

УДК 519.63

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕОЛОГИИ ЛЬДА НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МЕДЛЕННОГО УДАРА

© 2024 г. Член-корреспондент РАН И. Б. Петров^{1,*}, Е. К. Гусева^{1,2,**},
В. И. Голубев^{1,***}, В. П. Епифанов^{2,****}

Поступило 17.08.2023 г.

После доработки 17.08.2023 г.

Принято к публикации 13.11.2023 г.

Лед является материалом со сложной неоднородной структурой. Его свойства зависят от многих факторов и изменяются в процессах деформирования. Таким образом, вопрос о выборе реологической модели льда остается открытым. В данной работе исследуется поведение льда на примере медленного удара по нему шаровым индентором. Целью ставится разработка методики подбора подходящей модели методами численного моделирования на основе сравнения с экспериментом. Рассматриваются модели упругости, упругопластичности с критериями фон Мизеса и Мизеса–Шлейхера, модель упругости с упругопластическим включением. Определяющая система уравнений решается сеточно-характеристическим методом. Сравнение моделей проводится на основе мгновенной скорости и глубины осадки шара. Изучается влияние параметров моделей на полученные результаты. В итоге подбирается набор параметров, восстанавливающий решение ближе всех к эксперименту.

Ключевые слова: реология льда, математическое моделирование, сеточно-характеристический метод, упругопластичность

DOI: 10.31857/S2686740024010033, **EDN:** OTWEQS

Лед играет центральную роль в Арктическом регионе, который привлекает большой интерес исследователей. Каждый тип природного льда имеет отличные от других типов механические свойства [1], определяемые его кристаллической структурой [2, 3]. Модель изотропной линейной теории упругости выбрана базовой моделью для поликристаллического льда [4]. Несмотря на это, подбор подходящих параметров для данной модели осложняется влиянием на лед различных факторов, таких как температура [5, 6], соленость [7, 8] и пористость [9].

Другой особенностью льда является изменение его поведения при различных способах деформирования. При прохождении акустической волны малой амплитуды лед деформируется упруго. Затем при приложении существенных нагрузок либо осуществляется переход в пластический режим, либо происходит хрупкое разрушение [10]. Некоторые модели позволяют учесть оба эффекта [11, 12]. Вязкость льда рассматривается в [13], а в [14] изучается его ползучесть. Однако для медленного столкновения вопрос о выборе подходящей модели не до конца решен.

В связи с данным фактом в сообщении исследуется поведение льда при низкоскоростном ударе шаровым индентором. Целью ставится численное моделирование лабораторного эксперимента, проведенного в лаборатории Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук. Изучаются реологические модели упругопластичности с критерием текучести фон Мизеса [15] и Мизеса–Шлейхера

¹Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

²Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: petrov@mipt.ru

**E-mail: guseva.ek@phystech.edu

***E-mail: golubev.vi@mipt.ru

****E-mail: evp@ipmnet.ru

[16] и упругости с упругопластическим включением в зоне удара. Решение определяющей системы уравнений производится сеточно-характеристическим методом [17, 18] на структурированных сетках.

ЛАБОРАТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Лабораторный эксперимент проводился с ледяными дисками в холодильной камере, в которой поддерживалась постоянная температура -10°C . В качестве индентора применен стальной шар, внутри которого жестко крепился пьезоэлектрический акселерометр. Скорость шара контролировалась высотой его поднятия, в начале соударения она равнялась 0.56 м/с . Ледяной диск опирался на массивную плиту с возможностью скольжения. Для регистрации фронта прошедшей волны на тыльной поверхности ледяного диска в точке на линии удара также крепился акселерометр. Геометрические характеристики эксперимента, а также экспериментальные графики показаны на рис. 1.

РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Для моделирования эксперимента рассматривались несколько реологических моделей. В качестве основной определяющей системы уравнений использовалась гиперболическая система уравнений изотропной линейной теории упругости [4], в которой неизвестными выступают напряжения σ и скорости v . Данная модель описывает продольную и поперечную волны со скоростями c_p , c_s . В итоге характеристики c_p , c_s и плотность ρ можно использовать как параметры упругой модели. В шаре и плите они задавались равными: $c_p = 5700\text{ м/с}$, $c_s = 3100\text{ м/с}$, $\rho = 7800\text{ кг/м}^3$, во льду: $c_p = 3600\text{ м/с}$, $c_s = 1942\text{ м/с}$, $\rho = 917\text{ кг/м}^3$.

Для решения системы определяющих уравнений использовался сеточно-характеристический метод [17, 18]. Согласно методу, производится расщепление по физическим процессам и переход к инвариантам Римана. Таким образом, изначальная система сводится к системе независимых уравнений переноса, для решения которых использовалась сеточно-характеристическая схема 3-го порядка, которая монотонизировалась с помощью сеточно-характеристического критерия монотонности [19, 20].

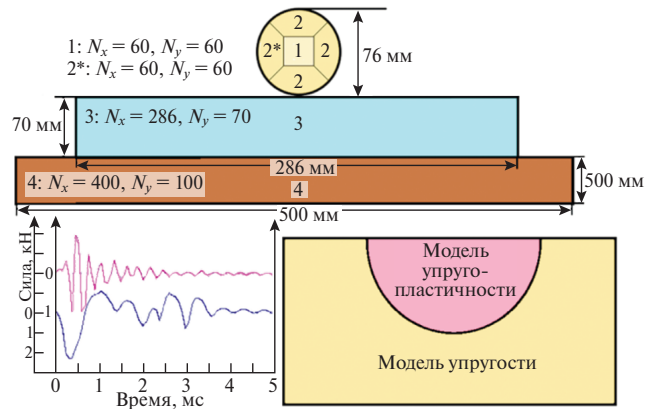


Рис. 1. Сверху — общий вид расчетной области и параметры сетки, 2D. Снизу слева — экспериментальные графики, синяя кривая — с приемника в шаре, фиолетовая — с приемника на нижней поверхности льда. Снизу справа — макет льда в модели упругости с упругопластическим включением в форме полукруга заданного радиуса.

Для учета пластического поведения льда модель упругости модифицировалась. Использовалась версия модели Прандтля–Рейсса [15], в которой производилась коррекция девиатора тензора напряжения, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ll} \delta_{ij} \delta_{mm}^{-1}$, при нарушении критериев текучести: $s_{ij} = \frac{\sqrt{2}s_{ij}k}{\sqrt{s_{ij}s_{ij}}}$.

В качестве критериев были выбраны критерий фон Мизеса [15]: $0.5s_{ij}s_{ij} - k^2 > 0$, k — предел упругости, а также критерий Мизеса–Шлейхера [16], в котором присутствует зависимость предела упругости от давления $p = -\sigma_{ll} \delta_{mm}^{-1}$: $k = k_0 + ap$. На иллюстрациях для данной модели нами используется сокращение УП (упругопластичность).

Последняя рассматриваемая модель льда заключается в выделении из упругой среды области пластичности в зоне удара. В данной работе эта область имеет форму полукруга заданного постоянного радиуса с центром в центре ледяного диска как на рис. 1 снизу справа. В ячейках, входящих в границы полукруга, использовалась вышеописанная модель упругопластичности, в остальных — модель упругости. Данная модель получила название “модель упругости с УП включением”. В расчетах варьировались предел упругости k (в дальнейшем единицы измерения, Па, будут опущены), параметры в критерии Мизеса–Шлейхера k_0 (Па), a , радиус упругопластического включения r (мм).

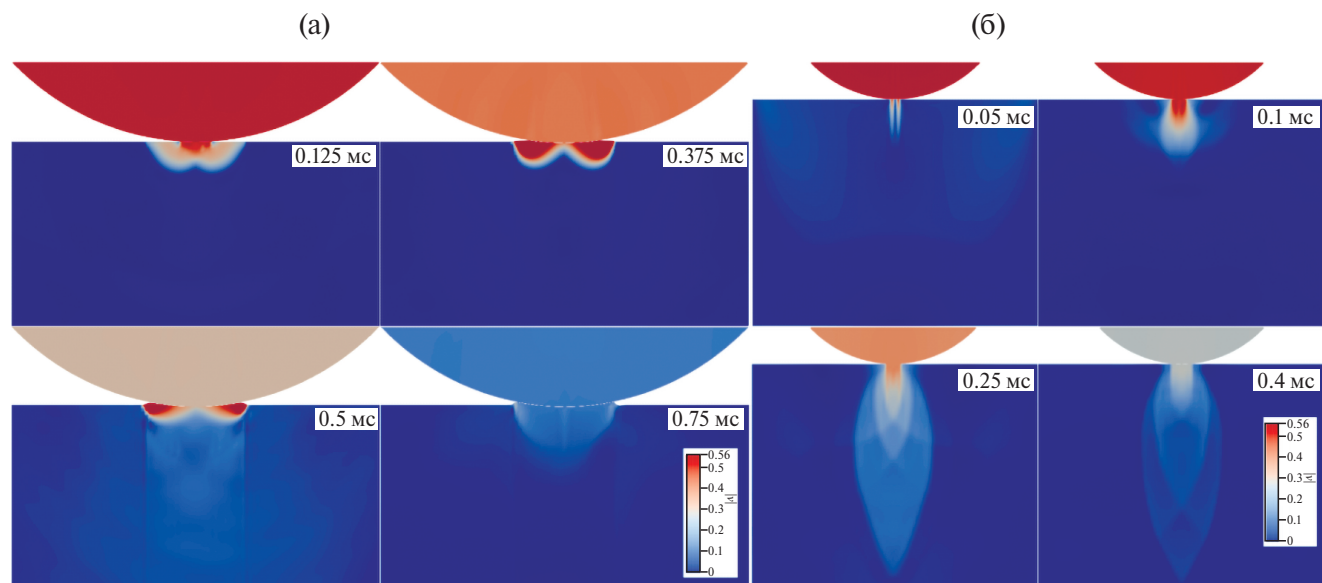


Рис. 2. Волновые картины в расчетах по модели упругости с упругопластическим включением $r = 7.5$, $k = 3 \cdot 10^5$ (а); по модели упругопластичности с условием Мизеса–Шлейхера в центральной области льда, $k_0 = 3 \cdot 10^5$, $a = 0.5$ (б).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для численных расчетов в двумерном случае расчетная область разбивалась на сегменты согласно рис. 1: 1, 2 соответствуют шару, 3 — льду, 4 — плите. В каждом сегменте строилась структурированная сетка, число ячеек вдоль горизонтальной N_x и вертикальной N_y осей указаны на рисунке, шаг по времени равнялся $5 \cdot 10^{-8}$ с. Сетки под номерами 2 формировались вращением сетки 2*. Между областями 1–2 ставилось контактное условие полного слипания, между 2–3 и 3–4 — условие проскальзывания в области контакта. На боковых и нижней границах подставки использовалось условие поглощения, на поверхности шара, льда, выступающей верхней поверхности подставки была установлена свободная граница. В качестве начального условия в сетках шара задавалась скорость соударения 0.56 м/с, сетки сдвигались с помощью коррекции по Лагранжу. Узлы сеток шара и льда, находящиеся на расстоянии 0.05 мм друг от друга, считались контактирующими. Изначальное расстояние между ними также равнялось 0.05 мм.

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

На рис. 2 представлены волновые картины в расчетах по модели упругости с упругопластическим включением (а) и модели упругопластичности

с условием Мизеса–Шлейхера (б). В первом случае образуются структуры, которые, по-видимому, соответствуют образованию трещин [21] и наблюдаются в других численных экспериментах [22]. На рис. 2а также видна характерная лунка, образованная в этих структурах. Лед начинает приподниматься по краям зоны контакта с шаром в момент времени 0.375 мс после начала расчета, до тех пор, пока лунка полностью не формируется к 0.75 мс. Данные явления не наблюдаются на рис. 2б. Таким образом проявляется недостаток изображенной модели.

Сравнение с лабораторным экспериментом производилось на основе скорости шара, рассчитанной по силе F из экспериментального графика и массе шара m по формуле

$$v(t) = 0.56 + \frac{1}{m} \int_0^t F(\tau) d\tau.$$

Дополнительно применялось преобразование

$$v(t) = 0.56 \left(1 - \frac{v - 0.56}{\min(v - 0.56)} \right),$$

для сведения конечной скорости к нулю. Таким образом, получаются графики, которые должны соответствовать модулю вертикальной проекции скорости. Для проведения оценок в качестве первого критерия для подбора параметров

было выбрано время, когда ускорение шара меняет свой знак и скорость шара достигает минимума, $t_{v=0} = 0.7$ мс.

Дополнительной величиной для сравнения была выбрана глубина осадки шара, координата его нижней точки. Затем получившаяся вертикальная проекция скорости интегрировалась для получения координаты:

$$x(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau.$$

Для интегрирования использовалась формула Симпсона. На основе полученной величины был выработан второй критерий отбора параметров — максимальная глубина осадки: $x_{\max} = 0.2253$ мм.

В результате расчетов были построены кривые, изображенные на рис. 3: модуль вертикальной проекции тензора напряжений σ_{yy} , глубина осадки x и модуль скорости $v_y \approx v$ от времени в нижней точке шара. Можно заметить качественную разницу между кривой скорости из эксперимента и кривыми, полученными в результате расчетов, что может быть связано с несовершенством выбранных моделей. Рисунок 3 также позволяет определить основные особенности рассматриваемых моделей. Для модели упругости характерна наивысшая амплитуда σ_{yy} , наименьшее значение $x_{\max}$, а также наименьшее время $t_{v=0}$. При использовании во льду модели упругопластичности с критерием текучести фон Мизеса с достаточно большим пределом упругости k решение будет совпадать с моделью упругости. При уменьшении k значительно падает амплитуда σ_{yy} , увеличивается $x_{\max}$ и время $t_{v=0}$, а кривые скорости сдвигаются вправо. Для данной модели удастся подобрать параметр $k = 7.5 \cdot 10^5$ так, чтобы получить значение критериев близко к экспериментальным (ярко-голубая кривая на рис. 3 во втором ряду: $t_{v=0} = 0.7065$, $x_{\max} = 0.2281$).

Однако в расчете не удастся полностью воспроизвести наблюдаемые в эксперименте явления. Волновые картины оказываются сходными с изображением на рис. 2 в момент времени 0.125 мс. Форма структур остается практически постоянной до отскока. В результате образуется небольшая лунка без поднятия материала на ее границах, что не соответствует наблюдениям

в лабораторном эксперименте. Таким образом, возникает необходимость модификации данной модели.

Следующей рассмотренной моделью стала модель упругопластичности с критерием Мизеса—Шлейхера. В данном случае изменение параметра k_0 сходно с изменением k . Наибольший интерес представляет изменение a . Увеличение a приводит к увеличению суммарного предела упругости, однако при этом отсутствует стремление результатов к модели упругости, что можно наблюдать при $a > 1$ на верхнем ряду на рис. 3. К тому же на графиках модуля вертикальной проекции тензора напряжений начинают образовываться осцилляции, сходные с эффектами на деформационных кривых в других экспериментах [23]. Таким образом проявляется упругопластическое поведение мишени.

Благодаря введению зависимости предела упругости от давления открывается возможность для получения бесконечного множества параметров, позволяющих воспроизвести значения $t_{v=0}$, $x_{\max}$ близко к экспериментальным. При этом появляется ограничение, связанное с тем, что при $k_0 \geq 7.5 \cdot 10^5$ невозможно подобрать подходящий параметр a , так как увеличение a сдвигает кривые скорости влево, дальше от нужного значения $t_{v=0}$.

В последней рассматриваемой модели, модели упругости с упругопластическим включением с критерием фон Мизеса, центральным параметром является радиус включения r . Согласно среднему ряду на рис. 3, при нулевом значении r производится расчет по модели упругости. Затем при увеличении r понижается амплитуда σ_{yy} , причем это происходит неравномерно: сильнее в начале столкновения. Также увеличивается $x_{\max}$ и время $t_{v=0}$. Для $k = 3 \cdot 10^5$ для того, чтобы подобрать значение $t_{v=0}$, близкое к экспериментальному, необходимо искать необходимое значение радиуса в диапазоне от 7.5 до 8 мм. Однако при этом совпадение по координате x не будет наблюдаться.

В случае варьирования k для разных r можно получить бесконечное множество подходящих параметров согласно выбранным критериям. Несмотря на это, согласно нижнему ряду на рис. 3, для $r \leq 7$ не удастся подобрать k . Это связано с тем, что для того чтобы подобрать

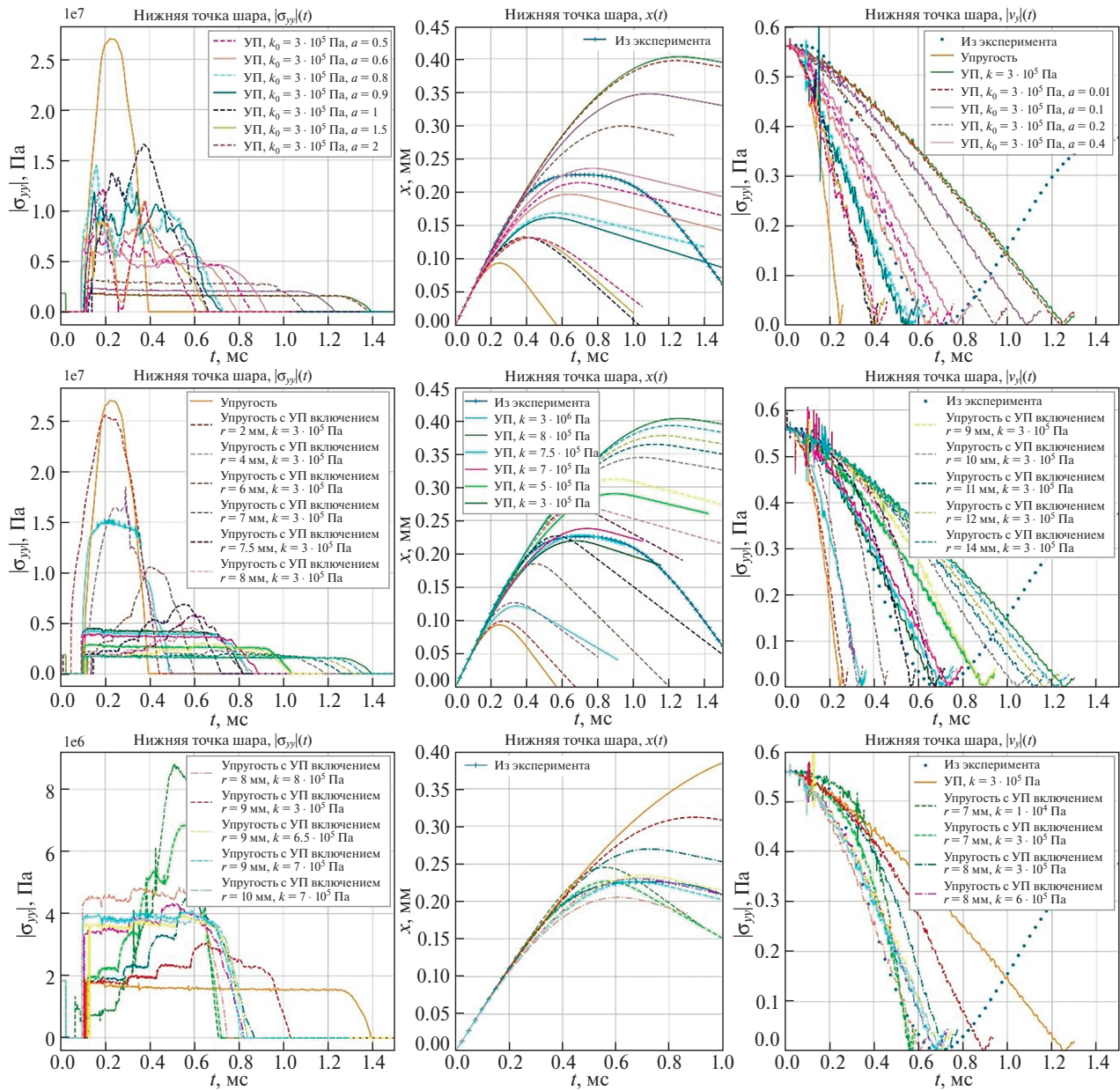


Рис. 3. Результаты расчетов. Ряды имеют одинаковую легенду. 1-й столбец — модуль вертикальной проекции тензора напряжений от времени в нижней точке шара, 2-й — координата, 3-й — модуль скорости.

значение $t_{v=0}$, близкое к экспериментальному, в данном случае необходимо уменьшать k и сдвигать кривые скорости вправо. При этом возникает предел, при котором предел упругости становится настолько малым, что критерий фон Мизеса начинает выполняться во всех точках включения. Таким образом, дальнейшее уменьшение k не будет оказывать значимого влияния на результаты.

Примерно при таких же радиусах $r \approx 7$ меняется поведение кривых $|\sigma_{yy}|(t)$. При больших

радиусах изменение кривых при увеличении k гораздо более равномерное: амплитуда на всех этапах соударения растет примерно одинаково. При малых радиусах на поздних этапах столкновения напряжения постепенно увеличиваются. Также кривая координаты при $k = 3 \cdot 10^5$ и $r = 7$ демонстрирует несовершенство выбранного критерия подбора параметров по $x_{\max}$. В данном случае $x_{\max} = 0.2266$ близко к нужному значению в 0.2253. Однако при этом из-за того, что $t_{v=0}$ оказывается значительно меньше

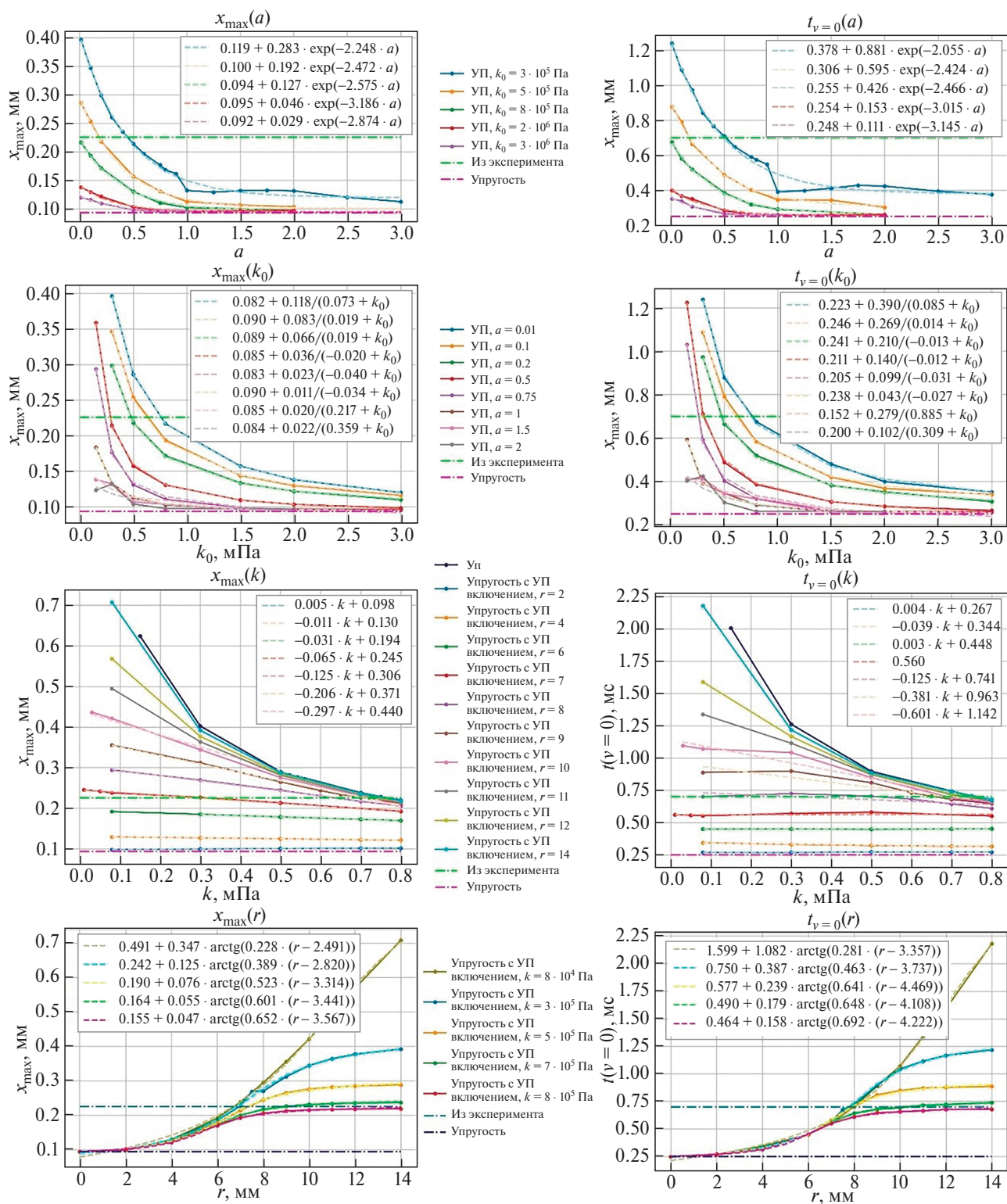


Рис. 4. Максимальная глубина осадки (слева) и момент времени, когда модуль скорости минимален (справа), в зависимости от параметров рассматриваемых моделей. В каждом ряду сплошные линии соответствуют кривым с одинаковыми параметрами (легенда по центру).

экспериментального, график x располагается левее. При больших радиусах удается подобрать k так, чтобы график сдвигался вправо, что

позволяет более точно воспроизвести вид экспериментальной кривой даже при $x_{\max} > 0.2253$. Из-за этого одним из направлений дальнейшей

Таблица 1. Рассчитанные значения параметров по аппроксимирующим кривым на рис. 4

№ ряда	Фиксированный параметр	Прогноз по $t_{v=0}$	Прогноз по $x_{\max}$
1	$k_0 = 5 \cdot 10^5$	$a = 0.17$	$a = 0.175$
2	$a = 0.01$	$k_0 = 7.4 \cdot 10^5$	$k_0 = 7.44 \cdot 10^5$
2	$a = 0.1$	$k_0 = 6.14 \cdot 10^5$	$k_0 = 6.26 \cdot 10^5$
2	$a = 0.2$	$k_0 = 4.75 \cdot 10^5$	$k_0 = 4.8 \cdot 10^5$
4	$k = 3 \cdot 10^5$	$r = 7.79$	$r = 6.9$
4	$k = 5 \cdot 10^5$	$r = 10.02$	$r = 9.16$
4	$k = 8 \cdot 10^5$	$r = 24.9$	$r = 23.24$
4	$k = 8 \cdot 10^4$	$r = 7.79$	$r = 6.71$

работы можно указать выработку новых критериев подбора параметров, основанных, например, на мере отклонения результатов расчетов от эксперимента.

В дополнение для $r \in [8, 10]$ удается воспроизвести значения $t_{v=0}$ и $x_{\max}$ близко к экспериментальным. Для $r = 8$ (пурпурная кривая на нижнем ряду на рис. 3) при $k = 6 \cdot 10^5$ они равны 0.6805 и 0.2302. Для $r = 9$ (желтая кривая) при $k = 6.5 \cdot 10^5 - 0.7045$ и 0.234 и при $k = 7 \cdot 10^5$ (ярко-голубая кривая) – 0.6785 и 0.2259. Для $r = 10$ (серо-голубая кривая) при $k = 7 \cdot 10^5 - 0.7035$, 0.2308.

Для количественного воспроизведения вышеописанных трендов на рис. 4 были построены графики $t_{v=0}$ и $x_{\max}$ в зависимости от параметров рассматриваемых моделей. Можно отметить высокую корреляцию между выбранными критериями. Для рассмотренных моделей подобраны аппроксимирующие кривые, найдены параметры, при которых выполняется: $t_{v=0} = 0.7$ и $x_{\max} = 0.2253$. Для начала зависимость критериев от k в модели упругопластичности с критерием фон Мизеса (темно-синяя кривая в третьем ряду) имеет ниспадающий тренд. Данная кривая располагается правее кривых для моделей с критерием Мизеса–Шлейхера и с упругопластическим включением.

Для модели упругопластичности с критерием Мизеса–Шлейхера графики критериев от a экспоненциально затухают, зависимость от k_0 имеет форму ниспадающей гиперболы. Однако при малых k_0 и больших $a > 1$ качество аппроксимации падает, появляется новое ограничение: уменьшение k_0 не приводит к росту значений критериев. С другой стороны, при $k_0 \geq 0.8$ и

$k_0 = 0.3$ визуально воспроизводится невозможность подбора подходящего a .

В случае модели упругости с упругопластическим включением графики $t_{v=0}$ и $x_{\max}$ от k имеют немного более пологий ниспадающий тренд. Для $r \leq 10$ появляется возможность для линейной аппроксимации кривых. При уменьшении r наблюдается уменьшение коэффициента наклона прямых и их амплитуды. Снова наблюдается разделение поведения кривых по радиусу: оказывается, что для $r \leq 8$ критерии становятся почти постоянными при всех значениях k . При устремлении r к 0 проявляется стремление к модели упругости. Данный факт подтверждается графиками $t_{v=0}$ и $x_{\max}$ от r . Аппроксимирующие кривые в данном случае хорошо описываются функцией арктангенса. Однако при малых k поведение кривой похоже на более простую степенную зависимость.

Результаты рассчитанных прогнозов по аппроксимирующим кривым представлены в табл. 1. Заметно, что полученные предсказанные значения довольно близки друг к другу. В результате построенные аппроксимации позволяют сужать область допустимых параметров моделей. Однако более полную информацию можно получить при рассмотрении многомерных зависимостей критериев от параметров, что можно указать в качестве цели для дальнейшей работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате данной работы выполнено численное моделирование медленного удара шаровым индентором по льду. Исследовались модели упругости, упругопластичности с критериями

фон Мизеса и Мизеса—Шлейхера, модель упругости с упругопластическим включением. В случае применения последней модели была воспроизведена характерная вмятина, образующаяся в процессе удара. Предложены критерии отбора параметров моделей и разработана методика сравнения результатов численных расчетов и эксперимента. Были построены одномерные аппроксимирующие зависимости данных критериев от параметров моделей. Оценены значения, позволяющие приблизить численное решение к результатам эксперимента. Дальнейшим направлением исследований можно указать рассмотрение других реологических моделей, проведение расчетов в трехмерной постановке, построение многомерных зависимостей критериев отбора от всех параметров.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00384).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Staroszczyk R.* Formation and Types of Natural Ice Masses / In: *Ice Mechanics for Geophysical and Civil Engineering Applications*. GeoPlanet: Earth and Planetary Sciences. Springer, Cham. 2018. P. 7–19. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-03038-4_2
2. *Maurel A, Lund F, Montagnat M.* Propagation of elastic waves through textured polycrystals: application to ice // *Proc. Math. Phys Eng. Sci.* 2015. V. 71. № 2177. 20140988. <https://doi.org/10.1098/rspa.2014.0988>
3. *Muguruma J.* Effects of surface condition on the mechanical properties of ice crystal // *J. Physics D: Applied Physics*. 1969. V. 2. № 11. P. 1517–1525. <https://www.doi.org/10.1088/0022-3727/2/11/305>
4. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
5. *Sinha N.H.* Elasticity of natural types of polycrystalline ice // *Cold Regions Science and Technology*. 1989. V. 17. № 2. P. 127–135. [http://dx.doi.org/10.1016/S0165-232X\(89\)80003-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0165-232X(89)80003-5)
6. *Neumeier J.J.* Elastic Constants, Bulk Modulus, and Compressibility of H₂O Ice Ih for the Temperature Range 50 K–273 K // *J. Phys. Chem. Ref. Data*. 2018. V. 47. № 3. 033101. <http://dx.doi.org/10.1063/1.5030640>
7. *Langleben M.P.* Youngs modulus for sea ice // *Canadian Journal of Physics*. 1962. V. 40. № 1. P. 1–8. <http://dx.doi.org/10.1139/p62-001>
8. *Frankenstein G., Garner R.* Equations for Determining the Brine Volume of Sea Ice from –0.5° to –22.9 °C // *J. Glaciology*. 1967. V. 6. № 48. P. 943–944. <https://doi.org/10.3189/S0022143000020244>
9. *Timco G.W., Weeks W.F.* A review of the engineering properties of sea ice // *Cold Regions Science and Technology*. 2010. V. 60. № 2. P. 107–129. <http://dx.doi.org/10.1016/j.coldregions.2009.10.003>
10. *Schulson E.M.* Brittle failure of ice // *Engineering Fracture Mechanics*. 2001. V. 68. № 17–18. P. 1839–1887. [http://dx.doi.org/10.1016/S0013-7944\(01\)00037-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00037-6)
11. *Ince S. T., Kumar A., Paik J. K.* A new constitutive equation on ice materials // *Ships and Offshore Structures*. 2017. V. 12. № 5. P. 610–623. <https://doi.org/10.1080/17445302.2016.1190122>
12. *Snyder S.A., Schulson E.M., Renshaw C.E.* Effects of prestrain on the ductile-to-brittle transition of ice // *Acta Materialia*. 2016. V. 108. № 10. P. 110–127. <http://dx.doi.org/10.1016/j.actamat.2016.01.062>
13. *Jellinek H.H.G., Brill R.* Viscoelastic Properties of Ice // *J. Applied Physics*. 1956. V. 27. № 10. P. 1198–1209. <https://doi.org/10.1063/1.1722231>
14. *Schulson E.M., Duval P.* Ductile behavior of polycrystalline ice: experimental data and physical processes. / In: *Creep and Fracture of Ice*. 2009. P. 101–152. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511581397.007>
15. *Качанов Л.М.* Механика пластических сред. М.: Гостехиздат, 1948. 217 с.
16. *Коврижных А.М.* Уравнения плоского напряженного состояния при условии пластичности Мизеса—Шлейхера // *Прикладная механика и техническая физика*. 2004. Т. 45. № 6. С. 144–153.
17. *Petrov I.B.* Grid-characteristic methods. 55 years of developing and solving complex dynamic problems // *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023. V. 6. № 1. P. 6–21. <http://dx.doi.org/10.23947/2587-8999-2023-6-1-6-21>
18. *Petrov I.B., Golubev V.I., Ankipovich Y.S., Favor-skaya A.V.* Numerical Modeling of Acoustic Processes in Gradient Media Using the Grid-Characteristic Method // *Dokl. Math*. 2022. V. 106. № 3. P. 449–453. <http://dx.doi.org/10.1134/S1064562422700090>
19. *Kholodov A.S., Kholodov Y.A.* Monotonicity criteria for difference schemes designed for hyperbolic equations // *Comput. Math. and Math. Phys*. 2006. V. 46. № 9. P. 1560–1588. <http://dx.doi.org/10.1134/S0965542506090089>

20. Гусева Е.К., Голубев В.И., Петров И.Б. Линейные квазимонотонные и гибридные сеточно-характеристические схемы для численного решения задач линейной акустики // Сиб. журн. вычисл. математики. 2023. Т. 26 № 2. С. 135–147. <http://dx.doi.org/10.15372/SJNM20230202>
21. Epifanov V.P. Physical mechanisms of ice contact fracture // Dokl. Phys. 2007. V. 52. № 1. P. 19–23. <http://dx.doi.org/10.1134/S1028335807010053>
22. Епифанов В.П., Лычев С.А. Волновые явления при ударе жесткого индентора о лед // Волны и вихри в сложных средах: 13-я международная школа-конференция молодых ученых. Сборник материалов школы. 2022. С. 105–108.
23. Епифанов В.П. Особенности контактного разрушения льда // Лед и Снег. 2020. Т. 60. № 2. С. 274–284. <https://doi.org/10.31857/S2076673420020040>

ICE RHEOLOGY EXPLORATION BASED ON NUMERICAL SIMULATION OF LOW-SPEED IMPACT

**Corresponding Member of the RAS I. B. Petrov^a, E. K. Guseva^{a,b},
V. I. Golubev^a, V. P. Epifanov^a**

^a*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russia*

^b*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Ice is a complex heterogeneous medium. Its behavior depends on many factors and changes in different processes. Thus, the problem of the determination of the correct rheological model is still unsolved. In this work low-speed impact on ice by the ball striker is considered. The main focus of the research is the development of the method of the correct model selection based on the computer simulation of the laboratory experiment. The simulation was conducted using the following rheology models: isotropic linear elasticity model, elastoplasticity model with the von Mises and the von Mises-Schleicher yield criteria, elasticity model with elastoplastic inclusion. The governing system of equations is solved using grid-characteristic method. Models' comparison is performed based on the ball's velocity and depth of ball's immersion into the ice. The model parameters' influence on the results is surveyed. As a result, the parameters that reconstruct the solution close to the experimental results are chosen.

Keywords: ice rheology, mathematic simulation, grid-characteristic method, elastoplasticity