ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2023, том 513, с. 81–87

МЕХАНИКА

УДК 517.977

ОПТИМИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА С ВНУТРЕННЕЙ МАССОЙ ПРИ КВАДРАТИЧНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ

 Академик РАН **Ф. Л. Черноусько**[1,*]

Поступило 06.06.2023 г.
После доработки 06.06.2023 г.
Принято к публикации 28.07.2023 г.

Рассматривается прямолинейное движение тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы, в среде с квадратичным сопротивлением. Получены условия, при которых осуществляется поступательное движение тела с периодически изменяющейся скоростью. Определена средняя скорость этого движения. Установлены условия, обеспечивающие наибольшую среднюю скорость.

Ключевые слова: динамика, оптимизация, мобильный робот

DOI: 10.31857/S2686740023060044, **EDN:** GLNGPB

В последнее время значительное внимание в мировой литературе уделяется мобильным роботам, перемещающимся за счет движения внутренних подвижных тел. Такие роботы часто называются капсульными роботами или вибророботами, так как внутренние тела (капсулы) совершают колебательные движения относительно корпуса робота. Эти роботы имеют ряд преимуществ: они просты конструктивно, легко поддаются миниатюризации, не имеют внешних подвижных элементов, их корпуса могут быть гладкими и герметичными. Поэтому капсульные роботы нашли применение в медицине для диагностики внутренних органов и доставки медикаментов. Такие роботы могут также использоваться для аппаратов, движущихся в различных средах, для технической диагностики трубопроводов.

Одной из первых работ по этой тематике была статья [1]. В работе [2] изучалось вибрационное перемещение в поле тяжести тела с внутренней массой при квадратичном внешнем сопротивлении. Оптимальные периодические движения виброробота в средах с сопротивлением исследованы в работе [3]. Оптимизации энергозатрат при движениях вибророботов в различных средах посвящены статьи [4–7]. В работах [8, 9] исследована динамика мобильных систем с внутренними массами в средах с сопротивлением. Анализу динамики капсульной системы и оптимизации ее движений в вязкой жидкости посвящены работы [10, 11]. Материал по рассматриваемой тематике и обзор соответствующей литературы представлены в книге [12].

В данной работе рассматривается поступательное прямолинейное движение тела с внутренней подвижной массой, которая перемещается с кусочно-постоянной скоростью относительно тела. Сопротивление внешней среды предполагается пропорциональным квадрату скорости тела и зависящим от направления движения. Построены движения тела с периодически изменяющейся скоростью. Найдены условия, соответствующие наибольшей средней скорости перемещения системы.

МЕХАНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Рассматриваемая система состоит из двух твердых тел: корпуса массы M и внутреннего тела массы m, которые движутся поступательно и прямолинейно (рис. 1). На корпус действует сила сопротивления среды (жидкости) R, пропорциональная квадрату его скорости. Внутреннее тело снабжено актюатором и движется в полости внутри корпуса. Предполагается, что, помимо силы сопротивления R и сил взаимодействия тел, других сил на систему не действует.

Обозначим через x и v смещение корпуса и его скорость относительно неподвижной системы координат, а через ξ, u и w – смещение внутреннего тела, его скорость и ускорение относительно корпуса соответственно. Имеем кинематические соотношения:

$$\dot{x} = v, \quad \dot{\xi} = u, \quad \dot{u} = w. \tag{1}$$

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: chern@ipmnet.ru*

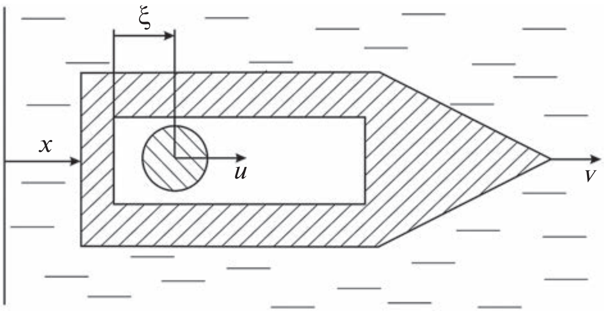

Рис. 1. Механическая система.

Обозначим через F силу, с которой корпус действует на внутреннюю массу, и запишем уравнения движения тел в виде

$$M\dot{v} = -F + R, \quad m(\dot{v} + w) = F. \tag{2}$$

Складывая уравнения (2) и вводя обозначения

$$r = \frac{R}{M+m}, \quad \mu = \frac{m}{M+m}, \tag{3}$$

получим уравнение

$$\dot{v} = -\mu w + r(v). \tag{4}$$

Нормированная сила сопротивления $r(v)$ определяется соотношениями

$$r(v) = \begin{cases} -c_+ v^2 & \text{при} \quad v \geq 0, \\ c_- v^2 & \text{при} \quad v < 0, \end{cases} \tag{5}$$

где c_+ и c_- — коэффициенты сопротивления при движении корпуса вперед и назад соответственно. Для пояснения смысла коэффициентов c_+, c_- рассмотрим движение корпуса по инерции вперед при отсутствии внутреннего тела. Полагая $w = 0$ в (4) и учитывая соотношения (5) и первое уравнение (1), получим

$$\frac{dv}{dx} = -c_+ v.$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии $v = v^0$ при $x = 0$, найдем

$$v = v^0 \exp(-c_+ x). \tag{6}$$

Таким образом, коэффициенты c_+ и c_- имеют размерность, обратную длине, и могут быть представлены в виде

$$c_+ = L_+^{-1}, \quad c_- = L_-^{-1}, \tag{7}$$

где L_+ и L_-, согласно (6), есть длины, на которых скорость тела уменьшается в e раз при движении по инерции. При предпочтении движения “вперед” для тела обтекаемой формы имеем $c_+ < c_-$ и, следовательно, $L_+ > L_-$. Введем безразмерный параметр

$$\sigma = c_+ / c_- = L_- / L_+ < 1. \tag{8}$$

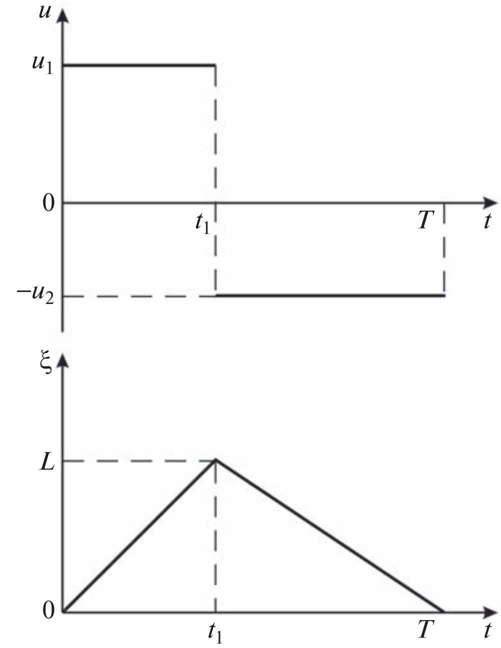

Рис. 2. Движение внутренней массы.

ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Рассмотрим следующую простейшую схему движения системы, при которой скорости изменяются периодически с периодом T. Для определенности рассматриваем движение между моментами времени непосредственно перед точками $t = 0$ и $t = T$. Скорость $u(t)$ внутреннего тела относительно корпуса считаем кусочно-постоянной и заданной в виде

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1 > 0, \quad t \in (0,\ t_1), \\ u(t) &= -u_2 < 0, \quad t \in (t_1,\ t_1 + t_2), \end{aligned} \tag{9}$$

где u_1 и u_2 — положительные постоянные, а t_1 и t_2 — длительности интервалов движения массы m вперед и назад, соответственно. Смещение $\xi(t)$ массы m относительно корпуса изменяется кусочно-линейно, причем в моменты $t = 0$ и $t = T$ эта масса находится на левом конце полости, а при $t = t_1$ — на ее правом конце. Обозначая через L длину полости, имеет соотношения

$$u_1 t_1 = u_2 t_2 = L, \quad t_1 + t_2 = T, \tag{10}$$

откуда следует равенство

$$L(u_1 + u_2) = T u_1 u_2. \tag{11}$$

Зависимости $u(t)$ и $\xi(t)$ изображены на рис. 2.

В моменты $t = 0$ и $t = t_1$ скорость $u(t)$ изменяется скачком, что, конечно, является упрощением возможной реальной ситуации, но позволяет получить замкнутые расчетные формулы.

Относительное ускорение $w(t)$ внутреннего тела, согласно уравнениям (9), представляется в виде суммы дельта-функций

$$w(t) = (u_1 + u_2)\delta(t) - (u_1 + u_2)\delta(t - t_1).$$

Тогда из уравнений (4) следует, что скорость корпуса $v(t)$ испытывает в моменты $t = 0$ и $t = t_1$ разнонаправленные скачки, равные по величине $\mu(u_1 + u_2)$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered} v_0 = v(-0), \quad v_1 = v(+0), \quad v_2 = v(t_1 - 0), \\ v_3 = v(t_1 + 0), \quad v_4 = v(T - 0) \end{gathered} \tag{12}$$

и запишем условия на скачках в виде

$$v_1 = v_0 - \mu(u_1 + u_2), \quad v_3 = v_2 + \mu(u_1 + u_2). \tag{13}$$

Ниже будет построено решение, при котором скорость $v(t)$, отвечающая заданной зависимости $u(t)$ из (9), изменяется согласно схеме, изображенной на рис. 3. В силу этого решения имеем условия

$$\begin{aligned} v(t) < 0 \quad &\text{при} \quad t \in (0,\ t_1), \\ v(t) > 0 \quad &\text{при} \quad t \in (t_1,\ T) \end{aligned} \tag{14}$$

и неравенства

$$\begin{gathered} 0 < v_0 < \mu(u_1 + u_2), \quad v_1 < v_2 < 0, \\ v_3 > v_4 > 0. \end{gathered} \tag{15}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ

На интервале $t \in (0,\ t_1)$, согласно соотношениям (4), (5) и (14), имеем уравнение

$$\dot{v} = c_- v^2.$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии $v(+0) = v_1$ из (12), получим

$$v(t) = \frac{v_1}{1 - c_- v_1 t}, \quad t \in (0,\ t_1). \tag{16}$$

Подставляя $t = t_1$ в равенство (16), находим, в соответствии с (12),

$$v(t_1 - 0) = v_2 = \frac{v_1}{1 - c_- v_1 t_1}. \tag{17}$$

На интервале (t_1, T), согласно соотношениям (4), (5) и (14), справедливо уравнение

$$\dot{v} = -c_+ v^2.$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии $v(t_1 + 0) = v_3$, вытекающем из (12), получим

$$v(t) = \frac{v_3}{1 + c_+ v_3 (t - t_1)}. \tag{18}$$

Подставим $t = t_1 + t_2$ в равенство (18) и найдем

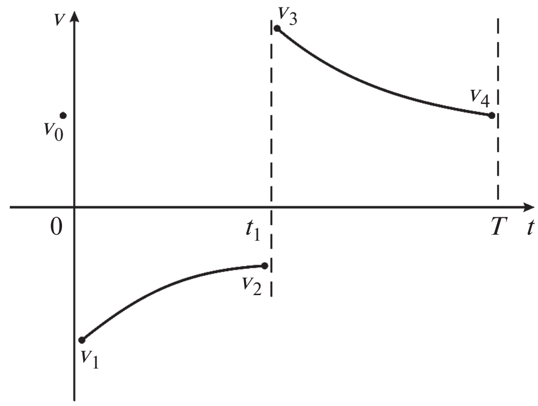

Рис. 3. Скорость корпуса.

$$v(T - 0) = v_4 = \frac{v_3}{1 + c_+ v_3 t_2}. \tag{19}$$

Введем обозначения

$$\begin{gathered} a_1 = c_- t_1, \quad a_2 = c_+ t_2, \\ U = \mu(u_1 + u_2), \quad V = v_0/U. \end{gathered} \tag{20}$$

Тогда из соотношений (13), (17) и (19) получим:

$$\begin{gathered} v_1 = v_0 - U = U(V - 1), \quad v_2 = \frac{v_1}{1 - a_1 v_1}, \\ v_3 = v_2 + U, \quad v_4 = \frac{v_3}{1 + a_2 v_3}. \end{gathered} \tag{21}$$

Условие периодичности скорости $v(t)$ можно представить в форме

$$v_4 = v_0. \tag{22}$$

Выразим последовательно все v_i, $i = 0,1,2,3,4$, через V при помощи формул (20), (21) и подставим их в условие периодичности (22). В результате получим квадратное уравнение для безразмерной начальной скорости V:

$$AV^2 + BV + C = 0, \tag{23}$$

коэффициенты которого выражаются формулами

$$A = a_1 - a_2 + a_1 a_2 U,\ B = -2a_1 - a_1 a_2 U,\ C = a_1. \tag{24}$$

Число параметров можно уменьшить, вводя безразмерные положительные величины

$$\alpha = a_2/a_1, \quad \beta = a_2 U, \tag{25}$$

через которые выразим a_1 и a_2 при помощи формул

$$a_1 = \frac{\beta}{\alpha U}, \quad a_2 = \frac{\beta}{U}. \tag{26}$$

Разрешая квадратное уравнение (23), получим в терминах введенных параметров (25):

$$V_{\pm} = \frac{2 + \beta \pm \sqrt{4\alpha + \beta^2}}{2(1 - \alpha + \beta)}. \qquad (27)$$

Согласно неравенствам (15), безразмерная скорость должна лежать в пределах

$$0 < V < 1. \qquad (28)$$

Рассмотрим оба решения $V_{\pm}$, определяемые равенством (27).

Сначала рассмотрим решение V_+. Для выполнения условия $V_+ > 0$ необходимо, чтобы $\beta > \alpha - 1$. Условие $V_+ < 1$ приводит к неравенству

$$\sqrt{4\alpha + \beta^2} < \beta - 2\alpha, \qquad (29)$$

которое не выполняется при $\beta \le 2\alpha$. Если же $\beta > 2\alpha$, то из условия (29) вытекает неравенство $\beta < \alpha - 1$, которое противоречит наложенному выше условию $\beta > \alpha - 1$. Следовательно, решение V_+ не удовлетворяет условиям (28).

Проверим выполнение условий (28) для решения

$$V = V_- = \frac{2 + \beta - \sqrt{4\alpha + \beta^2}}{2(1 - \alpha + \beta)}. \qquad (30)$$

Пусть сначала $\beta > \alpha - 1$. Тогда знаменатель выражения (30) положителен, и для выполнения условия $V > 0$ числитель также должен быть положителен, т.е. должно быть

$$2 + \beta > \sqrt{4\alpha + \beta^2}. \qquad (31)$$

Нетрудно проверить, что неравенство (31) выполняется при $\beta > \alpha - 1$. Условие $V < 1$ приводит к неравенству

$$2\alpha - \beta < \sqrt{4\alpha + \beta^2}. \qquad (32)$$

При $\beta \ge 2\alpha$ неравенство (32) выполнено, а при $\beta < 2\alpha$ оно приводится к условию

$$4\alpha^2 - 4\alpha\beta < 4\alpha,$$

которое выполняется при $\beta > \alpha - 1$. Таким образом, при $\beta > \alpha - 1$ оба неравенства (28) выполнены.

Рассмотрим теперь случай $\beta < \alpha - 1$. Чтобы имело место неравенство $V > 0$, числитель выражения (30) должен быть отрицателен, как и его знаменатель. Это условие приводит к неравенству, противоположному неравенству (31), и оно выполняется при $\beta < \alpha - 1$. Проверка условия $V < 1$ приводит к неравенству, противоположному неравенству (32), и выполняется в рассматриваемом случае $\beta < \alpha - 1$.

Итак, решение (30) удовлетворяет условиям (28) при любых α, β, если $\beta \ne \alpha - 1$.

Особый случай $\beta = \alpha - 1$ приводит в равенстве (30) к неопределенности вида 0/0. Для его разрешения положим $\alpha = \beta + 1 + \varepsilon$ в равенстве (30) и затем перейдем в нем к пределу при $\varepsilon \to 0$. В результате получим

$$V = (\beta + 2)^{-1} < 1 \quad \text{при} \quad \beta = \alpha - 1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Подсчитаем полное перемещение $x(T)$ за период движения T. Сначала найдем перемещение $x(t_1)$ на интервале $(0, t_1)$. Интегрируя скорость $v(t)$, определяемую соотношением (16), получим

$$x(t_1) = \int_0^{t_1} \frac{v_1 dt}{1 - c_- v_1 t} = -\frac{1}{c_-} \ln(1 - c_- v_1 t_1). \qquad (33)$$

Аналогично, используя равенство (18) для скорости $v(t)$ на интервале (t_1, T), найдем перемещение на этом интервале:

$$x(T) - x(t_1) = \int_{t_1}^{T} \frac{v_3 dt}{1 + c_+ v_3 (t - t_1)} = \frac{1}{c_+} \ln(1 + c_+ v_3 t_2). \qquad (34)$$

Полное перемещение за период запишем, складывая равенства (33) и (34) и используя обозначения (7) и (20):

$$x(T) = -L_- \ln(1 - a_1 v_1) + L_+ \ln(1 + a_2 v_3). \qquad (35)$$

В равенство (35) подставим соотношения для v_1 и v_3 из (21), выраженные через параметры U, V, a_1 и a_2 при помощи равенств (20). Затем преобразуем полученное выражение, используя соотношения (26) и формулу (30) для V. После преобразований получим

$$\begin{aligned} x(T) = &-L_- \ln \frac{2\alpha(1 - \alpha) + \beta^2 + \beta\sqrt{4\alpha + \beta^2}}{2\alpha(1 - \alpha + \beta)} + \\ &+ L_+ \ln \frac{(2\alpha + \beta^2)(1 - \alpha) + \beta^3 + 2\alpha\beta + \beta(1 - \alpha + \beta)\sqrt{4\alpha + \beta^2}}{2\alpha(1 - \alpha) + \beta^2 + \beta\sqrt{4\alpha + \beta^2}}. \end{aligned} \qquad (36)$$

Выражению (36) можно придать более компактную форму, если заметить, что числитель во втором слагаемом можно разложить на множители и ввести функции

$$\Phi_1(\alpha,\beta) = 1-\alpha+\beta,$$
$$\Phi_2(\alpha,\beta) = 2\alpha(1-\alpha)+\beta^2+\beta\sqrt{4\alpha+\beta^2}, \quad (37)$$
$$\Phi_3(\alpha,\beta) = 2\alpha+\beta^2+\beta\sqrt{4\alpha+\beta^2}.$$

Учитывая еще обозначение (8), получим из (36):

$$x(T) = L_+\left(-\sigma\ln\frac{\Phi_2}{2\alpha\Phi_1}+\ln\frac{\Phi_1\Phi_3}{\Phi_2}\right). \quad (38)$$

Преобразуем выражения (25) для α и β при помощи равенств (20), (7), (8), (10) и (11):

$$\alpha = \frac{\sigma u_1}{u_2}, \quad \beta = \frac{\mu u_1 T}{L_+}. \quad (39)$$

Естественно предполагать, что параметр μ, введенный в (3), является малым, и поэтому безразмерный параметр β из (39) также можно считать малым.

Задаваясь скоростями u_1 и u_2, можно определить длительности интервалов t_1 и t_2 при помощи формул (10) и параметры α,β согласно (39). Тем самым все периодическое движение однозначно определено, и перемещение $x(T)$ за период дается формулами (37) и (38).

Средняя скорость движения системы определяется равенством

$$\bar{v} = x(T)/T. \quad (40)$$

ОПТИМИЗАЦИЯ СРЕДНЕЙ СКОРОСТИ

Предполагаем, что относительная скорость внутреннего тела ограничена заданной постоянной:

$$u_1 \le u, \quad u_2 \le u. \quad (41)$$

Заметим, что из соотношений (10) и (41) вытекает неравенство

$$T = \frac{L}{u_1}+\frac{L}{u_2} \ge \frac{2L}{u},$$

откуда следует ограничение на параметры системы:

$$k = \frac{uT}{L} \ge 2. \quad (42)$$

Будем рассматривать два варианта задачи оптимизации средней скорости (40) за счет выбора скоростей u_1 и u_2 при ограничениях (41). В первом варианте длительность интервала T предполагается фиксированной, а во втором варианте она произвольна.

Рассмотрим сначала частный случай $\alpha = 1$, когда формулы (37) значительно упрощаются. В этом случае из соотношений (37) получим

$$\Phi_1 = \beta, \quad \Phi_2 = \beta^2+\beta\sqrt{4+\beta^2},$$
$$\Phi_3 = 2+\beta^2+\beta\sqrt{4+\beta^2} = \Phi_2^2/(2\beta^2).$$

Подставляя эти равенства в формулу (38) при $\alpha = 1$, найдем

$$x(T) = L_+(1-\sigma)\ln\frac{\beta+\sqrt{4+\beta^2}}{2}.$$

Считая β малым, получим отсюда

$$x(T) = \frac{\beta(1-\sigma)L_+}{2}. \quad (43)$$

Из формул (39) при $\alpha = 1$ имеем

$$u_2 = \sigma u_1 \quad (\sigma < 1). \quad (44)$$

Подставляя равенство (44) в соотношение (11), определим

$$u_1 = \frac{L(1+\sigma)}{\sigma T}. \quad (45)$$

Для выполнения ограничений (41) необходимо потребовать

$$L(1+\sigma) \le \sigma T u,$$

что приводит к условию

$$k \ge \frac{\sigma+1}{\sigma}, \quad (46)$$

где k введено равенством (42). Равенство (43) с учетом второй из формул (44) принимает вид

$$x(T) = \frac{\mu(1-\sigma^2)L}{2\sigma},$$

а средняя скорость (40) определяется равенством

$$\bar{v} = \frac{\mu(1-\sigma^2)L}{2\sigma T}. \quad (47)$$

Итак, если $\alpha = 1$ и выполнено неравенство (46), то при фиксированном T скорости u_1 и u_2 определяются равенствами (44), (45), а средняя скорость $\bar{v}$ выражается формулой (47). Если же неравенство (46) не имеет места, то при $\alpha = 1$ движение с ограничениями невозможно.

Пусть теперь $\alpha = 1$ и период T не фиксирован. Подставим в формулу (47) величину T из соотношения (45) и получим

$$\bar{v} = \frac{\mu(1-\sigma)u_1}{2}.$$

Следовательно, максимальная средняя скорость $\bar{v}$ при $\alpha = 1$ и нефиксированном T достигается при наибольшем допустимом u_1, т.е. при $u_1 = u$ и, согласно (44), при $u_2 = \sigma u$, и равна

$$\bar{v} = \frac{\mu(1-\sigma)u}{2}. \quad (48)$$

Обратимся к общему случаю произвольного $\alpha \neq 1$, считая β малым. Разложим функции (37) в ряды по параметру β, ограничиваясь членами первого порядка малости. Получим

$$\Phi_1 = 1 - \alpha + \beta,$$
$$\Phi_2 = 2\alpha(1-\alpha) + 2\beta\sqrt{\alpha} + \ldots,$$
$$\Phi_3 = 2\alpha + 2\beta\sqrt{\alpha} + \ldots.$$

Подставим эти разложения в формулу (38) и получим после упрощений

$$x(T) = \beta L_+\varphi(z), \quad (49)$$

где введены обозначения

$$z = \sqrt{\alpha}, \quad \varphi(z) = \frac{z-\sigma}{z(z+1)}. \quad (50)$$

Подставляя соотношение (39) для β в равенство (49), получим

$$x(T) = \mu u_1 T\varphi(z). \quad (51)$$

Из первого равенства (39), с учетом обозначений (50), имеет

$$u_2 = \sigma u_1 z^{-2}. \quad (52)$$

Пусть сначала период T фиксирован. Тогда на скорости u_1 и u_2 наложена связь, выражаемая равенством (11). Из этого равенства и соотношения (52) вытекает соотношение

$$u_1 = \frac{L(z^2+\sigma)}{\sigma T}. \quad (53)$$

Подставляя равенство (53) в формулу (51), найдем среднюю скорость (40) в виде

$$\bar{v} = \frac{x(T)}{T} = \frac{\mu L\psi(z)}{\sigma T}, \quad \psi(z) = (z^2+\sigma)\varphi(z), \quad (54)$$

где $\varphi(z)$ определено в соотношениях (50).

Дифференцируя функцию $\psi(z)$, получим

$$\psi'(z) = \frac{z^4 + 2z^2(z-\sigma) + 2\sigma^2 z + \sigma^2}{z^2(z+1)^2} > 0.$$

Очевидно, что это неравенство справедливо при $z \geq \sigma$, поэтому функция $\psi(z)$ монотонно возрастает при $z \geq \sigma$. Следовательно, максимальная средняя скорость $\bar{v}$ из (54) реализуется при максимальном $z \geq \sigma$, совместимом с ограничениями (41). Полагая $u_1 = u$, определим z из равенства (53) в виде

$$z = \sqrt{\left(\frac{uT}{L} - 1\right)\sigma} = \sqrt{(k-1)\sigma}, \quad (55)$$

где k введено формулой (42). Заметим, что так как $k \geq 2$ согласно (42) и $\sigma < 1$, то значение z из (55) лежит в области $z \geq \sigma$. Используя формулы (52) и (55), получим оптимальные значения скоростей u_1 и u_2 в виде

$$u_1 = u, \quad u_2 = u/(k-1) \leq u \quad (k \geq 2). \quad (56)$$

Подставляя оптимальное значение z из (55) в равенство (54) и учитывая равенство (42), получим максимальную величину средней скорости при фиксированном T:

$$\bar{v} = \frac{\mu Lk(\sqrt{k-1} - \sqrt{\sigma})}{T\sqrt{k-1}[\sqrt{\sigma(k-1)}+1]} = \frac{\mu u(\sqrt{k-1} - \sqrt{\sigma})}{\sqrt{k-1}[\sqrt{\sigma(k-1)}+1]}. \quad (57)$$

Обратимся к случаю нефиксированного T. Используя равенство (51), выразим среднюю скорость (40) в виде соотношения

$$\bar{v} = \frac{x(T)}{T} = \mu u_1\varphi(z). \quad (58)$$

Дифференцируя функцию $\varphi(z)$ из (50), получим

$$\varphi'(z) = \frac{-z^2 + 2\sigma z + \sigma}{z^2(z+1)^2}.$$

Отсюда следует, что единственный максимум функции $\varphi(z)$ при $z > 0$ достигается при

$$z = z_* = \sqrt{\sigma(\sigma+1)} + \sigma = \sqrt{\sigma}\left(\sqrt{\sigma+1} + \sqrt{\sigma}\right). \quad (59)$$

Выбирая максимально возможную величину u_1, получим из (52)

$$u_1 = u, \quad u_2 = \sigma u z_*^2 = u\left(\sqrt{\sigma+1} + \sqrt{\sigma}\right)^{-2} < u. \quad (60)$$

Подставляя значения u_1 и u_2 из (60) в равенство (58), имеем:

$$\bar{v} = \frac{\mu u}{\left(\sqrt{\sigma+1} + \sqrt{\sigma}\right)^2}. \quad (61)$$

Таким образом, максимальное значение средней скорости $\bar{v}$ определено равенствами (57) и (61) при фиксированном и нефиксированном значении периода T соответственно. Оптимальные значения скоростей внутреннего тела u_1 и u_2 заданы равенствами (56) и (60) для соответствующих случаев.

Отметим, что оптимальное значение периода T в случае нефиксированного T можно определить, подставляя значения u_1 и u_2 из (60) в равенство (11). Получим

$$T = 2Lu^{-1}\sqrt{\sigma+1}(\sqrt{\sigma+1} + \sqrt{\sigma}).$$

Можно проверить, что, как и следовало ожидать, найденные оптимальные значения $\bar{v}$ больше или равны соответствующих значений (47) и (48), полученных в частном случае $\alpha = 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены соотношения, определяющие поступательное периодическое движение тела с внутренней подвижной массой в среде с квадратичным сопротивлением. Вычислены параметры движения, определена его средняя скорость. Найдены условия, определяющие максимальную среднюю скорость поступательного движения при различных ограничениях. Полученные результаты могут представлять интерес для управления подвижными аппаратами.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00128, https://rscf.ru/project/23-11-00128/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нагаев Р.Ф., Тамм Е.А.* Вибрационное перемещение в среде с квадратичным сопротивлением движению // Машиноведение. 1980. № 4. С. 3–8.
2. *Герасимов С.А.* О вибрационном полете симметричной системы // Известия вузов. Машиностроение. 2005. № 8. С. 3–7.
3. *Черноусько Ф.Л.* Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 202–215.
4. *Егоров А.Г., Захарова О.С.* Оптимальное по энергетическим затратам движение виброробота в среде с сопротивлением // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74. Вып. 4. С. 620–632.
5. *Егоров А.Г., Захарова О.С.* Оптимальное квазистационарное движение виброробота в вязкой среде // Известия вузов. Математика. 2012. № 2. С. 57–64.
6. *Liu Y., Wiercigroch M., Pavlovskaya E., Yu.Y.* Modeling of a vibro-impact capsule system // International Journal of Mechanical Sciences. 2013. V. 66. P. 2–11.
7. *Liu Y., Pavlovskaya E., Hendry D., Wiercigroch M.* Optimization of the vibroimpact capsule system // Journal of Mechanical Engineering. 2016. V. 62. P. 430–439.
8. *Fang H.B., Xu J.* Dynamics of a mobile system with an internal acceleration-controlled mass in a resistive medium // Journal of Sound and Vibration. 2011. V. 330. P. 4002–4018.
9. *Xu J., Fang H.* Improving performance: recent progress on vibration-driven locomotion systems // Nonlinear Dynamics. 2019. V. 98. P. 2651–2669.
10. *Tahmasian S., Jafaryzad A., Bulzoni N.L., Staples A.E.* Dynamic analysis and design optimization of a drag-based vibratory swimmer // Fluids. 2020. V. 5. № 1. https://doi.org/10.3390/fluids5010038
11. *Tahmasian S.* Dynamic analysis and optimal control of a drag-based vibratory systems using averaging // Nonlinear Dynamics. 2021. V. 104. P. 2201–2217.
12. *Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н.* Динамика мобильных систем с управляемой конфигурацией. М.: Физматлит, 2022. 464 с.

OPTIMIZATION OF THE MOTION OF A BODY WITH AN INTERNAL MASS UNDER QUADRATIC RESISTANCE

Academician of the RAS F. L. Chernousko[a]

[a]*A.Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Rectilinear motion of a body controlled by a movable internal mass in a medium with a quadratic resistance is considered. Conditions are obtained that ensure translation of the body with a velocity changing periodically. The average speed of the motion is determined. Conditions that guarantee the maximum average speed are established.

Keywords: dynamics, optimization, mobile robot