

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ РАДИАЛЬНЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ГИДРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

© 2024 г. К. М. Нгуен^{1,*}, Д. Р. Шелевая^{1,2,**}, Д. А. Красноруцкий^{1,3,***}

Представлено академиком РАН Б.Д. Анниным 29.12.2023 г.

Поступило 09.01.2024 г.

После доработки 19.03.2024 г.

Принято к публикации 21.03.2024 г.

На основе общих уравнений для разрешающих функций в глобальной системе координат получены геометрически нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие динамическое деформирование осесимметричных оболочек вращения. Уравнения учитывают утонение / утолщение при больших продольных деформациях, а также поперечный сдвиг для толстых оболочек. Движение и давление идеальной несжимаемой жидкости описывается потенциалом перемещений. Для получения численного решения применяется метод конечных разностей на основе сплайн-интерполяции полигармоническими радиальными базисными функциями. Методика расчета реализована в собственном программном комплексе. Получено очень хорошее соответствие рассчитываемых перемещений с результатами моделирования разными конечными элементами в ANSYS. Частоты гидроупругих колебаний баков сравниваются с частотами, полученными по методу конечных и граничных элементов, а также результатами из опубликованных статей других исследователей.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, потенциал перемещений, радиальные базисные функции, метод конечных разностей, RBF-FD, полигармонический сплайн

DOI: 10.31857/S2686740024030128, EDN: JZAPUB

Осесимметричными оболочками вращения моделируют топливные баки ракет-носителей с жидкостным ракетным двигателем при решении задачи обеспечения продольной устойчивости (англ. POGO) [1]. Наиболее популярным и универсальным методом анализа тонкостенных конструкций является метод конечных элементов (МКЭ), для учета жидкости часто используют метод граничных элементов (МГЭ).

Целью данной работы является развитие и программная реализация альтернативного МКЭ и МГЭ подхода к расчету тонкостенных оболочечных конструкций, взаимодействующих с жидкостью.

В данной работе в основе вывода разрешающих уравнений оболочки лежит описание кинематики деформирования срединной поверхности с помощью вектора конечного поворота (вектора Эйлера) и использования разрешающих функций в глобальной системе координат. Обзор подходов, методов решения и моделей теории пластин и оболочек приведен в работе [2]. В статье [3] имеется обзор работ по расчету гидроупругих колебаний оболочек.

В трехмерном пространстве рассмотрим криволинейную поверхность оболочки, заданную радиус-вектором:

¹Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия

²Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

³Сибирский научно-исследовательский институт авиации имени С.А. Чаплыгина, Новосибирск, Россия
*E-mail: mckq1985@gmail.com

**E-mail: shelevaya.d.r@hydro.nsc.ru

***E-mail: krasnorutskiy@corp.nstu.ru

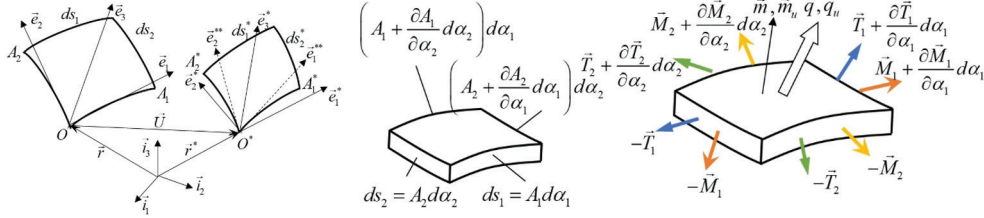


Рис. 1. Деформирование и равновесие малого элемента оболочки.

$$\begin{aligned} \vec{r}(s_1, s_2) &= x_1(s_1, s_2)\vec{i}_1 + x_2(s_1, s_2)\vec{i}_2 + \\ &+ x_3(s_1, s_2)\vec{i}_3 = x_k(s_1, s_2)\vec{i}_k, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\vec{i}_k$ — базисные векторы глобальной системы координат, по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до 3. Поверхность разделяется координатными линиями, бесконечно малый элемент, образуемый линиями $s_1, s_2, s_1 + ds_1, s_2 + ds_2$, в точке O этого элемента поставим локальную систему координат с тремя единичными векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (рис. 1).

Векторы локальной системы координат выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial s_1}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s_2}, \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2; \\ \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{i}_2 \\ \vec{i}_3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \vec{e}_i = \beta_{ik}\vec{i}_k, \end{aligned} \quad (2)$$

где β — матрица начальной геометрии.

Поворот малого элемента определим следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \vec{i}_1^* \\ \vec{i}_2^* \\ \vec{i}_3^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{i}_2 \\ \vec{i}_3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \vec{i}_n^* = \lambda_{nk}\vec{i}_k, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{ii} &= 1 - \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} (\omega_j^2 + \omega_k^2), \\ \lambda_{ij} &= \frac{\sin \omega}{\omega} \omega_k + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \omega_i \omega_j, \\ \lambda_{ik} &= -\frac{\sin \omega}{\omega} \omega_k + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \omega_i \omega_j, \\ i &= 1, 2, 3; j = 2, 3, 1; k = 3, 1, 2; \end{aligned}$$

где ω_k — проекции вектора конечного поворота (вектора Эйлера) на оси глобальной системы координат.

В результате перемещения параллельно самому себе как жесткого целого точка O займет новое положение O^* , длины отрезков $ds_1 = |OA_1|, ds_2 = |OA_2|$ изменятся и станут равными $|O^*A_1^*| = ds_1^*, |O^*A_2^*| = ds_2^*$. Обозначим $\epsilon_1 = (ds_1^* - ds_1)/ds_1, \epsilon_2 = (ds_2^* - ds_2)/ds_2$ — относительные удлинения сторон малого элемента вдоль направлений s_1 и s_2 соответственно. При деформировании векторы локального базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ переходят в $\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*$. С учетом (2) и (3) повернутые орты будут иметь следующие выражения:

$$\vec{e}_i^* = \beta_{ik}\vec{i}_k^* = \beta_{ik}\lambda_{kn}\vec{i}_n. \quad (4)$$

При наличии сдвига в плоскости ортогональность $\vec{e}_1^*$ и $\vec{e}_2^*$ нарушается, и они переходят в $\vec{e}_1^{**}, \vec{e}_2^{**}$. Обозначим угол сдвига χ , тогда:

$$\vec{e}_k^{**} = \alpha_{kj}\vec{e}_j^*,$$

где

$$\alpha = \begin{bmatrix} \cos \chi & \sin \chi \\ \sin \chi & \cos \chi \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$d\vec{r}^* = \vec{e}_1^{**} ds_1^* = (1 + \epsilon_1) \alpha_{1j} \beta_{jk} \lambda_{kn} \vec{i}_n^* ds_1,$$

$$d\vec{r}^* = \vec{e}_2^{**} ds_2^* = (1 + \epsilon_2) \alpha_{2j} \beta_{jk} \lambda_{kn} \vec{i}_n^* ds_2, \quad j = 1, 2.$$

Поскольку $\vec{U} = \vec{r}^* - \vec{r}$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{U}}{\partial s_1} &= \left[(1 + \epsilon_1) (\alpha_{1j} \beta_{jk} \lambda_{kn} + S_{1n}) - \beta_{1n} \right] \vec{i}_n^*, \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial s_2} &= \left[(1 + \epsilon_2) (\alpha_{2j} \beta_{jk} \lambda_{kn} + S_{2n}) - \beta_{2n} \right] \vec{i}_n^*, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$S_{1n} = \frac{T_{1j}}{\kappa G_{13} h^*} \lambda_{kj} \beta_{3k} \beta_{3p} \lambda_{pn},$$

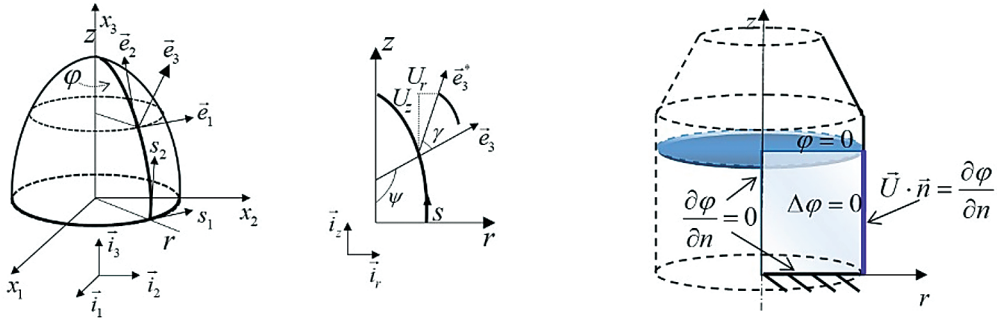


Рис. 2. Осесимметричная оболочка вращения с жидкостью.

$$S_{2n} = \frac{T_{2j}}{\kappa G_{23} h^*} \lambda_{kj} \beta_{3k} \beta_{3p} \lambda_{pn}$$

суть дополнительные углы деформирования за счет поперечного сдвига, G_{13} – модуль сдвига ортотропного материала, h^* – толщина деформированной оболочки, κ – корректирующий коэффициент сдвига прямоугольного сечения ($\kappa \approx \pi^2/12$), $\vec{T}_1 = T_{1j} \vec{i}_j$, $\vec{T}_2 = T_{2j} \vec{i}_j$ – векторы внутренних погонных сил на площадках, ортогональных координатным линиям.

Уравнения (6) описывают кинематику деформирования срединной поверхности оболочки. Они связывают поворот элемента оболочки, растяжение его сторон и изменение угла между ними с перемещениями элемента.

Для деформированной оболочки имеем $ds_1^* = A_1^* d\alpha_1$, $ds_2^* = A_2^* d\alpha_2$. Уравнения динамического равновесия сил (рис. 1), записанные для деформированного состояния, имеют вид

$$\frac{1}{A_1^* A_2^*} \frac{\partial (A_2^* \vec{T}_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1^* A_2^*} \frac{\partial (A_1^* \vec{T}_2)}{\partial \alpha_2} + \vec{q} = -\vec{q}_u, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1^* A_2^*} \frac{\partial (A_2^* \vec{M}_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1^* A_2^*} \frac{\partial (A_1^* \vec{M}_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1^*} \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \alpha_1} \times \vec{T}_1 + \\ + \frac{1}{A_2^*} \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \alpha_2} \times \vec{T}_2 + \vec{m} = -\vec{m}_u, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\vec{T}_1 = T_{1j} \vec{i}_j$, $\vec{T}_2 = T_{2j} \vec{i}_j$ – векторы внутренних погонных сил; $\vec{M}_1 = M_{1j} \vec{i}_j$, $\vec{M}_2 = M_{2j} \vec{i}_j$ – векторы внутренних моментов; $\vec{q} = q_j \vec{i}_j$ – вектор внешней распределенной нагрузки; $\vec{m} = m_j \vec{i}_j$ – вектор внешнего распределенного момента, $\vec{q}_u$ – сила инерции, $\vec{m}_u$ – инерционный момент.

Здесь необходимо отметить, что инерционная сила и момент, в силу сохранения массы элементарного объема, зависят только от ускорения, поэтому в формуле (7) сила инерции

$$\vec{q}_u = -\frac{\rho h \ddot{\vec{U}}}{(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)},$$

а в (8)

$$\vec{m}_u = -\frac{\rho h^3 (\ddot{\Omega}_1 \vec{e}_1^* + \ddot{\Omega}_2 \vec{e}_2^*)}{12(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)},$$

где $\ddot{\Omega}_{1,2}$ – угловые ускорения вокруг главных осей (точки обозначают дифференцирование по времени t).

При осесимметричном деформировании оболочки вращения (рис. 2) координатная сетка остается ортогональной, т.е. параметр сдвига $\chi = 0$. Введем в рассмотрение цилиндрическую систему координат с ортами

$$\begin{aligned} \vec{i}_r &= \cos \varphi \vec{i}_1 + \sin \varphi \vec{i}_2, \\ \vec{i}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{i}_1 + \cos \varphi \vec{i}_2, \\ \vec{i}_z &= \vec{i}_3. \end{aligned} \quad (9)$$

Радиус-вектор срединной поверхности будет иметь следующий вид:

$$\vec{r}(s, \varphi) = r(s) \vec{i}_r + z(s) \vec{i}_z, \quad (10)$$

где $r(s)$, $z(s)$ – параметрические уравнения меридиана оболочки.

Введем в рассмотрение безразмерные величины следующим образом:

$$\bar{s} = \frac{s}{\ell}, \quad \bar{h} = \frac{h}{\ell}, \quad \bar{r} = \frac{r}{\ell}, \quad \bar{z} = \frac{z}{\ell}, \quad \bar{U} = \frac{U}{\ell}, \quad (11)$$

$$\bar{T} = \frac{(1 - \nu^2)}{E \bar{h} \ell} T, \quad \bar{M} = \frac{12(1 - \nu^2)}{E \bar{h}^2 \ell^2} M,$$

где ℓ — характерный геометрический размер оболочки (например, длина меридиана, радиус), $v = \sqrt{v_{12}v_{21}}$, $E = \sqrt{E_1E_2}$. Введем безразмерный параметр длины меридиана ξ , т.е. $s = s(\xi)$. Определим параметры Ламе следующими соотношениями: $A_1 = r$, $A_2 = s_{,\xi}$, и $d\alpha_1 = d\varphi$, $d\alpha_2 = d\xi$, здесь и далее нижний индекс после запятой означает дифференцирование по этой переменной.

Пропустим промежуточные выкладки. Разрешающая система 6 геометрически нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно 6 функций — $\bar{U}_r, \bar{U}_z, \gamma, \bar{T}_{2r}, \bar{T}_{2z}, \bar{M}_{2\varphi}$, описывающих динамическое напряженно-деформированное состояние осесимметричной ортотропной оболочки при больших продольных деформациях, перемещениях и поворотах, с учетом поперечного сдвига имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{d\bar{U}_r}{d\xi} = (1 + \varepsilon_2)(\bar{d}_r + \bar{d}_z\theta) - \bar{r}_{,\xi}, \\ 2) \quad & \frac{d\bar{U}_z}{d\xi} = (1 + \varepsilon_2)(\bar{d}_z - \bar{d}_r\theta) - \bar{z}_{,\xi}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$3) \quad \frac{d\gamma}{d\xi} = -\frac{\bar{s}_{,\xi}}{\bar{h}f_h^3} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \bar{M}_{2\varphi} - v_{12}\bar{s}_{,\xi}\Delta\bar{k}_1,$$

$$\Delta\bar{k}_1 = \frac{1}{\bar{s}_{,\xi}\bar{r}} [\bar{z}_{,\xi}(\cos\gamma - 1) + \bar{r}_{,\xi}\sin\gamma], \quad \Delta\bar{k}_2 = \frac{\gamma_{,\xi}}{\bar{s}_{,\xi}}; \quad (13)$$

$$4) \quad \frac{d\bar{T}_{2r}}{d\xi} = -A\bar{T}_{2r} + \frac{\bar{s}_{,\xi}}{\bar{r}} B\bar{T}_{1\varphi} - C \frac{\bar{s}_{,\xi}(1 + \varepsilon_2)}{\bar{h}} q_r + D\ddot{\bar{U}}_r,$$

$$5) \quad \frac{d\bar{T}_{2z}}{d\xi} = -A\bar{T}_{2z} - C \frac{\bar{s}_{,\xi}(1 + \varepsilon_2)}{\bar{h}} q_z + D\ddot{\bar{U}}_z, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} 6) \quad & \frac{d\bar{M}_{2\varphi}}{d\xi} = -A\bar{M}_{2\varphi} - \frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}} B\bar{M}_{1s} - \\ & - \frac{12}{\bar{h}} (1 + \varepsilon_2)(\bar{T}_{2r}\bar{d}_z - \bar{T}_{2z}\bar{d}_r) - D\bar{h}\ddot{\gamma}, \end{aligned} \quad (15)$$

дополнительные выражения и обозначения:

$$\bar{d}_r = (\bar{r}_{,\xi} \cos\gamma - \bar{z}_{,\xi} \sin\gamma),$$

$$\bar{d}_z = (\bar{r}_{,\xi} \sin\gamma + \bar{z}_{,\xi} \cos\gamma),$$

$$\theta = \frac{\bar{d}_z\bar{T}_{2r} - \bar{d}_r\bar{T}_{2z}}{\kappa G_{23}\bar{s}_{,\xi}f_hC}, \quad A = \left(\frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}} + \frac{\varepsilon_{1,\xi}}{(1 + \varepsilon_1)} \right),$$

$$\varepsilon_{1,\xi} = \left(\frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}^2} \bar{U}_r - \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{U}_r}{d\xi} \right), \quad B = \frac{(1 + \varepsilon_2)}{(1 + \varepsilon_1)},$$

$$C = \frac{1 - v_{12}v_{21}}{\sqrt{E_1E_2}}, \quad D = C \frac{\bar{s}_{,\xi}\rho\ell^2}{(1 + \varepsilon_1)},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\bar{r}} \bar{U}_r, \quad \varepsilon_2 = \exp(\hat{\varepsilon}_2) - 1,$$

$$\hat{\varepsilon}_2 = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \frac{\bar{T}_{2r}\bar{d}_r + \bar{T}_{2z}\bar{d}_z}{\bar{s}_{,\xi}f_h(\hat{\varepsilon}_2)} - v_{12}\hat{\varepsilon}_1, \quad (16)$$

$$f_h(\hat{\varepsilon}_2) = \exp \left[\frac{v_{12}v_{23} + v_{13}}{v_{12}v_{21} - 1} \hat{\varepsilon}_1 + \frac{v_{21}v_{13} + v_{23}}{v_{12}v_{21} - 1} \hat{\varepsilon}_2 \right],$$

$$\hat{\varepsilon}_1 = \ln(1 + \varepsilon_1),$$

$$\bar{T}_{1\varphi} = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} f_h(\hat{\varepsilon}_1 + v_{21}\hat{\varepsilon}_2),$$

$$\bar{M}_{1s} = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \bar{h}f_h^3(\Delta\bar{k}_1 + v_{21}\Delta\bar{k}_2),$$

где $f_h = h^*/h$ — функция изменения толщины оболочки при деформировании, которая вычисляется итерационно.

Рассмотрим расчет малых колебаний осесимметричного бака с идеальной несжимаемой жидкостью. Для такой модели жидкости ее малые перемещения определяются потенциалом перемещений φ [4], а перемещения стенки бака определяются системой дифференциальных уравнений движения осесимметричной оболочки вращения (12)–(15), которые в сокращенном виде можно записать следующим образом:

$$\frac{dX}{d\xi} = F(\xi, X, \ddot{X}), \quad (17)$$

где $X(\xi, t) = \{U_r, U_z, \gamma, T_{2r}, T_{2z}, M_{2\varphi}\}^T$ — вектор разрешающих функций. В случае малых колебаний решение разыскивается в следующем виде:

$$X(\xi, t) = \Delta X(\xi) \exp(i\omega t), \quad (18)$$

тогда, подставляя решение (18) в (17), линеаризуя и вычитая исходное равновесное состояние, получим уравнение для амплитуд малых колебаний:

$$\frac{d\Delta X}{d\xi} = \left[\frac{\partial F}{\partial X} - \omega^2 \frac{\partial F}{\partial \ddot{X}} \right] \Delta X. \quad (19)$$

В рамках допущений для потенциала малых перемещений жидкости φ получим краевую задачу 4:

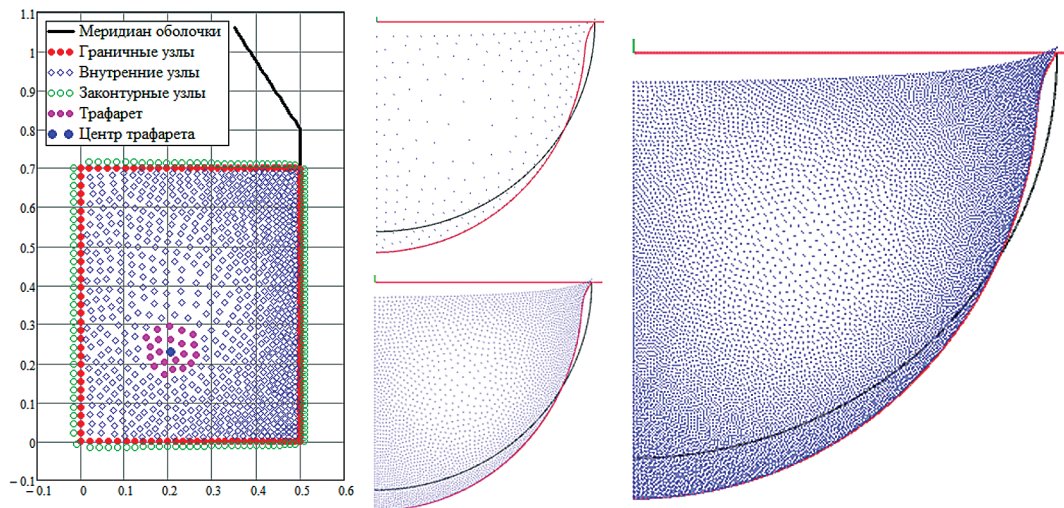


Рис. 3. Примеры заполнения расчетной области узлами.

$$\Delta\varphi = 0 \text{ — в объеме жидкости,} \quad (20)$$

$$\varphi = 0 \text{ — на свободной поверхности жидкости,} \quad (21)$$

$$\partial\varphi/\partial n = 0 \text{ — на оси симметрии и/или неподвижной части бака,} \quad (22)$$

$$\vec{U}\vec{n} = \partial\varphi/\partial n, \quad \vec{T}_2\vec{n} = -\rho_{ж}\varphi\omega^2 \text{ — на смоченной части оболочки,} \quad (23)$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль.

Для аппроксимации производной по координатам в уравнении применяется шаблон центральной разности либо интерполяционный многочлен Лагранжа по четырем точкам для повышения точности аппроксимации при малом числе разбиений меридиана [5].

Для решения краевой задачи (20)–(23) применим метод конечных разностей, а для генерирования весовых коэффициентов разностных схем на произвольном трафарете будем использовать радиальные базисные функции (РБФ). В англоязычной литературе такой подход называется Radial Basis Function Finite Difference method (RBF-FD). В данной работе используется полигармоническая РБФ [6–8]:

$$\varphi(r) = r^{2m} \ln(r), \quad (24)$$

где m — степень четной полигармонической РБФ.

Использование РБФ позволяет вычислять весовые коэффициенты конечных разностей на произвольной (нерегулярной) сетке, имеющей сгущение там, где это требуется (например, в области взаимодействия жидкости и оболочки), а в других местах иметь разреженную структуру для экономии ресурсов ЭВМ.

Быстрый алгоритм генерирования нерегулярной сетки узлов в прямоугольной области предложен в [9]. Этот алгоритм был слегка модифицирован для генерирования сетки из предварительно дискретизированной выпуклой граничной области с произвольной дискретизацией. Примеры результата работы этого алгоритма приведены на рис. 3.

На рис. 3 кроме граничных и внутренних точек области показаны законтурные (вспомогательные) узлы (в англ. ghost nodes). Они вводятся для уравнивания числа уравнений и неизвестных. Таким образом, уравнение $\Delta\varphi = 0$ должно выполняться во всех узлах границы и внутренней области, а законтурные узлы участвуют в формировании трафаретов конечных разностей. На рис. 3 приведен пример трафарета, составленного из 22 точек. Такие трафареты строятся для каждого узла контура и внутри области, и по ним вычисляются весовые коэффициенты конечных разностной аппроксимации требуемых производных.

Рассмотрим алгоритм вычисления весовых коэффициентов для разностных схем. Интерполяционный сплайн на основе РБФ

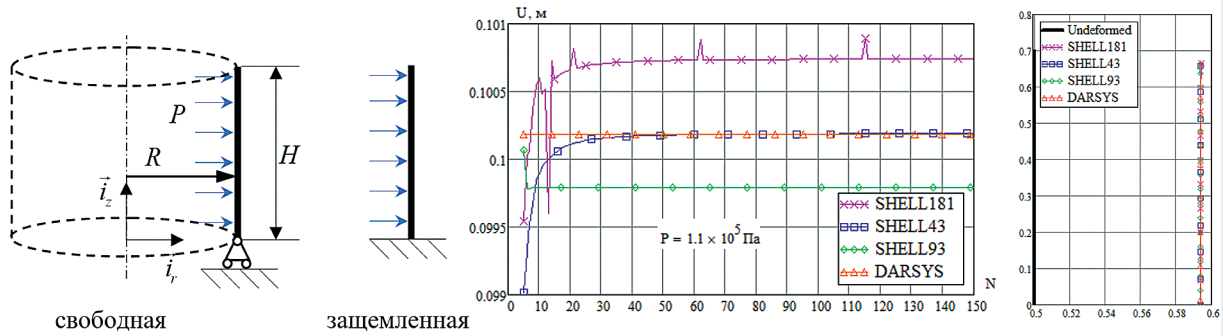


Рис. 4. Цилиндрическая оболочка. Результаты расчета.

записывается в стандартном виде с дополнительным полиномом первой степени [10], гарантирующим уникальность решения [6], а также условиями ортогональности весовых коэффициентов следующим образом:

$$S(x, y) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \phi(x - x_k, y - y_k) + \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y, \quad (25)$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k = 0,$$

где $r_k = (x_k, y_k)$ — узлы интерполяции, n — число узлов интерполяции, λ_k — весовые коэффициенты РБФ, $\gamma_{1,2,3}$ — коэффициенты дополнительного многочлена. Сплайн (25) может быть расширен до пространственного случая, а также до произвольного количества размерностей.

Пусть интерполируемая функция имеет узловые значения f_k , тогда из СЛАУ (25) для определения весовых коэффициентов будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} \phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_1) & \phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) & \dots & \phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_n) & 1 & x_1 & y_1 \\ \phi(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) & \phi(\vec{r}_2 - \vec{r}_2) & \dots & \phi(\vec{r}_2 - \vec{r}_n) & 1 & x_2 & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi(\vec{r}_n - \vec{r}_1) & \phi(\vec{r}_n - \vec{r}_2) & \dots & \phi(\vec{r}_n - \vec{r}_n) & 1 & x_n & y_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (26)$$

СЛАУ (26) имеет уникальное решение, если узлы интерполяции не повторяются (это условие обеспечивается генератором распределения узлов), а ее матрица $[A]$ не меняет свой вид при аппроксимации произвольного дифференциального оператора L [10], что легко показать. СЛАУ для определения весовых

коэффициентов w_j разложения дифференциального оператора по узловым значениям функции f_j , в которой матрица совпадает с (26):

$$[A] \cdot \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \\ w_{n+1} \\ w_{n+2} \\ w_{n+3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L\phi(x - x_1, y - y_1) \\ L\phi(x - x_2, y - y_2) \\ \dots \\ L\phi(x - x_n, y - y_n) \\ L1 \\ Lx \\ Ly \end{Bmatrix} \Bigg|_{\substack{x=x_c \\ y=y_c}}. \quad (27)$$

Расчетная область, занятая жидкостью, разбивалась неравномерной сеткой, имеющей сгущение на границах и разреженность внутри (рис. 3). Это дает существенную экономию размерности задачи и незначительно сказывается на точности решения. Алгоритм решения уравнений ортотропной осесимметричной оболочки совместно с жидкостью добавлен в функциональные возможности программы DARSYS [5].

Рассмотрим несколько примеров расчета статического деформирования. Цилиндрической оболочки под действием внутреннего распределенного давления P (рис. 4). Радиус $R = 0.5$ м, толщина $h = 0.02$ м, высота $H = 0.7$ м, модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^7$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$.

На рис. 4 приведены зависимости полного перемещения верхней точки меридиана от числа разбиений, а также деформированные конфигурации, рассчитанные в ANSYS разными конечными элементами и по формулам (12)–(16) в DARSYS при значении давления $P = 1.1 \cdot 10^5$ Па при свободном опирании и с заземленным основанием на рис. 5. Кроме того,

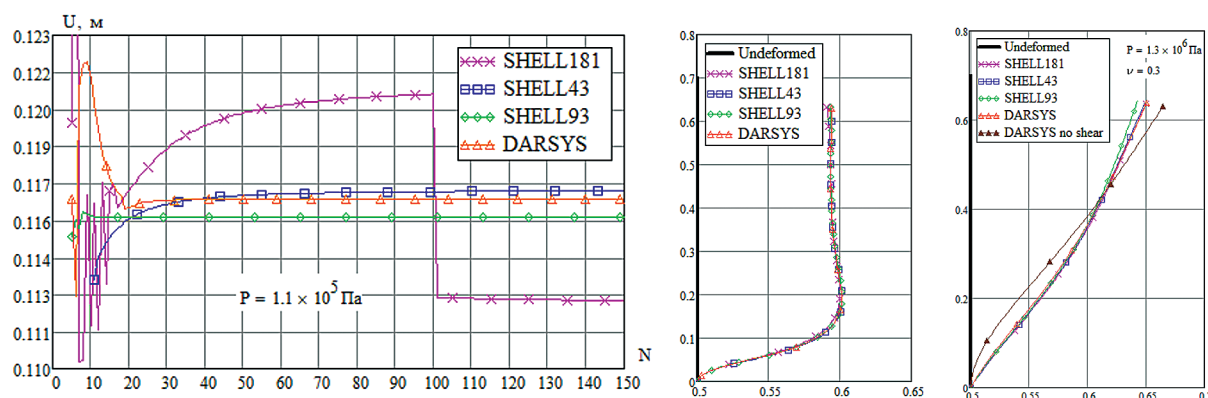


Рис. 5. Защемленная цилиндрическая оболочка. Результаты расчета.

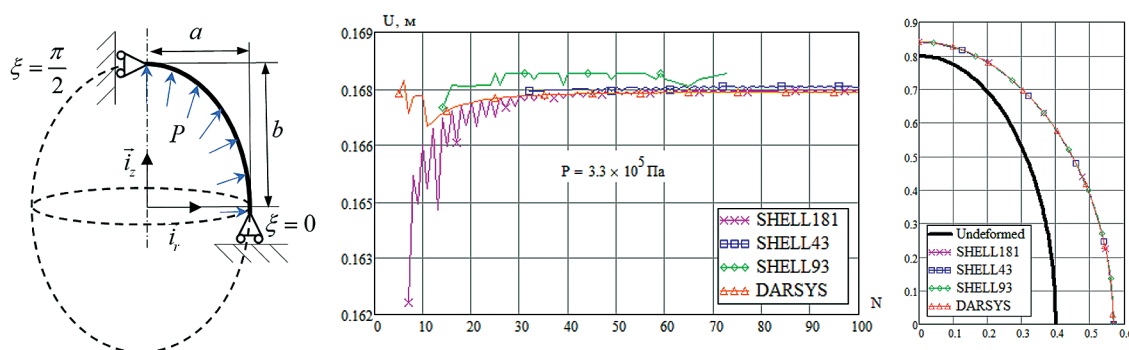


Рис. 6. Эллиптическая оболочка. Результаты расчета.

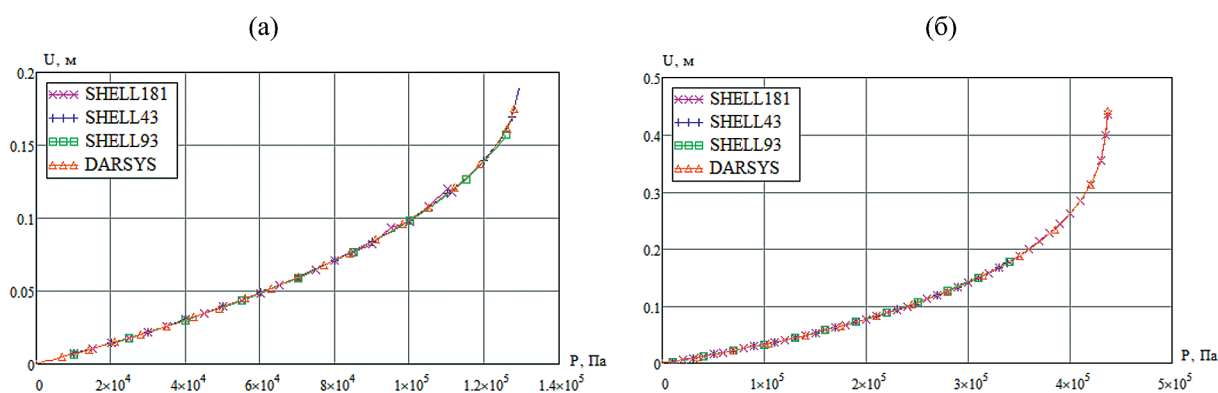


Рис. 7. Цилиндрическая (а) и эллиптическая (б) оболочки, зависимость перемещения от давления.

на рис. 5 показаны деформированные конфигурации меридиана с $h = 0.2$ м, чтобы показать влияние учета поперечного сдвига.

Рассмотрим задачу о деформировании эллиптической оболочки с полуосями $a = 0.4$ м, $b = 2a$ под действием внутреннего давления P (рис. 6). Толщина и материал взяты из предыдущего примера. На рис. 6 приведены зависимости полного перемещения точки меридиана,

лежащей на малой полуоси $\vec{i}_r$ ($\xi = 0$) от числа разбиений, рассчитанные в ANSYS и по формулам (12)–(16) при значении давления $P = 3.3 \cdot 10^5$ Па и деформированная конфигурация. Из рисунков видно, что результаты хорошо согласуются.

На рис. 7 приведены зависимости перемещения от давления для цилиндрической (слева) и эллиптической (справа) оболочки. Нелинейность обусловлена использованием логарифмической

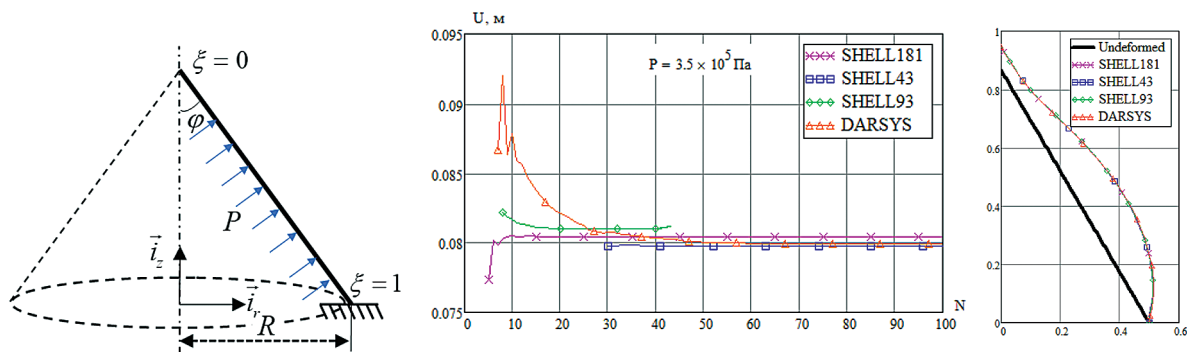


Рис. 8. Коническая оболочка. Результаты расчета.

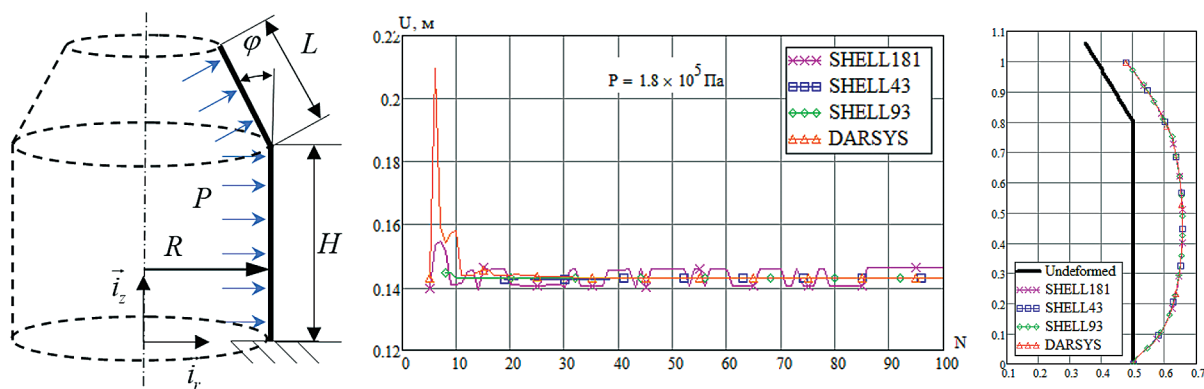


Рис. 9. Составная оболочка. Результаты расчета.

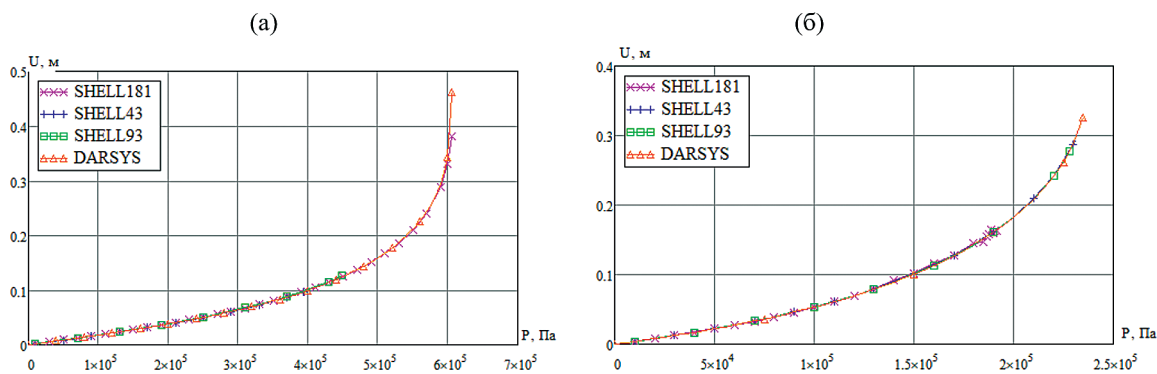


Рис. 10. Коническая (а) и составная (б) оболочки, зависимость перемещения от давления.

деформации в качестве меры, а также эффектом утонения оболочки.

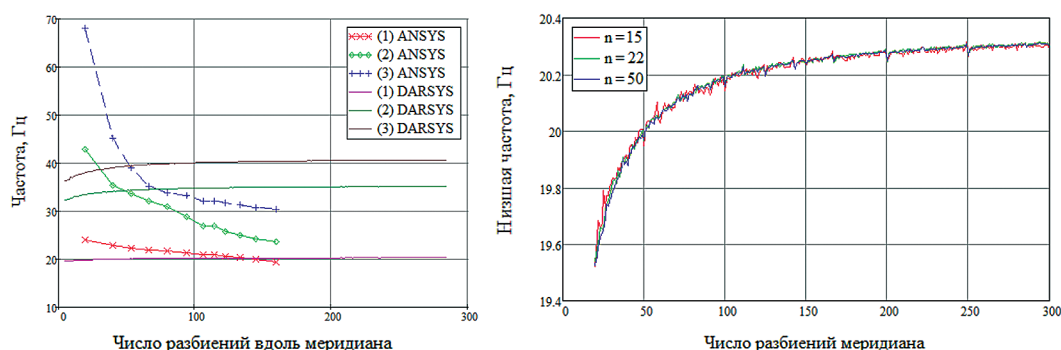
Рассмотрим задачу о деформировании конической оболочки под действием внутреннего распределенного давления P , радиус окружности дна $R = 0.5$ м, угол конуса $\varphi = \pi/6$ (рис. 8), толщину и параметры материала взяты из предыдущих примеров. На рис. 8 приведена деформированная конфигурация и зависимости полного перемещения вершины конуса ($\xi = 0$)

от числа разбиений, рассчитанные в ANSYS и по формулам (12)–(16) при значении давления $P = 3.5 \cdot 10^5$ Па.

Рассмотрим задачу о деформировании составной оболочки (рис. 9) под действием внутреннего распределенного давления P , радиус цилиндра $R = 0.5$ м, высота цилиндра $H = 0.8$ м, длина образующей конуса $L = 0.3$ м, $\varphi = \pi/6$, толщина и материал взяты из предыдущих примеров. На рис. 9 приведена деформированная

Таблица 1. Частоты колебаний полусферической оболочки с водой, Гц

№	1	2	3	4	5	6
	МКЭ-МГЭ [11]	МКЭ [12]	ANSYS [12] (Shell63)	МКЭ-МГЭ [4]	ANSYS (Shell181, Fluid80)	DARSYS
1	23.59	22.00	22.07	22.04	22.333	20.296
2	35.70	33.38	33.41	33.32	33.714	35.172
3	43.92	42.02	41.30	41.10	39.091	40.637

**Рис. 11.** Сходимость частот гидроупругих колебаний полусферической оболочки с водой.

конфигурация и зависимости полного перемещения верхней точки меридиана составной оболочки ($\xi = 0$) от числа разбиений, рассчитанные в ANSYS и по формулам (12)–(16) при значении давления $P = 1.8 \cdot 10^5$ Па. На рис. 10 представлены зависимости перемещения от давления для цилиндрической (а) и эллиптической (б) оболочки.

Рассмотрим тестовую задачу из статьи [11]: полусферический открытый бак заполнен водой, шарнирно закреплен по радиусу. Радиус $R = 5.08$ м, толщина 0.0254 м, модуль упругости $E = 7 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, плотность материала $\rho = 2770$ кг/м³.

В табл. 1 приведены три низшие частоты осесимметричных гидроупругих колебаний, рассчитанные различными методами в разных программах. Три первые столбца с частотами взяты из статьи [12], в которой нет информации о сходимости в зависимости от дискретизации модели. В табл. 1 в четвертом столбце приведены частоты, которые практически не меняются при увеличении числа конечных и граничных элементов, при расчете в программе В.Е. Левина [4] по МКЭ-МГЭ. В пятом столбце приведены

частоты, рассчитанные в ANSYS Workbench 14.5 при ~ 50 разбиениях вдоль меридиана.

Из табл. 1 видно, что расхождение в первой частоте между разными методами достигает 16%. Для анализа сходимости были проведены расчеты с разной дискретизацией модели. На рис. 11 приведены графики сходимости рассчитанных частот в ANSYS и по разработанной методике. Из рисунка видно, что графики пересекаются с ростом числа разбиений. Сходимости частот в ANSYS Workbench 14.5 (Shell181+Fluid80) получить не удалось, а частоты, рассчитанные по предлагаемой методике, имеют выраженную асимптотику при увеличении числа разбиений меридиана. На рис. 11б приведены зависимости низшей частоты от дискретизации меридиана для различных размеров трафарета конечных разностей РБФ $m = 2$. Повышение степени m не приводит к существенным изменениям, как и увеличение размера трафарета n .

В табл. 2 приведены частоты собственных колебаний составной оболочки из изотропного материала (рис. 9), заполненной водой до уровня 0.5 м. Были проведены расчеты частот

Таблица 2. Частоты колебаний составной оболочки с водой, Гц

№	ANSYS (Shell181, Fluid80)	МКЭ-МГЭ [4]	DARSYS
1	8.464	9.233	9.394
2	10.969	11.256	11.307
3	13.801	14.137	14.130
4	16.377	16.474	16.448
5	16.763	16.937	16.869
6	18.487	18.756	18.577

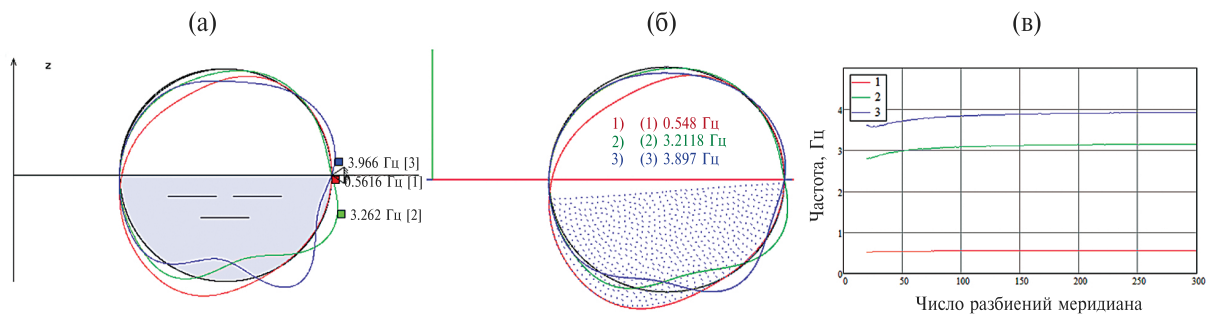


Рис. 12. Формы колебаний тороидального бака (МКЭ-МГЭ [4] (а), DARSYS (б), сходимость частот (в)).

собственных осесимметричных колебаний в программе [4] по МКЭ-МГЭ (~60 элементов), в ANSYS Workbench 14.5 моделировалась четверть модели с условиями симметрии (~119 тыс. элементов) и по предложенной методике в программе DARSYS (300 разбиений меридиана), результаты сведены в табл. 2.

Из табл. 2 видно, что наибольшее различие приходится на низшую частоту и достигает 11%, с ростом номера тона разница падает до 0.5%. Уточнить результаты в ANSYS путем увеличения числа КЭ не удалось.

Рассмотрим тороидальный бак, наполовину заполненный водой, образующая окружность имеет радиус 0.5 м, внутренний радиус – 0.5 м, внешний – 1.5 м. Толщина оболочки 0.02 м,

изотропный материал: модуль упругости $E = 2 \cdot 10^7$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, плотность $\rho = 7850$ кг/м³. Тор шарнирно закреплен по внешнему радиусу. На рис. 12 приведены частоты и формы колебаний, рассчитанные в программе [4] (140 КЭ, 140 ГЭ вдоль меридиана) и по предлагаемой методике в программе DARSYS [5] (140 разбиений меридиана, $m = 2$, $n = 22$). В табл. 3 приведено сравнение первых 6 частот осесимметричных колебаний. Из табл. 3 видно, что частоты хорошо согласуются между собой.

На рис. 12 приведены зависимости 3 низших частот от числа разбиений меридиана, рассчитанные в DARSYS. Из рис. 12 видно, что частоты стремятся к горизонтальным

Таблица 3. Частоты колебаний тороидального бака с водой, Гц

	МКЭ-МГЭ [4]	DARSYS	Разница, %
1	0.5616	0.5480	2.42
2	3.2617	3.2118	1.53
3	3.9653	3.8970	1.72
4	4.4991	4.4930	0.14
5	5.2194	5.1741	0.87
6	6.0651	5.9365	2.12

прямым с ростом числа разбиений без заметных осцилляций.

Предложенная методика расчета имеет перспективы развития, она будет применена для расчета оболочек в общей пространственной постановке на основе разработанных уравнений. Использование разрешающих функций в глобальной системе координат, в т.ч. вектора Эйлера для описания поворотов, позволяет достаточно просто проводить стыковку участков / областей. В будущем будет применен метод отложенной коррекции, который позволяет уточнить решение и получить непосредственную оценку достигнутой точности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колесников К.С. Динамика топливных систем ЖРД / К.С. Колесников, С.А. Рыбак, Е.А. Самойлов. М.: Машиностроение, 1975. 172 с.
2. Аннин Б.Д., Волчков Ю.М. Неклассические модели теории пластин и оболочек // Прикладная механика и техническая физика. 2016. № 5. С. 5–14. <https://doi.org/10.15372/PMTF20160501>
3. Бочкарев С.А. Собственные колебания усеченных конических оболочек, содержащих жидкость / С.А. Бочкарев, С.В. Лекомцев, В.П. Матвеев // Прикладная математика и механика. 2022. Т. 86. № 4. С. 505–526. <https://doi.org/10.31857/S0032823522040038>
4. Левин В.Е. Метод конечных и граничных элементов в динамике конструкций летательных аппаратов: специальность 05.07.03 “Прочность и тепловые режимы летательных аппаратов”: Диссертация на соискание доктора технических наук / В.Е. Левин. Новосибирский государственный технический университет. Новосибирск, 2001. 341 с.
5. Красноруцкий Д.А., Лакиза П.А., Шелевая Д.Р. Программный комплекс для моделирования механики системы тонких упругих стержней. Краевые задачи и математическое моделирование: темат. сб. науч. ст. Новокузнецк: Изд-во КГПИ КемГУ, 2023. С. 57–60.
6. Flyer N., Fornberg B., Bayona V. & Barnett G.A. On the role of polynomials in RBF-FD approximations: I. Interpolation and accuracy // J. Computational Physics. 2016. V. 321. P. 21–38. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.05.026>
7. Shankar V, Wright G.B., Kirby R.M., Fogelson A.L. A Radial Basis Function (RBF)-Finite Difference (FD) Method for Diffusion and Reaction-Diffusion Equations on Surfaces // J. Sci. Comput. 2016. Jun 1. V. 63(3). P. 745–768. <https://doi.org/10.1007/s10915-014-9914-1>
8. Kalani Rubasinghe, Guangming Yao, Jing Niu, Gantumur Tsogtgerel. Polyharmonic splines interpolation on scattered data in 2D and 3D with applications, Engineering Analysis with Boundary Elements. 2023. V. 156. P. 240–250. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2023.08.001>
9. Fornberg B., Flyer N. Fast generation of 2-D node distributions for mesh-free PDE discretizations // Computers & Mathematics with Applications. 2015. V. 69. Iss. 7. P. 531–544. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.01.009>
10. Shankar V. The overlapped radial basis function-finite difference (RBF-FD) method: A generalization of RBF-FD // J. Comput. Phys. 2017. V. 342. P. 211–228.
11. Гнисько В.И. Сравнение методов конечных и граничных элементов в задачах о колебаниях составной оболочки вращения с жидкостью / В.И. Гнисько, К.Г. Дегтярев, Е.С. Кононенко, А.М. Тонконоженко // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. 2019. С. 38–45.
12. Мокеев В.В. Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом с помощью метода конечных элементов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1998. № 6. С. 166–174.

USING RBF-FD FOR CALCULATION OF HYDROELASTIC VIBRATIONS OF AXISYMMETRIC ORTHOTROPIC SHELLS OF ROTATION

C. M. Nguyen^a, D. R. Shelevaya^{a, b}, D. A. Krasnorutsky^{a, c}

^a*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

^b*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

^c*S.A. Chaplygin Siberian Research Institute of Aviation, Novosibirsk, Russia*

Presented by Academician of the RAS B.D. Annin

Geometrically nonlinear differential equations describing the dynamic deformation of axisymmetric shells of rotation are derived on the basis of general equations for solving functions in the global coordinate system. The equations take into account thinning/thickening at large longitudinal strains as well as transverse shear for thick shells. The motion and pressure of an ideal incompressible fluid is described by a displacement potential. To obtain the numerical solution, the finite difference method based on spline interpolation by polyharmonic radial basis functions is applied. The calculation method is implemented in software package. Good agreement of the calculated displacements with the results of modeling by different finite elements in ANSYS is obtained. The frequencies of the hydroelastic vibrations of the tanks are compared with those obtained by the finite element and boundary element method, as well as with results from published articles by other researchers.

Keywords: ideal incompressible fluid, displacement potential, radial basis functions, finite difference method, RBF-FD, polyharmonic spline