

УДК 521.1+629.78

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ОХОЦИМСКОГО–ЕГОРОВА
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЭЙЛЕРА–ЛАМБЕРТА© 2024 г. В. В. Ивашкин^{1,2,*}

Представлено академиком РАН А.М. Липановым 04.10.2023 г.

Поступило 17.10.2023 г.

После доработки 17.10.2023 г.

Принято к публикации 13.11.2023 г.

Рассмотрено решение задачи Эйлера–Ламберта, состоящей в построении орбиты, проходящей через две заданные точки центрального ньютоновского гравитационного поля при заданном центральном угле перелета и заданном времени перелета. Исследован метод решения этой задачи, заключающийся, как предложил В.А. Егоров, в подборе угла наклона вектора начальной скорости точки к трансверсали так, чтобы время перелета между заданными точками пространства равнялось заданному. При этом задание указанного угла наклона начальной скорости к трансверсали позволяет по формуле Охоцимского аналитически определить величину этой скорости и затем определить всю орбиту. Сделан вывод, что данный метод, которому предложено дать имя Охоцимского–Егорова, можно положить в основу решения задачи Эйлера–Ламберта.

Ключевые слова: центральное ньютоновское гравитационное поле, материальная точка, задача Эйлера–Ламберта, метод Охоцимского–Егорова, формула Охоцимского

DOI: 10.31857/S2686740024010093, EDN: ONYAON

Задача Эйлера–Ламберта имеет большое значение для механики космического полета. Поясним, в чем заключается эта задача. Пусть дана центральная материальная точка O , порождающая (без учета возмущений) вокруг себя центральное ньютоновское гравитационное поле и моделирующая, например, Солнце. Рассмотрим материальную точку P (моделирующую некоторое небесное тело малой массы, например, планету, астероид, комету, космический аппарат (КА)), которая движется у центра O в центральном ньютоновском гравитационном поле. Например, космический аппарат движется в гелиоцентрическом пространстве. Известны

два положения этой точки P_1 и P_2 в моменты времени t_1, t_2 , им соответствуют радиус-векторы $\vec{OP}_1 = \mathbf{r}_1$ и $\vec{OP}_2 = \mathbf{r}_2$, $t_2 > t_1$. Задача состоит в том, что надо определить такую орбиту перелета точки P , чтобы в момент времени t_1 точка находилась в положении P_1 , а в момент t_2 — в P_2 , т.е. надо осуществить перелет между точками P_1 и P_2 за заданное время $\Delta t_{\text{дан}} = t_2 - t_1$.

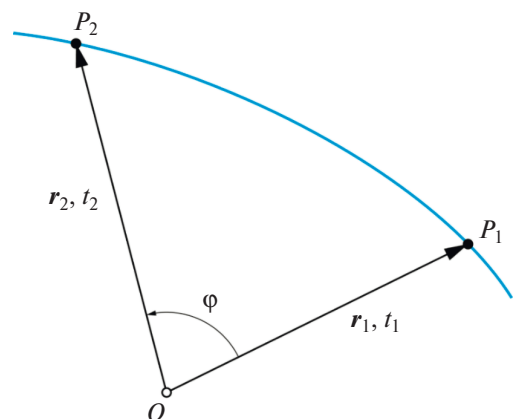


Рис. 1. Схема перелета между заданными точками пространства.

¹Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша Российской академии наук,
Москва, Россия

²Научно-исследовательский институт
прикладной механики и электродинамики
Московского авиационного института,
Москва, Россия

*E-mail: ivashkin@keldysh.ru

Эта задача впервые была поставлена еще Л. Эйлером в 1743 г. Он сформулировал ее так [1]: “По двум заданным радиусам-векторам, углу между ними и промежутку времени, в течение которого планета или комета этот угол описывает, найти всю орбиту”. Л. Эйлер решил эту задачу для случая, когда орбита перелета — параболическая. Затем развили эти результаты на эллиптические и гиперболические орбиты И. Ламберт в 1761–1771 гг., Лагранж в 1788 г. [1, 2]. Часто эта задача называется задачей Ламберта. На рис. 1 дана схема перелета между заданными точками P_1 , P_2 . Эта задача Эйлера–Ламберта важна для астрономии — для предварительного (без учета возмущений) определения орбит естественных небесных тел (астероидов, комет), а также для космонавтики, механики космического полета — для предварительного проектного построения орбиты космического аппарата при перелете на временном отрезке (t_1, t_2) с орбиты одного небесного тела на орбиту другого небесного тела. Ввиду этой важности задачи было разработано много методов ее решения ([1–13] и др.). Сравнительный анализ некоторых методов дан в работах М.Ф. Субботина, П. Эскобала, Р. Бэттина [1–3]. Сейчас популярны “универсальные” методы (например, [4, 9, 12]).

Большинство из разработанных методов решения задачи обычно основано на том, что множество орбит перелета между двумя точками в центральном поле образует однопараметрическое семейство орбит с перелетом между заданными точками за разное время $(t'_2 - t_1)$. В зависимости от выбора параметра этого семейства получаем разные методы решения задачи Эйлера–Ламберта. В “классическом” методе за этот параметр, в соответствии с теоремой Эйлера–Ламберта, принята большая полуось орбиты перелета a [1–5, 7, 9 и др.]. Итерационно находится значение a^* , для которого время перелета $\Delta t(a^*)$, вычисленное по теореме Эйлера–Ламберта, равно заданному времени $\Delta t_{дан}$. В.А. Егоров, по-видимому, впервые обратил внимание, что результаты Д.Е. Охоцимского по анализу баллистических перелетов могут быть использованы для построения несложного, очень наглядного метода решения задачи Эйлера–Ламберта. Рассмотрим кратко этот метод, который будем называть методом Охоцимского–Егорова, следуя духу идей В.А. Егорова. Рассмотрим идеи метода,

основы и примеры алгоритмов численного решения задачи.

ИДЕИ МЕТОДА ОХОЦИМСКОГО–ЕГОРОВА

Пусть O — притягивающий центр, который порождает центральное ньютоновское гравитационное поле притяжения в пространстве у O . Обозначим через φ угол между OP_1 и OP_2 . Будем считать, что $\sin \varphi \neq 0$. Построим плоскость, проходящую через этот центр O и точки P_1 , P_2 . Все орбиты перелета между данными точками P_1 , P_2 также будут лежать в этой плоскости. Рассмотрим некоторую произвольную орбиту этого семейства (рис. 1, 2). Пусть V_1 — вектор скорости в начальной точке на данной орбите. Возьмем в качестве параметра x указанного семейства перелетов между двумя точками угол θ_1 наклона скорости V_1 к начальной трансверсали, на расстоянии r_1 до центра притяжения:

$$x = \theta_1. \quad (1)$$

Определим время $\Delta t(\theta_1)$ перелета из P_1 в P_2 для данного значения этого угла θ_1 . Как показал Д.Е. Охоцимский [6, 8], задание угла θ_1 вместе с центральным углом перелета φ и расстояниями r_1 и r_2 , определяет однозначно величину

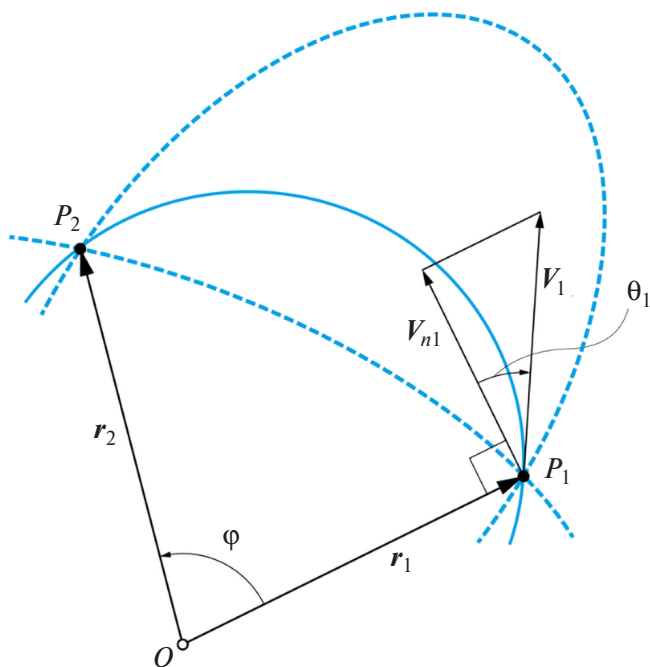


Рис. 2. Семейство орбит перелета между заданными точками с углом θ_1 как параметром семейства.

этой скорости V_1 для прилета на конечное расстояние r_2 от центра притяжения – по формуле:

$$2\beta_1 = \frac{1 - \cos\varphi}{\left(\frac{r_1}{r_2} - \cos\varphi\right) \cos^2\theta_1 + \operatorname{tg}\theta_1 \sin\varphi \cdot \cos^2\theta_1}, \quad (2)$$

здесь величина β_1 есть безразмерное отношение квадратов начальной скорости V_1 и начальной параболической скорости $V_{p1} = \sqrt{2\mu / r_1}$,

$$\beta_1 = V_1^2 / V_{p1}^2 = V_1^2 / (2\mu / r_1), \quad (3)$$

μ – гравитационный параметр центрального тела O . После определения параметра β_1 однозначно определяется и величина начальной скорости

$$V_1 = \sqrt{\beta_1} V_{p1}, \quad (4)$$

а также все параметры орбиты и время перелета. Действительно, Кеплеровская константа энергии h и большая полуось a орбиты:

$$\begin{aligned} h &= V_1^2 - 2\mu/r_1, \\ a &= -\mu/h. \end{aligned} \quad (5)$$

Константа площадей c , фокальный параметр p и эксцентриситет e :

$$\begin{aligned} c &= r_1 V_1 \cos\theta_1; \\ p &= c^2/\mu; \\ e &= \left(1 + hc^2/\mu^2\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Определяются также кинематические параметры граничных точек орбиты перелета, в частности, истинные аномалии ϑ_1, ϑ_2 , эксцентрические аномалии E_1, E_2 (для эллиптической орбиты, Гудерманианы H_1, H_2 для гиперболической орбиты) и средние аномалии M_1, M_2 . Радиальная и трансверсальная компоненты начальной скорости:

$$V_{r1} = V_1 \sin\theta_1; V_{n1} = V_1 \cos\theta_1. \quad (7)$$

Отсюда, учитывая, что

$$\begin{aligned} V_{r1} &= (\mu/p)^{1/2} e \sin\vartheta_1; \\ V_{n1} &= (\mu/p)^{1/2} (1 + e \cos\vartheta_1), \end{aligned} \quad (8)$$

получим

$$\begin{aligned} \sin\vartheta_1 &= V_{r1} / \left((\mu/p)^{1/2} e\right); \\ \cos\vartheta_1 &= \left(V_{n1} / (\mu/p)^{1/2} - 1\right) / e \end{aligned} \quad (9)$$

и начальное значение истинной аномалии ϑ_1 .

С учетом центрального угла перелета φ ($0 < \varphi < 2\pi$) и возможного (для случая эллиптической орбиты перелета) некоторого числа дополнительных витков k ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$) конечное значение истинной аномалии

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 + \varphi + 2\pi k \quad (10)$$

(при $k = 0$ перелет осуществляется на одном витке). Для случая гиперболической орбиты, после определения этих углов ϑ_1, ϑ_2 делаем также проверку возможности физической реализации перелета на гиперболической орбите. Если $\vartheta_2 - \vartheta_1 > \Delta\vartheta_{\max}$, то перелет нельзя реализовать на данной орбите (здесь $\Delta\vartheta_{\max}$ задается асимптотами гиперболической орбиты). Получаем, как обычно, по значениям истинной аномалии в начале и конце перелета, время перелета $\Delta t(\theta_1)$ и сравниваем его с данным временем $\Delta t_{\text{дан}}$. Невязка

$$\delta t(\theta_1) = \Delta t(\theta_1) - \Delta t_{\text{дан}}. \quad (11)$$

Получаем решение, меняя угол θ_1 в диапазоне

$$\theta_{1\min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1\max}, \quad (12)$$

где при $\varphi < \pi$: $\theta_{1\min} = -\pi/2 + 2\theta_{10} + \varepsilon_1$, $\theta_{1\max} = \pi/2 - \delta\theta_{1n} - \varepsilon_1$; при $\varphi > \pi$: $\theta_{1\min} = -\pi/2 + \varepsilon_1$, $\theta_{1\max} = \pi/2 - 2|\theta_{10}| - \delta\theta_{1n} - \varepsilon_1$; θ_{10} минимизирует начальную скорость [8]; $\delta\theta_{1n}$ отклоняет скорость от гиперболы к параболе; поправка ε_1 ($\sim 10^{-6}$) уменьшает скорость от параболической. Находим значение θ_1^* угла, для которого время полета равно заданному и невязка равна нулю с заданной точностью, $\delta t(\theta_1^*) = 0$:

$$0 < |\delta t(\theta_1^*)| < \varepsilon. \quad (13)$$

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Основы алгоритма решения задачи Эйлера–Ламберта с помощью метода Охоцимского–Егорова в целом соответствуют описанным выше идеям (1)–(13). Укажем некоторые особенности алгоритма:

а) при заданных радиусах-векторах точки $\mathbf{r}_1(t_1)$, $\mathbf{r}_2(t_2)$ есть два варианта угла перелета, соответствующих возможным направлениям движения;

б) параметром семейства орбит перелета является угол наклона начальной скорости точки к трансверсали;

в) задача определения орбиты перелета с заданным временем решается итерационно. Важно хорошо задать начальное приближение;

г) при перелете на одном витке множество времен перелета есть диапазон $(0, \infty)$, при заданном угле перелета решение существует, оно единственное, аналогично [14].

ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ ДАННОГО МЕТОДА

Идеи метода были положены в основу нескольких алгоритмов решения задачи Эйлера–Ламберта, в частности:

а) А.К. Платоновым и Р.К. Казаковой – в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, при расчете некоторых межпланетных перелетов [10];

б) В.В. Ивашкиным – в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, при расчете траекторий перелета к опасному астероиду;

в) в МГТУ им. Баумана – в учебном процессе;

г) в МАИ, в НИИ прикладной механики и электродинамики (НИИ ПМЭ МАИ) – для анализа свойств метода.

ВЫВОДЫ

Результаты Д.Е. Охоцимского по баллистическому движению и идеи В.А. Егорова можно положить в основу метода решения задачи Эйлера–Ламберта.

Этот метод решения задачи Эйлера–Ламберта предлагаем назвать методом Охоцимского–Егорова.

Метод Охоцимского–Егорова привлекает своей наглядностью и хорошей сходимостью.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа доложена на XIII Всероссийском Съезде по механике в августе 2023 г. Автор признателен А.В. Королевой за помощь в построении рисунков.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-79-10206, <https://rscf.ru/project/22-79-10206/>).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Субботин М.Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968. 800 с.
2. *Эскобал П.* Методы определения орбит / Под ред. В.Г. Демина. Пер. с англ. В.Н. Ноздрина, В.М. Рудакова. М.: Мир, 1970.
3. *Жуковский Н.Е.* Собрание сочинений. Т. 1. Общая механика. Математика и Астрономия. М.–Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948.
4. *Бэттин Р.Х.* Наведение в космосе. М.: Машиностроение, 1966. 449 с.
5. *Эльясберг П.Е.* Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1965. 549 с.
6. *Охоцимский Д.Е.* Динамика космических полетов. Конспект лекций в МГУ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1968. 158 с.
7. *Кубасов В.Н., Дашков А.А.* Межпланетные полеты. М.: Машиностроение, 1979. 272 с.
8. *Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г.* Основы механики космического полета. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 448 с.
9. *Суханов А.А.* Астродинамика. М.: Институт космических исследований РАН, 2010. 202 с.
10. *Платонов А.К., Казакова Р.К.* Создание проектного и оперативного баллистического обеспечения полетов космических аппаратов. Проектные работы на первых ЭВМ // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 37. 35 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-37>
11. *Лысенко Л.Н., Бетанов В.В., Звягин Ф.В.* Теоретические основы баллистико-навигационного обеспечения космических полетов / Под общ. ред. Л.Н. Лысенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 518 с.
12. *Izzo D.* Revisiting Lambert's problem // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2015. V. 121. No. 1. Jan. 2015. P. 1–15. ISSN 0923-2958. <https://doi.org/10.1007/s10569-014-9587-y>
13. *Боровин Г.К. и др.* Баллистико-навигационное обеспечение полетов автоматических космических аппаратов к телам Солнечной системы / Под ред. А.Г. Тучина. Химки: Изд. АО “НПО Лавочкина”, 2018. 336 с.
14. *Холшевников К.В., Титов В.Б.* Задача двух тел / Уч. пос. СПб., 2007. 180 с.

USING OKHOTSIMSKY–EGOROV’S METHOD FOR SOLVING THE EULER–LAMBERT’S PROBLEM

V. V. Ivashkin^{a,b}

^a*M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*Scientific Research Institute of Applied Mechanics and Electric Dynamics of Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.M. Lipanov

The solution of the Euler–Lambert’s problem, which consists in constructing an orbit passing through two given points of the central Newtonian gravitational field for a given central transfer angle and a given transfer time, is considered. A method for solving this problem has been investigated, which consists, as suggested by V.A. Egorov, in selecting the angle of inclination of the initial velocity vector of a material point to the transversal, so that the flight time between given points in space is equal to the given one. In this case, setting the specified angle of inclination of the initial velocity to the transversal allows, using the Okhotsimsky formula, to analytically determine the value of this velocity and then determine the entire orbit. It is concluded that this method, which was proposed to be given the name Okhotsimsky–Egorov, can be used as the basis for solving the Euler–Lambert’s problem.

Keywords: central Newtonian gravitational field, material point, Euler–Lambert’s problem, Okhotsimsky–Egorov’s method, Okhotsimsky formula