{\sqrt{p} (\gamma_0^2 - p)} \right) e^{-\sqrt{p} \xi} + \\ & + \frac{2\gamma_0^2 (\vartheta_0^L - \beta p^3 J)}{(\gamma_0^2 - p)} e^{-\gamma_0 \xi}. \end{aligned} \quad (16)$$

Положив $\xi = 0$, находим первое из уравнений для определения двух неизвестных величин ϑ_0^L и J . Второе уравнение получится после умножения выражения (16) на функцию $\psi(\xi)$ и интегрирования в пределах от 0 до ∞ . В итоге система уравнений записывается в виде

$$\begin{aligned} a_{11} \vartheta_0^L + a_{12} J &= \frac{W^L}{c_0 T_0 \sqrt{p}}, \\ a_{21} \vartheta_0^L + a_{22} J &= \frac{W^L L_2}{c_0 T_0 \sqrt{p}}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $a_{11} = 1 + \frac{2}{z(1+z)}$, $a_{12} = \frac{2z\gamma_0^3}{1+z}$, $a_{21} = -\frac{2L_1}{1-z^2}$, $a_{22} = 1 - \frac{2\gamma_0^3 z^2 L_1}{1-z^2}$, $z = \frac{\sqrt{p}}{\gamma_0}$. При этом ее коэффициенты

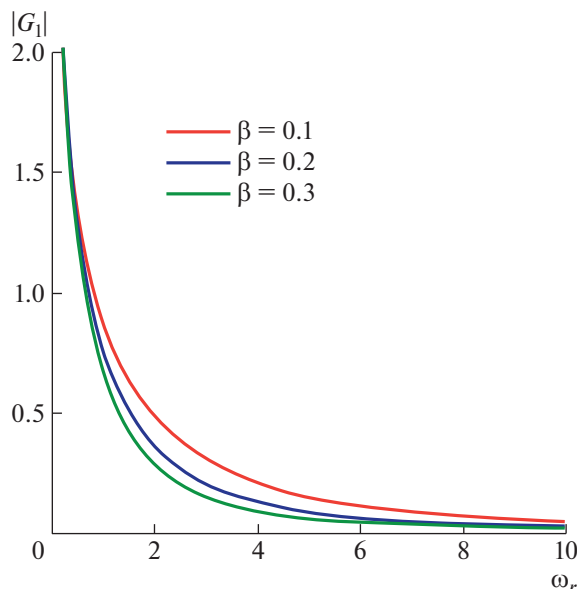


Рис. 2. Спектральная характеристика функции $G_1(p)$.

содержат неизвестные операторы $L_1 = \int_0^\infty \psi(\zeta) \left(e^{-\gamma_0 \zeta} - \frac{\gamma_0}{\sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}\zeta} \right) d\zeta$ и $L_2 = \int_0^\infty \psi(\zeta) e^{-\sqrt{p}\zeta} d\zeta$.

Для их определения рассмотрим вспомогательное дифференциальное уравнение, заданное на положительной полуоси:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - g^2 y = -e^{-\lambda x}, \quad (18)$$

с двумя граничными условиями $y|_{x=0} = 0$, $y|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, где λ и g — положительные константы, не зависящие от x . Решение данного уравнения имеет вид

$$y = \frac{e^{-gx} - e^{-\lambda x}}{\lambda^2 - g^2}, \quad \lambda \neq g. \quad (19)$$

С другой стороны, применяя синус-преобразование Фурье, получим $y^F = \frac{J_s}{s^2 + g^2}$, где $y^F = \frac{J_s}{s^2 + g^2}$.

Используя обратное преобразование Фурье, найдем, что

$$y = -\int_0^\infty e^{-\lambda \zeta} f(x - \zeta) d\zeta. \quad (20)$$

Приравнявая выражения (19) и (20) друг другу и проинтегрировав полученное равенство, получим, что при $x = 0$ должно быть справедливо следующее соотношение:

$$\int_0^\infty \psi(\zeta) e^{-\lambda \zeta} d\zeta = \frac{1}{(g + \lambda)g\lambda}. \quad (21)$$

Если положить в нем $\lambda = \sqrt{p}$ и $g = \gamma_0$, то оказывается, что $L_2 = -\frac{1}{(1+z)\gamma_0^3}$. Когда $\lambda = g$, решение

уравнения (18) записывается в виде $y = \frac{x e^{-\lambda x}}{2\lambda}$. Проводя аналогичную процедуру и полагая $\lambda = \gamma_0$, находим $L_1 = -\frac{1}{2\gamma_0^3} + \frac{1}{(1+z)z^2\gamma_0^3}$. После определения интегралов решение системы (17) находится элементарно:

$$\begin{aligned} \vartheta_0^L &= \frac{W^L}{c_0 T_0 \sqrt{p}} \frac{z}{z+2}, \\ J &= \frac{W^L}{c_0 T_0 \sqrt{p}} \frac{1}{(z+2)\gamma_0^3}. \end{aligned} \quad (22)$$

Из полученного результата видно, что связь между тепловым потоком и температурой на границе задается с помощью передаточной функции

$$G_1(p) = \frac{1}{\sqrt{p} + 2\gamma_0}:$$

$$\vartheta_0^L = \frac{W^L G_1(p)}{c_0 T_0}. \quad (23)$$

Ее зависимость от резонансной частоты ω , при различных значениях параметра β изображена на рис. 2.

Возвращаясь к соотношению (16) и подставляя туда результат решения системы (22), представим изображение температуры в виде суммы двух слагаемых:

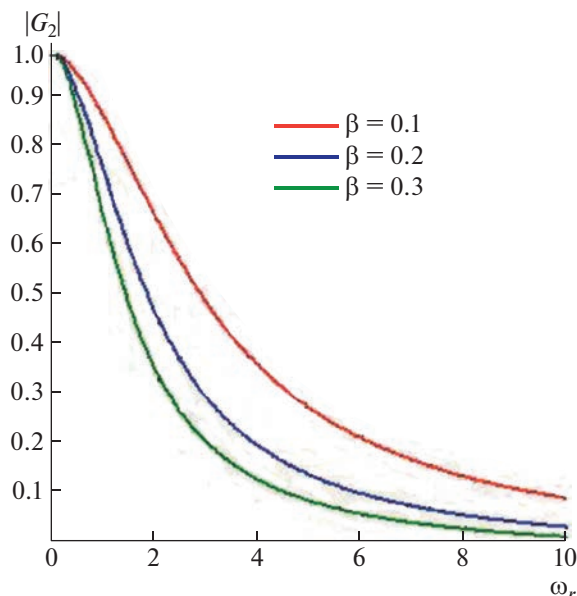


Рис. 3. Спектральная характеристика функции $G_2(p)$.

$$\vartheta^L = \vartheta_0^L \left(-\frac{(\gamma_0 + \sqrt{p})}{(\gamma_0 - \sqrt{p})} e^{-\sqrt{p}\xi} + \frac{2\gamma_0}{\gamma_0 - \sqrt{p}} e^{-\gamma_0\xi} \right), \quad (24)$$

где первое из них описывает распространение тепла в глубь стержня, а второе соответствует локализованному решению. На границе области при $\xi = 0$ температура может быть записана в виде произведения классического решения несвязанной задачи и передаточной функции $G_2(p) = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} + 2\gamma_0}$:

$$\vartheta_0^L = \vartheta_{0nc}^L G_2(p). \quad (25)$$

Спектральная характеристика этой функции показана на рис. 3.

При этом динамический коэффициент линейного теплового расширения, определяемый выражением (10), уже не обращается в бесконечность (рис. 4) благодаря наличию малого параметра δ , выполняющего роль диссипативного элемента и определяющего амплитуду колебаний деформации.

Таким образом, учет связанности полей деформации и температуры приводит к возникновению дополнительного слагаемого в выражении для температуры (24), локализованного вблизи сосредоточенного включения и не описывающего диффузионный процесс. Характер распределения локализованного решения определяется свойствами дефекта, который в резонансном режиме выступает в качестве динамического гаси-

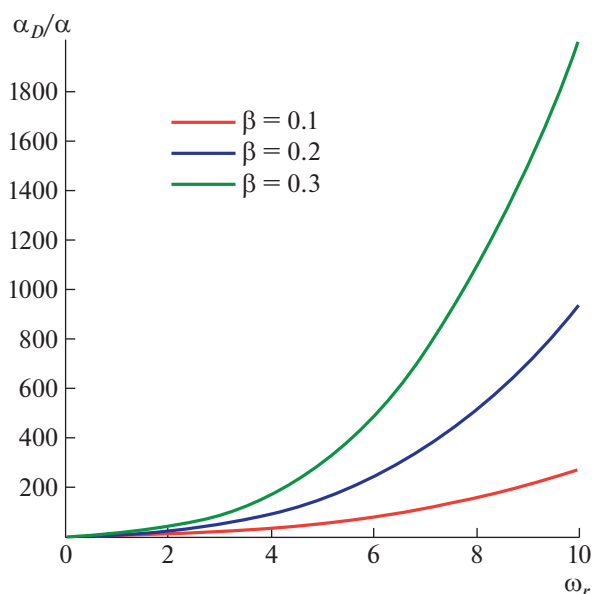


Рис. 4. Спектральная характеристика коэффициента линейного теплового расширения, $\delta = 0.1$.

теля тепловых колебаний и уменьшает температуру на поверхности по сравнению с решением несвязанной задачи.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование частично финансируется Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках программы Исследовательского центра мирового уровня “Передовые цифровые технологии” (соглашение № 075-15-2020-311 от 20.04.2022 г.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Индейцев Д.А., Кузнецов Н.Г., Мотыгин О.В., Мочалова Ю.А. Локализация линейных волн. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007. 342 с.
2. Даниловская В.И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы // Прикл. мат. и мех. 1950. Т. 14. № 3. С. 316–318.
3. Коваленко А.Д. Термоупругость. Киев: Вища шк., 1975. 216 с.
4. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. / М.: Мир, 1970. 254 с.
5. Ненахов Е.В., Карташов Э.М. Теория теплового удара в моделях динамической термоупругости // Тепловые процессы в технике. 2019. Т. 11. № 5. С. 230–240.

6. Карташов Э.М. Модельные представления теплового удара в динамической термоупругости // Russian Technological Journal. 2020. Т. 8. № 2. С. 85–108.
7. Морозов Н.Ф., Индейцев Д.А., Муратиков К.Л., Семенов Б.Н., Вавилов Д.С., Кудрявцев А.А. О влиянии релаксационных процессов на термоакустику материалов // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2021. Т. 500. С. 48–52.
8. Глазов А.Л., Муратиков К.Л. Акустические колебания алюминиевых мембран при лазерном возбуждении по термоупругому механизму // Письма в Журнал технической физики. 2020. Т. 46. № 10. С. 18–20.
9. Карташов Э.М., Партон В.З. Динамическая термоупругость и проблемы термического удара // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. 1991. Т. 22. С. 55–127.

ON THE ROLE OF COUPLING COEFFICIENT IN DYNAMIC PROBLEM OF THERMOELASTICITY WITH LOCALIZED INCLUSION

Academician N. F. Morozov^{a,b}, Corresponding Member of the RAS D. A. Indeitsev, K. L. Muratikov^c,
D. S. Vavilov^{a,d}, and A. A. Kudryavtsev^e

^a*Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia*

^b*St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia*

^c*Ioffe Institute of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia*

^d*A.F. Mozhaysky Military-Space Academy, St. Petersburg, Russia*

^e*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia*

In the present paper the dynamic problem of thermoelasticity with a localized inclusion in the medium is considered. It is shown that in the resonant regime an important role is played by the coupling coefficient of the temperature and strain fields. The coupling of the problem and the presence of a discrete spectrum lead to the appearance of an additional term in the expression for temperature, which is localized and does not describe the diffusion process.

Keywords: inclusion, dynamic thermoelasticity, coupling coefficient