



# ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

[www.sciencejournals.ru](http://www.sciencejournals.ru)



---

---

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 512, 2023

---

---

## ФИЗИКА

- Особенности убегания электронов в газовом промежутке с коническим катодом  
*Н. М. Зубарев, О. В. Зубарева, М. И. Яландин* 5
- Изгиб упругой пластинки в поле высоких давлений  
*М. А. Ильгамов* 11
- Влияние направленности источников на фазовые инварианты векторно-скалярных полей в мелком море  
*Г. Н. Кузнецов, А. Н. Степанов* 17
- Электронные и магнитные свойства сплавов на основе дираковского полуметалла  $Cd_3As_2$ , легированного атомами Mn с варьируемой концентрацией  
*Э. Т. Кулатов, Ю. А. Успенский* 24
- Пондеромоторные силы при взаимодействии заряженной частицы с неоднородной электромагнитной волной  
*В. Б. Лапшин, А. А. Скубачевский, А. С. Бугаев* 32
- Синтез композитов алмаз-SiO<sub>2</sub> со свойствами фотонных кристаллов видимого диапазона  
*Д. Н. Совык, К. А. Одинцов, А. П. Большаков, С. А. Дьяков, С. С. Савин, И. А. Федорова, В. Ю. Юров, В. М. Масалов, В. Г. Ральченко, В. И. Конов* 36
- Критика “Теории зажигания накаливаемой поверхностью” Я.Б. Зельдовича. Самовоспламенение бесконечного горючего накаливаемыми телами  
*А. А. Филиппов* 40
- Эффективные методы синтеза и оптимизации голограммной маски  
*В. В. Черник* 44
- 

## МЕХАНИКА

- Трехмерная оболочечная модель для послойного исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных нерегулярных конических оболочек  
*В. Н. Бакулин* 51
- Аналитическая связь между коэффициентами присоединенной массы и теплопроводности в суспензии сферических частиц  
*Б. В. Бошнятов* 58
- О роли коэффициента связанности в динамической задаче термоупругости с сосредоточенным включением  
*Н. Ф. Морозов, Д. А. Индейцев, К. Л. Муратиков, Д. С. Вавилов, А. А. Кудрявцев* 63
-

## ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Раман-геотермометр для углистых хондритов

*С. А. Воропаев, А. П. Кривенко, Н. В. Душенко*

69

Роль остаточного аустенита в высокой прочности и пластичности низколегированной стали

*Р. В. Мишнев, Ю. И. Борисова, М. Н. Ерохин, С. М. Гайдар, Р. О. Кайбышев*

73

Векторный  $S$ -параметрический анализ сигнальных фазодинамических радиоизображений

*С. С. Шадинов, М. С. Костин, Г. В. Коняшкин, А. С. Корчагин,  
М. Ю. Романовский, Н. Г. Гусейн-заде*

78

---

---

# CONTENTS

---

---

Volume 512, 2023

---

---

## PHYSICS

- Features of Electron Runaway in a Gas Gap with a Conical Cathode  
*N. M. Zubarev, O. V. Zubareva, and M. I. Yalandin* 5
- Bending of an Elastic Plate in a High Pressure Field  
*M. A. Ilgamov* 11
- Influence of the Direction of Sources on the Phase Invariants of Vector–Scalar Fields in a Shallow Sea  
*G. N. Kuznetsov and A. N. Stepanov* 17
- Electronic and Magnetic Properties of Alloys Based on the Dirac Semimetal  $\text{Cd}_3\text{As}_2$   
Doped by Mn Atoms with the Variable Concentrations  
*E. T. Kulatov and Yu. A. Uspenskii* 24
- Ponderomotive Forces in the Interaction of a Charged Particle  
with an Inhomogeneous Electromagnetic Wave  
*V. B. Lapshin, A. A. Skubachevskii, and A. S. Bugaev* 32
- Synthesis of Composites Diamond– $\text{SiO}_2$  with Photon Crystal Properties in the Visible  
*D. N. Sovyk, K. A. Odintsov, A. P. Bolshakov, S. A. Dyakov, S. S. Savin, I. A. Fedorova,  
V. Yu. Yurov, V. M. Masalov, V. G. Ralchenko, and V. I. Konov* 36
- Criticism of the “Theory of Incandescent Surface Ignition” by Ya.B. Zeldovich.  
Self-Ignition of Infinite Fuel by Incandescent Bodies  
*A. A. Philippov* 40
- Effective Methods of Synthesis and Optimization of a Holographic Mask  
*V. V. Chernik* 44
- 

## MECHANICS

- Three-Dimensional Shell Model for Layer-by-Layer Study of the Stress and Strain State  
of Irregular Conical Sandwich Shells  
*V. N. Bakulin* 51
- Analytical Relationship between the Coefficients of the Added Mass  
and Thermal Conductivity in a Suspension of Spherical Particles  
*B. V. Boshenyatov* 58
- On the Role of Coupling Coefficient in Dynamic Problem of Thermoelasticity  
with Localized Inclusion  
*N. F. Morozov, D. A. Indeitsev, K. L. Muratkov, D. S. Vavilov, and A. A. Kudryavtsev* 63
- 

## TECHNICAL SCIENCES

- Raman-Geothermometer for Carbonaceous Chondrites  
*S. A. Voropaev, A. P. Krivenko, and N. V. Dushenko* 69

The Significance of Retained Austenite in the High Strength  
and Plasticity of Medium Carbon Q&P Steel

*R. V. Mishnev, Y. I. Borisova, M. N. Erokhin, S. M. Gaidar, and R. O. Kaibyshev*

73

Vector *S*-Parametric Analysis of Signal Phase Dynamic Radio Images

*S. S. Shadinov, M. S. Kostin, G. V. Konyashkin, A. S. Korchagin,  
M. Yu. Romanovsky, and N. G. Guseyn-zade*

78

---

---

УДК 537.5

## ОСОБЕННОСТИ УБЕГАНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ГАЗОВОМ ПРОМЕЖУТКЕ С КОНИЧЕСКИМ КАТОДОМ

© 2023 г. Член-корреспондент РАН Н. М. Зубарев<sup>1,2,\*</sup>,  
О. В. Зубарева<sup>1</sup>, академик РАН М. И. Яландин<sup>1,2</sup>Поступило 01.06.2023 г.  
После доработки 01.06.2023 г.  
Принято к публикации 27.06.2023 г.

Анализируются условия и динамика убегания электронов в газовом промежутке с неоднородным распределением электрического поля, обусловленным использованием конического катода. Выявлены существенные отличия в поведении электронов при углах раствора конуса больших и меньших порогового значения в 98.6 градуса. Для слабо-неоднородного распределения поля (конусы с превышающими порог углами) электроны непрерывно ускоряются во всем промежутке. В сильно-неоднородном поле (конусы со сравнительно малыми углами раствора) электроны могут достигать максимальной энергии внутри промежутка, а в прианодной области начать тормозиться. При этом они попадают на анод с высокими энергиями, сопоставимыми с работой электрического поля. Такое различие приводит к необходимости использования различных критериев убегания свободных электронов в газовом промежутке.

*Ключевые слова:* убегание электронов, конический катод, газовый диод, неоднородное электрическое поле, импульсный пробой

DOI: 10.31857/S2686740023050140, EDN: RWLSGH

Под убегаящими электронами (УЭ) традиционно понимают свободные электроны в газе или плазме, которые теряют в столкновениях с частицами среды меньше энергии, чем получают под действием приложенного электрического поля и, как следствие, непрерывно ускоряются, достигая высоких, вплоть до релятивистских энергий [1, 2]. Интерес к исследованию УЭ во многом обусловлен их существенной ролью в развитии импульсного пробоя перенапряженных газовых промежутков [3–8]. Потоки УЭ могут использоваться для воздействия на объекты, возбуждения сред, генерации электромагнитного излучения – см., например, [9–11].

В однородном электрическом поле массовый переход электронов в режим убегания происходит, если его напряженность  $E$  превысит некоторое пороговое значение  $E_c$ , которое зависит от типа газа и его плотности [2, 4, 5]. В атмосферном воздухе, согласно [5],  $E_c \approx 270$  кВ/см (другие оценки для  $E_c$  приведены в [12, 13]). Наличие по-

рога связано с тем, что сила трения (торможения)  $F$ , действующая на электрон в среде и зависящая от его кинетической энергии  $\epsilon$ , ограничена сверху. Она достигает некоторого максимума  $F_{\max}$  при энергии электрона порядка 100 эВ (для воздуха максимум приходится на энергию  $\epsilon_c \approx 110$  эВ [14]). Если действующая на электрон электрическая сила превысит  $F_{\max}$ , то он будет непрерывно ускоряться при любых  $\epsilon$ . Тогда пороговое поле убегания оценивается как  $E_c \equiv F_{\max}/e$ , где  $e$  – элементарный заряд.

В лабораторных исследованиях УЭ, как правило, используются конфигурации электродов, обеспечивающие неоднородное распределение электрического поля в зазоре. Применяются конические [8, 9, 15] (в том числе – игольчатые [16, 17]) и кромочные (лезвийные и трубчатые) [6, 9, 18, 19] катоды, для которых напряженность поля вблизи острия (кромки) значительно превышает среднее значение. Это позволяет существенно снизить амплитуду импульса напряжения, подаваемого на промежуток. Так, например, при использовании трубчатого кромочного катода при длине промежутка  $D = 7.5$  мм убегание электронов регистрировалось при напряжении  $\approx 44$  кВ [18]. В однородном поле условием убегания было бы превышение приложенной разностью потен-

<sup>1</sup>Институт электрофизики Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

<sup>2</sup>Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: nick@iep.uran.ru

циалов в разы большего значения  $E_c D \approx 200$  кВ. Снижение порогового напряжения объясняется тем, что сила трения электрона в газе для достаточно больших, но нерелятивистских энергий уменьшается с  $\varepsilon$  [4, 5, 20] (для оценок можно брать  $F \propto \varepsilon^{-1}$ ). Если электрон в области усиленного поля вблизи катода набирает достаточно высокую энергию, то он может продолжить убежание, попадая в слабое, докритическое поле на периферии.

В настоящей работе исследуется влияние неоднородности распределения электрического поля в газовом промежутке на динамику и условия убегания электронов при варьировании в широком диапазоне степени неоднородности поля. Такое варьирование соответствует рассмотрению промежутка с коническим катодом, угол раствора которого меняется от 0 (тонкая игла) до  $\pi$  (плоскость). Будет продемонстрировано, что динамика УЭ радикально отличается для углов в интервалах от  $0^\circ$  до  $98.6^\circ$  (сильно-неоднородное поле) и от  $98.6^\circ$  до  $180^\circ$  (слабо-неоднородное поле), что приводит к необходимости использования различных критериев убегания свободных электронов.

Начнем с оценок. Положим, что потенциал электрического поля удовлетворяет степенному закону  $\phi \propto z^\gamma$ , и, следовательно, напряженность спадает с расстоянием  $z$  от катодного острия как  $E \propto z^{\gamma-1}$ . Здесь  $\gamma < 1$  — показатель приведенной степенной зависимости, характеризующий степень неоднородности распределения поля. При  $z \rightarrow 0$  напряженность поля формально обращается в бесконечность, т.е. заведомо превышает порог убегания  $E_c$  (такой предел соответствует острию с бесконечно малым радиусом кривизны вершины). Стартующий с катода электрон тогда начинает убегать в прикатодной области. Однако возникает вопрос, будет ли он ускоряться в области больших  $z$ , где напряженность поля становится низкой.

Предположим для начала, что электрон на периферии ускоряется, т.е. электрическая сила  $eE$  доминирует над силой трения  $F$ . Тогда кинетическая энергия электрона определяется пройденной им разностью потенциалов,  $\varepsilon \approx e\phi \propto z^\gamma$ , а сила трения оценивается как  $F \propto \varepsilon^{-1} \propto z^{-\gamma}$ . Сравним ее с электрической силой  $eE \propto z^{\gamma-1}$ . Сразу видно, что при  $z \rightarrow \infty$  использованное нами условие  $eE \gg F$  выполняется, только если  $\gamma > 1/2$ . С учетом неравенства  $\gamma < 1$  находим, что показатель находится в диапазоне  $1/2 < \gamma < 1$ . Это условие необходимо для непрерывного ускорения в пределе  $z \rightarrow \infty$ . При  $\gamma < 1/2$  исходное предположение о доминировании ускоряющей силы  $eE$  над тормозящей силой  $F$  для больших  $z$  наруша-

ется. Можно сделать вывод, что в этом случае электрон не будет непрерывно ускоряться. Его поведение будет более сложным: сначала, в области малых  $z$ , он будет ускоряться, а затем, удалившись от катода, начнет тормозиться. При отсутствии ограничений на  $z$  это неизбежно приведет к тому, что он превратится в тепловой электрон с энергией, меньшей  $\varepsilon_c$ .

Итак, наш анализ динамики асимптотического поведения свободных электронов в газе при  $z \rightarrow \infty$  в условиях неоднородного поля показал, что их динамика должна радикально отличаться при  $\gamma < 1/2$  и при  $1/2 < \gamma < 1$  (отметим, что граничный случай  $\gamma = 1/2$  анализировался в [18]). Рассмотрим теперь, как это повлияет на условия убегания электрона в газовом промежутке конечной длины.

Поскольку УЭ генерируются на начальной стадии развития пробоя, а их общее число вблизи порога генерации — минимально, то можно считать, что они пересекают промежуток тогда, когда распределение электрического поля еще не искажается объемным электрическим зарядом. В таком случае потенциал электрического поля  $\phi$  удовлетворяет уравнению Лапласа, которое следует решать совместно с условием эквипотенциальности поверхности катода. Для катода, представляющего собой идеальный конус с полууглом раствора  $\alpha$ , соответствующее решение дается (в сферических координатах) выражением

$$\phi = U(R/D)^\gamma {}_2F_1(\gamma + 1, -\gamma, 1, (1 - \cos \theta)/2). \quad (1)$$

Здесь  $U$  — приложенная к промежутку разность потенциалов,  $R$  — расстояние от вершины конуса,  $\theta$  — полярный угол, отсчитываемый от оси симметрии задачи (ось  $z$  декартовой системы координат),  $D$  — межэлектродное расстояние,  ${}_2F_1$  — гипергеометрическая функция. Показатель степени неоднородности поля  $\gamma$  связан с углом  $\alpha$  уравнением

$${}_2F_1(\gamma + 1, -\gamma, 1, (1 + \cos \alpha)/2) = 0, \quad (2)$$

которое возникает из (1) вследствие требования постоянства потенциала на поверхности конуса,  $\phi|_{\theta=\pi-\alpha} = 0$ . Соответствующая (2) зависимость показана на рис. 1. Из рисунка видно, что для углов в допустимом диапазоне  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$  показатель  $\gamma$  монотонно растет, пробегая значения  $0 \leq \gamma \leq 1$ . Нижняя граница этого интервала соответствует бесконечно тонкому конусу — катоду в виде иглы (см., например, [16, 17]), а верхняя — плоскому катоду. Для конического катода из недавней работы [15]  $\alpha = 20^\circ$ , что, согласно (2), дает  $\gamma \approx 0.275$ . Для катода, использовавшегося в [8],  $\alpha = 45^\circ$ , что соответствует  $\gamma \approx 0.463$ . Для [9]  $\alpha = 30^\circ$  и  $\gamma \approx 0.346$ . Пороговое значение показателя  $\gamma = 0.5$ , отделяющее, согласно нашим оцен-

кам, области с различным поведением свободных электронов (случаи сильно- и слабо-неоднородных полей), соответствует полууглу раствора  $\alpha \approx 49.3^\circ$  (точка на рис. 1). Отметим, что такой угол в литературе называют углом Тейлора. Он возникает как при статическом [21], так и при динамическом [22] анализе конических образований на заряженной границе проводящей жидкости.

Очевидно, что направление  $z$  является наиболее выгодным для убегания электронов. Поэтому для анализа условий убегания достаточно рассмотреть одномерную задачу о движении свободных электронов вдоль оси  $z$ . Принимая в (1)  $R = z$  и  $\theta = 0$ , находим, что абсолютное значение напряженности электрического поля на оси симметрии задачи дается выражением  $E(z) = \gamma U D^{-\gamma} z^{\gamma-1}$ . Уравнение одномерного движения свободного электрона, записанное в терминах его кинетической энергии, имеет вид [4, 5]

$$d\epsilon/dz = eE(z) - F(\epsilon). \quad (3)$$

Мы будем использовать следующую аппроксимацию для силы трения электрона в газе:

$$F(\epsilon) = \begin{cases} eE_c \sqrt{\frac{4e\epsilon}{9\epsilon_c}}, & \epsilon < \epsilon_0, \\ eE_c \frac{\epsilon_c}{\epsilon} \ln\left(\frac{e\epsilon}{\epsilon_c}\right), & \epsilon > \epsilon_0, \end{cases}$$

где  $e \approx 2.718$  – основание натурального логарифма и  $\epsilon_0 \equiv e^{-1/3} \epsilon_c \approx 0.72\epsilon_c$ . Эти выражения представляют собой сшивку в точке  $\epsilon = \epsilon_0$  зависимости  $F \propto \sqrt{\epsilon}$  (сила трения пропорциональна скорости частицы при низких энергиях) с нерелятивистской формулой Бете [20], обеспечивающую гладкость функции  $F(\epsilon)$ .

Вычислим пороговое для убегания электронов напряжение  $U_r$  согласно определению убегания как процесса непрерывного ускорения. Для убегания должно выполняться условие  $d\epsilon/dz > 0$  во всем межэлектродном промежутке  $0 < z < D$ . Порог  $U_r$  соответствует минимальному значению  $U$ , при котором такое условие выполняется. Он находится из требования  $d\epsilon/dz|_{z=D} = 0$ , т.е. энергия достигает максимума на аноде (при меньших  $U$  максимум сместится внутрь промежутка, и появится область, в которой электрон будет тормозиться). При численном решении уравнения движения (3) электроны запускались с нулевой начальной энергией с катодного острия – из точки  $z = 0$ . Расстояние  $D$  принималось, как в [18], равным 7.5 мм; газ – воздух атмосферного давления, т.е.  $E_c = 270$  кВ/см и  $\epsilon_c = 110$  эВ.

Результаты расчетов показаны на рис. 2 сплошной линией. Пороговое значение напряжения

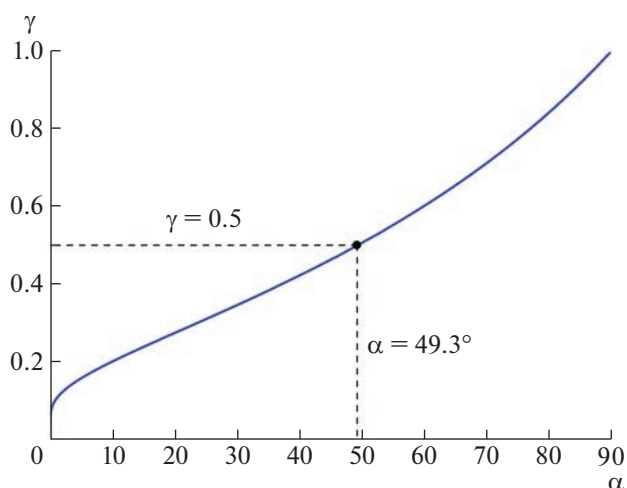


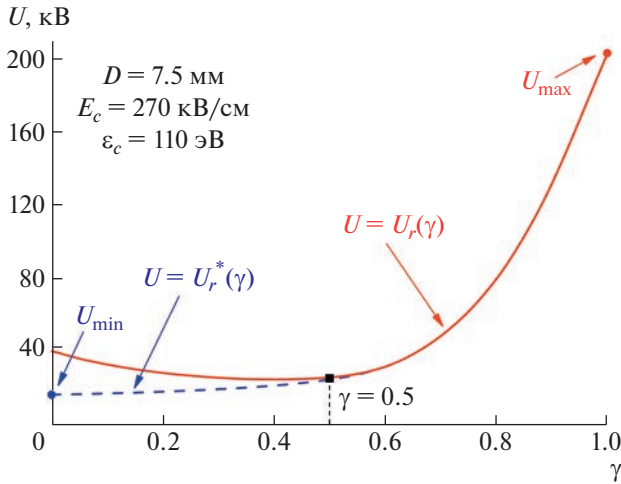
Рис. 1. Зависимость показателя  $\gamma$  от полуугла раствора конического катода  $\alpha$ . Точкой показано значение  $\gamma = 1/2$ , соответствующее углу раствора  $2\alpha \approx 98.6^\circ$ .

предсказуемо оказывается наибольшим для случая однородного поля ( $\gamma = 1$ ). Соответствующее значение дается произведением критического поля на межэлектродное расстояние:  $U_{\max} = E_c D = 202.5$  кВ. С уменьшением  $\gamma$  растет степень неоднородности поля, что обеспечивает более удобные для перехода электронов в режим убегания стартовые условия и, казалось бы, должно приводить к монотонному снижению порогового для убегания напряжения. Такое снижение действительно происходит до значения напряжения в  $\approx 24.9$  кВ при  $\gamma \approx 0.4$  (это соответствует углу  $\alpha \approx 40^\circ$ ), но затем  $U_r$  начинает расти, достигая значения в  $\approx 40.4$  кВ при  $\gamma = 0$ .

Разберемся, чем обусловлен демонстрируемый рис. 2 немонотонный характер зависимости порогового напряжения  $U_r$  от  $\gamma$ . Обратим внимание, что отличие этой зависимости от интуитивно ожидаемой приходится на значения показателя  $\gamma$  в области  $\gamma < 1/2$ , где, как показали наши оценки, происходит качественное изменение динамики свободных электронов на периферии. Электроны, если бы их движение не было ограничено анодом  $z = D$ , начали бы тормозиться при достаточно больших  $z$  вне зависимости от величины  $U$ .

Появление минимума в зависимости  $U_r(\gamma)$  является проявлением использования не вполне корректного критерия убегания электронов, требующего их непрерывного ускорения во всем межэлектродном промежутке. С экспериментальной точки зрения можно считать, что условия убегания реализуются, если на аноде (если быть точным – за анодной фольгой, отсекающей низкоэнергетические электроны) регистрируется поток быстрых электронов, энергия которых суще-

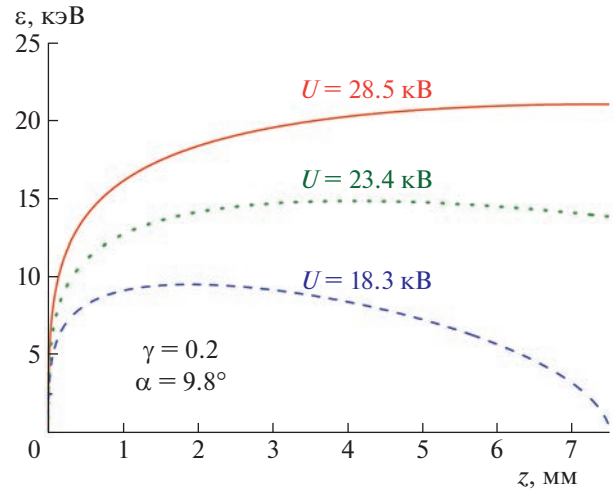




**Рис. 2.** Зависимости пороговых для убегания электронов значений напряжения  $U$  от показателя  $\gamma$  для двух различных критериев убегания. Красная сплошная линия,  $U_r(\gamma)$ , соответствует непрерывному ускорению электрона в газовом промежутке. Синяя штриховая линия,  $U_r^*(\gamma)$ , соответствует достижению быстрым электроном анода с минимальной допустимой энергией  $\epsilon_c$  ( $D = 7.5$  мм; газ – атмосферный воздух).

ственно превышает энергию тепловых электронов. В терминах настоящей работы естественно выбрать  $\epsilon_c \approx 110$  эВ в качестве порогового значения энергии свободного электрона, достаточно, чтобы считать его “быстрым”. В случае регистрации на аноде электронов с энергиями  $\epsilon > \epsilon_c$  для наблюдателя не имеет значения, ускорились ли электроны в межэлектродном промежутке непрерывно, либо имелись области, где их энергия падала.

Выберем теперь в качестве порогового для убегания электронов такое значение напряжения (обозначим его за  $U_r^*$ ), при котором электрон достигнет анода с энергией  $\epsilon_c$ . Понятно, что при  $U > U_r^*$  его энергия на аноде будет превышать значение  $\epsilon_c$ , а при  $U < U_r^*$  он превратится в тепловой внутри промежутка и далее будет дрейфовать к аноду. Результаты расчетов показаны на рис. 2 штриховой линией. Видно, что на участке  $1/2 < \gamma < 1$  (слабо-неоднородное поле) оба критерия дают практически совпадающие значения пороговых напряжений,  $U_r \approx U_r^*$ . На участке  $0 \leq \gamma \leq 1/2$  (сильно-неоднородное поле) кривые  $U_r(\gamma)$  и  $U_r^*(\gamma)$  заметно расходятся. Так, для  $\gamma = 0$  имеем  $U_r \approx 40.4$  кВ и  $U_r^* \approx 16.7$  кВ, т.е. пороговые напряжения радикально – более чем в 2.4 раза – отличаются. Таким образом, наши оценки, свидетельствующие о качественном изменении характера убегания электронов при равном  $1/2$  значении показателя  $\gamma$ , оказались верными.



**Рис. 3.** Зависимости кинетической энергии  $\epsilon$  электрона от расстояния  $z$  для  $\gamma = 0.2$  при  $U = U_r \approx 28.5$  кВ (красная сплошная линия),  $U = (U_r + U_r^*)/2 \approx 23.4$  кВ (зеленая пунктирная линия),  $U = U_r^* \approx 18.3$  кВ (синяя штриховая линия).

Покажем, что приводит к отличиям между  $U_r$  и  $U_r^*$  в случае сильно-неоднородного поля, рассматривая динамику электронов в газовом зазоре. На рис. 3 приведены результаты численного решения уравнения (3) для попадающего в диапазон  $0 \leq \gamma \leq 1/2$  значения показателя  $\gamma = 0.2$  (полуугол раствора конуса  $\alpha \approx 9.8^\circ$ ). Продемонстрировано, как меняется кинетическая энергия электрона вдоль его траектории для пороговых значений напряжения  $U_r \approx 28.5$  кВ и  $U_r^* \approx 18.3$  кВ, соответствующих двум различным критериям убегания. В первом случае (сплошная линия) энергия электрона монотонно нарастает – он непрерывно ускоряется во всем промежутке. На аноде энергия достигает максимума в  $\approx 21.0$  кэВ (отметим, что потери энергии сравнительно малы – они составляют  $\approx 7.5$  кэВ, т.е. почти в 4 раза меньше работы внешнего поля по ускорению электрона). Во втором случае (штриховая линия) электрон ускоряется в прикатодной области  $0 < z < 1.9$  мм, достигая максимальной энергии в  $\approx 9.5$  кэВ. Далее в области  $1.9 < z < 7.5$  мм сила трения начинает доминировать над электрической, и его энергия снижается до равного  $\epsilon_c$  значения согласно используемому критерию убегания.

Также на рис. 3 показана зависимость  $\epsilon(z)$  для промежуточного значения напряжения  $U = (U_r + U_r^*)/2 \approx 23.4$  кВ. Электрон ускоряется примерно половину промежутка, на участке  $0 < z < 4.1$  мм, достигая максимальной энергии

$\approx 14.8$  кэВ. Далее он тормозится на оставшейся части промежутка  $4.1 < z < 7.5$  мм. При этом его энергия снижается до значения  $\approx 13.8$  кэВ на аноде. При формальном использовании критерия убегания  $U > U_r$ , обеспечивающего непрерывное ускорение частиц во всем межэлектродном промежутке, такой электрон не будет считаться убегающим. При этом он, получив от электрического поля энергию  $\approx 23.4$  кэВ, теряет на трение меньше половины,  $\approx 10.1$  кэВ. С точки зрения наблюдателя, регистрирующего поток электронов на аноде, этот электрон однозначно будет интерпретироваться как убегающий.

Таким образом, использование критерия  $U > U_r^*$  убегания электронов представляется нам более корректным, чем критерия  $U > U_r$ . Отметим, что зависимость  $U_r^*(\gamma)$  (см. рис. 2) является монотонной во всем диапазоне  $\gamma$ , что вполне соответствует интуитивно ожидаемому поведению: увеличение степени неоднородности поля облегчает переход электронов в режим убегания и, как следствие, должно приводить к снижению порогового значения напряжения. Минимальное значение  $U_r^*$  при этом приходится на катод в форме иглы (бесконечно тонкий конус с  $\gamma = 0$  и  $\alpha = 0$ ) и составляет  $U_{\min} = U_r^*(0) \approx 16.7$  кэВ.

Выявленные особенности поведения УЭ в сильно-неоднородном поле могут иметь важные последствия для развития пробоя газового промежутка. УЭ, пересекая промежуток со скоростями, сопоставимыми со скоростью света, осуществляют предварительную ионизацию газа, определяют тем самым динамику его последующего пробоя [7, 8, 23–25]. Поскольку сечение ионизации падает с ростом кинетической энергии электрона в области  $\epsilon > \epsilon_c$ , то в режиме непрерывного ускорения электрон в основном ионизует газ в прикатодной области. В случае торможения электрона в прианодной области, здесь также вырастет скорость ионизации. В результате можно ожидать формирования не только прикатодной, но и прианодной плазменных областей, и, как следствие, изменения картины развития субнаносекундного импульсного пробоя газового промежутка.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-19-00053, <https://rscf.ru/project/23-19-00053/>.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dreicer H. Electron and ion runaway in a fully ionized gas // *Phys. Rev.* 1959. V. 115. № 2. P. 238–249. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.115.238>

2. Гуревич А.В. К теории эффекта убегающих электронов // *ЖЭТФ.* 1960. Т. 39. № 5. С. 1296–1307.
3. Станкевич Ю.Л., Калинин В.Г. Быстрые электроны и рентгеновское излучение в начальной стадии развития импульсного искрового разряда в воздухе // *ДАН СССР.* 1967. Т. 177. № 1. С. 72–73.
4. Месяц Г.А., Бычков Ю.И., Кремнев В.В. Импульсный наносекундный электрический разряд в газе // *УФН.* 1972. Т. 107. № 6. С. 201–228. <https://doi.org/10.3367/UFN.0107.197206b.0201>
5. Бабич Л.П., Лойко Т.В., Цукерман В.А. Высоковольтный наносекундный разряд в плотных газах при больших перенапряжениях, развивающийся в режиме убегания электронов // *УФН.* 1990. Т. 160. № 7. С. 49–82. <https://doi.org/10.3367/UFN.0160.199007b.0049>
6. Месяц Г.А., Яландин М.И., Реутова А.Г., Шарыпов К.А., Шпак В.Г., Шунайлов С.А. Пикосекундные пучки убегающих электронов в воздухе // *Физика плазмы.* 2012. Т. 38. № 1. С. 34–51.
7. Naidis G.V., Tarasenko V.F., Babaeva N.Yu., Lomaev M.I. Subnanosecond breakdown in high-pressure gases // *Plasma Sources Sci. Technol.* 2018. V. 27. № 1. P. 013001. <https://doi.org/10.1088/1361-6595/aaa072>
8. Mesyats G.A., Yalandin M.I., Zubarev N.M., Sadykova A.G., Sharypov K.A., Shpak V.G., Shunailov S.A., Ulmaskulov M.R., Zubareva O.V., Kozyrev A.V., Semeniuk N.S. How short is the runaway electron flow in an air electrode gap? // *Appl. Phys. Lett.* 2020. V. 116. № 6. P. 063501. <https://doi.org/10.1063/1.5143486>
9. Бабич Л.П., Лойко Т.В., Родигин А.В. Излучение Вавилова–Черенкова субнаносекундного импульса убегающих электронов, генерируемого разрядом в открытой атмосфере // *ДАН.* 2014. Т. 457. № 6. С. 646–649.
10. Тарасенко В.Ф., Бакшт Е.Х., Бураченко А.Г., Белоплотов Д.В., Козырев А.В. Свечение полиметилметакрилата под воздействием пучков убегающих электронов, формируемых в газовом диоде // *ДАН.* 2016. Т. 471. № 2. С. 150–153.
11. Яландин М.И., Соломонов В.И., Спирина А.В., Шунайлов С.А., Шарыпов К.А., Макарова А.С., Липчак А.И. Специфика импульсной катодолюминесценции при возбуждении электронным пучком наносекундной и субнаносекундной длительности // *Доклады РАН. Физика, технические науки.* 2023. Т. 508. С. 19–26. <https://doi.org/10.31857/S2686740023010121>
12. Лисенков В.В., Иванов С.Н., Мамонтов Ю.И., Тихонов И.Н. Численное исследование убегания электронов в усиленном поле около микроострия // *ЖТФ.* 2018. Т. 88. № 12. С. 1912–1915. <https://doi.org/10.21883/JTF.2018.12.46798.68-18>
13. Bakhov K.I., Babich L.P., Kutsyk I.M. Temporal characteristics of runaway electrons in electron-neutral collision-dominated plasma of dense gases. Monte Carlo calculations // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 2000. V. 28. № 4. P. 1254–1262. <https://doi.org/10.1109/27.893314>

14. *Peterson L.R., Green A.E.S.* The relation between ionization yields, cross sections and loss functions // *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* 1968. V. 1. № 6. P. 1131–1140.  
<https://doi.org/10.1088/0022-3700/1/6/317>
15. *Mesyats G.A., Osipenko E.A., Sharyпов K.A., Shpak V.G., Shunailov S.A., Yalandin M.I., Zubarev N.M.* An ultra-short dense paraxial bunch of sub-relativistic runaway electrons // *IEEE Electron Device Lett.* 2022. V. 43. № 4. P. 627–630.  
<https://doi.org/10.1109/LED.2022.3155173>
16. *Yalandin M.I., Sadykova A.G., Sharyпов K.A., Shpak V.G., Shunailov S.A., Zubareva O.V., Zubarev N.M.* Features of the secondary runaway electron flow formed in an elongated, atmospheric pressure air gap // *Phys. Plasmas.* 2020. V. 27. P. 103505.  
<https://doi.org/10.1063/5.0024785>
17. *Тарасенко В.Ф., Белоплотов Д.В., Сорокин Д.А.* Длительность пучка убегающих электронов при субнаносекундном фронте импульса напряжения // *ЖТФ.* 2022. Т. 92. № 5. С. 694–703.  
<https://doi.org/10.21883/JTF.2022.05.52373.317-21>
18. *Zubarev N.M., Yalandin M.I., Mesyats G.A., Baren-golts S.A., Sadykova A.G., Sharyпов K.A., Shpak V.G., Shunailov S.A., Zubareva O.V.* Experimental and theoretical investigations of the conditions for the generation of runaway electrons in a gas diode with a strongly nonuniform electric field // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2018. V. 51. P. 284003.  
<https://doi.org/10.1088/1361-6463/aac90a>
19. *Тарасенко В.Ф., Бахит Е.Х., Белоплотов Д.В., Бураченко А.Г., Костыря И.Д., Ломаев М.И., Рыбка Д.В., Сорокин Д.А.* О параметрах пучков убегающих электронов и об электронах с “аномальной” энергией при субнаносекундном пробое газов атмосферного давления // *Письма в ЖЭТФ.* 2015. Т. 102. № 6. С. 388–392.  
<https://doi.org/10.7868/S0370274X1518006X>
20. *Bethe H.* Zur theorie des durchgangs schneller korpuskularstrahlen durch materie // *Ann. Phys.* 1930. V. 397. № 3. P. 325–400.  
<https://doi.org/10.1002/andp.19303970303>
21. *Taylor G.I.* Disintegration of water drops in an electric field // *Proc. R. Soc. London, Ser. A.* 1964. V. 280. № 1382. P. 383–397.  
<https://doi.org/10.1098/rspa.1964.0151>
22. *Зубарев Н.М.* Формирование конических острий на поверхности жидкого металла в электрическом поле // *Письма в ЖЭТФ.* 2001. Т. 73. № 10. С. 613–617.
23. *Yatom S., Shlapakovski A., Beilin L., Stambulchik E., Tskhai S., Krasik Y.E.* Recent studies on nanosecond-timescale pressurized gas discharges // *Plasma Sources Sci. Technol.* 2016. V. 25. № 6. P. 064001.  
<https://doi.org/10.1088/0963-0252/25/6/064001>
24. *Zubarev N.M., Kozhevnikov V.Yu., Kozыrev A.V., Mesyats G.A., Semeniuk N.S., Sharyпов K.A., Shunailov S.A., Yalandin M.I.* Mechanism and dynamics of picosecond radial breakdown of a gas-filled coaxial line // *Plasma Sources Sci. Technol.* 2020. V. 29. № 12. P. 125008.  
<https://doi.org/10.1088/1361-6595/abc414>
25. *Ivanov S.N., Lisenkov V.V., Mamontov Yu.I.* Streak investigations of the dynamics of subnanosecond discharge developing in nitrogen at a pressure of 6 atm with the participation of runaway electrons // *Plasma Sources Sci. Technol.* V. 30. № 7. P. 075021.  
<https://doi.org/10.1088/1361-6595/abf31f>

## FEATURES OF ELECTRON RUNAWAY IN A GAS GAP WITH A CONICAL CATHODE

**Corresponding Member of the RAS N. M. Zubarev<sup>a,b</sup>, O. V. Zubareva<sup>a</sup>,  
and Academician of the RAS M. I. Yalandin<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup>*Institute of Electrophysics of Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia*

<sup>b</sup>*Lebedev Physical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

The conditions and dynamics of electron runaway in a gas gap with an inhomogeneous distribution of the electric field due to the use of a conical cathode are analyzed. Significant differences in the behavior of electrons at cone opening angles larger and smaller than the threshold value of 98.6 degrees are revealed. For a weakly inhomogeneous field distribution (cones with angles exceeding the threshold), electrons are continuously accelerated throughout the gap. In a strongly inhomogeneous field (cones with relatively small opening angles), electrons can gain maximum energy inside the gap, and begin to decelerate in the near-anode region. Despite this, they reach the anode with high energies comparable to the work of the electric field. This difference leads to the need to use different criteria for the runaway of free electrons in the gas gap.

*Keywords:* runaway electrons, conical cathode, gas diode, inhomogeneous electric field, pulsed breakdown

УДК 534.113

## ИЗГИБ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ В ПОЛЕ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ

© 2023 г. Член-корреспондент РАН М. А. Ильгамов<sup>1,2,3,\*</sup>

Поступило 17.01.2023 г.

После доработки 17.01.2023 г.

Принято к публикации 25.04.2023 г.

Дан вывод уравнения статического цилиндрического изгиба тонкой пластинки под действием давлений на ее поверхности и торцевые кромки. Учитывается обжатие по толщине пластинки, влияние которого становится заметным при высоком среднем давлении. Привлекается уточненное значение поперечной распределенной силы. Рассматривается зависимость изгиба от среднего давления и жесткости опор в продольном направлении.

*Ключевые слова:* пластинка, опоры, давление, обжатие, изгиб

**DOI:** 10.31857/S268674002305005X, **EDN:** OVNSIH

В природе и технике имеются тонкостенные объекты типа балки, пластинки, пленки, панели, оболочки, которые находятся в среде с высоким давлением. Такие элементы конструкций есть в оборудовании нефтехимии, энергетики, в аэрокосмической технике. Среднее давление на стенки может быть на несколько порядков больше, чем перепад давлений, под которым происходит их изгиб. Например, на нижнюю и верхнюю поверхности пластинки толщиной  $h$ , находящейся в горизонтальном положении на глубине  $H$  водной среды, действуют давления  $p_0 + p_1$  и  $p_0 + p_2$ , где  $p_0$  – атмосферное давление (0.1 МПа),  $p_1 = \rho g(H + h/2)$  и  $p_2 = \rho g(H - h/2)$  – гидростатические давления,  $\rho$  – плотность воды,  $g$  – гравитационное ускорение. При этом среднее давление равно  $p_m = (p_0 + p_1 + p_2)/2 = p_0 + \rho gH$  и перепад  $p_1 - p_2 = \rho gh$  (Архимедова сила). Они могут отличаться на многие порядки. Примем, что поле высоких давлений определяется неравенством

$$|p_1 - p_2| p_m^{-1} < 10^{-2}. \quad (1)$$

В теории изгиба тонкостенных пластинок, основанной на гипотезах Кирхгофа, не учитывается влияние на него среднего давления [1–6]. Важным является вопрос о таком влиянии и области

применимости классической теории с этой точки зрения. В данной работе в частной линейной задаче о цилиндрическом изгибе тонкой пластинки в условиях плоских деформированного и напряженного состояний рассматривается этот вопрос. При этом используется уравнение статического изгиба, полученное исходя из предположения о том, что поперечное плоское сечение остается плоским и перпендикулярным к изогнутой срединной поверхности (первая гипотеза). Вторая гипотеза о малости напряжения сжатия по толщине стенки по сравнению с напряжениями, параллельными срединной поверхности, не используется. Вопросы, связанные с этими гипотезами, рассматриваются во многих работах, в частности в [7, 8]. Устойчивость колонны, балки и пластинки под всесторонним давлением изучена в [9–12] с использованием уравнений, основанных на указанных гипотезах, а в [13, 14] без привлечения таких упрощений на основе соотношений трехмерной теории упругости.

### 1. УЧЕТ ПОПЕРЕЧНОГО ОБЖАТИЯ И РАЗНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЛАСТИНКИ

Уравнение статического цилиндрического изгиба относительно продольной силы  $N$ , изгибающего момента  $M$ , прогиба  $w$ , поперечной распределенной силы  $q$  имеет вид [1–6]

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + N \frac{d^2 w}{dx^2} + q = 0. \quad (2)$$

Оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  направлены вдоль пластинки длиной  $L$ , в поперечном направлении и по нормали к срединной поверхности, с которой совпадает  $z = 0$ .

<sup>1</sup>Институт машиноведения им А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт механики и машиностроения Казанского научного центра Российской академии наук, Казань, Россия

<sup>3</sup>Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Россия

\*E-mail: ilgatov@anrb.ru

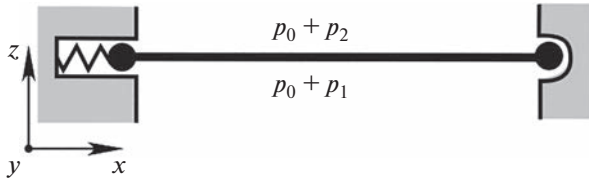


Рис. 1. Схема пластины, опоры и системы координат.

Направление вверх считается положительным для  $z$ ,  $q$ ,  $w$ . Принимаем следующие условия закрепления (рис. 1):

$$\begin{aligned} N = Cu^0 + P, \quad w = 0, \quad M = 0 \quad (x = 0), \\ u^0 = 0, \quad w = 0, \quad M = 0 \quad (x = L), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $u^0$  – продольное перемещение срединной поверхности,  $C$  – жесткость опоры в продольном направлении,  $P$  – растягивающая сила, действующая на площадку кромки  $x = 0$  и зависящая от конструкции опоры. Если сила  $P$  образуется в результате действия давления  $p$  на кромку площадью  $F$ , то  $P = -pF$ . В случае изолированной от давления кромки  $P = 0$  и т.д.

В соответствии со второй гипотезой Кирхгофа принимается, что  $\sigma_z < \sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и далее полагается  $\sigma_z = 0$ . Для оценки этого допущения рассмотрим линейный цилиндрический изгиб пластины, шарнирно закрепленной по краям, на нижнюю и верхнюю поверхности которой действуют избыточные давления  $p_1$  и  $p_2$  (давление сборки  $p_0$  примем равным нулю). Прогиб приближенно описывается формулой [3–6]:

$$\begin{aligned} w = W_* \sin \frac{\pi x}{L}, \quad W_* = \frac{4L^4 (p_1 - p_2)}{\pi^5 D}, \\ D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Перепад давлений, который обеспечивает прогиб  $W_* = h/5$  в центре пластины с данными  $E = 2 \times 10^5$  МПа,  $\nu = 0.3$ ,  $L/h = 70$ , по (4) равен  $p_1 - p_2 \approx 0.012$  МПа. Так как максимальные напряжения  $\sigma_x$  при изгибе возникают на поверхностях  $z = \mp h/2$ , то с учетом функции  $w$  по (4) в центре пролета ( $x = L/2$ ) при принятых выше данных получаем

$$\begin{aligned} \sigma_x = \frac{E\varepsilon_x}{1 - \nu^2} = \pm \frac{Eh}{2(1 - \nu^2)} \frac{d^2 w}{dx^2} = \\ = \mp \frac{\pi^2 Eh W_*}{2L^2(1 - \nu^2)} = \mp 44 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

так что средние по полутолщинам напряжения сжатия и растяжения равны  $\mp 22$  МПа.

Значение перепада  $p_1 - p_2 = 0.012$  МПа достигается, например, при  $p_1 = 5.012$  МПа,  $p_2 = 5$  МПа. Тогда  $\sigma_z \approx -p_m \approx -5$  МПа. Таким образом, напряжение сжатия  $\sigma_z$  по толщине пластинки при принятых реальных данных не является пренебрежимо малым по сравнению с напряжениями изгиба  $\sigma_x$ . В случае одностороннего давления (например,  $p_1 = 0.012$  МПа,  $p_2 = 0$ ), при котором реализуется то же значение  $W_* = h/5$  (и других данных), среднее давление  $p_m = p_1/2 = 0.006$  МПа. Тогда  $(p_1 - p_2)p_m^{-1} = 2$  и не соблюдается определение поля высоких давлений (1), справедлива гипотеза  $\sigma_z \ll \sigma_x$ ,  $\sigma_y$ . Как видно из этих примеров, наибольшее влияние среднего давления на изгиб имеет место при двухстороннем давлении, а наименьшее – при одностороннем давлении. При заданном перепаде  $p_1 - p_2$  необходимое значение  $p_m$  для выполнения условия (1) может быть выражено через параметры пластины и амплитуды прогиба

$$p_m > 25\pi^5 L^{-4} D |W_*|.$$

В связи с приведенными оценками уместно провести анализ изгиба без применения второй гипотезы Кирхгофа, для чего привлекаем закон Гука:

$$\begin{aligned} E\varepsilon_x &= \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z), \\ E\varepsilon_y &= \sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x), \\ E\varepsilon_z &= \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y). \end{aligned} \quad (5)$$

В условиях плоского деформированного состояния ( $\varepsilon_y = 0$ ) из (5) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \nu(\sigma_x + \sigma_z), \\ E\varepsilon_x &= \sigma_x(1 - \nu^2) - \sigma_z(1 + \nu). \end{aligned} \quad (6)$$

Полагая  $\sigma_z = -p_m$  и вводя вместо  $\varepsilon_x$  сумму  $\varepsilon_x^0 + \varepsilon_x$ , где под  $\varepsilon_x^0$  подразумевается деформация срединной поверхности, а  $\varepsilon_x$  – деформация при изгибе, получаем

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x^0 + \varepsilon_x) - \frac{\nu}{1 - \nu} p_m. \quad (7)$$

Связь перемещений  $u^0(x)$ ,  $u(x, y)$ ,  $w(x)$  с деформациями определяется первой гипотезой Кирхгофа [1–6]:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x}, \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u = -z \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (8)$$

Продольная сила и изгибающий момент в соответствии с (7), (8) равны

$$N = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = K \frac{du^0}{dx} - \frac{\nu p_m h}{1-\nu}, \quad K = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad (9)$$

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -D \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Для определения постоянной по длине продольной силы  $N$  проинтегрируем первое уравнение (9) от 0 до  $L$ :

$$NL = K[u^0(L) - u^0(0)] - \frac{\nu p_m h L}{1-\nu}.$$

В соответствии с условиями (3)  $u^0(0) = (N - P)/C$ ,  $u^0(L) = 0$ . Следовательно,

$$N = \frac{P}{1+\lambda} - p_m h \chi, \quad \lambda = \frac{CL}{K}, \quad \chi = \frac{\nu \lambda}{(1-\nu)(1+\lambda)}. \quad (10)$$

Поперечная распределенная сила равна [15–17]

$$q = p_1 \left[ 1 + \varepsilon_x \left( -\frac{h}{2} \right) \right] - p_2 \left[ 1 + \varepsilon_x \left( \frac{h}{2} \right) \right] =$$

$$= p_1 - p_2 + p_m h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (11)$$

где учтены выражения для  $\varepsilon_x$  из (8). Таким образом, последний член в (11) образуется из-за разности площадей поверхностей изогнутой пластинки. Здесь не учитывается собственный вес пластинки, так как его влияние на изгиб хорошо известно. Из (2), (9)–(11) получаем

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - \left( \frac{P}{1+\lambda} + p_m h (1-\chi) \right) \frac{d^2 w}{dx^2} = p_1 - p_2. \quad (12)$$

В условиях плоского напряженного состояния ( $\sigma_y = 0$ ,  $\sigma_z = -p_m$ ) из (5) следует

$$E\varepsilon_z = -\nu\sigma_x - p_m, \quad \sigma_x = E(\varepsilon_x^0 + \varepsilon_x) - \nu p_m.$$

Предполагаем, что опоры допускают свободное перемещение пластинки вдоль кромок  $x = 0$ ,  $L$ . Вместо (9) теперь имеются следующие выражения:

$$N = K \frac{du^0}{dx} - \nu p_m h, \quad K = Eh, \quad (13)$$

$$M = -D \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12}.$$

Таким образом, разница со случаем плоского деформированного состояния заключается лишь в том, что отличаются жесткости  $K$  и  $D$ , а также второй член в выражении  $N$  в (13). Вместо (10) имеем

$$N = \frac{P}{1+\lambda} - p_m h \chi, \quad \chi = \frac{\nu \lambda}{1+\lambda}. \quad (14)$$

Уравнение изгиба (12) сохраняется в том же виде. Теперь параметр  $\chi$  дается по (14). Здесь влияние обжатия на силу  $N$  меньше, чем в предыду-

щем случае. Это объясняется тем, что при плоском деформированном состоянии ( $\varepsilon_y = 0$ ) расширение происходит только по оси  $x$ , а при плоском напряженном состоянии ( $\sigma_y = 0$ ) расширение происходит также по оси  $y$ . Если рассмотреть случай  $\sigma_y = -p_m$ ,  $\sigma_z = -p_m$ , то по (5)  $\sigma_x = E(\varepsilon_x^0 + \varepsilon_x) - 2\nu p_m$ , а выражения для  $K$  и  $D$  даются в (13). Вместо (14) теперь будет

$$N = \frac{P}{1+\lambda} - p_m h \chi, \quad \chi = \frac{2\nu \lambda}{1+\lambda}. \quad (15)$$

## 2. ЗАВИСИМОСТЬ ИЗГИБА ОТ СРЕДНЕГО ДАВЛЕНИЯ И ЖЕСТКОСТИ ОПОР

Принимаем приближенное решение уравнения (12) в виде (4), которое удовлетворяет последним двум условиям (3). Отметим, первые условия относительно  $u^0$  удовлетворены при получении выражений (10), (14), (15) для  $N$ . Подставив эту функцию в уравнение (12), умножив на нее и проинтегрировав по  $x$  в пределах от нуля до  $L$ , получаем значение прогиба средней линии ( $x = L/2$ ):

$$\frac{W}{W_*} = \frac{P_*}{P_* + \frac{P}{1+\lambda} + p_m h (1-\chi)}, \quad P_* = \frac{\pi^2 D}{L^2}, \quad (16)$$

где  $P_*$  – критическое значение силы сжатия свободно опертой пластинки,  $W_*$  – амплитуда прогиба по классической теории (4). Сохранение первых двух членов в знаменателе (16) дает прогиб при наличии продольной силы  $P$  [3–6]. При этом учитывается, что часть силы  $P$  идет на деформацию опорного устройства в продольном направлении. Эта часть определяется отношением жесткости опоры к продольной жесткости пластины  $\lambda$  (10). Наибольшее влияние этой силы на изгиб имеет место при нулевой жесткости опоры ( $\lambda = 0$ ), наименьшее – при ее большой жесткости ( $\lambda \gg 1$ ).

Отказ от второй гипотезы Кирхгофа и учет обжатия по толщине ( $\sigma_z = -p_m$ ) приводят к решению с сохранением параметра  $\chi$  (10) в выражении (16). Наибольшее влияние этого фактора приходится на большую жесткость опоры ( $\lambda \gg 1$ ) и большой коэффициент Пуассона материала пластинки. При этом из (16)

$$\frac{W}{W_*} = \frac{P_*}{P_* - p_m h L^2 \chi}, \quad \chi = \frac{\nu}{1-\nu}. \quad (17)$$

В случаях  $\sigma_y = 0$  и  $\sigma_y = -p_m$  значение  $\chi$  по (13) и (14)  $\chi = \nu$  и  $\chi = 2\nu$ . Увеличение прогиба во всех этих случаях по сравнению с обычным его значением объясняется тем, что обжатие по толщине пластинки приводит к появлению продольной сжимающей силы. При возможности свободного

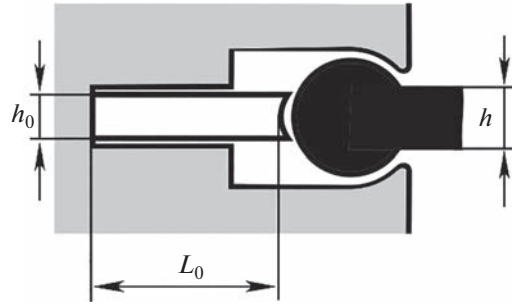


Рис. 2. Конструкция опоры.

продольного перемещения пластины ( $\lambda = 0$ ,  $\chi = 0$ ) при  $x = 0$  нет влияния обжатия на изгиб.

При  $\lambda \gg 1$  в соответствии с (17) обжатие по толщине можно не учитывать с погрешностью, например, 5% и значениями среднего давления

$$p_m < \frac{0.05P_*}{h\chi} \approx \frac{E(1-\nu)}{20\nu} \left(\frac{h}{L}\right)^2. \quad (18)$$

В случае  $L/h = 100$  и стальной пластинки ( $E = 2 \times 10^5$  МПа,  $\nu = 0.3$ ) из (18) получаем  $p_m < 2.33$  МПа, а для каучука ( $E = 10^4$  МПа,  $\nu = 0.47$ ) и винипласта ( $E = 3 \times 10^3$  МПа,  $\nu = 0.35$ ) соответственно  $p_m < 0.11$  МПа,  $p_m < 0.027$  МПа.

Таким образом, для стальной пластинки с отношением размеров  $L/h = 100$  и меньше справедливой остается классическая теория изгиба до довольно большого среднего давления. Для материалов с меньшим значением модуля упругости и с большим коэффициентом Пуассона она дает погрешность уже при низком среднем давлении. Как видно из (18), имеется сильная зависимость этих оценок от отношения размеров  $L/h$ . При  $L/h > 200$  вклад обжатия на значение прогиба является значительным для всех конструкционных материалов. Так как  $\chi < 1$ , то по (17) учет обжатия дает увеличение прогиба по сравнению с решением с использованием второй гипотезы ( $\sigma_z = 0$ ).

Член  $p_m h$  в (16) появляется как результат учета разницы площадей нижней и верхней поверхностей пластины при определении поперечной силы  $q$  в (11) и приводит к уменьшению прогиба по сравнению с обычной формулой изгиба (4). Выясняется, что влияние этого фактора больше, чем учет обжатия по толщине, поскольку  $\chi < 1$ . Отсюда следует, что учет только обжатия без одновременного уточнения значения поперечной силы приводит к неточности, даже большей, чем формула (4). Например, из (17) проистекает, что под действием поперечного обжатия давлением  $p_m$  и вызванной им продольной сжимающей силы  $N = -p_m h \chi$  может быть потеря устойчивости плоской формы пластинки при  $p_m = P_*(hL^2\chi)^{-1}$ , что качественно неверный результат.

Если жесткость левой опоры в продольном направлении определяется деформацией сжатия вставки длиной  $L_0$ , толщиной  $h_0$  (рис. 2), той же ширины и материала, что и пластинка, то в (14) нужно положить

$$C = \frac{Eh_0}{L_0}, \quad \lambda = \frac{CL}{Eh} = \frac{h_0L}{hL_0}, \quad \chi = \frac{\nu h_0L}{(hL_0 + h_0L)}. \quad (19)$$

Здесь взят параметр  $\chi$  для случая  $\sigma_y = 0$ . Примем, что сила  $P$  есть результат действия давления  $p_m$  на площадь кромки  $x = 0$ , свободную от упругой вставки толщиной  $h_0$ . Тогда  $P = -p_m(h - h_0)$ . Выражение (16) принимает вид

$$\frac{W}{W_*} = \frac{P_*}{P_* + p_m h \left(1 - \frac{h_0(\nu L - L_0) + hL_0}{hL_0 + h_0L}\right)}. \quad (20)$$

Случаю  $h_0 = 0$  соответствует нулевая жесткость опоры (в (19)  $C = 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\chi = 0$ ), свободное перемещение, действие сжимающей силы  $P = -p_m h$ . Из (20) следует  $W = W_*$ . Нет влияния обжатия по толщине и разности площадей поверхностей изогнутой пластины. Из решения выпадает среднее давление, остаются перепад давления и классическое значение прогиба. Если  $h_0 = h$ ,  $L_0 = L \times 10^{-2}$ , то  $P = 0$ , по (19), (20)  $\lambda = 10^2$ ,

$$\frac{W}{W_*} \approx \frac{P_*}{P_* + p_m h(1-\nu)}. \quad (21)$$

Это отмеченный выше случай  $\lambda \gg 1$ . Обжатие увеличивает прогиб, разность деформаций поверхностей уменьшает его. Прогиб (21) может быть выражен также через эффективную изгибную жесткость  $D_E$ . Тогда

$$W = \frac{4L^4(p_1 - p_2)}{\pi^5 D_E}, \quad D_E = D + \frac{p_m h L^2(1-\nu)}{\pi^2}.$$

Сравнение этого выражения с (4) показывает роль указанных двух факторов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Имеются случаи действия давлений на тонкостенные упругие элементы, когда напряжение сжатия по толщине стенки не является пренебрежимо малым по сравнению с напряжениями изгиба вдоль срединной поверхности. Ввиду этого вторая гипотеза Кирхгофа дает значительную погрешность в их определении.

Отказ от этой гипотезы, учет обжатия по толщине и соответствующей продольной силы приводят к увеличению прогиба пластинки по сравнению с результатом классической теории. Это влияние зависит не только от среднего давления и толщины пластинки, но и от коэффициента Пуассона материала и жесткости опор в продольном направлении. Оно определяется безразмерным параметром  $\chi$  по (10), (14), (15) в случаях плоских деформированного и напряженного состояний. В состав  $\chi$  входит также безразмерный параметр  $\lambda$ , представляющий отношение жесткости опоры к жесткости растяжения–сжатия пластинки. При большой относительной жесткости ( $\lambda \gg 1$ ) имеется наибольшее влияние среднего давления на прогиб, при малой жесткости ( $\lambda \ll 1$ ) нет никакого влияния указанного учета, поэтому в последнем случае справедлива классическая теория изгиба. Это объясняется тем, что значению  $\lambda = 0$  соответствуют возможность свободного продольного перемещения пластинки в опоре и отсутствие продольной силы, возникающей от обжатия (при ненулевом коэффициенте Пуассона).

Так как  $\chi \leq 1$ , то влияние обжатия по толщине пластинки всегда меньше, чем влияние уточненной поперечной силы  $q$  по (11) за счет разности площадей поверхностей изогнутой пластинки. Первый из названных эффектов приводит к увеличению прогиба, второй – к уменьшению. Важный вывод состоит в том, что если в теорию включается первый эффект, то нужно учитывать и второй (и наоборот). Поэтому уточнение за счет поперечной силы  $q$  по (11), приведенное в [15–17], должно быть дополнено учетом обжатия пластинки средним давлением. Это существенно при больших и близких значениях давлений на обе поверхности пластинки, большой жесткости опор и ненулевом коэффициенте Пуассона. Таким образом, необходимость уточнений теории может зависеть не только от толщины и свойств материала пластинки, но и от среднего давления на нее.

В классической теории линейного изгиба пластины под действием только поперечных сил не ставятся условия относительно продольного перемещения в опорах, в уравнение изгиба не входят какие-либо параметры опор. При учете обжатия по толщине и появлении продольного перемещения и продольной силы в уравнение изгиба

входит параметр, содержащий жесткость опоры и коэффициент Пуассона (помимо обычной величины  $E(1 - \nu^2)^{-1}$ ).

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках гранта Российского научного фонда № 22-21-00578, <https://rscf.ru/project/22-21-00578/>.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляв А. Математическая теория упругости. М.–Л.: ОНТИ, 1935. 676 с.
2. Галеркин Б.Г. Упругие тонкие плиты. Л.–М.: Госстройиздат, 1933. 372 с.
3. Тимошенко С.П. Пластины и оболочки. Л.–М.: Госстройиздат, 1948. 460 с.
4. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Физматлит, 1972. 442 с.
5. Филлин А.П. Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат, 1975. 256 с.
6. Shen H.Sh. Postbuckling Behavior of Plates and Shells. Shanghai Jiao Tong University. 2017. 675 p.
7. Муштару Х.М. Об области применимости приближенной теории оболочек Кирхгофа–Лява // ПММ. 1947. Т. 11. В. 5. С. 517–520.
8. Муштару Х.М. Об области применимости линейной теории упругих оболочек // ДАН СССР. 1947. Т. 58. № 6. С. 997–998.
9. Peterson J.P. Axially loaded columns subjected to lateral pressure // AIAA J. 1963. V. 1. No. 6. P. 1458–1459.
10. Huang T., Dareing D.W. Buckling and frequency of long vertical pipes // J. Engineering Division. 1967. V. 95. P. 167–181.
11. Bernitsas M.M., Kokkinis T. Buckling of columns with movable boundaries // J. Structural Mechanics. 1983. V. 11. No. 3. P. 351–370.
12. Bernitsas M.M., Kokkinis T. Buckling of columns with nonmovable boundaries // J. Structural Engineering. 1983. V. 105. P. 2113–2128.
13. Ишлинский А.Ю. Исследование устойчивости упругих систем с точки зрения математической теории упругости // Укр. матем. журн. 1954. Т. 6. № 2. С. 140–146.
14. Kerr A.D., Tang S. The effect of lateral hydrostatic pressure on instability of elastic solids, particularly beams and plates // J. Applied Mechanics. 1966. V. 33. P. 617–622.
15. Ильгамов М.А. Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и пленки // ДАН. 2017. Т. 476. № 4. С. 402–405. <https://doi.org/10.7868/S086956521728009X>
16. Ильгамов М.А. Обобщение уравнения изгиба тонкой пластины под действием давления газа // ПММ. 2019. Т. 83. № 1. С. 134–146. <https://doi.org/10.1134/S0032823519010041>
17. Ильгамов М.А. Влияние поверхностных эффектов на изгиб и колебания нанопленок // Физика твердого тела. 2019. Т. 61. Вып. 10. С. 1825–1830. <https://doi.org/10.21883/FIT.2019.10.48255.381>



## BENDING OF AN ELASTIC PLATE IN A HIGH PRESSURE FIELD

Corresponding Member of the RAS **М. А. Илгамов**<sup>a,b,c</sup>

<sup>a</sup>*A.A. Blagonravov Institute of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

<sup>b</sup>*Institute of Mechanics and Mechanical Engineering, Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Kazan, Russia*

<sup>c</sup>*Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia*

The derivation of the equation of static cylindrical bending of a thin plate under the action of pressures on its surface and end edges is given. The reduction over the thickness of the plate is taken into account, the effect of which becomes noticeable at high average pressure. The refined value of the transverse distributed force is used. The dependence of the bending on the average pressure and the rigidity of the supports in the longitudinal direction is considered.

*Keywords:* plate, supports, pressure, compression, bending

УДК 534.34; 534.231.1

## ВЛИЯНИЕ НАПРАВЛЕННОСТИ ИСТОЧНИКОВ НА ФАЗОВЫЕ ИНВАРИАНТЫ ВЕКТОРНО-СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ В МЕЛКОМ МОРЕ

© 2023 г. Г. Н. Кузнецов<sup>1,\*</sup>, А. Н. Степанов<sup>1,2</sup>

Представлено академиком РАН И.А. Шербаковым 17.01.2023 г.

Поступило 06.02.2023 г.

После доработки 06.04.2023 г.

Принято к публикации 24.04.2023 г.

Впервые исследуются свойства фазового инварианта звукового поля применительно к векторно-скалярным полям, образованным в волноводе направленными — мультипольными источниками. Показано, что при использовании даже таких сложных источников фазовый инвариант справедлив для звукового давления и для проекций вектора колебательной скорости. Он практически не зависит от направленности и частоты источника, расстояния и от параметров волновода.

*Ключевые слова:* фазовый инвариант, векторно-скалярные поля, мультипольный источник, устойчивость инварианта при вариации параметров источника и волновода

DOI: 10.31857/S2686740023050073, EDN: OVJEMS

Исследование инвариантных характеристик гидроакустических полей в мелком море является важной практической и интересной физической задачей. В [1] для поля интенсивности в координатах “частота—расстояние” введено и изучается понятие интерференционного инварианта. В [2] в тех же координатах, но для поля фазы звукового давления обнаружены инвариантные характеристики, что позволило ввести понятие “фазовый инвариант” и построить “линии равных фаз”. Соответственно, рассмотрены характеристики интерференционного (энергетического) и фазового инварианта (ФИ). Но, как следует из литературы, характеристики этих инвариантов изучены преимущественно для скалярных полей, причем они возбуждались монопольными источниками. Ниже рассматриваются свойства ФИ при формировании в волноводе как скалярных, так и векторных полей, возбуждаемых мультипольными источниками.

Известно [3], что в мелком море для монохроматических ненаправленных (монопольных) излучателей в случае достаточно больших расстоя-

ний, когда функции Ханкеля можно заменить их асимптотическими представлениями, выражение для звукового давления  $P$  может быть представлено в виде модового разложения:

$$P(\omega, r, t, z_0, z) = |P(\omega, r, t, z_0, z)| e^{i\varphi(\omega, r, t, z_0, z)} = \sum_{l=1}^N p_l(\omega, r, t, z_0, z) \exp[i\varphi_l(\omega, r, t, z_0, z)], \quad (1)$$

где  $|P(\omega, r, t, z_0, z)|$  и  $\varphi(\omega, r, t, z_0, z)$  — амплитуда и фаза давления источника, зависящие от круговой частоты  $\omega$ , горизонтального расстояния  $r$ , времени  $t$ , а также глубин источника  $z_0$  и приемника  $z$ ,  $N$  — количество мод,  $p_l$  — коэффициенты возбуждения и  $\varphi_l$  — фаза  $l$ -й моды. Будем считать аргументами рассматриваемых функций частоту  $\omega$  и расстояние  $r$ , а время  $t$  и глубины  $z_0$  и  $z$  — параметрами, и в дальнейшем опускать эти параметры.

Рассмотрим частотную область, в пределах которой изменение количества нормальных волн  $N$  не велико и/или влиянием изменения их количества в структуру поля можно пренебречь. Численное моделирование показало, что величины  $p_l$  разложения (1) слабо зависят от частоты и расстояния, поэтому производными от  $p_l$  по рассматриваемым аргументам можно пренебречь по сравнению с остальными слагаемыми. Это позволило получить [2] дифференциальное уравнение, описывающее линии равных фаз на плоскости частота—расстояние  $(\omega, r)$ :

<sup>1</sup>Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup>Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, Самара, Россия

\*E-mail: skbmortex@mail.ru

$$\frac{dr}{d\omega} = -\sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N p_l p_m \frac{\partial \varphi_l}{\partial \omega} \cos(\varphi_l - \varphi_m) \times \left[ \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N p_l p_m \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} \cos(\varphi_l - \varphi_m) \right]^{-1} \quad (2)$$

Фазовые функции  $\varphi_l$  нормальных волн давления для произвольного волновода в рассматриваемом приближении имеют вид

$$\varphi_l(\omega, r) = k_l r - \omega t = \omega r / c_l - \omega t,$$

где  $k_l$  – волновое число и  $c_l = \omega / k_l$  – фазовая скорость  $l$ -й нормальной волны. В [2] показано, что фазовую функцию в уравнении (2) можно рассматривать и для  $t = 0$ , поскольку зависимость  $\varphi_l(\omega, r)$  от параметра  $t$  фактически представляет собой происходящий во времени плоскопараллельный перенос линий равных фаз и, следовательно, всей структуры фазового поля вдоль оси расстояний. Тогда в (2)  $\varphi_l(\omega, r) = \omega r / c_l$ , и, дифференцируя эту функцию по соответствующим аргументам и вычислив зависимости  $\partial c_l / \partial \omega$ , получаем:

$$\frac{dr}{d\omega} = -\left[ r \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N p_l p_m \left( \frac{1}{c_l} - \frac{\omega}{c_l^2} \frac{\partial c_l}{\partial \omega} \right) \cos(\varphi_l - \varphi_m) \right] \times \left[ \omega \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N p_l p_m \frac{\cos(\varphi_l - \varphi_m)}{c_l} \right]^{-1} = \beta_\varphi \frac{r}{\omega}, \quad (3)$$

где

$$\beta_\varphi = -1 + \left[ \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N p_l p_m \left( 1 - \frac{k^2}{k_l^2} \right) \frac{\cos(\varphi_l - \varphi_m)}{c_l} \right] \times \left[ \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N p_l p_m \frac{\cos(\varphi_l - \varphi_m)}{c_l} \right]^{-1}.$$

Здесь учтено, что фазовая  $c_l$  и групповая  $u_l$  скорости нормальных волн связаны соотношением  $c_l u_l = c_0^2$  [3]. По соотношению (3) видно, что  $\beta_\varphi$  представляет собой параметр дифференциального уравнения, которое на фазовой плоскости  $(\omega, r)$  определяет касательные к фактическим линиям равных фаз.

Результаты дополнительных вычислений для мелкого моря показали, что параметр  $\beta_\varphi$ , как и инвариант Чупрова  $\beta$  [1], слабо зависит от частоты, свойств волновода, расстояния и глубин монополюсного источника и приемника ЗД, но его значения варьируются вблизи “–1”, а не “+1”,

как у инварианта  $\beta$ . Рассмотрим далее аналогичный параметр не только для скалярных, но и для векторных полей, формирующихся в волноводе при излучении мультипольными источниками различного типа и на разных частотах. В [4] показано, что звуковое давление (ЗД), горизонтальная и вертикальная проекции вектора колебательной скорости (КС) точечного мультиполя в волноводе Пекериса  $V_r$  и  $V_z$  могут быть представлены в виде сумм, аналогичных (1):

$$P = \sum_{l=1}^L p_l \exp(ik_l r),$$

$$p_l = \sum_{n=0}^L \sum_{m=-n}^n A_{nml} \exp(im\varphi + i\pi m/2),$$

$$V_r = \sum_{l=1}^L V_{r;l} \exp(ik_l r),$$

$$V_{r;l} = k_l (m/kr - i) \sum_{n=0}^L \sum_{m=-n}^n A_{nml} \exp(im\varphi + i\pi m/2),$$

$$V_z = \sum_{l=1}^L V_{z;l} \exp(ik_l r),$$

$$V_{z;l} = \sum_{n=0}^L \sum_{m=-n}^n A'_{nml} \exp(im\varphi + i\pi m/2),$$

где  $x_l = h\sqrt{k^2 - k_l^2}$  – корни дисперсионного уравнения волновода Пекериса,  $\tilde{m} = \rho/\rho_0$  – отношение плотностей воды  $\rho_0$  и подстилающего полупространства  $\rho$ ,  $v^2 = 1 - \tilde{n}^2$ ,  $\tilde{n} = n_0(1 + i\tilde{\beta})$ ,  $n_0 = c_0/c$  – отношение скоростей звука в волноводе  $c_0$  и в грунте  $c$ ,  $\tilde{\beta}$  – коэффициент поглощения границы;  $h$  – глубина волновода, коэффициенты  $A_{nml} = (2\pi/kh)\sin\alpha_{l0}\sin\alpha_l P_n^{|m|}(x_l/kh)$ ,  $A'_{nml} = ix_l \text{ctg}\alpha_{l0} A_{nml}/h$ ,  $\alpha_{l0} = \pi(1 - \chi_{nm})/4 + x_l z_0/h$ ,  $\chi_{nm} = (-1)^{n+|m|}$ ,  $\alpha_l = x_l z/h$ ,  $P_n^{|m|}$  – присоединенные полиномы Лежандра. После некоторых преобразований величины  $p_l$ ,  $V_{r;l}$  и  $V_{z;l}$  могут быть подставлены в (3). При этом для любых мультиполей при подстановке коэффициентов  $p_l$  из (4) получим фазовый инвариант для поля давления соответствующего мультиполя, при подстановке вместо  $p_l$  величин  $V_{r;l}$  и  $V_{z;l}$  – фазовый инвариант для соответствующих компонент КС.

Для иллюстрации применимости полученных соотношений выполнен вычислительный эксперимент, в котором анализировались векторно-

**Таблица 1.** Значения мультипольных моментов

Монополь	z-диполь	y-диполь	xу-квадруполь	zz-квадруполь	yz-квадруполь
1.055	0.242	2.271	1.13	1.233	0.174

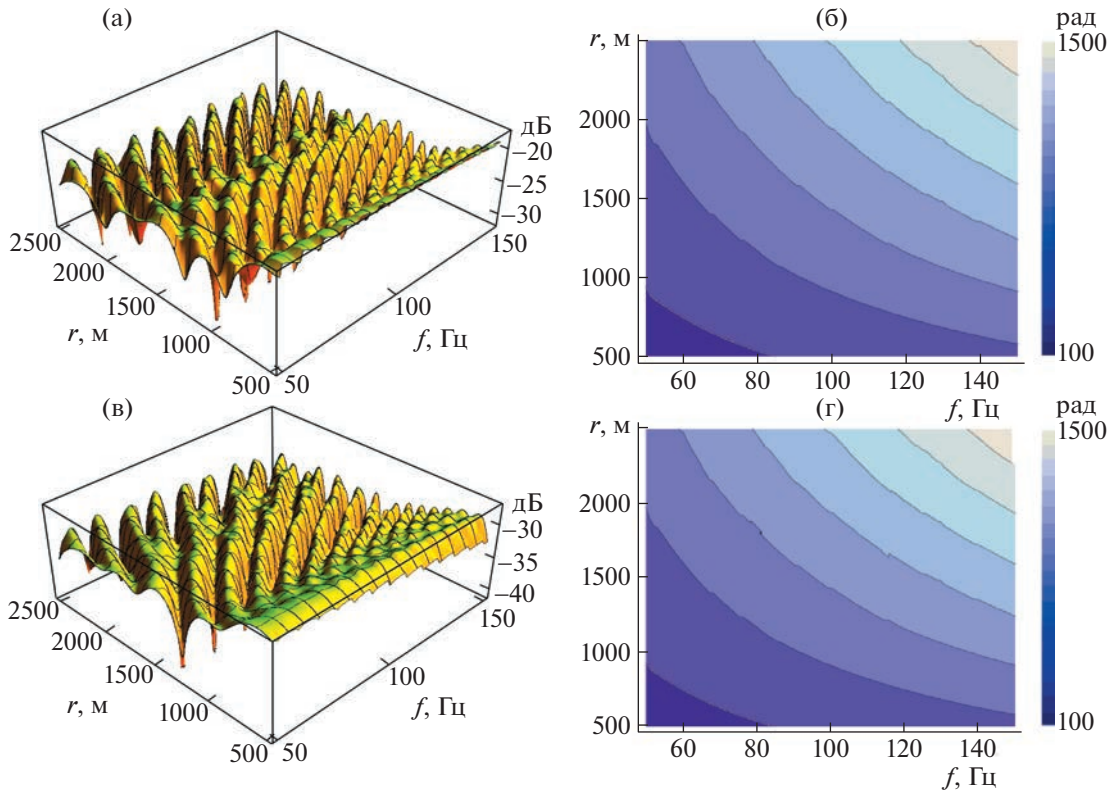


Рис. 1. Монопольный излучатель, глубина излучения 7 м.

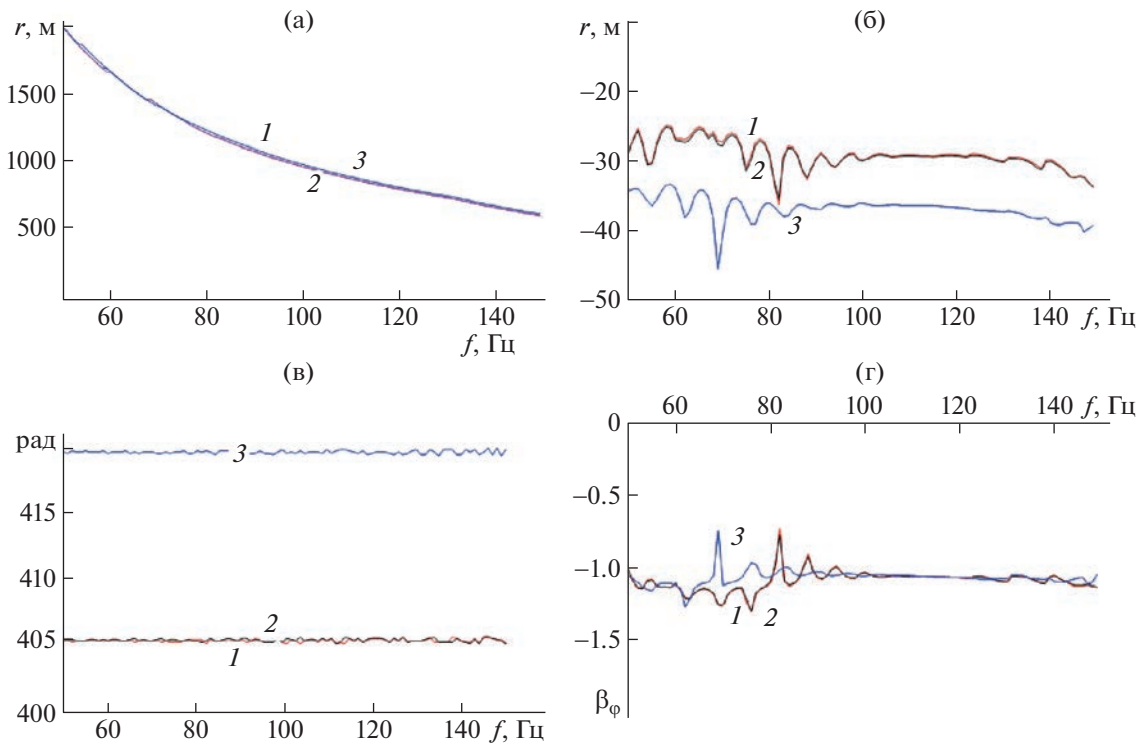


Рис. 2. Вертикальный диполь, глубина расположения 7 м.

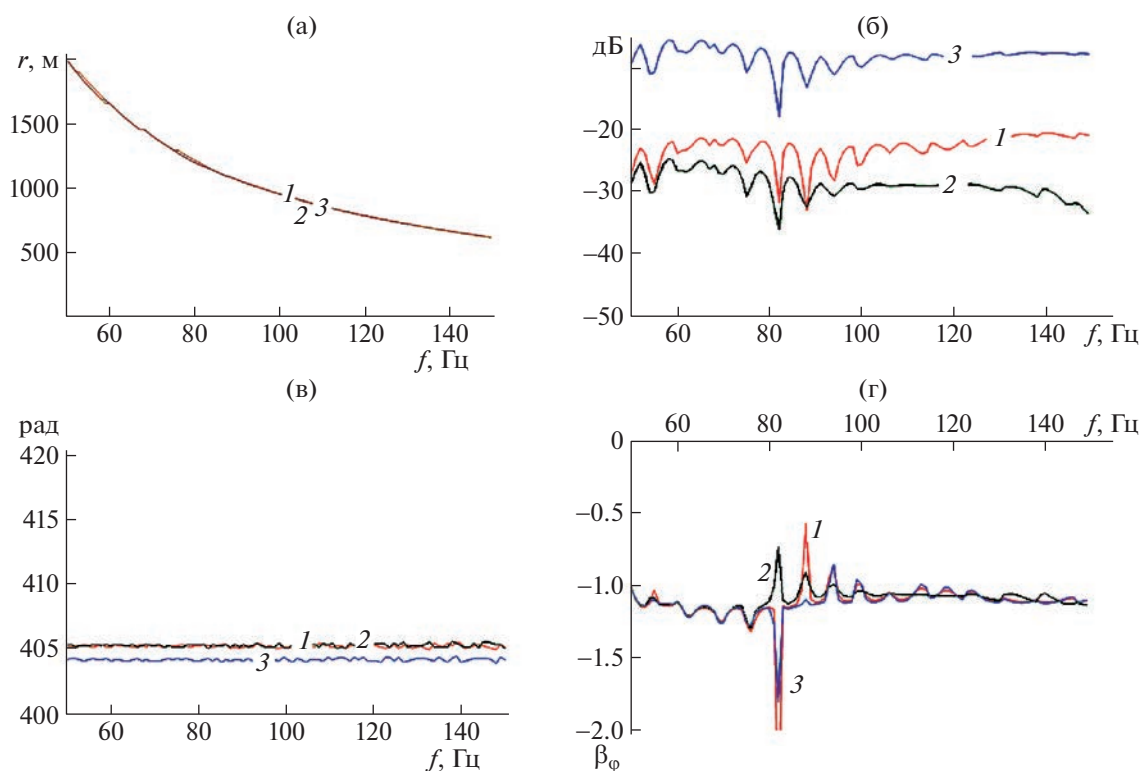


Рис. 3. Монополь, вертикальный диполь и мультипольный источник, глубина 7 м.

скалярные поля мультипольных излучателей в волноводе Пекериса с характеристиками: скорость звука в воде  $c_0 = 1500$  м/с, толщина волновода  $h = 200$  м, отношение плотностей воды и грунта 1.7, отношение скоростей звука в воде и в грунте 0.88, коэффициент поглощения границы 0.01. Точечные мультиполи разного типа находились на глубинах  $z_0 = 7$  или 100 м, приемники – на глубине  $z = 199$  м. Поле анализировалось в пространственно-частной области на расстояниях от 500 до 2500 м с шагом в 1 м и в диапазоне частот от 50 до 150 Гц с шагом 1 Гц.

На рис. 1 приведены амплитудная (слева) и фазовая поверхности (справа) для давления (сверху) и вертикальной компоненты колебательной скорости (внизу) монопольного излучателя. Из сравнения кривых видно, что амплитудные поверхности, по которым строится инвариант  $\beta$ , отличаются друг от друга, а фазовые – практически идентичны.

На рис. 2 показаны линии равных фаз (рис. 2а), амплитуды (рис. 2б), фазы (рис. 2в) и фазовые инварианты (рис. 2г) полей ЗД (кривые 1), горизонтальной (кривые 2) и вертикальной (кривые 3) проекций КС для вертикального диполя при глубине излучения 7 м.

На рис. 3 сравниваются аналогичные характеристики, но для разных источников – монополя (1), вертикального диполя (2) и комбинирован-

ного источника (3), для которого мультипольные моменты выбраны так, чтобы значения мощностей отдельных составляющих были примерно равными при глубинах источника 7 м и частоте 50 Гц (табл. 1).

Анализ кривых на рис. 1–3 показывает, что фазовые структуры полей КС близки к фазовой структуре поля ЗД мультиполя этого же типа. Однако собственно величина фазы вертикальной проекции КС отличается от фазы ЗД, при практически полном совпадении фаз горизонтальной проекции и ЗД. Объясняется это различием модового состава сигналов ЗД и вертикальной проекции КС. Но с увеличением глубины источника отличия в значениях фазы поля вертикальной проекции КС от фазы ЗД уменьшаются. Причина – в уменьшении роли мод высоких номеров при их пространственной фильтрации.

На рис. 4 сравниваются одноименные характеристики ЗД монополя (1) и вертикального диполя (2), а также вертикальных компонент КС монополя (3) и вертикального диполя (кривые 4), которые расположены на глубине 100 м. Линии равных фаз ЗД монополя и вертикального диполя изображены на рис. 4а, а вертикальных компонент КС этих источников – на рис. 4б. Амплитуды ЗД рассматриваемых источников на линиях равных фаз ЗД представлены на рис. 4в, а амплитуды вертикальных компонент КС на линиях рав-

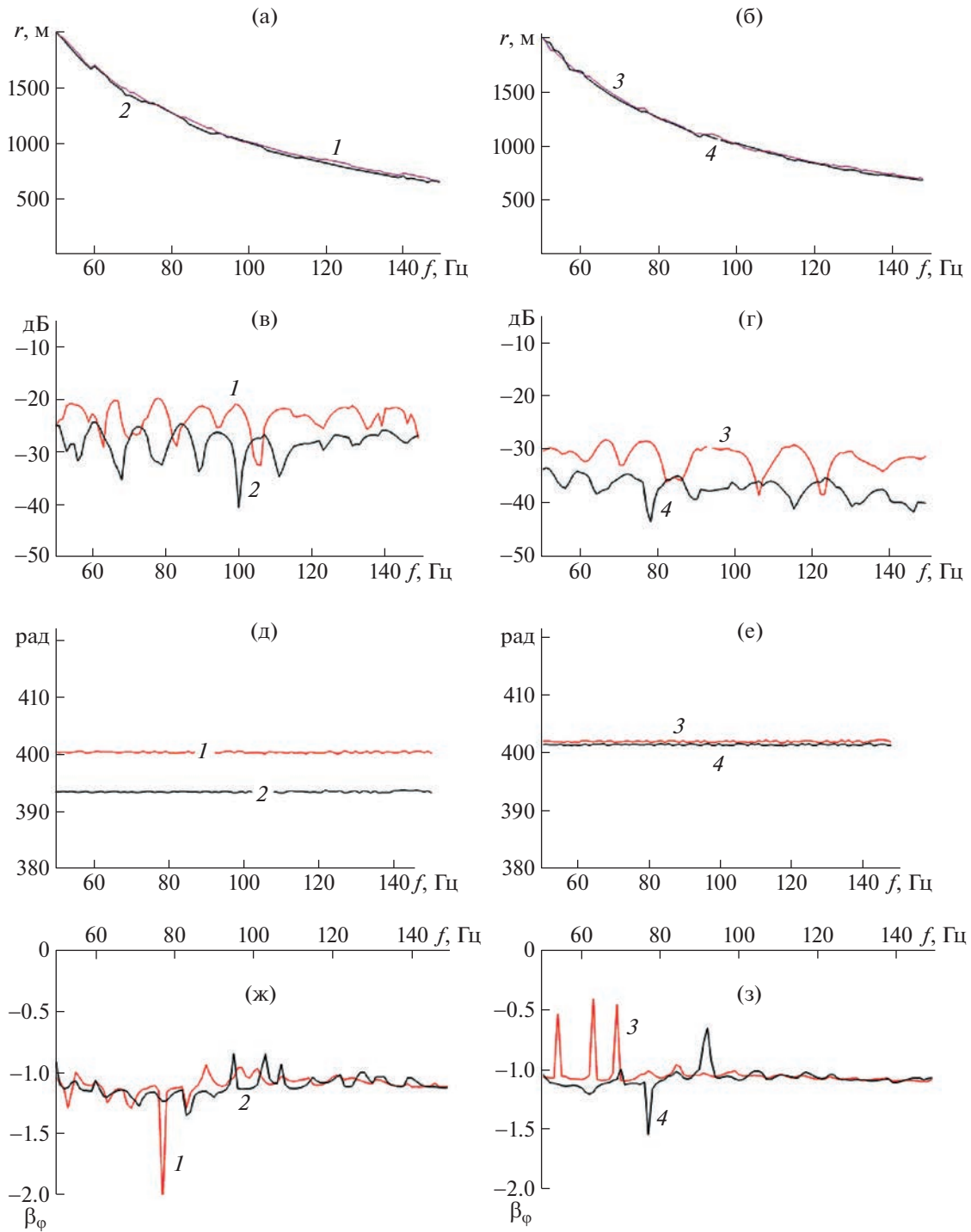


Рис. 4. Монополь и вертикальный диполь, глубина источника 100 м.

ных фаз – на рис. 4г. Фазы полей ЗД монополя и вертикального диполя на линиях равных фаз показаны на рис. 4д, а фазы вертикальных КС – на рис. 4е. И, наконец, фазовые инварианты на линиях равных фаз ЗД обсуждаемых источников приведены на рис. 4ж, а фазовые инварианты на линиях равных фаз вертикальных проекций КС – на рис. 4з.

На рис. 5 сравниваются поля ЗД и вертикальных компонент КС вертикальных диполей, находящихся на разных глубинах. Кривые для ЗД от источника на глубине 7 м обозначены номером 5, а на глубине 100 м – номером 6. Линии для вертикальной компоненты КС при глубине источника 7 м обозначены номером 7, а при глубине 100 м – номером 8. Линии равных фаз – рис. 5а и 5б, ам-

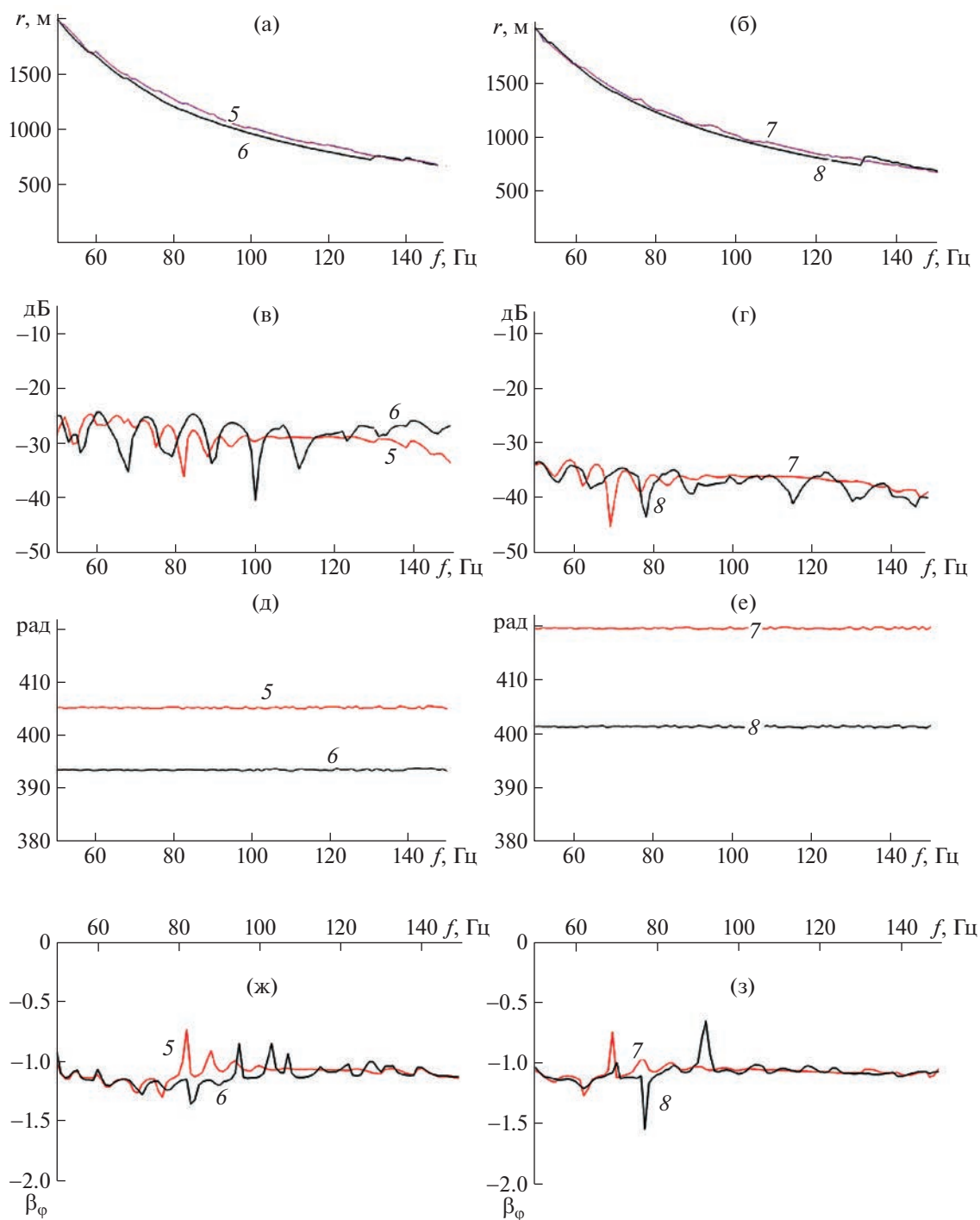


Рис. 5. Характеристики сигналов от вертикального диполя при глубинах 7 и 100 м.

плитуды полей — рис. 5в и 5г, фазы — рис. 5д и 5е, а фазовые инварианты на линиях равных фаз показаны на рис. 5ж и 5з.

Анализ кривых на рис. 4 и 5 показывает, что фазовые структуры и инварианты полей ЗД и проекций КС для различных мультиполей совпадают друг с другом как при малых (7 м), так и средних глубинах (100 м) излучателя. Заметим, однако, что фазовые структуры полей ЗД и проек-

ций КС для различных мультиполей имеют более сильную зависимость от глубин приема и излучения, чем от типа мультиполя или от характеристик принятого сигнала. При этом фазы вертикальных проекций КС на разных глубинах отличаются друг от друга сильнее, чем фазы полей ЗД или горизонтальных проекций КС.

В целом установлено, что для всех рассмотренных случаев — как для скалярных, так и для век-

торных компонент поля, линии равных фаз практически совпадают, и фазовые инварианты на линиях равных фаз очень близки к постоянному значению “–1” – независимо от направленности излучателей, расстояния и частоты звука и направленности приемного элемента. Это, собственно говоря, и определяет их инвариантность. Соотношения (3) и (4) обеспечивают возможность с использованием известных [3] значений коэффициентов возбуждения  $p_i$  и фазовых скоростей  $c_i$  нормальных волн рассчитать для любых источников и волноводов фазовый инвариант и построить линии равных фаз.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Акустика мелкого моря, нелинейная аку-

стическая диагностика, нелинейная динамика волн” (номер гос. регистрации АААА-А18-118021390174-1).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чупров С.Д. Интерференционная структура звукового поля в слоистом океане // Акустика океана. Современное состояние. М.: Наука, 1982. С. 71–91.
2. Kuznetsov G.N., Stepanov A.N. Interference and Phase Invariants of Sound Fields // Physics of Wave Phenomena. 2021. V. 29. № 3. P. 285–292.
3. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 279 с.
4. Кузнецов Г.Н., Степанов А.Н. Векторно-скалярные поля мультипольных гидроакустических источников, эквивалентных шумоизлучению морских объектов. М.: Буки-Веди, 2022. 304 с.

## INFLUENCE OF THE DIRECTION OF SOURCES ON THE PHASE INVARIANTS OF VECTOR-SCALAR FIELDS IN A SHALLOW SEA

G. N. Kuznetsov<sup>a</sup> and A. N. Stepanov<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>b</sup>Samara National Research University, Samara, Russia

Presented by Academician of the RAS I.A. Shcherbakov

For the first time, the properties of the phase invariant of sound to vector-scalar fields formed in a waveguide by directional multipole sources are studied. It is shown that when even such complex sources are used, the phase invariant is valid for sound pressure and for projections of the vibrational velocity vector. It practically does not depend on the directivity and frequency of the source, the distance between the receiver and the source, and on the parameters of the waveguide.

**Keywords:** phase invariant, vector-scalar fields, multipole source, stability of the invariant under variation of source and waveguide parameters



УДК 538.94

## ЭЛЕКТРОННЫЕ И МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СПЛАВОВ НА ОСНОВЕ ДИРАКОВСКОГО ПОЛУМЕТАЛЛА $Cd_3As_2$ , ЛЕГИРОВАННОГО АТОМАМИ Mn С ВАРЬИРУЕМОЙ КОНЦЕНТРАЦИЕЙ

© 2023 г. Э. Т. Кулатов<sup>1,2,\*</sup>, Ю. А. Успенский<sup>2,\*\*</sup>

Представлено академиком РАН И.А. Щербаковым 26.12.2022 г.

Поступило 06.02.2023 г.

После доработки 06.02.2023 г.

Принято к публикации 04.05.2023 г.

Теоретические исследования предсказывают, что слабое магнитное легирование дираковских полуметаллов ведет к появлению в них необычных квантовых состояний и свойств: состояния вейлевского полуметалла, аксионного изолятора, топологического сверхпроводника и т.д. Однако конкретные материалы, в которых эти явления могут наблюдаться, а также характерные концентрации магнитных атомов остаются пока неизвестными. В настоящей работе выполнено первопринципное исследование электронных и магнитных свойств дираковских полуметаллов  $Cd_3As_2$ , изоэлектронно легированного атомами Mn с концентрациями 4, 6 и 8%. При анализе результатов основное внимание уделено нарушению пространственной и временной симметрии в сплавах, поведению электронного спектра вблизи вершины дираковского конуса, процессам спинового упорядочения в атомах Mn. Полученные результаты сопоставлены с ранними теоретическими и экспериментальными исследованиями, на их основе дана развернутая картина влияния изоэлектронного магнитного легирования на свойства дираковских полуметаллов  $Cd_3As_2$ .

*Ключевые слова:* полуметаллы Дирака, спинтроника, топотроника, электронная структура

**DOI:** 10.31857/S2686740023050061, **EDN:** OVJMRW

Топологические полуметаллы привлекают большое внимание исследователей своими необычными свойствами: своеобразной (обычно линейной) дисперсией электронного спектра, нетривиальными краевыми электронными состояниями и, нередко, электронным транспортом, защищенным от влияния примесей и дефектов [1–3]. Эти свойства открывают возможности для практического использования топологических полуметаллов во многих приложениях, в частности, в широкополосных инфракрасных фотодетекторах, устройствах спинтроники, квантовых компьютерах, лазерах терагерцового диапазона и т.д. [4–7]. Для разрабатываемых устройств такого ро-

да был предложен даже специальный термин – топотроника (топологическая электроника).

Наличие этих необычных электронных и транспортных свойств тесно связано с симметрией кристалла. Так, в дираковских полуметаллах четырехкратное вырождение спектра в конечной точке и двукратное на самом конусе обусловлены существованием центра инверсии и симметрией по отношению к обращению времени (*TR*-симметрией). Отсутствие одного из этих двух элементов симметрии превращает дираковский полуметалл в полуметалл вейлевского типа, у которого остаются только линейный закон дисперсии и двукратное вырождение спектра в особой точке. Такое понижение симметрии может достигаться либо переходом к кристаллической структуре, не имеющей центра инверсии, либо использованием магнитного кристалла с центром инверсии. И в том и в другом случае электронная структура должна оставаться полуметаллической, поскольку выход на уровень Ферми дополнитель-

<sup>1</sup>Институт общей физики им. А.М. Прохорова  
Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup>Физический институт им. П.Н. Лебедева  
Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: kulatov@nsc.gpi.ru

\*\*E-mail: uspenski@td.lpi.ru

ных зон может сильно затруднить наблюдение тонких топологических эффектов.

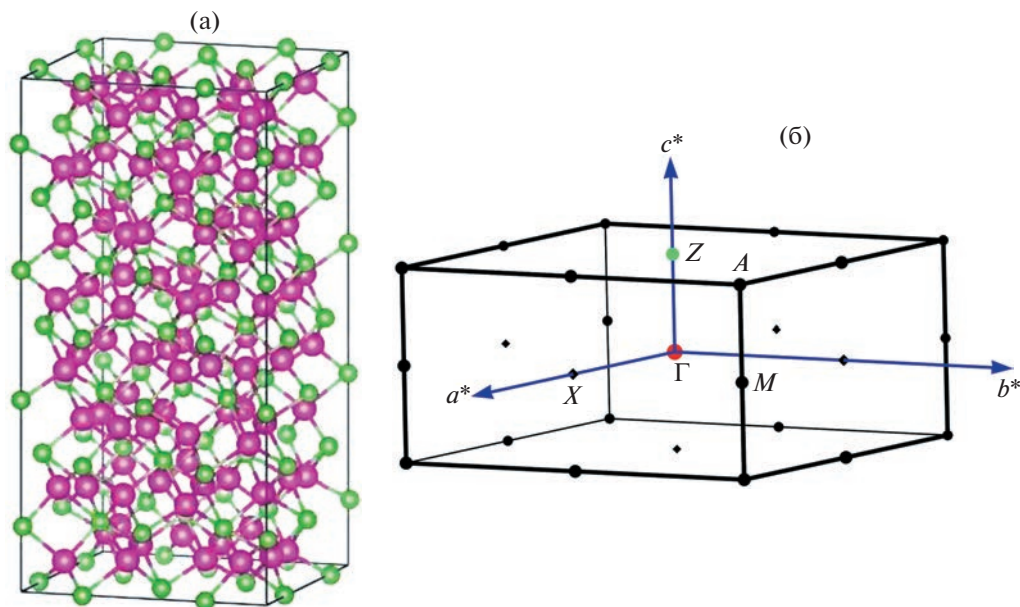
Соединение  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  относится к числу наиболее популярных дираковских полуметаллов. Его низкотемпературная тетрагональная  $\alpha$ -фаза имеет структуру, относящуюся к пространственной группе  $I4_1/acd$  (группа № 142) [8]. Наличие в этом соединении полуметаллической электронной структуры дираковского типа было подтверждено измерениями осцилляций Шубникова–де Гааза [9], фотоэмиссионных спектров с угловым разрешением [10, 11], сканирующей туннельной спектроскопии [12] и расчетами теории функционала плотности (ТФП) [13]. Было найдено, что в зоне Бриллюэна  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  имеются два конуса Дирака с вершинами, расположенными симметрично относительно точки  $\Gamma$  на оси  $\Gamma$ – $Z$ . Скорость электронов на уровне Ферми в  $\text{Cd}_3\text{As}_2$ , определяемая линейным законом дисперсии на конусе Дирака, очень высока и составляет по экспериментальным и ТФП-оценкам примерно  $1.1 \times 10^6$ – $1.3 \times 10^6$  м/с [11, 14]. Благодаря высокой скорости уровень Ферми ( $E_F$ ) легко сдвигается даже при небольшом легировании, обусловленном неконтролируемыми дефектами. Так, при концентрации носителей  $n$ -типа, равной  $1 \times 10^{18}$  см $^{-3}$ , сдвиг  $E_F$  составляет около 0.05 эВ [14]. Наличие в образцах  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  неконтролируемых носителей заряда проявляется в инфракрасных спектрах отражения как появление плазменного края отражения фотонов с энергией 0.03–0.05 эВ [15, 16], что полностью согласуется с первопринципными расчетами оптических свойств [14].

Наиболее простым способом нарушения  $TR$ -симметрии в  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  является легирование этого соединения магнитными атомами. В качестве легирующего элемента лучше всего подходит марганец, так как в случае замещения атомов Cd на Mn имеет место изoelekтронное легирование, при котором число валентных электронов и положение уровня Ферми не изменяются. Измерения магнитотранспортных свойств, выполненные на образцах  $(\text{Cd}_{1-x}\text{Mn}_x)_3\text{As}_2$  с  $x = 0, 0.017$  и  $0.033$  [17, 14], показали, что с повышением концентрации Mn происходит смена знака магнитопроводимости с отрицательного ( $x = 0$  и  $0.017$ ) на положительный ( $x = 0.033$ ). Согласно первопринципным исследованиям [14], атомы Mn в  $(\text{Cd}_{1-x}\text{Mn}_x)_3\text{As}_2$  при  $x = 0.04$  имеют тенденцию к кластеризации и стремятся к антиферромагнитному упорядочению своих спинов. При этой концентрации электронный спектр все еще имеет преимущественно линейный характер, хотя на уровне Ферми открывается щель шириной около 0.02 эВ. Следует отметить, что ширина щели в работе [14] несколько варьируется в зависимости от выбранного расположения магнитных атомов в сверхъядерке на узлах Cd, хотя в среднем, в очень больших сверхъ-

ядерках, включающих много различных конфигураций атомов Mn, эти вариации должны стремиться к нулю. В этой связи возникает вопрос, как далеко по концентрации в сплавах  $(\text{Cd}_{1-x}\text{Mn}_x)_3\text{As}_2$  простирается преимущественно линейный закон дисперсии в окрестности уровня Ферми и сохраняется доминирование антиферромагнитного спинового порядка. Фактически речь идет об области концентраций, в которой электронные, магнитные, оптические и транспортные свойства  $(\text{Cd}_{1-x}\text{Mn}_x)_3\text{As}_2$  остаются относительно стабильными или изменяются вполне регулярным образом. Чтобы ответить на этот вопрос, в настоящей работе были вычислены электронная структура и спиновое упорядочение в сплавах  $(\text{Cd}_{1-x}\text{Mn}_x)_3\text{As}_2$  с  $x = 0, 0.04, 0.06$  и  $0.08$ . Для сравнения результатов, полученных для разных концентраций, все расчеты производились в одной и той же сверхъядерке  $\text{Cd}_3\text{As}_2$ , содержащей 96 атомов Cd и 64 атома As.

## 1. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОННОЙ И СПИНОВОЙ СТРУКТУРЫ

Вычисление электронной структуры производилось с помощью программного пакета VASP [18], использующего базис плоских волн и описание атомных потенциалов методом псевдопотенциала. Более точно, в расчетах использовались: разложение волновой функции по плоским волнам с энергией обрезания 500 эВ, стандартные PAW-потенциалы метода VASP [18] и обобщенное градиентное приближение для обменно-корреляционного потенциала (GGA) [19]. Чтобы правильно описать тонкие детали электронной структуры вблизи уровня Ферми, расчеты производились с учетом релятивистских эффектов, включая спин-орбитальное взаимодействие в рамках второй вариационной процедуры. Равновесные положения атомов определялись стандартной итерационной процедурой релаксации с точностью до  $1 \times 10^{-4}$  эВ по полной энергии и с точностью до  $5 \times 10^{-3}$  эВ/Å по величине сил, действующих на атомы. Легирование атомами Mn моделировалось с помощью сверхъядерки  $\text{Cd}_{96}\text{As}_{64}$ , отвечающей низкотемпературной  $\alpha$ -фазе  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  (рис. 1а). Распределение атомов Mn по подрешетке Cd производилось случайным образом, используя открытый код VASPKIT [20]. Единственным исключением была концентрация  $x = 0.04$ , уже исследованная нами ранее в работе [14]. При этой концентрации атомы Mn были распределены в плоскости XY, что позволило получить новую информацию об электронной структуре по сравнению с [14].



**Рис. 1.** Элементарная ячейка (а) и зона Бриллюэна (б) соединения  $\text{Cd}_3\text{As}_2$ , использованные в наших расчетах. Атомы Cd – розового цвета, атомы As – зеленого.

## 2. КРИСТАЛЛИЧЕСКАЯ И ЭЛЕКТРОННАЯ СТРУКТУРА СОЕДИНЕНИЯ $\text{Cd}_3\text{As}_2$

Для удобства моделирования сплавов  $(\text{Cd}_{1-x}\text{Mn}_x)_3\text{As}_2$  с варьируемым содержанием марганца сверхъядчейка  $\alpha$ -фазы соединения  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  была выбрана большой, содержащей 160 атомов Cd и As, что в 2 раза больше примитивной ячейки этой фазы (рис. 1а). В данной структуре ближайшими соседями атомов Cd являются атомы As, а ближайшими соседями As – атомы Cd. Ближайшие друг к другу атомы Cd, принадлежащие к одному горизонтальному слою, разделены расстоянием  $d_{xy} = 3.29 \text{ \AA}$ , тогда как минимальное расстояние между атомами Cd из соседних слоев немного меньше ( $d_z = 3.21 \text{ \AA}$ ). При нашем выборе сверхъядчейки зона Бриллюэна (ЗБ) имеет форму прямоугольного параллелепипеда (рис. 1б). При построении зонной структуры вдоль каждого симметричного направления ЗБ использовался набор из 30  $\mathbf{k}$ -точек, что дает шаг по  $\mathbf{k}$  в 3–5 раз меньше, чем в нашей ранней работе [14].

Рассчитанная зонная структура  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  вдоль 5 симметричных направлений ЗБ представлена на рис. 2а. Рисунок 2б показывает в более крупном масштабе электронный спектр в окрестности уровня Ферми ( $E_F$ ). Наиболее примечательной особенностью спектра является наличие конуса Дирака, имеющего вершину в точке ЗБ  $k_D = (0, 0, 0.04 \text{ \AA}^{-1})$ . Второй конус Дирака имеет вершину в точке  $-k_D = (0, 0, -0.04 \text{ \AA}^{-1})$  (на рис. 2а не показана). В точке  $\Gamma$  оба конуса сливаются (точка Лифшица). Поскольку зоны, пересекающиеся в точке

Дирака, принадлежат к разным представлениям группы  $C_{4v}$  ( $\Lambda_6$  и  $\Lambda_7$ ), четырехкратное вырождение, вызванное пересечением зон, оказывается нечувствительно к малым вариациям кристаллического потенциала. По направлению от  $k_D$  к точке Z спектр имеет линейный характер, который сохраняется вплоть до энергии  $E = 0.4 \text{ эВ}$ . Скорость электронов на этом участке очень велика  $1.1 \times 10^6 \text{ м/с}$ , что хорошо согласуется со скоростью  $1.3 \times 10^6 \text{ м/с}$ , найденной из измерений ARPES [11]. В других направлениях от точки Дирака скорость электронов несколько меньше, а спектр быстрее теряет линейный характер.

## 3. ЭЛЕКТРОННЫЕ И МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СПЛАВОВ $(\text{Cd}_{1-x}\text{Mn}_x)_3\text{As}_2$

Легирование  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  марганцем ставит как минимум три вопроса: как атомы Mn распределяются на подрешетке Cd, какое спиновое упорядочение энергетически более выгодно – ферромагнитное (ФМ) или антиферромагнитное (АФМ) и какую валентность в данном сплаве проявляют атомы Mn. В работе [14] очень подробно, с помощью 9 различных конфигураций был изучен только один сплав  $(\text{Cd}_{0.96}\text{Mn}_{0.04})_3\text{As}_2$ . Эти расчеты показали, что в сверхъядчейке  $\text{Cd}_{46}\text{Mn}_2\text{As}_{32}$  два атома Mn имеют явную тенденцию к сближению, а АФМ-состояние выгоднее ФМ-состояния примерно на 0.15 эВ/Mn. В ФМ-состоянии величина спинового момента атомов близка к  $5 \mu_B/\text{Mn}$ , что означает полное заполнение  $3d\uparrow$ -зоны марганца. Оставшиеся два электрона являются валентны-

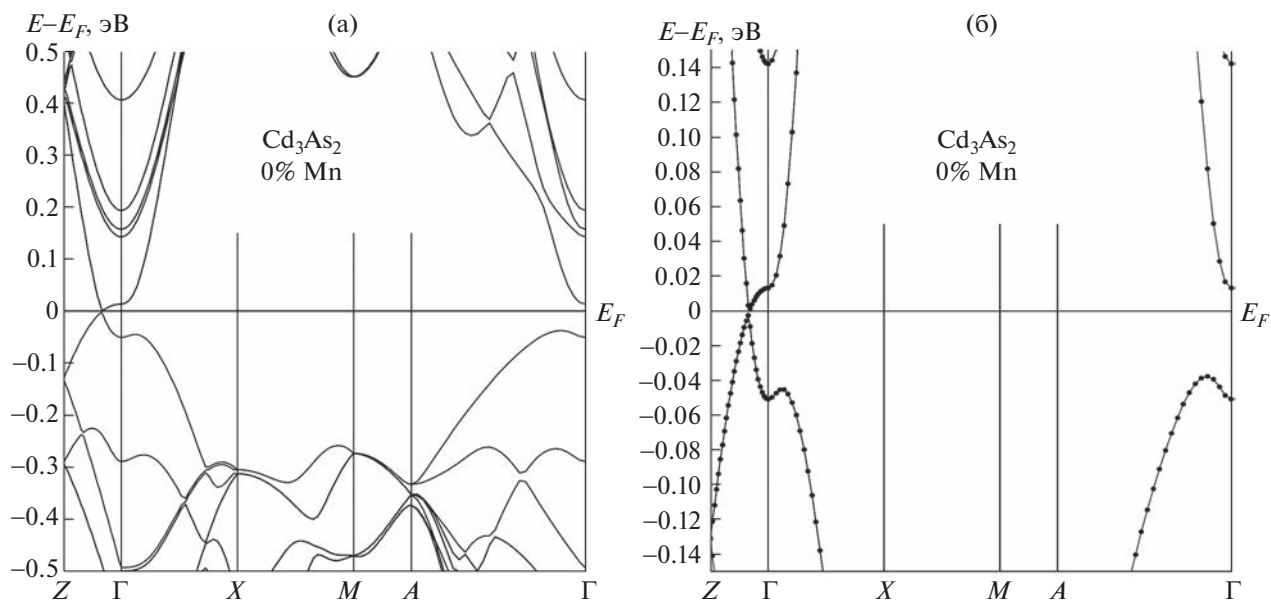


Рис. 2. Зонная структура соединения Cd<sub>3</sub>As<sub>2</sub>: а – дисперсия зон в интервале энергий от –0.5 до +0.5 эВ (относительно  $E_F$ ), б – дисперсия зон вблизи уровня Ферми.

ми, т.е. в ФМ-сплаве (Cd<sub>0,96</sub>Mn<sub>0,04</sub>)<sub>3</sub>As<sub>2</sub> имеет место замещение двухвалентного Cd на двухвалентный Mn (изоэлектронное легирование). В АФМ-состоянии локальный момент атома Mn также равен по абсолютной величине 5  $\mu_B$ /Mn, т.е. и в этом случае имеет место изоэлектронное легирование. В расчетах электронной структуры этот факт отражается в неизменном положении уровня Ферми в сплавах (Cd<sub>1-x</sub>Mn<sub>x</sub>)<sub>3</sub>As<sub>2</sub>, соответствующем энергии точки Дирака в Cd<sub>3</sub>As<sub>2</sub>.

Результаты расчетов полной энергии и магнитных свойств сплавов (Cd<sub>1-x</sub>Mn<sub>x</sub>)<sub>3</sub>As<sub>2</sub> с  $x = 4, 6$  и 8%, выполненных в настоящей работе, представлены в табл. 1. Для сравнения в табл. 1 также включены данные по (Cd<sub>0,96</sub>Mn<sub>0,04</sub>)<sub>3</sub>As<sub>2</sub> [14] двух типов: для конфигурации с самой низкой энергией и усредненные по 4 низкоэнергетическим конфигурациям. Наши данные для  $x = 4\%$  подтверждают тенденцию атомов Mn к кластеризации. Конфигурация с четырьмя близко расположенными атомами Mn (рис. 3а) имеет энергию на 0.035 эВ/Mn ниже, чем конфигурация из двух лучших димеров [14], и на 0.082 эВ/Mn ниже, чем усредненная конфигурация низкоэнергетических димеров [14]. Эти энергии вполне соизмеримы с температурами, используемыми при синтезе сплавов, поэтому в реальных образцах (Cd<sub>1-x</sub>Mn<sub>x</sub>)<sub>3</sub>As<sub>2</sub> следует ожидать слабой кластеризации Mn, проявляющейся на фоне его случайного распределения на подрешетке Cd. По этой причине в нашем исследовании распределение Mn в сплавах с  $x = 6\%$  и  $x = 8\%$  моделировалось с помощью программы VASPKIT [20] как полностью случайное. Следует

отметить, что энергия замещения одного атома Cd на один атом Mn ( $\Delta E_{Cd-Mn}$ ) несколько меняется с концентрацией: при  $x = 4\%$  она равна –7.37 эВ/Mn, –8.04 эВ/Mn при 6% и –7.64 эВ/Mn при 8%. Общее увеличение  $\Delta E_{Cd-Mn}$  с ростом  $x$  вполне ожидаемо, так как при больших концентрациях увеличивается доля более сильных Mn–As–Mn-взаимодействий. Максимальную величину  $|\Delta E_{Cd-Mn}|$  при промежуточной концентрации объяснить труднее. Вероятно, она обусловлена какими-то особенностями нашей случайной конфигурации для  $x = 6\%$  (рис. 3б).

Электронная структура сплава (Cd<sub>1-x</sub>Mn<sub>x</sub>)<sub>3</sub>As<sub>2</sub> с  $x = 4\%$  представлена на рис. 3а. Она, в целом, похожа на электронную структуру Cd<sub>3</sub>As<sub>2</sub>, но отличается от нее рядом важных деталей. Во-первых, в точке Дирака снимается четырехкратное вырождение зон. В этой точке спектр расщепляется на 2 валентные зоны и 2 зоны проводимости, разделенные не прямой узкой щелью шириной около 0.014 эВ (рис. 3в). Это расщепление есть следствие введения магнитных атомов, ведущего к потере  $TR$ -симметрии и центра инверсии (последнее из-за несимметричного расположения атомов Mn в сверхъячейке). Во-вторых, по всей ЗБ снимается двукратное вырождение спектра, имевшее место в Cd<sub>3</sub>As<sub>2</sub>. В АФМ-состоянии такое расщепление спектра связано с размещением Mn на неэквивалентных кристаллических позициях Cd, что приводит к небольшому различию в величинах спиновых моментов, локализованных на разных узлах. Как было объяснено в работе [14], этот эффект является искусственным: в реальных

**Таблица 1.** Термодинамические, магнитные и спектральные характеристики сплавов  $(\text{Cd}_{1-x}\text{Mn}_x)_3\text{As}_2$  с разной концентрацией марганца

$x(\text{Mn})$	$E_{AFM}$ , эВ/яч	$E_{AFM} - E_{FM}$ , эВ/яч	$M_{tot}$ , $\mu_B/\text{яч}$		$E_g$ , эВ	$\Delta E$ , эВ
			АФМ	ФМ		
4% [14], min/aver	417.0638/–416.8764	–0.686/–0.650	~0/0	19.9/19.9	0.028/0.043	0.006/0.015
4%	–417.2035	–1.224	~0	19.2	0.024	0.005
6%	–435.9549	–0.105	~0	29.9	0.015	0.004
8%	–448.8234	–0.786	~0	39.8	0.031	0.012

$E_{AFM}$  – энергия АФМ-состояния,  $E_{AFM} - E_{FM}$  – разность энергий АФМ- и ФМ-состояний,  $M_{tot}$  – магнитный момент ячейки АФМ/ФМ-состояния,  $E_g$  – ширина запрещенной зоны при нулевом спиновом расщеплении,  $\Delta E$  – спиновое расщепление зон вблизи  $E_F$ . Для данных [14] приведены минимальные и усредненные по конфигурациям значения величин.

сплавах усреднение по всем конфигурациям снижает данное расщепление спектра. Имея это в виду, энергетическая щель в окрестности точки Дирака была определена нами без учета расщепления, что дало  $E_g = 0.024$  эВ (табл. 1). Приведенная в табл. 1 величина  $\Delta E = 0.005$  эВ показывает, насколько сильно спектр вблизи точки Дирака для данной конфигурации отличается от своего среднего по конфигурациям значения. Еще раз подчеркнем, что введение 4% Mn приводит к очень небольшим изменениям в спектре. Наиболее важное из них – появление щели в точке Дирака. Заметные изменения в спектре валентной зоны в направлении Г–Х в значительной степени связаны со спиновым расщеплением спектра, присущим данной конфигурации, и должны многократно уменьшиться после усреднения спектра по конфигурациям.

Использованная нами для  $(\text{Cd}_{0.94}\text{Mn}_{0.06})_3\text{As}_2$  конфигурация атомов Mn (рис. 3б) имеет самую низкую среди рассмотренных сплавов энергию замещения  $\Delta E_{\text{Cd-Mn}} = -8.04$  эВ/Mn. Вместе с тем разность энергий ФМ- и АФМ-состояний этого сплава – самая маленькая по абсолютной величине:  $E_{AFM} - E_{FM} = -0.017$  эВ/Mn. Скорее всего, последний факт объясняется тем, что в данной конфигурации атомы  $\text{Mn}\uparrow$  отделены от атомов  $\text{Mn}\downarrow$  сравнительно большими расстояниями (рис. 3б). Возможно, что та же особенность приводит к самой маленькой среди рассмотренных сплавов величине щели  $E_g = 0.015$  эВ и спинового расщепления спектра  $\Delta E = 0.004$  эВ. Следует также отметить для данного сплава очень низкую дисперсию двух верхних ветвей валентной зоны, имеющую место между точкой Дирака и точкой Z зоны Бриллюэна (рис. 3б).

По своим характеристикам сплав  $(\text{Cd}_{0.92}\text{Mn}_{0.08})_3\text{As}_2$  ( $x = 8\%$ , рис. 3в) не очень сильно отличается от остальных сплавов, представленных в табл. 1. В целом он оказывается ближе к сплаву с  $x = 4\%$ , чем с  $x = 6\%$ . Его электронная

структура характеризуется теми же особенностями, что и у сплава  $(\text{Cd}_{0.96}\text{Mn}_{0.04})_3\text{As}_2$ , но отличается несколько более широкой щелью  $E_g = 0.031$  эВ и большим спиновым расщеплением вблизи уровня Ферми  $\Delta E = 0.012$  эВ. Можно отметить также общий для всех сплавов подъем валентной зоны вдоль направления X–M ЗБ по сравнению с чистым соединением  $\text{Cd}_3\text{As}_2$ . Для  $x = 4\%$  этот подъем составляет примерно 0.13 эВ, для 6% – 0.12 эВ, для 8% – 0.16 эВ. Наиболее вероятная причина этого эффекта – усиливающаяся с ростом  $x$  гибридизация орбиталей As 4p- с примесными Mn 3d-орбиталями, имеющими характерную энергию  $E_{\text{Mn-3d}} \approx -3$  эВ.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполненные нами расчеты дираковских полуметаллов  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  и сплавов  $(\text{Cd}_{1-x}\text{Mn}_x)_3\text{As}_2$  с  $x = 0.04, 0.06$  и  $0.08$  показали, что изоэлектронное замещение Cd магнитными атомами Mn имеет ряд характерных особенностей, слабо изменяющихся с концентрацией. Во-первых, во всех изученных сплавах самой низкой энергии отвечает АФМ-упорядочение спинов, хотя разность энергий  $E_{AFM} - E_{FM}$  варьируется очень широко, от  $-0.02$  до  $-0.31$  эВ/Mn. Во-вторых, атомы Mn проявляют хорошо заметную тенденцию к кластеризации. Однако типичный выигрыш в энергии от их сближения имеет весьма умеренную величину порядка 0.05 эВ/Mn и вряд ли может превалировать над случайным разбросом Mn по подрешетке Cd в процессе сплавления. В-третьих, магнитное легирование сопровождается снятием четырехкратного вырождения в точке Дирака и образованием узкой щели, разделяющей валентную зону и зону проводимости. В настоящих расчетах ширина щели меняется от 0.015 до 0.031 эВ, причем эти изменения не являются монотонными, а сильно зависят от конкретного расположения атомов Mn. Следует отметить, что тонкие детали электрон-

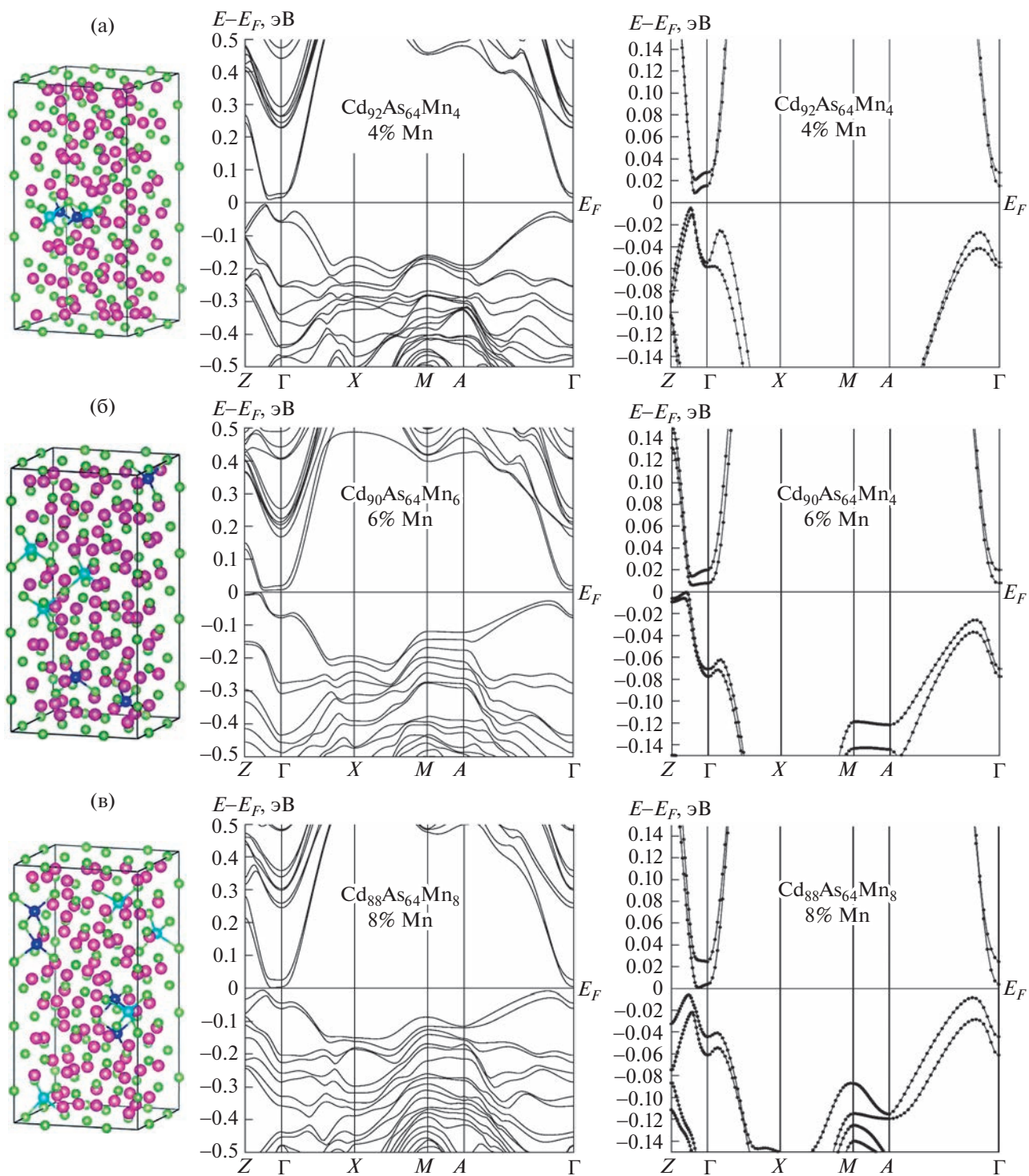


Рис. 3. Кристаллическая структура, зонная структура и электронная структура вблизи  $E_F$  (соответственно) в сплаве  $(Cd_{1-x}Mn_x)_3As_2$  с  $x = 0.04$  (а),  $x = 0.06$  (б),  $x = 0.08$  (в). Синим цветом показаны атомы Mn со спином вверх, голубым – со спином вниз.

ной структуры вблизи уровня Ферми вообще очень чувствительны к конкретному расположению атомов Mn, определяющему, в свою очередь, детали АФМ-ориентации спинов в сверхъячейке сплава. Вместе с тем основные черты электрон-

ного спектра в более широкой полосе энергий от  $-0.1$  до  $+0.4$  эВ (относительно  $E_F$ ) меняются очень слабо с увеличением легирования. Эта ситуация заметно отличается от той, что имеет место при легировании трехмерного топологического

изолятора  $\text{Bi}_2\text{Se}_3$  магнитными атомами переходных металлов [21, 22]. По этой причине при экспериментальном изучении сплавов  $(\text{Cd}_{1-x}\text{Mn}_x)_3\text{As}_2$  желательнее использовать те методы, которые тесно связаны с возбуждением электронов вблизи уровня Ферми (ARPES высокого разрешения, магнито-транспортные свойства, оптика и магнитооптика далекого ИК-диапазона и т.д.). Высокая чувствительность электронного спектра сплавов  $(\text{Cd}_{1-x}\text{Mn}_x)_3\text{As}_2$  в узком слое вблизи  $E_F$  может представлять интерес для разработки устройств терагерцового диапазона, таких как сенсоры и лазеры с большой длиной волны.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность Межведомственному суперкомпьютерному центру Российской академии наук за предоставление суперкомпьютерных ресурсов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Armitage N.P., Mele E.J., Vishvanath A.* Weyl and Dirac semimetals in three-dimensional solids // *Rev. Mod. Phys.* 2018. V. 90. №. 1. P. 015001–015057.
2. *Wang S., Lin B.C., Wang A.Q., Yu D.P., Liao Z.M.* Quantum Transport in Dirac and Weyl Semimetals: A Review // *Adv. Phys.:* X. 2017. V. 2. P. 518–544.
3. *Burkov A.A.* Topological Semimetal // *Nat. Mater.* 2016. V. 15. P. 1145–1148.
4. *Wang A.-Q., Ye X.-G., Yu D.-P., Liao Z.M.* Topological semimetal nanostructures: from properties to topotronics // *ACS Nano.* 2020. V. 14. P. 3755–3778.
5. *Liu P., Williams J.R., Cha J.J.* Topological Nanomaterials // *Nat. Rev. Mater.* 2019. V. 4. P. 479–496.
6. *Wang L.X., Li C.Z., Yu D.P., Liao Z.M.* Aharonov-Bohm Oscillations in Dirac Semimetal  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  Nanowires // *Nat. Commun.* 2016. V. 7. P. 10769–10775.
7. *Yu W., Pan W., Medlin D.L., Rodriguez M.A., Lee S.R., Bao Z.Q., Zhang F.*  $\pi$  and  $4\pi$  Josephson Effects Mediated by a Dirac Semimetal // *Phys. Rev. Lett.* 2018. V. 120. P. 177704–177709.
8. *Ali M.N., Gibson Q., Jeon S., Zhou B.B., Yazdani A., Cava R.J.* The crystal and electronic structures of  $\text{Cd}_3\text{As}_2$ , the three-dimensional electronic analogue of graphene // *Inorg. Chem.* 2014. V. 53. P. 4062–4067.
9. *He L.P., Hong X.C., Dong J.K., Pan J., Zhang Z., Zhang J., Li S.Y.* Quantum transport evidence for the three-dimensional Dirac semimetal phase in  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  // *Phys. Rev. Lett.* 2014. V. 113. P. 246402–246406.
10. *Neupane M., Xu S.-Y., Sankar R., Alidoust N., Bian G., Liu C., Belopolski I., Lin H., Bansil A., Chou F., Hasan M.Z., Chang T.-R., Jeng H.-T.* Observation of a three-dimensional topological Dirac semimetal phase in high-mobility  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  // *Nat. Commun.* 2014. V. 5. P. 3786–3793.
11. *Liu Z.K., Jiang J., Zhou B., Wang Z.J., Zhang Y., Weng H.M. et al.* A stable three-dimensional topological Dirac semimetal  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  // *Nat. Mater.* 2014. V. 13. P. 677–681.
12. *Jeon S., Zhou B.B., Gyenis A., Feldman B.E., Kimchi I., Potter A.C., Gibson Q.D., Cava R.J.* Landau quantization and quasiparticle interference in the three-dimensional Dirac semimetal  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  // *Nat. Mater.* 2014. V. 13. P. 851–856.
13. *Wang Z., Weng H., Wu Q., Dai X., Fang Z.* Three-dimensional Dirac semimetal and quantum transport in  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  // *Phys. Rev. B.* 2013. V. 88. P. 125427–125432.
14. *Kulatov E.T., Uspenskii Yu.A., Oveshnikov L.N., Mekhriya A.B., Davydov A.B., Ril' A.I., Marenkin S.F., Aronzon B.A.* Electronic, magnetic and magnetotransport properties of Mn-doped Dirac semimetal  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  // *Acta Materialia.* 2021. V. 219. P. 117249–117258.
15. *Akrap A., Hakl M., Tchoumakov S., Crassee I., Kuba J., Goerbig M.O. et al.* Magneto-optical signature of massless Kane electrons in  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  // *Phys. Rev. Lett.* 2016. V. 117. P. 136401–136406.
16. *Neubauer D., Carbotte J.P., Nateprov A.A., Löhle A., Dressel M., Pronin A.V.* Interband optical conductivity of the [001]-oriented Dirac semimetal  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  // *Phys. Rev. B.* 2016. V. 93. P. 121202–121206.
17. *Oveshnikov L.N., Davydov A.B., Suslov A.V., Ril' A.I., Marenkin S.F., Vasiliev A.L., Aronzon B.A.* Superconductivity and Shubnikov-de Haas effect in polycrystalline  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  thin films // *Sci. Rep.* 2020. V. 10. P. 4601–4607.
18. *Kresse G., Furthmüller J.* Efficient iterative schemes for ab initio total energy calculations using a plane-wave basis set // *Phys. Rev. B.* 1996. V. 54 (16). P. 11169–11186.
19. *Perdew J.P., Burke K., Ernzerhof M.* Generalized gradient approximation made simple // *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 77 (18). P. 3865–3868.
20. *Wang V., Xu N., Liu J.C., Tang G., Geng W.T.* VASPKIT: A User-Friendly Interface Facilitating High-Throughput Computing and Analysis Using VASP Code // *Computer Physics Communications.* 2021. V. 267. P. 108033–108051.
21. *Kulatov E.T., Men'shov V.N., Tugushev V.V., Uspenskii Yu.A.* Electron and magnetic properties of three-dimensional magnetic topological insulators  $\text{Bi}_2\text{Se}_3$ :Cr and  $\text{Bi}_2\text{Se}_3$ :Fe // *Europhysics Letters.* 2016. V. 115. P. 67004–67010.
22. *Kulatov E.T., Men'shov V.N., Tugushev V.V., Uspenskii Yu.A.* Features of the electronic structure of the  $\text{Bi}_2\text{Se}_3$  topological insulator digitally doped with 3d transition metals // *JETP Letters.* 2019. V. 109. P. 102–108.

# ELECTRONIC AND MAGNETIC PROPERTIES OF ALLOYS BASED ON THE DIRAC SEMIMETAL $\text{Cd}_3\text{As}_2$ DOPED BY Mn ATOMS WITH THE VARIABLE CONCENTRATIONS

**E. T. Kulatov<sup>a,b</sup> and Yu. A. Uspenskii<sup>b</sup>**

<sup>a</sup>*Prokhorov General Physics Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

<sup>b</sup>*Lebedev Physical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS I. A. Shcherbakov

Theoretical studies predict that the low magnetic doping of the Dirac semimetals (DS) leads to the appearance in them of unusual quantum states and properties: the states of Weil semimetals, axionic insulator, topological superconductor and so on. However the specific materials in which these phenomena can be observed, as well as the characteristic concentrations of magnetic atoms are still unknown. In the present work, an ab initio study of the electronic and magnetic properties of the DS  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  doped isoelectronically with Mn atoms at concentrations of 4, 6, and 8% was performed. When analyzing the results, the main attention is paid to breaking spatial and time reversal symmetry in alloys, the behavior of the electronic structure near the top of the Dirac cone, and the processes of spin ordering in Mn atoms. The results obtained are compared with earlier theoretical and experimental studies, and on their basis a detailed picture of the effect of isoelectronic magnetic doping on the properties of the DS  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  is given.

*Keywords:* Dirac semimetals, spintronics, topotronics, electronic structure



УДК 539.12:537.63:537.868

## ПОНДЕРОМОТОРНЫЕ СИЛЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ С НЕОДНОРОДНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ

© 2023 г. В. Б. Лапшин<sup>1,2,\*</sup>, А. А. Скубачевский<sup>2</sup>, академик РАН А. С. Бугаев<sup>2,3</sup>

Поступило 31.01.2023 г.  
После доработки 31.01.2023 г.  
Принято к публикации 07.05.2023 г.

На основе анализа особенностей траектории движения заряженной частицы в неоднородной электромагнитной волне уточняются физические процессы, определяющие природу пондеромоторных сил. В частности, детализируется причина смены ускоренного движения частицы при прохождении через ноль амплитуды электрического поля в направлении, перпендикулярном электрическому полю, на торможение при увеличении амплитуды электрического поля. Определено влияние инерционной массы на траекторию движения заряженной частицы в неоднородной электромагнитной волне.

**Ключевые слова:** пондеромоторные силы, неоднородные электромагнитные волны, траектория электрона

**DOI:** 10.31857/S2686740023050085, **EDN:** RYFDJH

Целью сообщения является анализ физических механизмов, определяющих пондеромоторные силы, ответственных за особенности траектории заряженной частицы в поле неоднородной электромагнитной волны.

В одной из первых работ [1], посвященных пондеромоторным силам, рассматривается поведение заряженной частицы в электромагнитном поле, заданном в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{i\omega t}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{i\omega t}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}(x, y, z)$  – радиус-вектор,  $t$  – время,  $\omega$  – частота, при ряде допущений, среди них: траектория заряженной частицы  $\mathbf{r}(t)$  представима в виде суммы низкочастотной и высокочастотной составляющих  $\mathbf{r}_0(t)$  и  $\mathbf{r}_1(t)$ , соответственно, т.е.  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}_1(t)$ ;  $|\mathbf{r}_1(t)| \ll L$ , где  $L$  – расстояние, на котором  $\mathbf{r}_0$  меняется значительно и, как следствие,  $|\mathbf{r}_1|/L$  и  $|\dot{\mathbf{r}}_0|/L \ll 1$ . Следует отметить, что указанные ограничения не выполняются в целом

ряде приложений к геофизическим процессам и явлениям.

В работах [1–3] исследуются пондеромоторные силы, пропорциональные градиенту квадрата электрического поля, как результат взаимодействия электромагнитных полей с заряженными частицами. Согласно статье [1], усредненное уравнение низкочастотной составляющей траектории частицы в поле электромагнитной волны принимает следующий вид:

$$\ddot{\mathbf{r}}_0(t) = \left(\frac{q}{2m\omega}\right)^2 \nabla |\mathbf{E}|^2, \quad (2)$$

где  $m$ ,  $q$  – масса и заряд частицы,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  – электрическое поле.

В работах [1, 2] не обсуждается случай, когда траектория заряженной частицы имеет низкочастотную составляющую, перпендикулярную направлению электрического поля. В ряде случаев низкочастотная и высокочастотная составляющие входят в уравнение (1) мультипликативно (поперечный пондеромоторный эффект), что противоречит допущению об аддитивности этих составляющих, указанному в работах [1, 2]. Следует отметить, что в различных источниках, например, в [4], приведен детальный вывод данной формулы для случая совпадения по направлению высокочастотной и низкочастотной составляющих электромагнитных полей (продольный пондеромоторный эффект).

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

<sup>3</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: lapshin-vb1@mail.ru

Следуя работе [2], в которой исследуются особенности движения заряженной частицы в электромагнитной волне, состоящей из стоячей (направление –  $y$ ) и бегущей (направление –  $z$ ) волн, приведем составляющую траектории частицы в направлении  $y$ :

$$y(t_0) = \frac{\lambda c}{2a} \left( \frac{eE_0}{mc\omega} \right)^2 \cos \frac{\pi y}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \left[ \omega \Delta t^2 + 2\omega t_0 \Delta t + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\omega} 2 \sin(2(\omega t_0 + \varphi - k_z z) + \omega \Delta t) \sin \omega \Delta t - \right. \quad (3) \\ \left. - \frac{4 \cos \varphi}{\omega} \cdot 2 \cdot \sin \left( \omega t + \varphi - k_z z + \frac{\omega \Delta t}{2} \right) \times \right. \\ \left. \times \sin \frac{\omega \Delta t}{2} + \sin 2\varphi \Delta t \right].$$

Здесь  $x, y, z$  образуют правую тройку:  $x$  – в направлении  $\mathbf{E}$ ,  $x$  и  $y$  вдоль фронтальных зон бегущей и стоячей составляющих электромагнитной волны,  $z$  – в направлении распространения бегущей волны,  $m$  – масса электрона,  $e$  – заряд,  $c$  – скорость света.

Из данной формулы следует, что низкочастотная  $\left( \frac{\lambda c}{2a} \left( \frac{eE_0}{mc\omega} \right)^2 \cos \frac{\pi y}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \right)$  и высокочастотная составляющие  $\left( \frac{1}{2\omega} 2 \sin(2(\omega t_0 + \varphi - k_z z) + \omega \Delta t) \sin \omega \Delta t - \frac{4 \cos \varphi}{\omega} 2 \sin \left( \omega t + \varphi - k_z z + \frac{\omega \Delta t}{2} \right) \sin \frac{\omega \Delta t}{2} + \sin 2\varphi \Delta t \right)$  траектории мультипликативны, что не согласуется с предположением об аддитивности этих составляющих, сделанном в работах [1, 3], результаты которых использованы в [2].

В работе [2] также приводится вывод формулы (2). Данный вывод математически корректен, но физически не вполне обоснован, так как при выводе формулы (2) используется метод возмущения в нулевом приближении, что позволяет формально заменить  $E_x$  на  $H_z$ . Для произвольной неоднородной электромагнитной волны формула (2) неприменима.

В статье [2] применяется разложение по малому параметру  $\eta = \frac{eE_0}{mc\omega}$ . Данное разложение справедливо при  $\eta \ll 1$ . При  $E_0 = 10$  ед. СГС,  $\frac{\omega}{2\pi} = 10^9$  рад/с, к примеру,  $\eta = 0.02 \ll 1$ . В этом случае разложение справедливо. В случае если  $E_0 = 100$  ед. СГС, то  $\eta = 0.2$ , и условие малости параметра не выполняется. На рис. 3 показано, при каких  $\eta$  подход, используемый в работе [2], применим.

Уравнения движения заряженной частицы в произвольной неоднородной электромагнитной волне могут быть записаны в следующем виде:

$$\mathbf{r}'' = \frac{q}{m\gamma} \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_0^{(i)} \sin(\omega^{(i)} t - \mathbf{k}^{(i)} \mathbf{r} + \Phi_i) + \right. \\ \left. + \frac{1}{c} \left[ \mathbf{r}' \times \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_0^{(i)} \sin(\omega^{(i)} t - \mathbf{k}^{(i)} \mathbf{r} + \Phi_i) \right] \right) - \quad (4) \\ - \frac{\mathbf{r}'}{c^2} \left( \mathbf{r}' \cdot \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_0^{(i)} \sin(\omega^{(i)} t - \mathbf{k}^{(i)} \mathbf{r} + \Phi_i) \right),$$

где  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  – координаты и скорости заряженной частицы,  $m$  – ее масса,  $q$  – заряд,  $\mathbf{E}_0^{(i)}, \mathbf{H}_0^{(i)}$  – амплитуды электрического и магнитного полей плоских волн, формирующих неоднородную волну,  $\omega^{(i)}$  – их несущая частота,  $\mathbf{k}^{(i)}$  – волновые векторы,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ ,  $c$  – скорость света,  $t$  – время,  $\Phi_i$  – фаза.

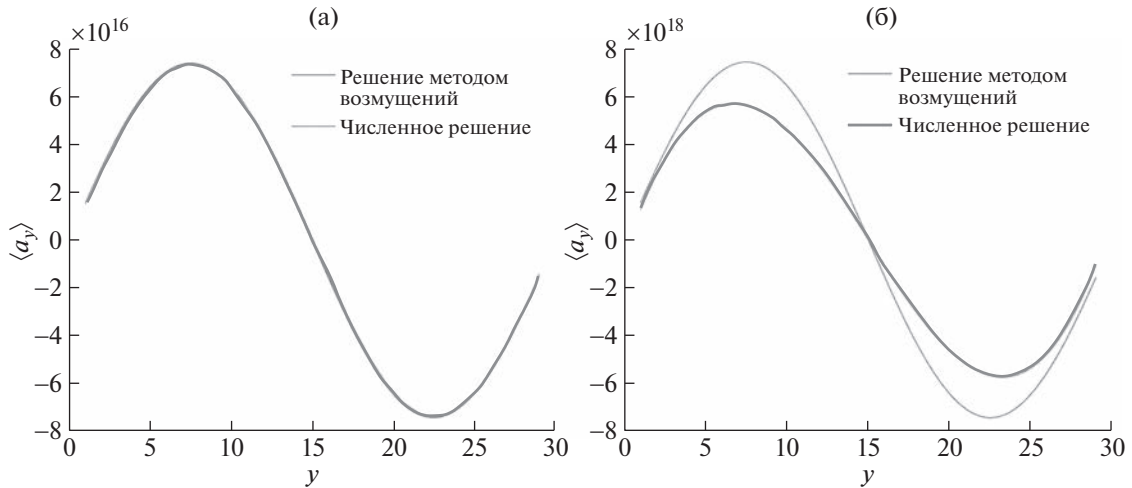
При решении системы уравнений (4) использовалась схема Рунге–Кутты с переменным шагом (схема Дормана–Принса) четвертого порядка. В качестве численного значения для следующего шага брался результат, полученный по схеме пятого порядка точности с предыдущего шага. Эта схема отличается от большинства схем с переменным шагом интегрирования тем, что в качестве решения берется результат, полученный по схеме более высокого порядка. При этом шаг по времени задается с помощью схемы более низкого порядка.

Для демонстрации ограничений применения метода возмущений при анализе движения заряженной частицы в неоднородной электромагнитной волне рассмотрим численное решение уравнений движения частицы в неоднородной волне, создаваемой суперпозицией двух плоских монохроматических электромагнитных волн, электрические поля которых параллельны, состоящей из стоячей (направление –  $y$ ) и бегущей (направление –  $z$ ).

Рисунок 1а демонстрирует совпадение численного решения уравнения (4) с решением, полученным в работе [2] методом возмущений при  $E_0 = 10$  ед. СГС ( $\eta = 0.02$ ), и отличие этих решений при увеличении до 100 ед. СГС ( $\eta = 0.2$ ).

На рис. 2 представлена зависимость параметра  $\eta(E_0, \omega) = \frac{eE_0}{mc\omega}$  от амплитуды электрического поля  $E_0$  и частоты волны  $\omega$ . Выделена линия уровня  $\eta = 1$ , определяющая диапазон значений электрического поля и частоты, при которых можно использовать метод возмущений в нулевом приближении.

Рисунок 3 демонстрирует физическую сущность пондеромоторной силы при взаимодей-



**Рис. 1.** Зависимость среднего ускорения электрона в поле неоднородной электромагнитной волны от  $y$ .  $\Phi_1 = \Phi_2$ ,  $\phi_1 = \phi_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ ,  $\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\psi_1 = \psi_2 = 0$ ;  $x_0 = z_0 = 0$ ,  $y_0 = 29$  см,  $v_0 = 0$ ,  $\frac{\omega}{2\pi} = 10^9$  Гц. Шаг по времени  $dt = \frac{2\pi}{100\omega_0}$ . а –  $E_0 = 10$  ед. СГС. Время моделирования  $T = 5000dt$ ; б –  $E_0 = 100$  ед. СГС. Время моделирования  $T = 800dt$ .

ствии неоднородной электромагнитной волны с заряженной частицей, являющейся составляющей силы Лоренца в направлении, перпендикулярном электрическому полю волны (поперечный пондеромоторный эффект). Сила Лоренца через скорость частицы нелинейно связана с электрическим полем волны, что определяет смену ускоренного движения частицы при прохождении через ноль амплитуды электрического поля стоячей волны в направлении, перпендикулярном электрическому полю волны, на торможение при движении частицы в направлении увеличения амплитуды электрического поля.

На рис. 3 представлена нормированная  $y$ -составляющая силы Лоренца (ускорение) вдоль траектории заряженной частицы [5], согласно численной модели. Там же изображены средние по периоду волны значения пондеромоторных сил по данным численной модели и метода возмущений. Смещение горизонтальной проекции траектории частицы, осредненной по периоду волны, вдоль оси  $y$  связано с инерционной массой частицы, что приводит к сдвигу фаз между колебанием (изменением) электрического поля волны и скоростью частицы.

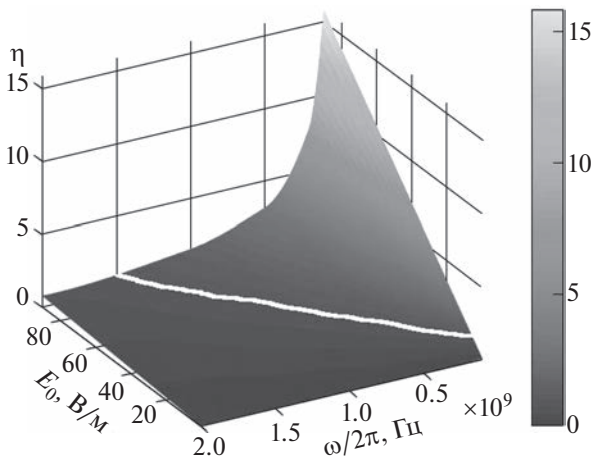
## ВЫВОДЫ

1. Рисунки 1, 2 демонстрируют ограничение применения метода возмущений при взаимодействии заряженных частиц с неоднородными электромагнитными волнами с увеличением электрического поля и частоты волны.

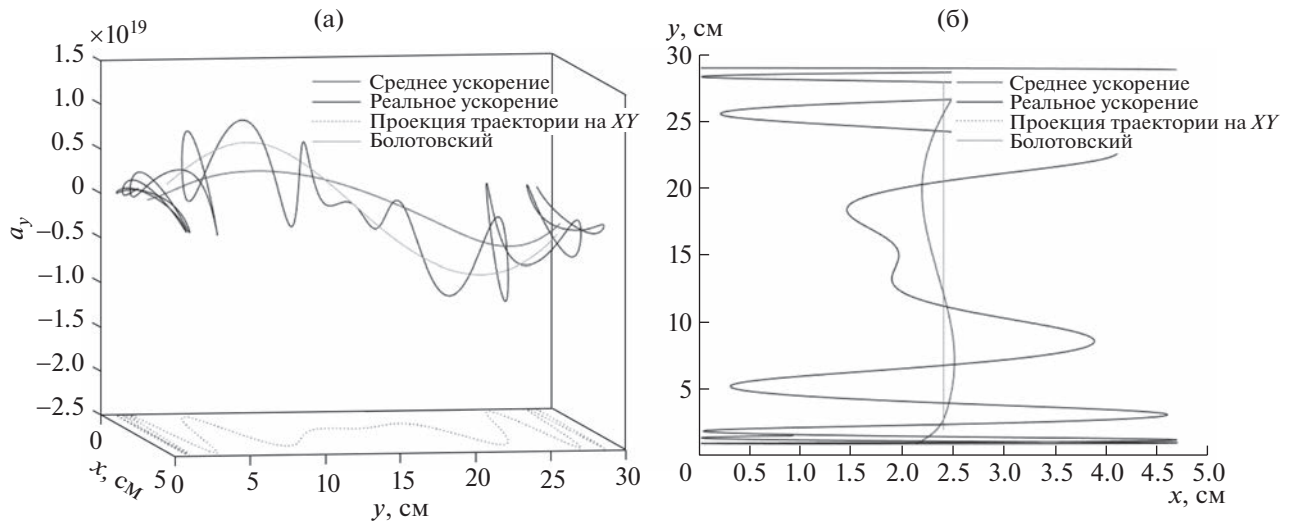
2. Показано, что низкочастотная и высокочастотная составляющие при взаимодействии заряженных частиц с электромагнитными волнами в целом ряде случаев не аддитивны (продольный пондеромоторный эффект), а мультипликативны (поперечный пондеромоторный эффект).

3. Рисунок 3 демонстрирует физическую сущность пондеромоторной силы при взаимодействии неоднородной электромагнитной волны с заряженной частицей, являющейся составляющей силы Лоренца в направлении, перпендикулярном электрическому полю волны (поперечный пондеромоторный эффект).

4. Сила Лоренца через скорость частицы нелинейно связана с электрическим полем волны, что



**Рис. 2.** Зависимость параметра  $\eta$  от амплитуды электрического поля  $E_0$  и частоты волны  $\omega$ . Белая линия уровня на рисунке соответствует  $\eta = 1$ .



**Рис. 3.** а – Зависимость ускорения электрона в поле неоднородной электромагнитной волны от  $x$ ,  $y$ .  $\Phi_1 = \Phi_2$ ,  $\phi_1 = \phi_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ ,  $\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\psi_1 = \psi_2 = 0$ ,  $x_0 = z_0 = 0$ ,  $y_0 = 29$  см,  $v_0 = 0$ ,  $\frac{\omega}{2\pi} = 10^9$  Гц.  $E_0 = 100$  ед. СГС. Шаг по времени  $dt = \frac{2\pi}{100\omega_0}$ . Время моделирования  $T = 800dt$ . б – Проекция графика ускорения на плоскость  $XY$ .

определяет смену ускоренного движения частицы при прохождении через ноль амплитуды электрического поля стоячей волны (узел стоячей волны) в направлении, перпендикулярном электрическому полю волны, на торможение при движении частицы в направлении увеличения амплитуды электрического поля. В области максимальных значений амплитуды электрического поля (пучность стоячей волны) также происходит смена торможения частицы на ускорение. Это связано с изменением знака  $z$ -компоненты магнитного поля в  $y$ -компоненте силы Лоренца (поперечный пондеромоторный эффект).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гапонов А.В., Миллер М.А. // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 168–169.
2. Болотовский Б.М., Серов А.В. // УФН. 2003. Т. 173. № 6. С. 667–678.
3. Серов А.В. // Квантовая электроника. 1998. Т. 25. № 3. С. 197–200.
4. Introduction to Plasma Theory. 2-nd edition, by Nicholson, Dwight R. Wiley Publications, 1983. ISBN 0-471-09045-X
5. Лапшин В.Б., Скубачевский А.А., Белинский А.В., Бугаев А.С. // ДАН. 2019. Т. 488. № 6. С. 604–608.

**PONDEROMOTIVE FORCES IN THE INTERACTION OF A CHARGED PARTICLE WITH AN INHOMOGENEOUS ELECTROMAGNETIC WAVE**

**V. B. Lapshin<sup>a,b</sup>, A. A. Skubachevskii<sup>b</sup>, and Academician of the RAS A. S. Bugaev<sup>b</sup>**

<sup>a</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

<sup>b</sup>Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russia

<sup>c</sup>Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

In the article, based on the analysis of the features of the trajectory of a charged particle in an inhomogeneous electromagnetic wave, the physical processes that determine the nature of ponderomotive forces are specified. In particular, the reason for changing the accelerated motion of a particle when passing through zero of the electric field amplitude in the direction perpendicular to the electric field to deceleration with increasing electric field amplitude is detailed. The influence of the inertial mass on the trajectory of a charged particle in an inhomogeneous electromagnetic wave is determined.

*Keywords:* ponderomotive forces, inhomogeneous electromagnetic waves, trajectory of electron

УДК 538.958

## СИНТЕЗ КОМПОЗИТОВ АЛМАЗ-SiO<sub>2</sub> СО СВОЙСТВАМИ ФОТОННЫХ КРИСТАЛЛОВ ВИДИМОГО ДИАПАЗОНА

© 2023 г. Д. Н. Сovyк<sup>1,\*</sup>, К. А. Одинцов<sup>2,3</sup>, А. П. Большаков<sup>1</sup>, С. А. Дьяков<sup>4</sup>, С. С. Савин<sup>1,3</sup>, И. А. Федорова<sup>1</sup>, В. Ю. Юров<sup>1</sup>, В. М. Масалов<sup>1,5</sup>, В. Г. Ральченко<sup>1,\*\*</sup>, академик РАН В. И. Конов<sup>1</sup>

Поступило 21.06.2023 г.

После доработки 21.06.2023 г.

Принято к публикации 03.07.2023 г.

Сообщается о синтезе периодических структур в виде композита монокристалльный алмаз-опал SiO<sub>2</sub> со свойствами фотонного кристалла в видимой области спектра.

*Ключевые слова:* фотонный кристалл, алмаз, опал, химическое осаждение из газовой фазы, композит, спектр отражения

**DOI:** 10.31857/S2686740023050127, **EDN:** UQCDJZ

1. Фотонные кристаллы (ФК) – среды с периодически модулированным показателем преломления света, позволяют управлять световыми потоками, усиливая, ослабляя или разделяя их. Алмаз является одним из немногих материалов для создания ФК видимого диапазона благодаря высокому показателю преломления ( $n = 2.4$ ) и оптической прозрачности, обладая при этом высокими прочностью, теплопроводностью, наличием центров окраски, таких как примесно-вакансионные центры NV, SiV, GeV, которые, будучи встроены в фотонный кристалл, обнаруживают повышенную яркость [1, 2]. Однако изготовление ФК из монокристалльного алмаза стандартными методами травления встречает многочисленные проблемы ввиду химической стойкости материала. С использованием плазменного травления до сих пор реализовать удалось лишь одномерные ФК в виде балки [2] и двумерные алмазные ФК [3].

Ранее трехмерные ФК из нанокристаллического алмаза были получены наращиванием алма-

зом пустот в темплате из объемного опала (периодической структуры из субмикронных сфер SiO<sub>2</sub>, получаемой путем самосборки в виде гранцентрированной кубической решетки) в процессе осаждения из газовой фазы (CVD-метод) [4–6]. Доля пустот в опале составляет 26%. Рост алмаза в порах в этом случае происходит на специально привносимых центрах кристаллизации – наночастицах алмаза на поверхности сфер, и, поскольку наночастицы-зародыши всегда случайно ориентированы, синтезируемый алмаз оказывается принципиально нанокристаллическим. Предпочтительным, однако, является создание ФК из монокристаллического алмаза, что позволило бы минимизировать потери из-за поглощения на дефектах и рассеяния на границах зерен.

Концепция изготовления монокристалльного ФК в виде композита алмаз-SiO<sub>2</sub> основана на эпитаксиальном проращивании алмаза методом CVD сквозь поры опалового слоя, уложенного на алмазной подложке, что было продемонстрировано для случая монослоя сфер SiO<sub>2</sub> [7]. В настоящей работе мы сообщаем о первой реализации этого подхода для опаловых пленок толщиной несколько монослоев сфер (порядка 10 слоев), изготовлении “запечатанных” в толще алмаза опаловых структур. Показано, что синтезированные композиты обладают свойствами ФК, демонстрируют брэгговский пик в спектрах отражения.

2. Схема получения композита опал-алмаз показана на рис. 1. Опаловые пленки наносили из водной суспензии монодисперсных сферических частиц SiO<sub>2</sub> диаметром  $245.3 \pm 3.5$  нм на полированные подложки монокристаллов синтетиче-

<sup>1</sup>Институт общей физики имени А.М. Прохорова  
Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup>Российский химико-технологический университет  
имени Д.И. Менделеева, Москва, Россия

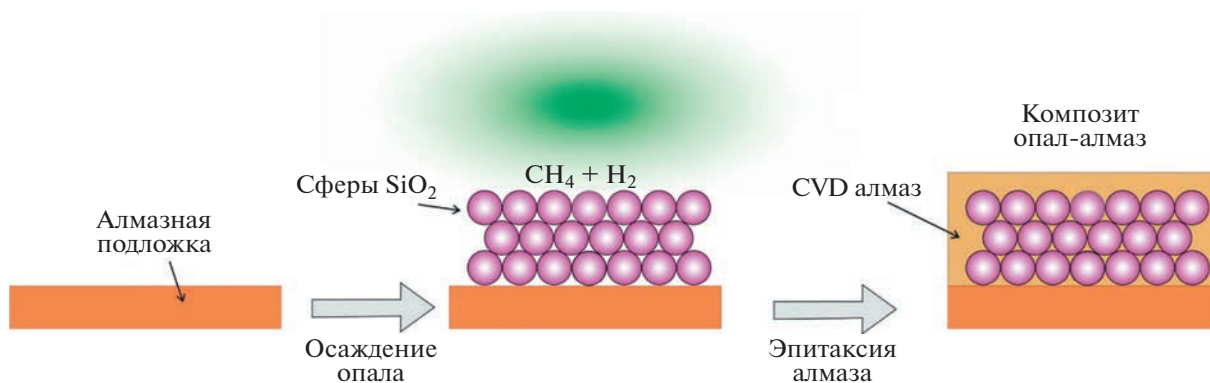
<sup>3</sup>МИРЭА – Российский технологический университет,  
Москва, Россия

<sup>4</sup>Сколковский институт науки и технологий,  
Москва, Россия

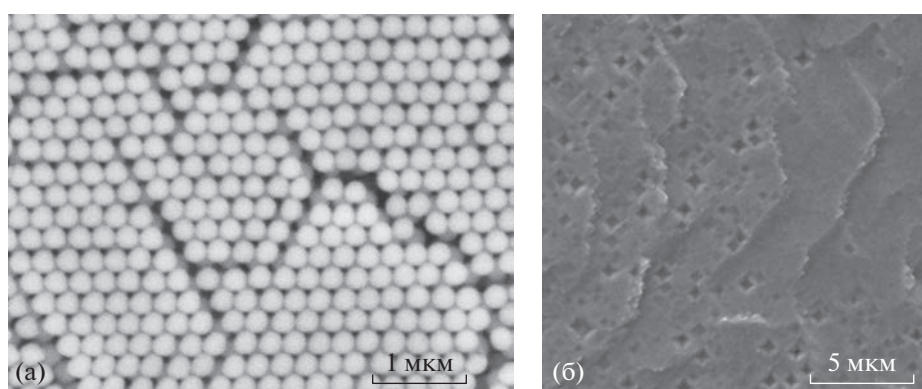
<sup>5</sup>Институт физики твердого тела  
имени Ю.А. Осипьяна Российской академии наук,  
Черноголовка, Московская обл., Россия

\*E-mail: sovyk@nsc.gpi.ru

\*\*E-mail: vg\_ralchenko@mail.ru



**Рис. 1.** Схема получения композита опал-алмаз путем эпитаксии и проращивания алмаза в СВЧ-плазменном реакторе сквозь поры в опаловой пленке на подложке из алмазного монокристалла.



**Рис. 2.** Изображение в растровом электронном микроскопе поверхности опаловой пленки толщиной 4 монослоя сфер SiO<sub>2</sub> до (а) и после (б) осаждения алмаза.

ского алмаза с ориентацией основной грани (100). Сферы SiO<sub>2</sub> приготовлены модифицированным двухстадийным методом Штобера–Финка–Бона при гидролизе тетраэтоксисилана (ТЭОС) [8]. Опаловые слои осаждались за счет капиллярных сил на погруженную в суспензию вертикально расположенную подложку [9], вытягиваемую с постоянной скоростью 0.5 мкм/с. Затем образцы отжигали в течение 3 ч в вакууме при 750°C с целью спекания и образования мостиков между сферами, придавая прочность структуре. Полученный образец с числом монослоев сфер  $N = 4$  продемонстрировал хорошее упорядочение (рис. 2а).

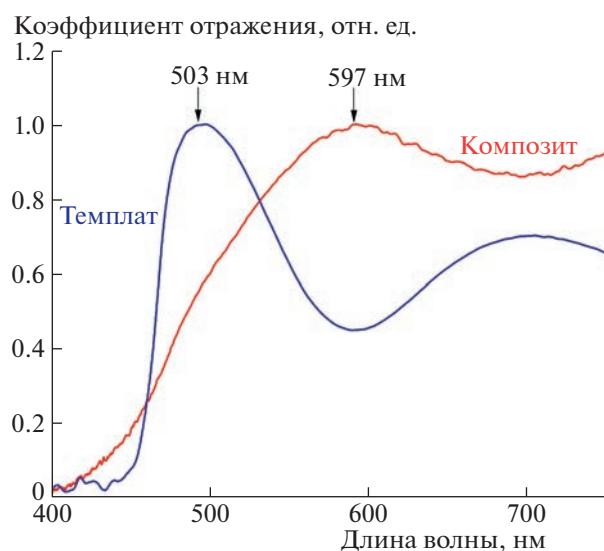
Эпитаксию алмаза проводили в СВЧ-плазмохимическом реакторе ARDIS-300 (ООО “Оптосистемы”) [10] в смеси метан-кислород-водород при условиях: расход CH<sub>4</sub>/O<sub>2</sub>/H<sub>2</sub> = 80/20/900 см<sup>3</sup>/мин, мощность СВЧ излучения 5.1 кВт, давление 140 Торр, измеряемая пирометром SensorTherm M322 температура подложки 930°C, время осаждения 45 мин. Алмазная пленка полностью проросла сквозь поры в опале и полностью покрыла его (рис. 2б). На поверхности алмаза просматри-

ваются террасы, характерные для монокристаллического CVD-алмаза, а также ямки в виде инвертированных пирамид с размером стороны 300–500 нм, соизмеримые с размером одной сферы SiO<sub>2</sub>, которые могут формироваться из-за локального отставания процесса зарастания [7].

3. Спектры отражения образцов до и после осаждения алмаза измеряли при углах падения света  $\theta = 15^\circ$  на спектрометре HR4000 OceanOptics. Найдено, что для исходного опала и выращенного композита сохраняется высокая упорядоченность структуры, дающая для грани (111) брэгговское отражение света на длине волны  $\lambda_{\max(111)}$ , характерное для ФК:

$$\lambda_{\max(111)} = 2d_{111} \cdot \sqrt{\epsilon_{eff} - \sin^2 \theta}, \quad (1)$$

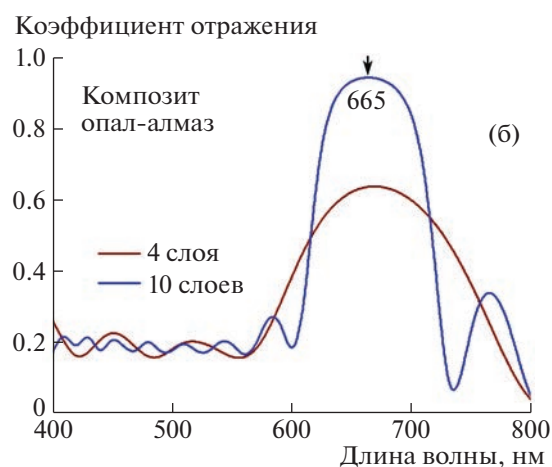
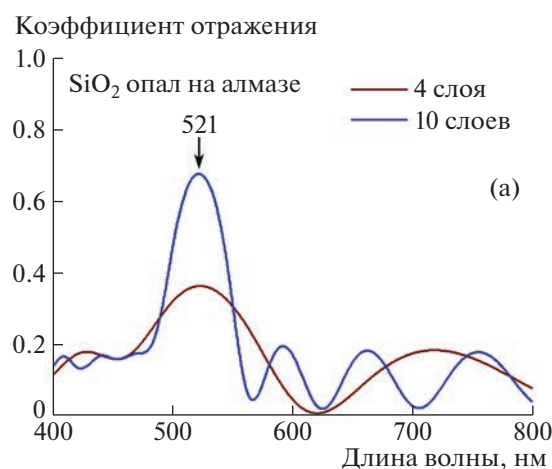
где  $d_{111} = 0.816 D$  – период решетки опала со структурой ГЦК, состоящей из сфер диаметром  $D = 245$  нм,  $\epsilon_{eff}$  – эффективная диэлектрическая проницаемость ФК,  $\epsilon_{eff} = \epsilon_{SiO_2} f + (1 - f) \epsilon_{air}$ ,  $f = 0.74$  – коэффициент заполнения пористой структуры,  $\theta$  – угол падения света ( $0^\circ$  при нормальном падении).



**Рис. 3.** Спектры отражения для исходного темплата опал-на-алмазе и композита опал-алмаз (нормированы на единицу). Брэгговский пик  $\lambda_{\max(111)} = 597$  нм для композита смещен в красную сторону по отношению к темплату вследствие увеличения  $\epsilon_{\text{eff}}$ .

Для исходной опаловой пленки после отжига при  $750^\circ\text{C}$   $n_{\text{SiO}_2} = (\epsilon_{\text{SiO}_2})^{1/2} = 1.396$  и  $\epsilon_{\text{SiO}_2} = 1.95$ ,  $\epsilon_{\text{eff}} = 1.703$  и при  $\theta = 15^\circ$  величина по формуле (1)  $\lambda_{\max}$  составляет 512 нм, что близко к измеренному положению пика отражения на 503 нм (рис. 3). При заполнении алмазом ( $n = 2.40$ ) пор в опале положение брэгговского пика смещается в красную сторону до  $\lambda_{\max} = 597$  нм (рис. 3) вследствие увеличения  $\epsilon_{\text{eff}}$  до 2.296. Однако этот сдвиг не достигает величины  $\lambda_{\max} = 671$  нм, следующей из (1), что мы связываем с контракцией периода опаловой матрицы и уменьшения доли  $(1 - f)$  объема пор при дополнительном спекании в процессе осаждения алмаза.

Моделирование спектров отражения полученных ФК выполнено методом матрицы рассеяния, основанном на Фурье-модальном методе [11]. Структура ФК разбивалась на элементарные плоские слои, периодические в направлениях  $x$  и  $y$  [12]. Одна сфера разбивалась на 30 слоев. Решение уравнений Максвелла в каждом слое производили путем разложения электромагнитных полей на пространственные Фурье-гармоники (всего 169 гармоник). При расчете проводилось усреднение по поляризации падающего излучения. В результате вычислялась матрица рассеяния, которая содержит полную оптическую информацию о структуре. Число монослоев  $N$  для сфер диаметром 245 нм меняли от 1 до 10, с целью проследить приближение спектров отражения к таковым для объемной структуры. Изменение периода опаловой структуры за счет отжига в процессе заполнения пор алмазом не учитывали.



**Рис. 4.** Расчетные спектры отражения для системы опал-на-алмазе (а) и композита алмаз-опал (б) с числом монослоев в сфере  $N = 4$  (коричневая линия) и  $N = 10$  (синяя линия). Диаметр сфер 245 нм, период  $d_{111} = 199.9$  нм.

Расчетные спектры отражения для системы опал-на-алмазе и композита алмаз-опал с числом монослоев сфер  $N = 4$  и  $N = 10$  представлены на рис. 4. Брэгговский пик для опала находится на 521 нм (рис. 4а), что близко к измеренной величине, причем для  $N = 4$  коэффициент отражения  $R$  составляет около 0.35, а для  $N = 10$  возрастает до 0.67. Для композита пик отражения имеет место при 665 нм (рис. 4б), величина отражения возрастает по сравнению с опалом:  $R = 0.67$  для  $N = 4$  и  $R = 0.93$  для  $N = 10$ , т.е. для 10 монослоев сфер композит проявляет свойства объемного ФК.

4. Таким образом, в работе синтезирован композиционный материал с периодической структурой, состоящий из монокристалльного алмаза и погруженного в него опалового слоя сфер  $\text{SiO}_2$ . Композит продемонстрировал свойства фотонного кристалла в видимой области спектра. Наш подход открывает путь к созданию инвертированных опалов из монокристалльного алмаза (путем

химического удаления сфер SiO<sub>2</sub>) для фотоники видимого и ИК-диапазона.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность М.С. Комленку за техническую помощь в приготовлении темплатов на алмазе и Ю.М. Крылову за помощь в подготовке статьи к публикации.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, грант № 21-12-00403.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Evans R.E., Bhaskar M.K., Sukachev D.D., et al.* Photon-mediated interactions between quantum emitters in a diamond nanocavity // *Science*. 2018. V. 362. № 6415. P. 662–665. <https://doi.org/10.1126/science.aau4691>
2. *Kuruma K., Pingault B., Chia C., et al.* Coupling of a single tin-vacancy to a photonic crystal cavity in diamond // *Appl. Phys. Lett.* 2021. V. 118. № 23. P. 230601: 1–6. <https://doi.org/10.1063/5.0051675>
3. *Wan N.H., Mouradian S., and Englund D.* Two-dimensional photonic crystal slab nanocavities on bulk single-crystal diamond // *Appl. Phys. Lett.* 2018. V. 112. № 14. P. 141102: 1–4. <https://doi.org/10.1063/1.5021349>
4. *Zakhidov A.A., Baughman R.H., Iqbal Z., et al.* Carbon structures with three-dimensional periodicity at optical wavelengths // *Science*. 1998. V. 282. № 5390. P. 897–901. <https://doi.org/10.1126/science.282.5390.897>
5. *Ральченко В.Г., Совык Д.Н., Большаков А.П. и др.* Получение прямых и обратных опаловых матриц из алмаза методом осаждения из газовой фазы // *Физика твердого тела*. 2011. Т. 53. № 6. С. 1069–1071. <https://doi.org/10.1134/S106378341106028X>
6. *Kurdyukov D.A., Feoktistov N.A., Nashchekin A.V. et al.* Ordered porous diamond films fabricated by colloidal crystal templating // *Nanotechnology*. 2012. V. 23. № 1. P. 015601:1–8. <https://doi.org/10.1088/0957-4484/23/1/015601>
7. *Dai B., Shu G., Ralchenko V. et al.* 2D inverse periodic opal structures in single crystal diamond with incorporated silicon-vacancy color centers // *Diam. Relat. Mater.* 2017. V. 73. P. 204–209. <https://doi.org/10.1016/j.diamond.2016.09.022>
8. *Масалов В.М., Сухинина Н.С., Емельченко Г.А.* Коллоидные частицы диоксида кремния для формирования опалоподобных структур // *Физика твердого тела*. 2011. Т. 53. № 6. С. 1072–1076. <https://doi.org/10.1134/S1063783411060229>
9. *Lange B., Fleischhaker F., Zentel R.* Functional 3D photonic films from polymer beads // *Physica Status Solidi (a)*. 2007. V. 204. № 11. P. 3618–3635. <https://doi.org/10.1002/pssa.200776401>
10. *Bolshakov A.P., Ralchenko V.G., Shu G., et al.* Single crystal diamond growth by MPCVD at subatmospheric pressures // *Materials Today Communications*. 2020. V. 25. P. 101635: 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2020.101635>
11. *Tikhodeev S.G., Yablonskii A.L., Muljarov E.A., Gippius N.A., Ishihara T.* Quasiguided modes and optical properties of photonic crystal slabs // *Phys. Rev. B*. V. 66. № 4. P. 045102: 1–17. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.66.045102>
12. *Dyakov S.A., Gippius N.A., Voronov M.M., et al.* Quasiguided modes of opaline photonic crystals covered by Ge<sub>2</sub>Sb<sub>2</sub>Te<sub>5</sub> // *Phys. Rev. B*. 2017. V. 96. P. 045426: 1–7. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.96.045426>

## SYNTHESIS OF COMPOSITES DIAMOND-SiO<sub>2</sub> WITH PHOTON CRYSTAL PROPERTIES IN THE VISIBLE

**D. N. Sovyk<sup>a</sup>, K. A. Odintsov<sup>b,c</sup>, A. P. Bolshakov<sup>a</sup>, S. A. Dyakov<sup>c</sup>, S. S. Savin<sup>a,d</sup>, I. A. Fedorova<sup>a</sup>, V. Yu. Yurov<sup>a</sup>, V. M. Masalov<sup>a,e</sup>, V. G. Ralchenko<sup>a</sup>, and Academician of the RAS V. I. Konov<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Prokhorov General Physics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

<sup>b</sup>*Mendeleev University of Chemical Technology, Moscow, Russia*

<sup>c</sup>*Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russia*

<sup>d</sup>*MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia*

<sup>e</sup>*Osypan Institute of Solid State Physics of the Russian Academy of Sciences, Chernogolovka, Moscow Region, Russia*

We report on synthesis of periodical structures by chemical vapor deposition in form of a composite “single crystal diamond – SiO<sub>2</sub> nanospheres” which shows photon crystal properties in the visible.

**Keywords:** photonic crystal, diamond, opal, chemical vapor deposition, composite structure, optical reflection spectrum



УДК 69:614.8

## КРИТИКА “ТЕОРИИ ЗАЖИГАНИЯ НАКАЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ” Я.Б. ЗЕЛЬДОВИЧА. САМОВОСПЛАМЕНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОГО ГОРЮЧЕГО НАКАЛЕННЫМИ ТЕЛАМИ

© 2023 г. А. А. Филиппов<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН А.А. Берлиным 27.05.2022 г.

Поступило 27.05.2022 г.

После доработки 07.06.2022 г.

Принято к публикации 10.02.2023 г.

Основные принципы теплового взрыва были изучены и опубликованы к 1980 г. Казалось, что исследования завершены, но позднее было обнаружено, что условие “зажигания” Я.Б. Зельдовича не коррелирует с данными эксперимента. “Теория зажигания накаленной поверхностью” лежит в основе теории зажигания, и хотя вычисления проведены верно, полученные результаты ошибочно отнесены к зажиганию, но в реальности они описывают самовоспламенение бесконечного горючего. В нашей работе показано, что тепловой взрыв горючего от накаленного тела может развиваться как зажигание и как самовоспламенение. Даны условия самовоспламенения бесконечного горючего плоской поверхностью и цилиндром, а также вероятное условие зажигания горючего между параллельными стенками разной температуры.

*Ключевые слова:* тепловой взрыв, теория и критические условия самовоспламенения и зажигания

**DOI:** 10.31857/S2686740023050048, **EDN:** OVVYRS

В теории теплового взрыва рассматривают самовоспламенение горючего в замкнутом объеме и его зажигание от внешнего накаленного источника тепла. Впервые самовоспламенение изучал Н.Н. Семенов [1] и Д.А. Франк-Каменецкий [2], а зажигание – Я.Б. Зельдович [3]. Теория теплового взрыва была изложена в книгах [4, 5], и, казалось, что фундаментальные исследования завершены к 1980 г. Но в 1984 г. А.А. Филиппов обнаружил [6], что при зажигании горючего газа накаленными цилиндрами данные эксперимента [11] не коррелируют с условием зажигания (8), обнаруженным в работе [3], но ложатся на одну прямую, используя условие (20), полученное в работах [6–9]. В работе [9], решая стационарное уравнение теплопроводности при малых потоках тепла от накаленной поверхности, было получено условие (8), которое по ряду косвенных признаков было отнесено к самовоспламенению бесконечного горючего, но точное доказательство представлено в этой работе.

Рассмотрим тепловой взрыв бесконечного горючего от горячего плоского полупространства,

цилиндра и сферы, при различных граничных условиях у накаленной поверхности и вдали от нее, при отсутствии конвекции и выгорания.

### 1. ПЛОСКАЯ СИММЕТРИЯ

Стационарное уравнение теплопроводности, при наличии теплового потока ( $q$ ) у поверхности стенки, имеет вид [2–10]:

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = -Qk \exp(-E/RT), \quad (1)$$

$$T|_{r=0} = T_s, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = q, \quad (2)$$

где  $Q$ ,  $k$ ,  $E$  – теплота, предэкспоненциальный множитель и энергия активации химической реакции,  $r$  – расстояние от поверхности,  $\lambda$  – теплопроводность горючего.

Сделаем замену переменных [4–10]:

$$\theta = (T - T_s)E/RT_s^2, \quad \xi = r/\ell, \quad (3)$$

где

$$\ell = \left[ \exp\left(\frac{E}{RT_s}\right) \cdot 2\lambda RT_s^2 / kQE \right]^{1/2}$$

есть характерный размер.

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр химической физики им. Н.Н. Семенова Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: 7987961@mail.ru

В безразмерном виде система уравнений (1), (2) примет вид

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = -2 \exp \theta, \quad (4)$$

$$\theta|_{\xi=\xi_s} = 0, \quad -\frac{\partial \theta}{\partial \xi}|_{\xi_s} = M. \quad (5)$$

Решая систему уравнений (4), (5), согласно [5, 9] получим

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 2 \operatorname{ch} C \operatorname{th}(C - \xi \operatorname{ch} C), \quad (6)$$

где  $C = \operatorname{arsh}(M/2)$  – константа интегрирования.

Выражение (6), согласно [9], примет вид

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \xi}|_{\xi=\infty} \approx M(1 + 4/M^2)^{0.5}. \quad (7)$$

### 1.1. Самовоспламенение бесконечного горючего

Из выражения (7) при  $M \ll 1$  для градиента температуры у накаленной поверхности и на бесконечном удалении от нее в работе [9] было получено

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi}|_{\xi_s=0} \approx 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi}|_{\xi_s=\infty} \approx -2. \quad (8)$$

Это условие можно получить при самовоспламенении горючего между двумя параллельными плоскостями одной температуры, используя решения работы [10], где начало координат отсчитывали от центра сосуда, по нормали к плоскостям. Была введена переменная  $z = \frac{\partial \theta}{\partial \xi}$ , и уравнение (4) приняло вид

$$z \frac{\partial z}{\partial \xi} = -2 \exp \theta. \quad (9)$$

Полагая, что при  $\xi = 0$ ,  $\theta = 0$  и  $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0$ , из уравнения (9) получили

$$\theta = -2 \ln \operatorname{ch} \xi. \quad (10)$$

Далее следуют наши вычисления: из уравнения (10) найдем  $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = -2 \operatorname{th} \xi$ . При  $\xi \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{th} \xi \rightarrow 1$ , а  $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \rightarrow -2$ . То есть решения, полученные при изучении самовоспламенения [10] и обнаруженное Я.Б. Зельдовичем в работе [3], совпадают. Итак, доказано: выражение (8) является условием самовоспламенения бесконечного горючего накаленной плоской поверхностью.

Решения уравнения теплопроводности одинаковы при самовоспламенении и зажигании горю-

чего, а для определения момента теплового взрыва и его вида требуется дополнительное условие, которое находят, анализируя особенности вышеупомянутых решений (предельный поток тепла, точка перегиба и другие). Понимая это, Я.Б. Зельдович в работе [3] использовал решения работы [2] по самовоспламенению горючего между параллельными стенками одной температуры и хотел “прийти к зажиганию... при разных температурах стенок”. То есть он ошибочно полагал, что изучает профили температуры “зажигания” и, обнаружив “предельный” поток тепла, отнес его к зажиганию, не придав значение тому, что в момент зажигания, согласно условию (8), накаленная поверхность не греет и поэтому не может зажигать горючее. Что возможно, если накаленное тело велико, имеет бесконечную теплопроводность и в нем отсутствуют источники тепла. Если же накаленное тело имеет источник тепла, как в работе [11], то выполнение условия (8) невозможно из-за нарушения закона сохранения энергии.

Отметим, что Я.Б. Зельдович писал статью [3], когда не были известны результаты работ [7–11] и не использовались идеи теории катастроф [12]. Но, несмотря на очевидную ошибку и другие вышеприведенные противоречия, работа [3] долгие годы лежала в основе теории зажигания и препятствовала изучению ряда задач теплового взрыва: зажигание горючего накаленным телом было решено в работах [6–9], а решения других задач представлены в этом сообщении.

### 1.2. Зажигание в плоском сосуде

При  $M \gg 1$  из выражения (7) следует, что градиент температуры  $\frac{\partial T}{\partial r}$  слабо падает при удалении от поверхности и почти линеен при малом тепловыделении химической реакции:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -(T_q - T_s)/L.$$

Если  $L$  и  $T_s$  переменны, найдем  $\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} = -2(T_q - T_s)/L^2$ , выражение (1) примет вид

$$\lambda(T_s - T_q)^2/L \approx Qk \exp(-E/RT_s). \quad (11)$$

Это выражение верно, когда параметры горючей системы далеки от предельных значений, так как тепловыделение химической реакции мало. Если тепловыделение незначительно и один из параметров горючей системы достигает предельной величины, то, вероятно, и в этом случае условие (11) будет справедливо. Итак, условие (11) с большой вероятностью является условием зажигания горючего в плоском сосуде с разными температурами стенок  $T_q$  и  $T_s$ .

Заметим, что исходя из “теории размерности” трудно найти другое условие зажигания, связывающее все параметры горючей системы (ширину сосуда, температуру стенок, теплопроводность горючего и кинетику химической реакции) в одно простое уравнение. Заметим, что вывод условия (11) не вытекает из особенностей профиля температуры в горючем в момент зажигания, поэтому необходима экспериментальная проверка его справедливости.

## 2. ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

Стационарное уравнение теплопроводности в безразмерных (3), цилиндрических координатах имеет вид [5–9]:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = -2 \exp \theta, \quad (12)$$

$$\theta|_{\xi=\xi_s} = 0, \quad -\frac{\partial \theta}{\partial \xi}|_{\xi_s} = M, \quad (13)$$

где  $\xi_s = r_s/\ell$ ,  $r_s$  – радиус цилиндра.

Сделаем замену переменных [5, 9]:

$$\begin{aligned} v &= \theta + 2 \ln \xi/\xi_s, \\ \eta &= \xi_s \ln \xi/\xi_s. \end{aligned} \quad (14)$$

В новых переменных (14) система уравнений (12), (13) примет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + 2 \exp v = 0, \quad (15)$$

$$v|_{\eta=0} = 0, \quad -\frac{\partial v}{\partial \eta}|_{\eta=0} = M + 2/\xi_s = P. \quad (16)$$

Решение системы уравнений (15), (16) имеет вид [10]

$$-\frac{\partial v}{\partial \eta}|_{\eta=\infty} = P(1 + 4/P^2)^{0.5}. \quad (17)$$

### 2.1. Самовоспламенение горючего от накаливаемого цилиндра

При  $P \ll 1$  из выражения (17) у поверхности и на бесконечном удалении от нее получим

$$\frac{\partial v}{\partial \eta}|_{\eta=0} = 0, \quad -\frac{\partial v}{\partial \eta}|_{\eta=\infty} = 2. \quad (18)$$

Используя уравнения (14), получим выражение (18) в координатах (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \xi}|_{\xi_s=0} &= 2\ell/r_s, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \xi}|_{\xi_s=\infty} &= 2\ell/r_s - 2. \end{aligned} \quad (19)$$

Выражение (19) является условием самовоспламенения бесконечного горючего накаливаемым цилиндром.

В трехмерном неограниченном теле при отсутствии конвекции не может существовать любой, отличный от нуля, стационарный поток тепла при реальных температурах. Поэтому условия (8), (19), полученные с помощью разложения (3) Д.А. Франк-Каменецкого, применимы только около накаливаемой поверхности, когда температура падает не более 10–20% от температуры поверхности.

### 2.2. Зажигание горючего газа накаливаемым цилиндром

В работах [6–9] разными способами при большом градиенте температуры  $P \gg 1$  получено условие зажигания, укладывающее данные эксперимента [11] на одну прямую:

$$2b(\varphi) \frac{\lambda \text{Nu}}{d^2} (T_s - T_0) = Qk \exp\left(-\frac{E}{RT_s}\right), \quad (20)$$

где Nu – критерий Нуссельта,  $T_0$  – температура потока горючей смеси,  $d$  – диаметр цилиндра,  $b(\varphi)$  – безразмерный коэффициент, приблизительно равный 0.5.

## 3. СФЕРИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ

Уравнение теплопроводности в сферических координатах не преобразуется в уравнение в линейных координатах заменой переменных [6]. Поэтому нельзя получить условие самовоспламенения, аналогичное (8), (19), но условие зажигания горючего накаливаемым шаром было получено и представлено в работах [7–9].

При изучении самовоспламенения в плоскопараллельном сосуде [10] обнаружено равенство потока тепла в горючем при удалении от центра сосуда и “критического потока” тепла от накаливаемой поверхности – “условие зажигания” Я.Б. Зельдовича [3]. Таким образом, доказано: условие (8) является условием самовоспламенения, что подтверждается решениями (1)–(8). Также доказано, что условие (8), полученное в работе [9], относится к самовоспламенению.

Тепловой взрыв бесконечного горючего от накаливаемой плоскости или цилиндра может протекать в режиме самовоспламенения или зажигания. Получены условия самовоспламенения бесконечного горючего накаливаемой плоскостью (8)

и цилиндром (19). Если параметры химической реакции одинаковы в обоих случаях, то самовоспламенение произойдет позже, так как оно идет при более сильном изменении профиля температуры у поверхности, что требует большей температуры поверхности  $T_s$ . Это подтверждается корреляцией данных эксперимента [11] с условием зажигания (20), а не самовоспламенения (19). Также предложено вероятное условие зажигания горючего между параллельными стенками разной температуры (11).

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит научного руководителя ИХФ РАН академика РАН Александра Александровича Берлина за важные замечания.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Семенов Н.Н. Цепные реакции. Л.: ОНТИ, 1934. С. 110.
2. Франк-Каменецкий Д.А. // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18. С. 411.
3. Зельдович Я.Б. Теория зажигания накаленной поверхностью // ЖЭТФ. 1939. Т. 9. № 12. С. 1530–1534.
4. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. 2-е изд. М.: Наука, 1967.
5. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
6. Филиппов А.А. К вопросу поджигания полимерных материалов накаленными телами. Межвузовский сборник научных трудов по химии и технологии элементоорганических полупродуктов и полимеров. Волгоград, 1984.
7. Philippov A.A., Khalturinskiy N.A. To the theory of ignition by a hot surface: critical conditions for occurrence of explosive and avalanche-like processes / Zeldovic memorial. 2015. V. 2.
8. Филиппов А.А., Берлин А.А. К теории зажигания накаленной поверхностью // Горение и взрыв. 2021. Т. 14. № 2.
9. Филиппов А.А., Берлин А.А. Математическая теория зажигания накаленной поверхностью // Доклады РАН. Физика. Технические науки. 2022. Т. 503. № 1. С. 28–34.
10. Баренблатт Г.И. Параграф 15 в статье И.М. Гельфанда. Задачи теории квазилинейных уравнений // УМН. 1959. Т. 154. № 4. С. 787–790.
11. Кумагаи С. Горение. М.: ИЛ, 1979.
12. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990.

## CRITICISM OF THE “THEORY OF INCANDESCENT SURFACE IGNITION” BY Ya.B. ZELDOVICH. SELF-IGNITION OF INFINITE FUEL BY INCANDESCENT BODIES

A. A. Philippov<sup>a</sup>

<sup>a</sup>N.N. Semenov Federal Research Center for Chemical Physics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS A.A. Berlin

The basic principles of thermal explosion were studied and outlined by 1980. It seemed that fundamental research had been completed, but in 1984 A.A. Philippov discovered that the “ignition” condition obtained by Ya.B. Zeldovich did not correlate with the data of the experiment on ignition of a gas mixture by incandescent cylinders. Since Zeldovich’s “Theory of Incandescent surface ignition” has long been the basis of the ignition theory, its analysis was carried out and an error was found. It is proved that the above-mentioned work is not related to ignition, but to the self-ignition of infinite fuel. It is shown that a thermal explosion of fuel from an incandescent body can develop not only as ignition, but also as self-ignition. The conditions of self-ignition of infinite fuel by a flat surface and a cylinder are given, as well as the probable condition of ignition of fuel between parallel walls of different temperatures.

*Keywords:* thermal explosion, theory and critical conditions of self-ignition and ignition

УДК 573.876.4

## ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА И ОПТИМИЗАЦИИ ГОЛОГРАММНОЙ МАСКИ

© 2023 г. В. В. Черник<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН Ф.Л. Черноусько 03.04.2023 г.

Поступило 18.04.2023 г.

После доработки 18.04.2023 г.

Принято к публикации 07.05.2023 г.

Описаны эффективные алгоритмы синтеза голографических масок на основе БПФ со сложностью  $O(M \ln N)$ , где  $N$  – количество элементов изображаемого объекта. Разработан и внедрен масштабируемый программный комплекс, позволяющий синтезировать голограммные маски для различных приложений литографии, включая производство МЭМС, МОЕМС и микросхем высокого класса. Предложены решения проблем оптимизации качества голографических изображений и повышения дифракционной эффективности.

*Ключевые слова:* дифракция, компьютерно-синтезированные голограммы, оптимизация, фотолитография

**DOI:** 10.31857/S2686740023050036, **EDN:** OWHLPJ

Проекционная фотолитография сегодня является основным инструментом производства микроэлектронных изделий. Постоянное повышение требований к разрешению сделало технологический процесс фотолитографии очень чувствительным к внешним возмущениям и увеличило стоимость изготовления проекционной маски. По мере приближения к оптическому пределу разрешения дифракционные эффекты все интенсивнее негативно влияют на качество проекционного изображения. Это связано с тем, что исторически технология проекционной фотолитографии развивалась на основе принципов геометрической оптики. Методы повышения разрешающей способности (resolution enhancement techniques, RET), такие как OPC, PSM, SMO, по существу являются методами борьбы с дифракционными эффектами. Они значительно увеличивают стоимость маски и усложняют процесс изготовления [1–3]. Моделирование и проектирование RET стали весьма затратными теоретическими и, что даже более важно, инженерными задачами, направленными на борьбу с проявлениями волновой природы света (рассеяние, эффекты близости, явление Гиббса). Стоимость проекционных масок и соответствующего оптического оборудования непропорционально увеличивается по ме-

ре миниатюризации микроэлектронных элементов.

В последние годы интенсивно исследуется голографический подход к получению изображений с высоким разрешением. Группа авторов развивают технологию субволновой голографической литографии (СВГЛ) [1–3]. Эта технология отвечает нескольким вызовам, возникшим в индустрии микроэлектроники за последние десятилетия. Основная идея состоит в том, чтобы использовать волновые свойства света с помощью голографических методов, а не подавлять их. Многие инженерные задачи при этом перемещаются в область моделирования и численных расчетов. Были разработаны эффективные алгоритмы компьютерного синтеза голографических масок на основе БПФ со сложностью  $O(M \ln N)$ , где  $N$  – количество элементов изображения, что позволило синтезировать голографические маски для фотолитографии слоев современных микроэлектронных устройств.

Голограммная маска – это физическая реализация функции амплитудной, фазовой или амплитудно-фазовой модуляции световой волны. Эта функция может быть получена как интенсивность интерференционной картины опорных и объектных волн, в соответствии с классический принципом, предложенным Д. Габором. Согласно этому принципу, объект освещается некоторым световым пучком, образуя объектную волну (рис. 1а). В то же время опорный световой пучок, взаимно когерентный с объектным, образует

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского  
Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: gungho424@gmail.com

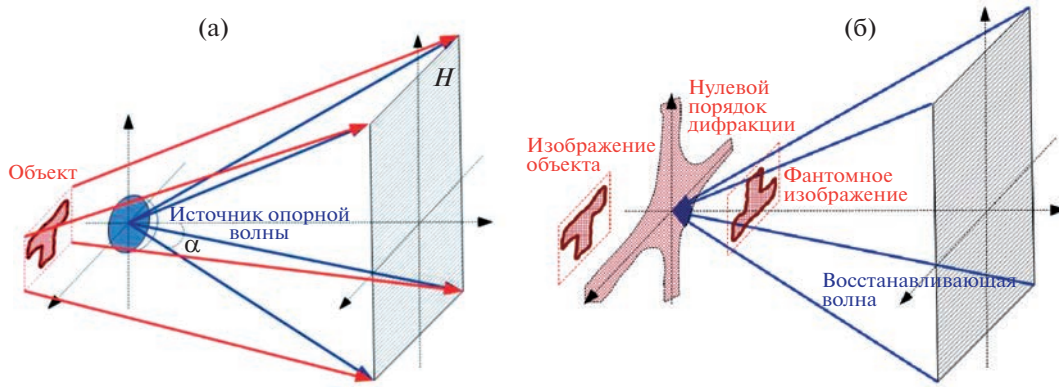


Рис. 1. Голографический подход к получению изображения объекта.

опорную волну [4, 5]. Результат интерференции этих волн записывается на плоскости  $H$ . Полученную интерференционную картину можно понимать как функцию амплитудной модуляции  $T : H \rightarrow [0;1]$ . Если на место плоскости  $H$  установить дифракционный элемент, реализующий полученную функцию амплитудной модуляции для восстанавливающей волны, которая является обратной к опорной волне, то на месте объекта будет восстановлено поле, повторяющее поле объектной волны, т.е. голографическое изображение объекта (рис. 1б). Простейшая конструкция голографической маски представляет собой непрозрачный экран с отверстиями, где функция амплитудной модуляции аппроксимируется плотностью и размером отверстий. Такая конструкция, однако, обладает рядом недостатков, главным из которых является наличие высокоинтенсивного нулевого порядка дифракции. Опишем некоторые типы конструкций голограммных масок и укажем на их особенности и преимущества.

Пусть  $O : H \rightarrow \mathbb{C}$  – комплексная амплитуда опорной волны на плоскости голограммы,  $\Pi : H \rightarrow \mathbb{C}$  – комплексная амплитуда объектной волны. Тогда рассмотрим функцию

$$T = \frac{|O + \Pi|^2}{|O|^2}, \quad (1)$$

принимающую действительные неотрицательные значения на области голограммы  $H$  как функцию амплитудной модуляции. Применяв ее к обратной волне  $O^*$ , получим

$$TO^* = \frac{(|O|^2 + |\Pi|^2)O^*}{|O|^2} + \frac{\Pi O^{*2}}{|O|^2} + \Pi^*. \quad (2)$$

Результирующее поле раскладывается в три компоненты:

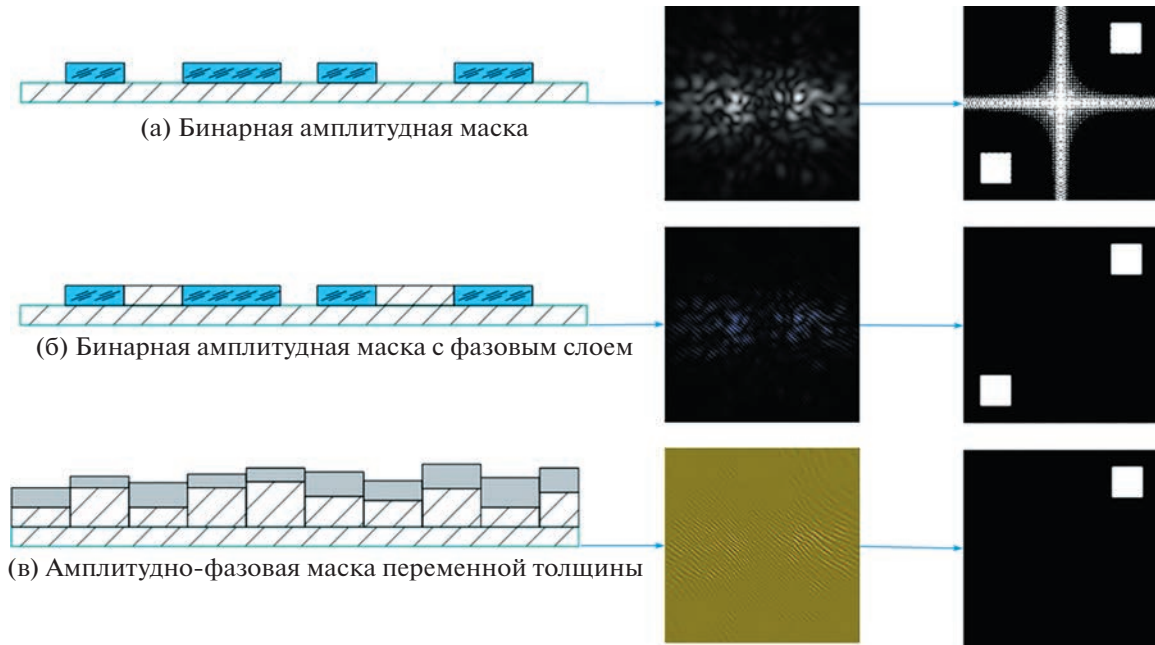
1)  $\Pi^*$  – поле обращенной объектной волны, которая создает изображение объекта;

2)  $\frac{\Pi O^{*2}}{|O|^2}$  – поле искаженной волны, псевдосимметричной объектной волне относительно оптической оси, создающей искаженное изображение объекта (фантомное изображение);

3)  $\frac{(|O|^2 + |\Pi|^2)O^*}{|O|^2}$  – нулевой порядок дифракции, фокусирующийся в окрестности фокуса в случае расходящейся опорной волны, либо создающей фоновый шум в случае плоской опорной волны.

Отметим, что для физической реализации голограммной маски потребуются ввести также нормировочный коэффициент  $M$  такой, что  $\frac{T}{M} : H \rightarrow [0;1]$ .

Нулевой порядок дифракции концентрирует существенную часть энергии восстанавливающей волны, что негативно влияет на дифракционную эффективность схемы. Также излучение нулевого порядка, рассеянное элементами оптической схемы, является существенным источником шума, который вследствие когерентности используемого излучения обнаруживает себя в виде фазового спекл-шума, разрушающего качество изображения [5]. Чтобы уменьшить степень влияния нулевого порядка дифракции на изображение, используются оптические схемы со сходящимся восстанавливающим пучком, в которых нулевой порядок фокусируется и полезное изображение возможно разделить в пространстве с основным потоком компоненты нулевого порядка. Преимуществом такой голограммы является простота изготовления ее физической реализации в виде бинарной амплитудной маски, в которой амплитудная модуляция реализуется с помощью отверстий



**Рис. 2.** Три типа конструкции голограммной маски. Соответствующая дифракционная картина при восстановлении: а – с помощью амплитудной маски состоит из нулевого порядка дифракции, изображения объекта и фантомного изображения; б – с помощью амплитудной маски с фазовым слоем состоит из изображения объекта и фантомного изображения; в – в случае амплитудно-фазовой маски это только изображение объекта.

переменной величины в непрозрачном экране (рис. 2а). Размер отверстий выбирается таким образом, чтобы локально в данной области реализовать требуемую амплитудную модуляцию.

Обратим внимание на то, что компонента функции  $T$ , отвечающая за нулевой порядок дифракции, является действительно-значной функцией. Рассмотрим следующую функцию модуляции:

$$T_1 = \frac{|O + \Pi|^2 - (|O|^2 + |\Pi|^2)}{M_1 |O|^2} = \frac{O^* \Pi + O \Pi^*}{M_1 |O|^2}. \quad (3)$$

Здесь  $T_1$  принимает действительные значения, а нормировочный коэффициент  $M_1$  выбран таким образом, чтобы  $T_1 : H \rightarrow [-1; 1]$ . Применяя такую функцию модуляции к  $O^*$  аналогично (2), получим

$$T_1 O^* = \frac{\Pi O^{*2}}{|O|^2} + \Pi^*,$$

т.е. восстанавливающая волна под действием такой функции модуляции будет иметь только две компоненты, соответствующие изображению объекта и фантомному изображению. Для физической реализации требуется накладывать дополнительный фазовый слой, поворачивающий фазу волны на  $180^\circ$  на элементах маски, соответствующих отрицательным значениям функции модуля-

ции (рис. 2б). Существенным минусом также является сдвиг среднего уровня пропускания маски к нулю. То есть если среднее значение функции  $T$  после нормировки равно 0.5, то среднее значение функции  $T_1$  оказывается нулевым, причем большая часть маски оказывается темной. Маски такого типа обладают серьезным преимуществом за счет практически полного отсутствия нулевого порядка дифракции. Дифракционная эффективность такой маски существенно выше амплитудной (до 4 раз). Качество изображения также заметно повышается за счет лучшего соотношения сигнал–шум. Однако даже с учетом дополнительных процедур просветления для изготовления такой маски требуется большое количество элементов малого размера в диапазоне  $(0; 0.25\lambda]$ , где  $\lambda$  – длина волны опорного и восстанавливающего излучения [3]. Это сказывается не только на стоимости маски, но и на устойчивости к ошибкам моделирования и дефектам изготовления таких элементов. Для достоверного моделирования прохождения света через такие отверстия требуется точная модель дифракции.

Также возможно рассматривать и функцию модуляции  $T_2$ , в которой присутствует только компонента, отвечающая за изображение объекта, т.е. комплексно-значную функцию модуляции

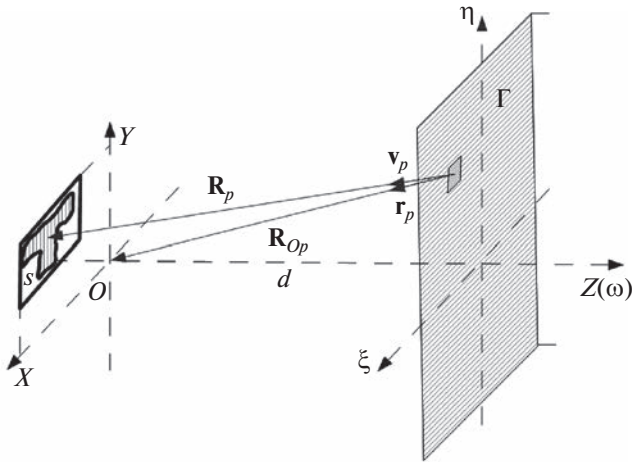


Рис. 3. Схема голографического подхода к получению изображений.

$$T_2 = \frac{OP^*}{M_2 |O|^2}. \quad (4)$$

Для физической реализации такой функции на голограммной маске требуются амплитудный и фазовый слои переменной толщины (рис. 2в). Также необходима строгая модель дифракции для моделирования прохождения световой волны через слоистую среду с переменным показателем преломления.

Рассмотрим вопрос качества создаваемого изображения. Основными объектами описанных выше методов восстановления голографического изображения, основанных на принципе Д. Габо-ра, являются опорная волна  $O$ , объектная или предметная волна  $\Pi$  и голограмма, математическим представлением которой является функция модуляции  $T$ ,  $T_1$  или  $T_2$  в зависимости от предполагаемой структуры маски. Будем далее обозначать функцию модуляции буквой  $T$ , подразуме-вая один из вариантов. Введем оператор  $D$ , кото-рый функции модуляции  $T$  ставит в соответствие восстановленное голографическое изображение  $I$ , т.е.  $I = D(T)$ . Дефекты изображения обычно про-являются в виде неравномерной яркости разных элементов, колебаний яркости в пределах одного элемента, а также в виде недостаточно высокого контраста, что в результате экспонирования мас-ки из фоточувствительного материала при произ-водстве микроразрешенных компонентов может приводить к неровности краев элементов (LER, LWR [6]) отпечатков в слое фоторезиста. Степень дефектности голографического изображения  $I$  можно выразить через отличие от некоторого идеального изображения  $A$  по некоторой метрике  $\sigma$ , в которой могут быть отражены различные аспекты качества от равномерности интенсивности

засветки по всему полю изображения до локаль-ных дефектов итогового отпечатка в фоторезисте. Назовем эту метрику функционалом качества. Задачей оптимизации является минимизация этих отличий и дефектов изображения. Рассмотрим постановку задачи оптимизации качества изображения за счет вариаций функции модуля-ции  $T$ , т.е.

$$\sigma(A, D(T)) \rightarrow \min. \quad (5)$$

Для решения такой задачи численными мето-дами разобьем голограмму прямоугольной сеткой на ячейки малого размера и представим функцию модуляции в виде  $T(\xi, \eta) = \sum_p \alpha_p \psi_p(\xi, \eta)$  (рис. 3).

Здесь  $\alpha_p$  – усредненный коэффициент модуля-ции  $p$ -й ячейки,  $\psi_p(\xi, \eta)$  – функция-индикатор  $p$ -й ячейки, равная нулю вне ячейки и единице внутри,  $(\xi, \eta)$  – координаты на плоскости голо-граммы.

Оператор  $D$ , опираясь на подход Френеля–Кирхгофа, можно представить в виде интеграла

$$D(T) = \iint_{\Gamma} K(x - \xi, y - \eta, d) O(\xi, \eta) T(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_p \alpha_p D_p(x, y), \quad (6)$$

где  $O(\xi, \eta)$  – комплексная амплитуда поля восста-навливающей волны на плоскости голограммы,

$$K(x - \xi, y - \eta, d) = \frac{de^{-ikR_p}}{R_p^2}, k = \frac{2\pi}{\lambda}, \mathbf{R}_p = (x - \xi, y - \eta, d),$$

$\Gamma$  – область голограммы. С учетом представления функции модуляции  $T(\xi, \eta)$  в виде линейной ком-бинации характеристических функций ячейки данный интеграл распадается в соответствующую линейную комбинацию интегралов по ячейкам, каждый из которых с помощью приближения дальней зоны [7] и в предположении о сфери-ческой восстанавливающей волне можно предста-вить как

$$D_p(x, y) \approx \frac{2ik \exp(ik(R_p + R_{Op}))}{\pi R_p^2} \times \frac{\sin(k(r_{p1} + v_{p1})\Delta) \sin(k(r_{p2} + v_{p2})\Delta)}{k(r_{p1} + v_{p1}) k(r_{p2} + v_{p2})},$$

где  $\Delta$  – шаг сетки на голограмме,  $(v_{p1}, v_{p2})$  и  $(r_{p1}, r_{p2})$  – координаты единичных направляющих векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{r}$  по осям  $X$  и  $Y$ , начало координат си-стемы  $OXY$  – фокус восстанавливающей сфери-ческой волны.

Введем также сетку на плоскости изображе-ния. Тогда интенсивность идеального изображе-ния объекта  $A$  можно представить как набор зна-чений  $\{a_q \in [0; 1], q = 1, \dots, N\}$  в узлах данной сетки.



Назовем число  $N$  узлов сетки на изображении, достаточное для того, чтобы передать информацию об изображаемом объекте при дискретизации, сложностью объекта. Тогда задачу в дискретном виде можно представить в следующем виде:

$$\sigma = \sum_q (b_q b_q^* - c a_q)^2 \xrightarrow{\{\alpha_p\}, c} \min, \quad (7)$$

$$b_q = \sum_p K_D(p, q) \alpha_p.$$

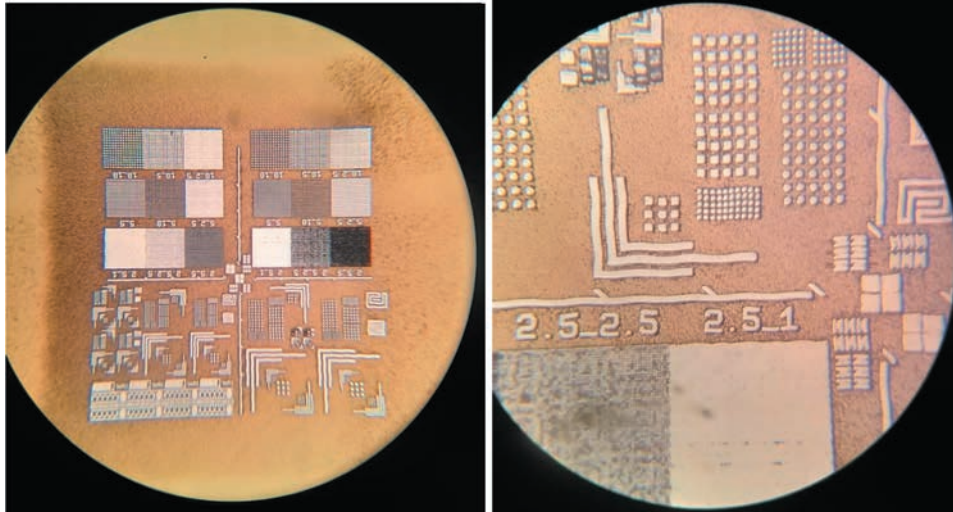
Здесь в роли функционала качества выбрано отклонение интенсивности восстановленного изображения от идеального распределения интенсивности по  $l_2$ -норме в узлах вычислительной сетки, коэффициент  $c$  имеет смысл нормировочного коэффициента, отвечающего за то, что восстановленное изображение должно быть близко к идеальному по форме. Коэффициент  $c$  подлежит вариации в процессе оптимизации. Матрица  $K_D(p, q)$  является матрицей локальных откликов системы, т.е.  $K_D(p, q) = D_p(x_q, y_q)$ , где  $(x_q, y_q)$  – координаты соответствующего узла на плоскости изображения. Данная матрица имеет размерность  $N \times M$ , где  $N$  – сложность изображаемого объекта, а  $M$  – количество ячеек на голограмме, причем она не является разреженной, т.е. величины ее элементов равномерно распределены по всей матрице. Сложность голограммной маски соответствует сложности изображения, поэтому асимптотически вычислительная сложность такой задачи  $O(N^2)$ . Алгоритм оптимизации для данной постановки задачи был реализован [8] методом градиентного спуска, причем голограмма Габора (1) была использована в качестве первого приближения. Было показано, что качество изображения, восстановленное с помощью компьютерно-синтезированной голограммы, возможно существенно улучшить. В результате 10 итераций метода градиентного спуска  $l_2$ -норма отклонения интенсивности некоторых изображений от идеального была улучшена более чем в два раза по сравнению с первым приближением. Однако в связи с квадратичной зависимостью вычислительной сложности задачи оптимизации от сложности изображаемого объекта в постановке (7) такой метод оптимизации возможно реализовать только для малых объектов. Реальные объекты, фотолитография которых представляет промышленный интерес, являются слоями микронных компонентов и могут иметь сложность  $\sim 10^{12}$  и более.

Введем понятие виртуального объекта  $V: S \rightarrow \Omega$ ,  $S$  – область, в которой определен объект (рис. 3),  $\Omega$  – круг единичного радиуса на комплексной плоскости. Также введем оператор  $G$ , который каждому виртуальному объекту  $V$  ставит в соответствие функцию модуляции  $T$  голограммной

маски, полученной одним из описанных выше способов, т.е.  $T = G(V)$ . Фактически оператор  $G$  является композицией нелокального оператора типа (6), ставящего в соответствие каждому виртуальному объекту с подсветкой  $V$  распределение комплексной амплитуды предметной волны на области голограммы, и одного из трех операторов (1), (3) или (4), ставящего в соответствие каждой предметной волне некоторую функцию модуляции голограммной маски. Оператор  $T$  так же, как и оператор  $D$ , введенный ранее и каждой функции модуляции  $T$  ставящий в соответствие восстановленное голографическое изображение, имеет нелокальный характер. То есть каждый элемент виртуального объекта вносит вклад в определение функции модуляции  $T$  в каждой точке голограммы. Рассмотрим композицию операторов  $H(V) = D(G(V))$ . Интегральное представление оператора  $H$  будет иметь вид

$$H(V) = \iint_S K_H(x - x_0, y - y_0, x_0, y_0) V(x_0, y_0) dx_0 dy_0, \quad (8)$$

где  $(x_0, y_0)$  и  $(x, y)$  – декартовы координаты в области изображения,  $K_H(\Delta x, \Delta y, x_0, y_0)$  – ядро оператора, описывающее влияние изменения значения комплексной амплитуды волны подсветки виртуального объекта в точке  $(x_0, y_0)$  на комплексную амплитуду восстанавливающей волны в точке  $(x, y)$ . Опишем некоторые качественные свойства ядра  $K_H$ . Оно зависит от оптической схемы и от выбора восстанавливающей волны. Его абсолютная величина быстро убывает при увеличении  $r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ , т.е. оператор  $H$ , в отличие от операторов  $D$  и  $G$ , композицией которых он является, имеет локальный характер. Для вычислительных задач имеет смысл ограничить носитель функции  $K_H$  по  $(\Delta x, \Delta y)$  областью  $r < 5\lambda$ , а значениями  $K_H$  при  $r \geq 5\lambda$  пренебречь. Наконец, если восстанавливающая волна  $O(\xi, \eta)$  является идеально плоской, а область голограммы бесконечна по всем направлениям, то  $K_H = K_H(\Delta x, \Delta y)$  не зависит от точки  $(x_0, y_0)$ . В практически значимом случае конечной голограммы и сходящейся восстанавливающей волны ядро  $K_H$  зависит от точки  $(x_0, y_0)$ , однако эта зависимость проявляет себя только на расстояниях порядка  $10^4 \lambda$ . То есть для вычислительных целей в пределах подобласти размером порядка  $10^3 \lambda$  можно считать ядро  $K_H$  зависящим только от  $(\Delta x, \Delta y)$ . Это наблюдение дает возможность разбить область виртуального объекта на подобласти  $A_n$ , внутри каждой из которых оператор  $H$  представляется как оператор свертки с некоторым ядром  $K_H^n$ , являющимся приближением ядра  $K_H$  в данной подобласти.



**Рис. 4.** Результат проявки экспозиции тестового голографического изображения  $2.5 \times 2.5 \text{ мм}^2$  в фоточувствительном материале толщиной 30 мкм ( $NA = 0.24$ ;  $\lambda = 441.6 \text{ нм}$ ; разрешение 5 мкм).

Рассмотрим теперь задачу оптимизации качества изображения аналогично (5), однако объектом вариаций будем считать виртуальный объект:

$$\sigma(A, H(V)) \xrightarrow{V} \min.$$

Введем равномерную прямоугольную сетку с шагом  $\Delta$  на каждой подобласти  $S_n$ . Тогда идеальное изображения объекта  $A$  можно представить как набор значений  $\{a_{pq} \in [0;1]\}$  в узлах данной сетки. Виртуальный объект  $V$  также можно представить двумерным массивом  $\{v_{pq}\}$ , где каждое значение  $v_{pq}$  — это некоторое комплексное число из единичного круга с центром в нуле, а функционал качества как сумму ограничений данного функционала на каждую из подобластей  $\sigma = \sum \sigma_n$ . На практике не требуется находить глобальный минимум функционала качества. Достаточно достичь такого уровня качества, что выполняются заранее определенные допуски. Поэтому в каждой подобласти можно поставить задачу следующим образом. Найти  $\{v_{pq} \in \mathbb{C}: |v_{pq}| \leq 1\}$  и действительную константу  $c$ , такие что

$$\sigma_n = \sum_{p,q} (b_{pq}b_{pq}^* - ca_{pq})^2 < \epsilon,$$

где  $b_{pq} = \sum_{lm} K_H((p-l)\Delta, (q-m)\Delta)v_{lm}$ .

Для решения задачи синтеза голограмм на языке C++ с использованием библиотек MPI и OpenMP был разработан программный комплекс для кластерных систем. В нем реализованы алгоритмы оптимизации, описанные выше, а также аналогичные алгоритмы для векторной модели дифракции [9]. Вычисления распараллелены таким образом, что каждая подобласть  $S_n$  обрабаты-

вается на отдельном наборе вычислительных узлов методом градиентного спуска. Все градиенты и поля представлены с помощью операторов типа свертки, поэтому для ускорения вычислений используются быстрое преобразование Фурье и библиотека fftw3. Вычислительная сложность алгоритмов таким образом равна  $O(N*\ln N)$ .

Независимость определений виртуального объекта и идеального изображения в предложенном подходе дает дополнительную гибкость и позволяет универсальным образом ставить более сложные задачи синтеза и оптимизации голограмм. Например, можно поставить задачу оптимизации качества изображения в нескольких параллельных плоскостях. То есть

$$\sigma(A, H(V)) = \sum_n \sigma_n(A_n, H(V)) \xrightarrow{V} \min,$$

где  $A_n$  — сечения идеального изображения плоскостями,  $\sigma_n$  — ограничение функционала качества на данную плоскость. Численные решения задач оптимизации в некоторых из таких постановок были реализованы в программном комплексе. Это позволяет решать задачи синтеза голограммных масок для сложных трехмерных изображений, а также задачу оптимизации глубины фокуса оптической системы. Для верификации программного комплекса и математических моделей, используемых в его основе, была проведена серия экспериментов [10, 11], в ходе которых голограммные маски синтезировались с его помощью, изготавливались на электронном литографе, устанавливались в оптической схеме с заранее спроектированными для засветки оптикой и осветителем. Одна из последних серий экспериментов была посвящена получению изображений

в толстых (10–50 мкм) фоторезистах при длине волны восстанавливающего излучения 441.6 нм (рис. 4).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов М.В., Боровиков В.А., Гавриков А.А., Князьков Д.Ю., Раховский В.И., Челюбеев Д.А., Шамаев А.С. Методы создания и коррекции качества голографических изображений геометрических объектов с элементами субволновых размеров // ДАН. 2010. Т. 434. № 3. С. 332–336.
2. Rakhovsky V., Knyazkov D., Shamaev A., Chernik V., Gavrikov A., Chelyubeev D., Mikheev P., Borisov M. // Proc. European Mask and Lithography Conference. SPIE. 2012. V. 8352. 83520P.
3. Черник В.В. // Журнал Радиоэлектроники. 2017. № 1. С. 1–20.
4. Gabor D.A. // Nature. 1948. № 161. P. 777–778.
5. Колфилд Г. Оптическая голография. М.: Мир, 1982. 376 с.
6. Mack C.A. Fundamental Principles of Optical Lithography: The Science of Microfabrication.: John Wiley & Sons, 2007. 417 p.
7. Басс Ф.Г., Фукс И.М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972. 424 с.
8. Черник В.В. // Труды VI международной конференции “Параллельные вычисления и задачи управления”. РАСО’2012. Т. II. 2012.
9. Михеев П.А. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2014. Т. 1. С. 15–22.
10. Borisov M., Chernik V., Merkushev L., Shamaev A., Rakhovskiy V., Chelubeev D. // Proc. SPIE 11324. Novel Patterning Technologies for Semiconductors. MEMS/NEMS and MOEMS. 2020. XXXIV. 113241J (2020) <https://doi.org/10.1117/12.2552013>
11. Borisov M., Chernik V., Shamaev A., Rakhovskiy V., Chelubeev D. // Proc. SPIE 11324. Novel Patterning Technologies for Semiconductors, MEMS/NEMS and MOEMS. 2020. XXXIV; 1132417 (2020). <https://doi.org/10.1117/12.2551936>

## EFFECTIVE METHODS OF SYNTHESIS AND OPTIMIZATION OF A HOLOGRAPHIC MASK

V. V. Chernik<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS F.L. Chernous'ko

The paper presents several statements of the problems of synthesis of holographic mask in the form of optimization problems for quality of holographic images. An effective algorithm for the synthesis of holographic masks based on FFT with complexity  $O(M \ln N)$ , where  $N$  is the number of elements of the depicted object, is described. Based on this algorithm, a scalable software package has been developed and implemented that allows synthesizing holographic masks for various lithography applications, including the production of MEMS, MOEMS and high-end chips. Experimental results are presented.

*Keywords:* diffraction, computer-generated holography, optimization problems, photolithography

УДК 539.3

## ТРЕХМЕРНАЯ ОБОЛОЧЕЧНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ПОСЛОЙНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ НЕРЕГУЛЯРНЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

© 2023 г. В. Н. Бакулин<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН А.М. Липановым 11.01.2023 г.

Поступило 11.01.2023 г.

После доработки 02.05.2023 г.

Принято к публикации 24.05.2023 г.

Рассмотрена методология построения трехмерных оболочечных моделей для послойного исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных нерегулярных конических оболочек, все более широко применяемых на практике. Разработка таких моделей позволяет расширить класс решаемых задач и с необходимой точностью и степенью детализации исследовать напряженно-деформированное состояние в общем случае нерегулярных трехслойных конических оболочек. Возможности предложенной методологии проиллюстрированы на примере исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных конических оболочек с прямоугольными в плане вырезами.

*Ключевые слова:* трехмерные оболочечные модели, послойный анализ, напряженно-деформированное состояние, трехслойные нерегулярные оболочки, прямоугольные в плане вырезы

**DOI:** 10.31857/S2686740023050012, **EDN:** OWORIW

Интерес к трехслойным оболочкам [1, 2] в современной ракетной, авиакосмической, судостроительной, строительной и других отраслях промышленности объясняется стремлением к уменьшению массы при обеспечении высоких прочностных, жесткостных и многих других важных характеристик (стойкость, тепло-, звуко-, виброизоляционные свойства, а также возможность регулирования свойств изменением характеристик слоев).

Для ракетных двигателей, для камер и сопел твердотопливных двигателей [3, 4] важным при обтекании является высокое качество внутренней поверхности, обеспечить которое позволяет применение трехслойных оболочек. Поэтому часто эффективной для многих современных изделий является трехслойная структура оболочечных конструкций [2].

Трехслойные оболочки применяются в конструкциях головных обтекателей космической техники, элементов корпусов ракет, транспортно-пусковых контейнеров, сопловых блоков двигателей на твердом топливе и многих других изделий. Ярким примером широкого применения

трехслойных оболочек могут служить корпуса транспортно-пусковых контейнеров мобильных ракетных комплексов (рис. 1) [5, 6].

На практике наибольшее распространение получили и получают трехслойные оболочки с тонкими и жесткими несущими слоями и сравнительно толстым, но менее жестким слоем заполнителя [7]. Для расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) таких конструкций необходимо разрабатывать модели, учитывающие моментное



**Рис. 1.** Пример применения трехслойных конических оболочек.

<sup>1</sup>Институт прикладной механики  
Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: vbak@yandex.ru

состояние в несущих слоях и трехмерное НДС в слое заполнителя.

Построение адекватных моделей, позволяющих учесть важные особенности, которые в настоящее время учитываются недостаточно точно, а некоторые из особенностей вообще не учитываются, является актуальной научной проблемой, имеющей важное прикладное значение.

Осуществить построение таких моделей и получить на их основе решение поставленных задач позволяет подход послойного анализа [7, 8].

При послойном моделировании получение аналитических решений для большого числа актуальных научных и важных практических задач по расчету напряженно-деформированного состояния трехслойных и слоисто-неоднородных оболочек, особенно ослабленных прямоугольными в плане вырезами, сталкивается с непреодолимыми математическими сложностями.

Следует отметить, что вопросы расчета трехслойных сферических оболочек с малыми круговыми, эллиптическими и криволинейными отверстиями рассматривались в работах Г.А. Ванина и его соавторов, например, в [9].

Аналитико-численный метод конечных тел решения краевой задачи для цилиндрической ортотропной оболочки с немалым прямоугольным отверстием рассмотрен в работе [10].

Концентрация напряжений около отверстий в трансверсально-изотропных оболочках рассматривалась в монографии [11].

Недостаточная изученность проблемы исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных конических оболочек с прямоугольными в плане вырезами связана с большими сложностями получения решения. Это приводит к необходимости применения численных методов.

Наиболее подходящим для решения указанных задач является метод конечных элементов (МКЭ), позволяющий создавать модели, с помощью которых можно проводить послойное исследование в общем случае нерегулярных трехслойных оболочек с прямоугольными в плане вырезами.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В представленной работе подход послойного анализа реализуется с помощью построенных конечно-элементных моделей (КЭМ) естественной кривизны, точно представляющих геометрическую форму исследуемых трехслойных конических оболочек. Подход состоит в построении по толщине оболочки блоков из оболочечных конечных элементов (КЭ) моментных несущих слоев (двумерные КЭ) и КЭ слоя заполнителя (трехмерные КЭ) (в отличие от работы [12], в которой

рассматриваются блочные элементы и аналитические решения граничных задач для систем дифференциальных уравнений).

Использование различных аппроксимирующих функций в двумерных и трехмерных оболочечных конечных элементах при моделировании соответственно напряженно-деформированного состояния в моментных несущих слоях и слое заполнителя приведет к разрыву обобщенных перемещений на поверхностях стыковки этих КЭ.

В работе применен подход, позволяющий избежать такого разрыва аппроксимирующих функций перемещений на поверхностях стыковки оболочечных КЭ несущих слоев и КЭ слоя заполнителя [7]. Разработанный подход построения аппроксимирующих функций перемещений для оболочечных трехмерных конечно-элементных моделей проиллюстрирован на примере в общем случае нерегулярных трехслойных конических оболочек. Следует отметить, что рассмотренные модели применимы для послойного исследования напряженно-деформированного состояния в общем случае нерегулярных трехслойных оболочек вращения и конической, и цилиндрической формы, т.е. трехслойных оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны, охватывающих широкий круг конструкций.

### АППРОКСИМИРУЮЩИЕ ФУНКЦИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ НЕСУЩИХ СЛОЕВ ТРЕХСЛОЙНЫХ НЕРЕГУЛЯРНЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Если несущие слои рассматриваемой трехслойной оболочки являются достаточно тонкими и жесткими, то для моделирования НДС в них применяются КЭ моментных оболочек Кирхгофа–Лява [13].

При построении моделей послойного исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных нерегулярных конических оболочек рассмотрим прямоугольные в плане КЭ естественной кривизны для несущих слоев и слоя заполнителя. Конечные элементы для моделирования НДС в несущих слоях имеют четыре узла с тремя линейными перемещениями и двумя углами поворота нормали к срединной поверхности соответствующего несущего слоя. Таким образом, КЭ несущих слоев имеет двадцать степеней свободы.

Для улучшения сходимости рассматриваемых моделей применены аппроксимирующие функции, включающие перемещения как жесткого целого [7], полученные интегрированием геометрических соотношений, связывающих деформации

с перемещениями [13], при нулевых значениях деформаций.

Аппроксимирующие функции перемещений как твердого тела запишем через шесть неопределенных коэффициентов  $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ , являющихся константами интегрирования, оставшиеся четырнадцать неопределенных коэффициентов  $\alpha_7, \dots, \alpha_{20}$  (число неопределенных коэффициентов  $\alpha_1, \dots, \alpha_{20}$  равно числу степеней свободы КЭ) отвечают за перемещения, вызванные деформированием несущего слоя.

Вид аппроксимирующих функций перемещений несущих слоев трехслойной нерегулярной конической оболочки вращения представлен в табл. 1.

Здесь  $u, v, w$  – перемещения точек на срединной поверхности каждого несущего слоя трехслойной конической оболочки;  $x, \beta$  – координаты на срединной поверхности каждого несущего слоя:  $x$  – линейная координата, направленная вдоль меридиана,  $\beta$ ,  $r$  –угловая координата и радиус окружности в плоскости, перпендикулярной оси оболочки;  $c = \cos\gamma$ ,  $s = \sin\gamma$ ,  $s_1 = \sin\beta$ ,  $c_1 = \cos\beta$ ,  $r = R_2 \cos\gamma$ ,  $\gamma$  – угол конусности,  $R_2$  – радиус кривизны срединной поверхности несущего слоя трехслойной конической оболочки [14]. Местные системы координат у конечных элементов несущих слоев и слоя заполнителя расположим на срединной поверхности этих КЭ.

Подставив функции, аппроксимирующие перемещения конечного элемента несущих слоев трехслойной конической незамкнутой оболочки вращения (табл. 1), в выражения для углов поворота нормали ( $\vartheta_\beta, \vartheta_x$ ) к срединной поверхности относительно осей  $x, \beta$ , после проведения необходимых математических операций получим запись  $\vartheta_x$  и  $\vartheta_\beta$  через вектор неопределенных коэффициентов:

$$\begin{aligned} \vartheta_x = & \alpha_3 s s_1 (x s + r) / r - \alpha_4 s c_1 (x s + r) / r - \alpha_6 c (x s + r) / r - \\ & - \alpha_{10} \beta c / r - \alpha_{11} x \beta c / r + \alpha_{12} x / r + 2 \alpha_{14} \beta / r + \alpha_{15} x^2 / r + \\ & + 2 \alpha_{16} x \beta / r + 3 \alpha_{18} \beta^2 / r + \alpha_{19} x^3 / r + 3 \alpha_{20} x \beta^2 / r, \quad (1) \\ \vartheta_\beta = & \alpha_3 c_1 + \alpha_4 s_1 - \beta \alpha_{12} - 2 x \alpha_{13} - 2 x \beta \alpha_{15} - \\ & - \beta^2 \alpha_{16} - 3 x^2 \alpha_{17} - 3 x^2 \beta \alpha_{19} - \beta^3 \alpha_{20}. \end{aligned}$$

Сходимость, достоверность и точность модели конечного элемента несущих слоев трехслойной незамкнутой оболочки вращения, построенной на основе рассмотренных аппроксимирующих функций перемещений, подтверждена сопоставлением с аналитическими и численными решениями на известных и широко распространенных для оболочечных конечных элементов тестах [7], а также сравнением с экспериментальными данными для конической оболочки.

**Таблица 1.** Матрица аппроксимирующих функций перемещений конечного элемента несущих слоев трехслойной конической незамкнутой оболочки вращения (в пустых клеточках таблицы коэффициенты равны нулю)

	$u$	$v$	$w$
$\alpha_1$	$s c_1$	$-s_1$	$c c_1$
$\alpha_2$	$s s_1$	$c_1$	$c s_1$
$\alpha_3$	$r c c_1$	$x c s_1$	$-(rs + x)c_1$
$\alpha_4$	$r s s_1$	$-x c c_1$	$-(rs + x)s_1$
$\alpha_5$	$c$		$-s$
$\alpha_6$		$r + xs$	
$\alpha_7$	$x$		
$\alpha_8$	$\beta$		
$\alpha_9$	$x \beta$		
$\alpha_{10}$		$\beta$	
$\alpha_{11}$		$x \beta$	
$\alpha_{12}$			$x \beta$
$\alpha_{13}$			$x^2$
$\alpha_{14}$			$\beta^2$
$\alpha_{15}$			$x^2 \beta$
$\alpha_{16}$			$x \beta^2$
$\alpha_{17}$			$x^3$
$\alpha_{18}$			$\beta^3$
$\alpha_{19}$			$x^3 \beta$
$\alpha_{20}$			$x \beta^3$

#### АППРОКСИМИРУЮЩИЕ ФУНКЦИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ СЛОЯ ЗАПОЛНИТЕЛЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ НЕРЕГУЛЯРНЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Для того чтобы избежать разрыва перемещений на конических поверхностях стыковки двумерных и трехмерных оболочечных конечных элементов при моделировании соответственно НДС в моментных несущих слоях и слое заполнителя, на внутренней и внешней конических поверхностях КЭ заполнителя (КЭЗ) применим рассмотренные выше аппроксимирующие функции перемещений КЭ несущих слоев. Для этого в каждом из восьми узлов, находящихся в угловых точках на внутренней и внешней конических поверхностях конечных элементов слоя заполнителя, назначаются те же пять узловых обобщенных перемещений, что и у КЭ несущих слоев.

В соответствии с предложенным подходом построения трехмерных оболочечных КЭ-слоя за-

полнителя (индекс  $f$ ) вектор перемещений в этих конечных элементах  $\delta_j^f = \{u_j, v_j, w_j\}^T$  запишем через векторы перемещений на внутренней  $\delta_j^1$  и внешней  $\delta_j^2$  конических поверхностях конечного элемента слоя заполнителя:

$$\delta_j^f = \delta_j^1 \varphi_j^1 + \delta_j^2 \varphi_j^2, \quad (2)$$

где  $\varphi_j^1 = \frac{1}{2} \left( 1 - 2 \frac{z_j}{h_j} \right)$ ,  $\varphi_j^2 = 1 - \varphi_j^1$ ,  $j$  – номер конечного элемента по толщине слоя заполнителя, считая от его внутренней поверхности,  $z_j$  – нормальная координата к срединной поверхности  $j$ -го КЭ по толщине слоя заполнителя,  $h_j$  – толщина  $j$ -го трехмерного КЭ-слоя заполнителя.

В этих выражениях и далее верхние индексы 1, 2 соответствуют внутренней и внешней коническим поверхностям  $j$ -го КЭ-слоя заполнителя.

Аппроксимирующие функции перемещений конечных элементов несущих слоев приведем к соответствующей конической поверхности стыковки с КЭ-слоя заполнителя с помощью матриц перехода аналогично тому, как это приведено в работе [15] для слоистых конечных элементов оболочки вращения двойной кривизны, построенных на основе модели Тимошенко для пакета слоев.

Если слой заполнителя трехслойной оболочки моделируется по толщине одним трехмерным конечным элементом, то его конические поверхности будут являться поверхностями раздела с несущими слоями.

Запишем векторы перемещений КЭ несущих слоев на поверхностях сопряжения с КЭ-слоя заполнителя, где нижний индекс 1 относится к внутреннему, а 3 к внешнему несущему слоям

$$\bar{\delta}_1^c = \{\bar{u}_1^c, \bar{v}_1^c, \bar{w}_1^c\}^T, \quad \bar{\delta}_3^c = \{\bar{u}_3^c, \bar{v}_3^c, \bar{w}_3^c\}^T, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^c &= u_1^c + \vartheta_{\beta 1}^c h_1^c / 2, & \bar{v}_1^c &= v_1^c - \vartheta_{x 1}^c h_1^c / 2, & \bar{w}_1^c &= w_1^c, \\ \bar{u}_3^c &= u_3^c - \vartheta_{\beta 3}^c h_3^c / 2, & \bar{v}_3^c &= v_3^c + \vartheta_{x 3}^c h_3^c / 2, & \bar{w}_3^c &= w_3^c, \end{aligned}$$

где  $h_1^c, h_3^c$  – толщина, соответственно, внутренне-го и внешнего несущих слоев трехслойной конической незамкнутой оболочки вращения.

Тогда условия стыковки в векторной форме примут следующий вид для случая одного КЭЗ по толщине слоя заполнителя трехслойной конической незамкнутой оболочки вращения:

$$\delta_1^1 = \bar{\delta}_1^c; \quad \delta_1^2 = \bar{\delta}_3^c. \quad (4)$$

С учетом (1)–(4) и зная аппроксимирующие функции перемещений КЭ несущих слоев трехслойной конической незамкнутой оболочки вращения (табл. 1), после проведения необходимых

математических операций получим аппроксимирующие функции перемещений трехмерного КЭЗ для случая одного конечного элемента по толщине слоя заполнителя (т.е. когда  $j = 1$ ), записанные с помощью сорока неопределенных коэффициентов  $\alpha_1, \dots, \alpha_{40}$ :

$$\begin{aligned} u_j &= ((\alpha_1 c_1 + \alpha_2 s_1) s + (\alpha_3 c_1 + \alpha_4 s_1) r_1 c + \\ &+ \alpha_5 c + \alpha_7 x + \alpha_8 \beta + \alpha_9 x \beta + \\ &+ (\alpha_3 c_1 + \alpha_4 s_1 - \beta \alpha_{12} - 2x \alpha_{13} - 2x \beta \alpha_{15} - \\ &- \beta^2 \alpha_{16} - 3x^2 \alpha_{17} - 3x^2 \beta \alpha_{19} - \beta^3 \alpha_{20}) h_1^c / 2) \varphi_1 + \\ &+ ((\alpha_{21} c_1 + \alpha_{22} s_1) s + (\alpha_{23} c_1 + \alpha_{24} s_1) r_3 c + \\ &+ \alpha_{25} c + \alpha_{27} x + \alpha_{28} \beta + \alpha_{29} x \beta - \\ &- (\alpha_{23} c_1 + \alpha_{24} s_1 - \beta \alpha_{32} - 2x \alpha_{33} - 2x \beta \alpha_{35} - \\ &- \beta^2 \alpha_{36} - 3x^2 \alpha_{37} - 3x^2 \beta \alpha_{39} - \beta^3 \alpha_{40}) h_3^c / 2) \varphi_2, \\ v_j &= (-\alpha_1 s_1 + \alpha_2 c_1 + (\alpha_3 s_1 - \alpha_4 c_1) x c + \\ &+ \alpha_6 (r_1 + x s) + \alpha_{10} \beta + \alpha_{11} x \beta - \\ &- (\alpha_3 s s_1 (x s + r_1) / r_1 - \alpha_4 s c_1 (x s + r_1) / r_1 - \\ &- \alpha_6 c (x s + r_1) / r_1 - \alpha_{10} \beta c / r_1 - \\ &- \alpha_{11} x \beta c / r_1 + \alpha_{12} x / r_1 + 2\alpha_{14} \beta / r_1 + \\ &+ \alpha_{15} x^2 / r_1 + 2\alpha_{16} x \beta / r_1 + \\ &+ 3\alpha_{18} \beta^2 / r_1 + \alpha_{19} x^3 / r_1 + 3\alpha_{20} x \beta^2 / r_1) h_1^c / 2) \varphi_1 + \\ &+ (-\alpha_{21} s_1 + \alpha_{22} c_1 + (\alpha_{23} s_1 - \alpha_{24} c_1) x c + \\ &+ \alpha_{26} (r_3 + x s) + \alpha_{30} \beta + \alpha_{31} x \beta + \\ &+ (\alpha_{23} s s_1 (x s + r_3) / r_3 - \alpha_{24} s c_1 (x s + r_3) / r_3 - \\ &- \alpha_{26} c (x s + r_3) / r_3 - \alpha_{30} \beta c / r_3 - \\ &- \alpha_{31} x \beta c / r_3 + \alpha_{32} x / r_3 + 2\alpha_{34} \beta / r_3 + \\ &+ \alpha_{35} x^2 / r_3 + 2\alpha_{36} x \beta / r_3 + 3\alpha_{38} \beta^2 / r_3 + \\ &+ \alpha_{39} x^3 / r_3 + 3\alpha_{40} x \beta^2 / r_3) h_3^c / 2) \varphi_2, \\ w_j &= ((\alpha_1 c_1 + \alpha_2 s_1) c - (\alpha_3 c_1 + \alpha_4 s_1) (x + r_1) s - \\ &- \alpha_5 s + \alpha_{12} x \beta + \alpha_{13} x^2 + \\ &+ \alpha_{14} \beta^2 + \alpha_{15} x^2 \beta + \alpha_{16} x \beta^2 + \alpha_{17} x^3 + \\ &+ \alpha_{18} \beta^3 + \alpha_{19} x^3 \beta + \alpha_{20} x \beta^3) \varphi_1 + \\ &+ ((\alpha_{21} c_1 + \alpha_{22} s_1) c - (\alpha_{23} c_1 + \alpha_{24} s_1) (x + r_3) s - \\ &- \alpha_{25} s + \alpha_{32} x \beta + \alpha_{33} x^2 + \\ &+ \alpha_{34} \beta^2 + \alpha_{35} x^2 \beta + \alpha_{36} x \beta^2 + \alpha_{37} x^3 + \\ &+ \alpha_{38} \beta^3 + \alpha_{39} x^3 \beta + \alpha_{40} x \beta^3) \varphi_2. \end{aligned} \quad (5)$$

При этом приняты следующие обозначения:  $\varphi_1 = \varphi_j^1$ ,  $\varphi_2 = \varphi_j^2$ ;  $r_1, r_3$  – радиусы окружностей в плоскостях, перпендикулярных оси вращения

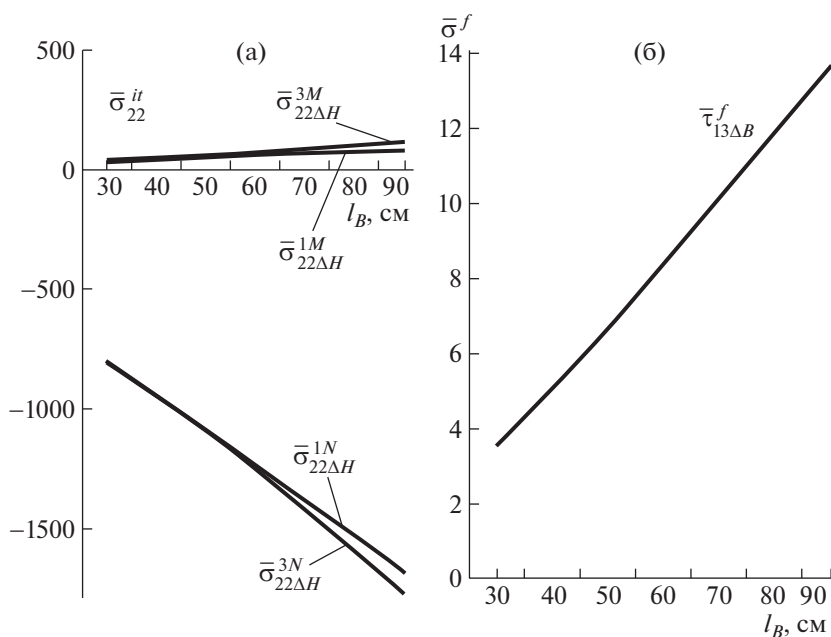


Рис. 2. Влияние длины прямоугольного выреза на наибольшие напряжения в несущих слоях и заполнителе трехслойной конической оболочки.

оболочки, и относящиеся к срединным поверхностям внутреннего и внешнего несущих слоев.

Подставляя полученные аппроксимирующие функции перемещений трехмерных КЭ-слоя заполнителя трехслойных нерегулярных конических оболочек в геометрические соотношения для трехмерного тела, связывающие деформации с перемещениями [1], и проведя дифференцирование и необходимые математические операции, получим выражения для вектора обобщенных деформаций КЭ-слоя заполнителя, записанные с помощью вектора неопределенных коэффициентов.

Используя для КЭ-слоя заполнителя физические соотношения (закон Гука), с учетом полученных выражений для вектора обобщенных деформаций КЭ-слоя заполнителя получим зависимости для вектора напряжений в КЭ-слоя заполнителя, записанные с помощью вектора неопределенных коэффициентов, а затем с помощью вектора узловых перемещений.

Получив выражения для вектора напряжений и вектора обобщенных деформаций для трехмерных конечных элементов слоя заполнителя, из условия минимума полной потенциальной энергии (вариационный принцип Лагранжа) [13] находятся выражения для записи матрицы жесткости КЭ-слоя заполнителя трехслойной конической незамкнутой оболочки вращения.

Определив выражения для матриц жесткости КЭ несущих слоев и слоя заполнителя, дальней-

шее решение задачи проводится с помощью алгоритмов метода перемещений МКЭ.

## ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Рассмотренные модели применены для исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных конических оболочек с прямоугольными в плане вырезами.

Решена задача о влиянии размеров вырезов, равноудаленных от шарнирно опертых краев (на верхнем крае малого основания возможно перемещение по оси  $x$ ), на напряженно-деформированное состояние трехслойного конического отсека с несущими слоями из углепластика при нагружении равномерно распределенным внешним давлением  $p$ .

Характеристики трехслойного отсека. Для несущих слоев:  $E_1 = 7 \times 10^5$  кг/см<sup>2</sup>,  $E_2 = 6.3 \times 10^5$  кг/см<sup>2</sup>;  $G_{12} = 0.5 \times 10^5$  кг/см<sup>2</sup>;  $\mu_2 = 0.25$ ;  $R_1 = 139.2$  см,  $R_2 = 217.2$  см;  $h_1 = h_3 = 0.3$  см;  $L = 214.4$  см. Для слоя заполнителя:  $E_3 = 1500$  кг/см<sup>2</sup>;  $G_{13} = 2000$  кг/см<sup>2</sup>;  $G_{23} = 3000$  кг/см<sup>2</sup>. Здесь  $R_1$ ,  $R_2$  – внутренние радиусы малого и большого оснований трехслойного конического отсека;  $L$  – длина отсека;  $h_1$ ,  $h_3$  – толщина внутреннего и внешнего несущих слоев трехслойного отсека. Угол раствора выреза равен  $10^\circ$ , длина выреза  $l_B$  по оси  $x$  изменялась в диапазоне 30–90 см.



Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 2. Влияние размеров прямоугольного в плане выреза на напряжения в несущих слоях трехслойного конического отсека показано на рис. 2а, на наибольшие напряжения в наполнителе (напряжения поперечного сдвига  $\tau_{13}$ ) на рис. 2б.

При этом  $\bar{\sigma}_{11}^i = \sigma_{11}^i / \sigma_{22}^{1N}$ ,  $\bar{\sigma}^f = \tau_{13}^f / p$ , где  $\sigma_{22}^{1N}$  – напряжения во внутреннем несущем слое в оболочке без выреза,  $i = 1, 3$  – внутренний и внешний несущие слои трехслойного отсека;  $t = N$ ,  $t = M$  – соответственно мембранные и моментные напряжения в несущих слоях;  $\Delta$  и тире – место в районе угла и середины прямолинейного края выреза. Индексы  $H$ ,  $B$  у напряжений соответствуют нижней и верхней угловым точкам отверстия, т.е. угловые точки с индексом  $B$  находятся на верхнем краю с меньшим радиусом, а угловые точки с индексом  $H$  – на нижнем краю с большим радиусом.

Таким образом, получены результаты исследования напряженно-деформированного состояния слоев трехслойной конической оболочки с прямоугольными в плане вырезами.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена методология построения трехмерных оболочечных моделей для послойного исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных нерегулярных конических оболочек, находящихся все более широкое применение в современной технике. Приведен подход получения аппроксимирующих функций перемещений в конечных элементах слоя наполнителя, позволяющий избежать разрыва обобщенных перемещений на поверхностях стыковки с моментными несущими слоями трехслойных нерегулярных конических оболочек. Рассмотренные модели расширяют класс решаемых задач по расчету напряженно-деформированного состояния в общем случае нерегулярных трехслойных конических оболочек. Проведены исследования напряженно-деформированного состояния в слоях трехслойной конической оболочки с прямоугольными в плане вырезами.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института прикладной механики РАН (номер государственной регистрации 121112200126-5).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
2. *Бакулин В.Н.* Трехслойные оболочки – эффективные элементы конструкций современных летательных аппаратов. Модели прочностного анализа // Материалы XIX Международной конференции по Прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММА'2022). 5–12 сентября 2022 г. М.: Изд-во МАИ, 2022. С. 270–272.
3. *Bakulin V.N., Nedbay A.Ya.* The Dynamic Stability of Three-Layered Cylindrical Shell, Reinforced Ring Ribs and Hollow Cylinder Under External Pressure Pulsing // Doklady Physics. 2021. V. 66. № 6. P. 175–181.
4. *Бакулин В.Н., Недбай А.Я.* Параметрический резонанс трехслойной цилиндрической композитной оболочки, подкрепленной продольными ребрами и цилиндром, при действии изменяющейся во времени осевой силы // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2022. Т. 505. С. 59–65.
5. Генеральный конструктор Юрий Семенович Соломонов. Портрет на фоне эпохи. Изд-во РМП, 2015.
6. *Авдеев В.С.* Центральный научно-исследовательский институт специального машиностроения. Путь длиной в полвека. Хотьково, 2015. 300 с.
7. *Бакулин В.Н.* Эффективная модель послойного анализа трехслойных нерегулярных оболочек вращения цилиндрической формы // ДАН. 2018. Т. 478. № 2. С. 145–150.
8. *Образцов И.Ф., Бакулин В.Н.* Уточненные модели для исследования напряженно-деформационного состояния трехслойных цилиндрических оболочек // ДАН. 2006. Т. 407. № 1. С. 36–39.
9. *Ванин Г.А., Савиченко А.А.* Исследование взаимодействия двух отверстий на напряженное состояние в трехслойной сферической оболочке // Прикл. Механика. 1975. Т. 11. № 12. С. 15–21.
10. *Revenko V.P., Bakulin V.N.* Method of Finite Bodies for Mathematical Modeling of the Stress-strain State of Cylindrical Orthotropic Shell with the Reinforced Rectangular Hole // J. Physics: Conference Series. Proc. IV International conference “Supercomputer Technologies of Mathematical Modeling (SCTeMM'19)”. 2019. V. 1392. 012021.
11. *Пелех Б.Л., Сяский А.А.* Распределение напряжений возле отверстий в податливых на сдвиг анизотропных оболочках. К.: Наук. думка, 1975. 198 с.
12. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Блочные элементы и аналитические решения граничных задач для систем дифференциальных уравнений // ДАН. 2014. Т. 454. № 2. С. 163–167.
13. *Балабух Л.И., Колесников К.С., Зарубин В.С. и др.* Основы строительной механики ракет. М.: Высш. шк., 1969. 494 с.
14. *Бакулин В.Н., Репинский В.В.* Построение эффективной конечно-элементной модели моментной оболочки вращения нулевой гауссовой кривизны / Материалы VIII Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ 2010). 25–31 мая 2010 г. Алушта. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. С. 436–438.
15. *Кривцов В.С., Рассоха А.А.* Алгоритм получения матрицы жесткости конечного элемента анизотропной оболочки // Изв. вузов. Авиац. техника. 1983. № 4. С. 14–18.

# THREE-DIMENSIONAL SHELL MODEL FOR LAYER-BY-LAYER STUDY OF THE STRESS AND STRAIN STATE OF IRREGULAR CONICAL SANDWICH SHELLS

**V. N. Bakulin<sup>a</sup>**

*<sup>a</sup>Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.M. Lipanov

A methodology for constructing three-dimensional shell models for the layer-by-layer study of the stress and strain state of irregular sandwich shells, which are increasingly used in practice, is proposed. An original approach is considered for obtaining approximating displacement functions in the finite elements of the core layer, which does not lead to a discontinuity in the generalized displacements on the interfaces with moment skin layers. The development of such models makes it possible to significantly expand the class of problems to be solved and, with the necessary accuracy and degree of detail, for the first time to study the stress and strain state in the general case of irregular sandwich shells in a wide range of variation in the geometric and physical and mechanical characteristics of the layers. The possibilities of the proposed methodology are illustrated by the example of the study of the stress and strain state of conical sandwich shells with rectangular cutouts.

*Keywords:* three-dimensional shell models, layer-by-layer analysis, stress and strain state, irregular sandwich shells, rectangular cutouts

УДК 532.516: 532.529

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ СВЯЗЬ МЕЖДУ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССЫ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СУСПЕНЗИИ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

© 2023 г. Б. В. Бошнятов<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН Р.И. Нигматулиным 27.02.2023 г.

Поступило 15.03.2023 г.

После доработки 15.03.2023 г.

Принято к публикации 07.05.2023 г.

Получена аналитическая зависимость между безразмерными коэффициентами присоединенной массы и теплопроводности в суспензии сферических частиц. Зависимость подтверждается сравнением с теоретическими данными других авторов, в том числе при повышенных концентрациях дисперсных частиц с учетом их гидродинамического взаимодействия.

*Ключевые слова:* суспензия, идеальная несжимаемая жидкость, коэффициент присоединенной массы, коэффициент теплопроводности

DOI: 10.31857/S2686740023050024, EDN: OWNGMS

Поиск функциональных соотношений между различными свойствами гетерогенных сред и материалов является одной из фундаментальных проблем механики неоднородных сред, имеющей важное практическое значение. Такие соотношения становятся особенно полезными при разработке многофункциональных композиционных материалов или когда одно свойство сложной дисперсной среды легче измерить, чем другое. Известно, что теплопроводность, электро- и магнитостатика, диэлектрическая проницаемость и диффузия описываются уравнением Лапласа ( $\nabla^2\varphi = 0$ ) и идентичными граничными условиями: на бесконечности – при  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ ,  $\varphi \rightarrow 0$ , на поверхности раздела фаз

$$\Lambda_2 \frac{d\varphi_2}{dn} = \Lambda_1 \frac{d\varphi_1}{dn}. \quad (1)$$

В уравнении (1)  $\varphi$  – потенциал соответствующего скалярного поля; нижний индекс 1 относит параметры к дисперсионной среде, индекс 2 – к дисперсной фазе;  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к поверхности раздела фаз;  $\Lambda$  – обобщенный коэффициент проводимости [1], который линейным образом связывает потоки  $\mathbf{j}_i$  ( $i = 1, 2$ ) и  $\langle \mathbf{j} \rangle$  с соответствующим градиентом скалярного поля

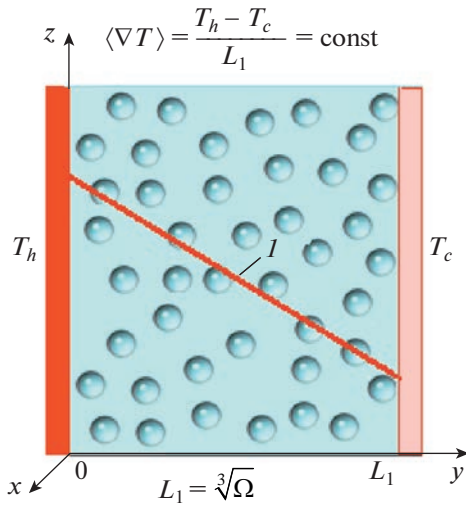
$$\mathbf{j}_i = -\Lambda_i \nabla \varphi_i, \quad \langle \mathbf{j} \rangle = -\Lambda^* \langle \nabla \varphi \rangle. \quad (2)$$

В уравнении (2): угловые скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение локальных параметров среды по представительному объему  $\Omega$ , который намного больше микроструктурных неоднородностей дисперсной среды, но намного меньше масштаба ее макроскопических неоднородностей  $l^3 \ll \Omega \ll L^3$ ;  $\Lambda^*$  – эффективный обобщенный коэффициент проводимости дисперсной среды. Поэтому решение для эффективного коэффициента теплопроводности дисперсной среды в безразмерном виде  $\lambda^*/\lambda_1$  одинаково пригодно для вычисления коэффициентов электропроводности  $\sigma^*/\sigma_1$  и любого другого безразмерного параметра  $\alpha^* = \Lambda^*/\Lambda_1$ , характеризующего перечисленные выше физические процессы.

Значительно сложнее оказалось найти связь между обобщенным коэффициентом проводимости дисперсной среды и коэффициентом присоединенной массы [2, 3]. Теоретически присоединенную массу обычно находят, рассматривая течение в приближении идеальной несжимаемой жидкости [4], кинематика которого, как и теплопроводность, описывается уравнением Лапласа, однако условие на границе фаз отличается. Вместо (1) мы имеем  $\frac{d\varphi_2}{dn} = \frac{d\varphi_1}{dn}$  – условие равенства компонент скорости нормальных к поверхности раздела фаз. Поэтому авторы работы [2] пришли к выводу, что такой универсальной взаимосвязи в

<sup>1</sup>Институт прикладной механики  
Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: bosbosh@mail.ru



**Рис. 1.** Схема макроскопического процесса теплопередачи в дисперсной среде:  $I$  – линейное изменение температуры в слое дисперсной среды  $\langle T \rangle = -cy$ ,  $\langle \nabla T \rangle = -c = \text{const}$ , поток тепловой энергии  $\langle \mathbf{j} \rangle = -\lambda^* \langle \nabla T \rangle$ .

общем случае не существует. С другой стороны, в работе [3] в результате сравнительного анализа уравнений электростатики и линеаризованных уравнений Навье–Стокса показано, что коэффициенты присоединенной массы и коэффициент сопротивления дисперсных частиц в суспензии могут быть выражены точно через параметры ее диэлектрической проницаемости. Тем самым в работе [3] фактически доказано существование соответствующей физической аналогии. Однако аналитическая зависимость, которая бы связывала в безразмерной форме эффективные коэффициенты присоединенной массы и обобщенной проводимости в дисперсной среде, до сих пор никем не получена.

Рассмотрим статистически однородную и изотропную двухфазную дисперсную среду, состоящую из однородных и изотропных компонентов: сферических дисперсных частиц и непрерывной дисперсионной жидкости. Условия соответствия физической аналогии тепловых и гидродинамических процессов в таких средах, при условии отсутствия гидродинамического взаимодействия дисперсных частиц, были получены в работе [5]. При этом сравнивались два точных решения для одиночной сферы: решение динамической задачи о движении сферы в однородном поле скоростей в приближении идеальной несжимаемой жидкости (уравнение Лапласа плюс уравнение движения [6]) и аналогичная задача о теплопроводности (диэлектрической проницаемости) одиночной сферы (уравнение Лапласа [7]). В проекции на направление внешнего поля  $\langle \nabla \Phi \rangle_y$  и

$\langle \nabla T \rangle_y$ , условия соответствия тепло-гидродинамической аналогии имеют следующий вид (далее везде нижний индекс “y” опущен):

$$\alpha \leftrightarrow 2\gamma - 1; \quad \frac{\langle \nabla T_2 \rangle}{\langle \nabla T_1 \rangle} \leftrightarrow \frac{\langle \nabla \Phi_2 \rangle}{\langle \nabla \Phi_1 \rangle}, \quad (3)$$

где  $\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ ,  $\gamma = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ ,  $\rho$  – плотность,  $T$  – скалярное поле температур.

Чтобы найти функциональную связь между эффективными коэффициентами присоединенной массы и теплопроводности, необходимо их представить в безразмерном виде, как функции параметров соответствия (3).

Формулы для расчета эффективного коэффициента теплопроводности  $\alpha^* = \lambda^*/\lambda_1$  следуют непосредственно из уравнений (2):

$$\frac{\alpha^* - 1}{(\alpha - 1)f_2} = \frac{\langle \nabla T_2 \rangle}{\langle \nabla T \rangle}, \quad (4)$$

$$\langle \nabla T \rangle = \langle \nabla T_1 \rangle (1 - f_2) + \langle \nabla T_2 \rangle f_2, \quad (5)$$

где  $f_2 = 1 - f_1$  – объемная концентрация дисперсной фазы.

Формула (4) описывает макроскопическую (усредненную по объему  $\Omega$ ) теплопроводность дисперсной среды. Такой процесс теплопередачи реализуется, если дисперсную среду, объемом  $\Omega$ , поместить между горячей  $T_h$  и холодной  $T_c$  плоскими стенками (рис. 1), при этом напряженность внешнего поля  $\langle \nabla T \rangle = \text{const}$ .

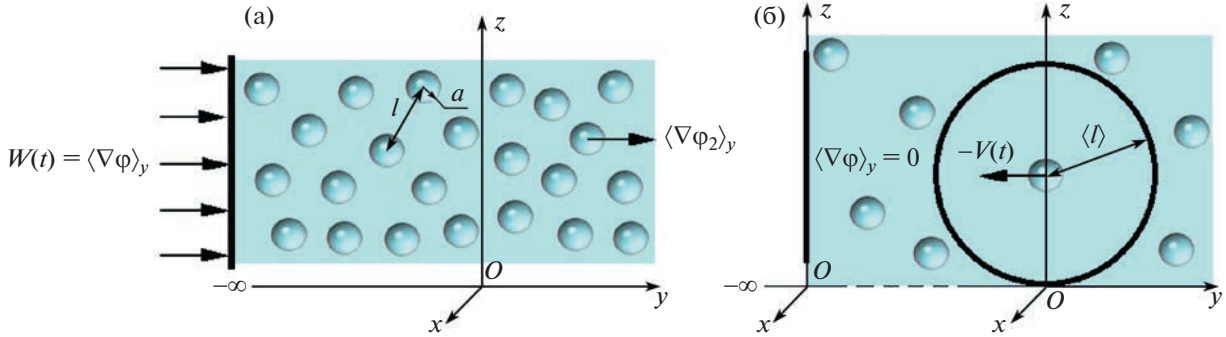
Гидродинамическим аналогом такого процесса теплопередачи является течение дисперсной среды, в приближении идеальной несжимаемой жидкости, под воздействием внешнего поля скоростей  $\langle \nabla \Phi \rangle = \text{const}$ . Присоединенная масса дисперсных частиц возникает при нестационарном процессе, если дисперсную среду, которая первоначально находилась в покое относительно инерциальной системы отсчета  $x-y-z$  (рис. 2а), привести в движение импульсным образом, мгновенно изменяя ее скорость на бесконечности от нуля до  $W^0 = \text{const}$ :

$$W(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \leq 0, \\ W^0, & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Уравнение движения дисперсной частицы, вдали от стенки, в той же (инерциальной) системе отсчета будет иметь следующий вид [6, 8, 9]:

$$\frac{d}{dt} \rho_2 \tau v_2 = \rho_1 \tau \frac{dW}{dt} - m_w \frac{d}{dt} (v_2 - W). \quad (7)$$

В уравнении (7)  $\tau = \frac{4}{3} \pi a^3$ ,  $a$  – радиус дисперсной частицы;  $m_w$  – присоединенная масса.



**Рис. 2.** Постановка гидродинамической задачи: а – для дисперсной среды, в том числе с учетом взаимодействия сферических частиц; б – Зубером (N. Zuber) при вычислении присоединенной массы дисперсной частицы “методом ячейки”.

С левой стороны уравнения (7) – производная по времени от импульса дисперсной частицы. С правой стороны – силы, которые действуют на дисперсную частицу. Первый член – сила, аналогичная силе Архимеда, из-за ускорения  $\frac{dW}{dt}$ , второй член – сила реакции на дисперсную частицу из-за инерции присоединенных масс жидкости. Интегрируя уравнение (7) по времени и заменяя  $v_2 = \langle \nabla \varphi_2 \rangle$ ,  $W^0 = \langle \nabla \varphi \rangle$ , получим формулу для расчета эффективного коэффициента присоединенной массы дисперсной частицы  $\mu_w = \frac{m_w}{\rho_1 \tau}$ :

$$\frac{1 + \mu_w}{\gamma + \mu_w} = \frac{v_2}{W^0} = \frac{\langle \nabla \varphi_2 \rangle}{\langle \nabla \varphi \rangle}. \quad (8)$$

Поскольку из (3) и (5) следует формула соответствия  $\frac{\langle \nabla \varphi_2 \rangle}{\langle \nabla \varphi \rangle} \leftrightarrow \frac{\langle \nabla T_2 \rangle}{\langle \nabla T \rangle}$ , то, приравнявая левые части уравнений (4) и (8), получим искомую функциональную связь эффективных коэффициентов  $\alpha^*$  и  $\mu_w$ :

$$\frac{\alpha^* - 1}{(\alpha - 1)f_2} = \frac{1 + \mu_w}{\gamma + \mu_w}, \quad \alpha \leftrightarrow 2\gamma - 1. \quad (9)$$

Подтвердим справедливость формулы (9), используя известные теоретические и численные расчеты других авторов. Впервые теоретическую зависимость коэффициента присоединенной массы  $\mu_w$  от концентрации частиц получил Зубер [10]:

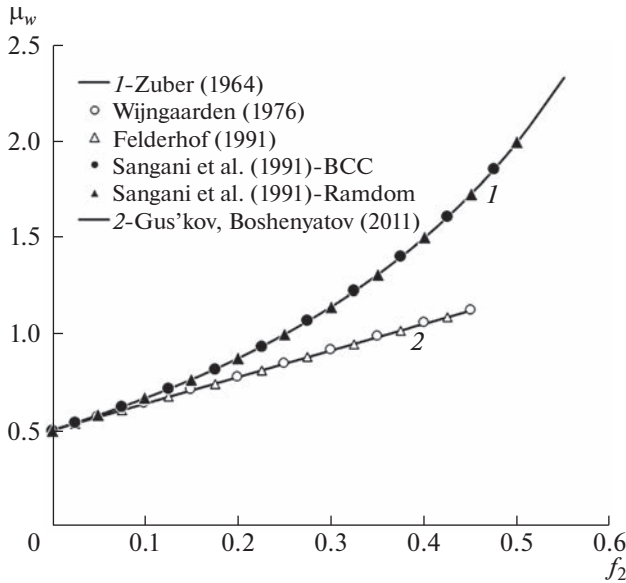
$$\mu_w = \frac{11 + 2f_2}{2(1 - f_2)}. \quad (10)$$

Из формулы (10) следует ранее известный результат: при  $f_2 \rightarrow 0$   $\mu_w = 1/2$ . При выводе формулы (10) Зубер использовал приближение идеальной несжимаемой жидкости и модель жесткой сферической “ячейки” (рис. 2б), имеющей сред-

ний радиус  $\langle l \rangle = a/f_2^{1/3}$ , в центре которой была помещена сферическая (с радиусом  $a$ ) дисперсная частица. Скорость частицы относительно жесткой стенки ячейки задается формулой (6):  $\nabla \varphi_2 = -V(t)$ . Если предположить, что на динамику данной частицы не оказывают влияние гидродинамические поля возмущений от соседних частиц (гидродинамическое взаимодействие частиц отсутствует), то жесткая граница ячейки переносится на  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$  и дает граничное условие для дисперсной среды  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ ,  $\nabla \varphi \rightarrow 0$ . С учетом принципа относительности Галилея постановка задачи Зубером совпадает с постановкой задачи в данной работе (рис. 2а) и в работах [2, 9, 11].

В работе [2] приведены результаты численных расчетов присоединенной массы дисперсных частиц в зависимости от их объемной концентрации при различных пространственных распределениях частиц – хаотичном и гексагональном (body-centered cubic arrays – BCC). При этом, как и в работе [3], авторы использовали линеаризованные уравнения Навье–Стокса. На рис. 3 показаны зависимости коэффициента присоединенной массы пузырьков ( $\gamma \ll 1$ ) от их объемной концентрации, полученные различными авторами. Из рис. 3 видно, что численные расчеты [2] удивительным образом подтверждают справедливость формулы Зубера, которая не учитывает гидродинамическое взаимодействие частиц, во всем расчетном диапазоне концентраций  $0 < f_2 < 0.5$ . При этом характер пространственного распределения пузырьков (хаотичное или периодическая гексагональная решетка) практически не влияет на результаты численных расчетов. Теории линейного приближения, даже с учетом взаимодействия частиц [3, 9, 11], дают результат, совпадающий с численным экспериментом [2] лишь в диапазоне  $0 < f_2 < 0.1$ .

Если мы в формулу (9) подставим зависимость Зубера (10) для коэффициента присоединенной



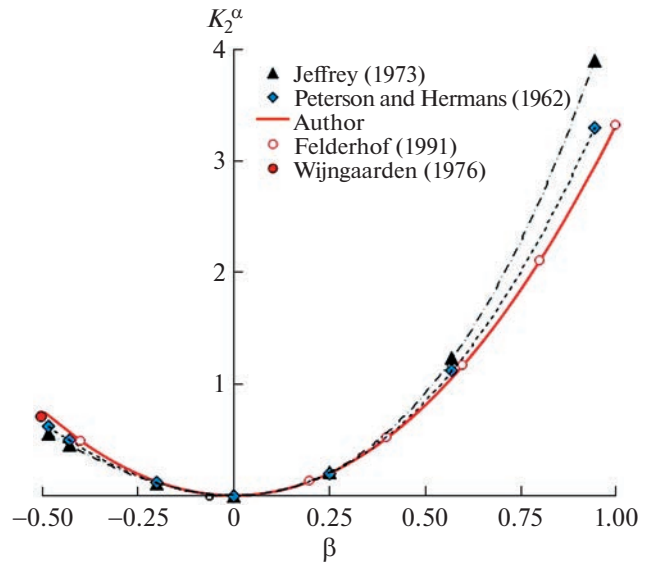
**Рис. 3.** Зависимость присоединенной массы пузырьков ( $\gamma \ll 1$ ) от их объемной концентрации: 1 – формула Зубера (10), которая не учитывает гидродинамическое взаимодействие пузырьков; 2 – зависимость с учетом гидродинамического взаимодействия пузырьков в линейном приближении.

массы, то получим знаменитую формулу Максвелла:

$$\alpha^* = \frac{1 + 2\beta f_2}{1 - \beta f_2}, \quad \text{где} \quad \beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 2}, \quad (11)$$

которая предназначена для вычисления электро- и теплопроводности дисперсной среды. В работах [5, 12] было показано, что формула (11) дает приемлемую точность в диапазоне объемных концентраций  $0 < f_2 < 0.5$ . Таким образом, формула Зубера (10) является точным аналогом знаменитой формулы Максвелла (11), что замечательным образом подтверждает справедливость полученной нами функциональной зависимости (9) для случая, когда взаимодействием дисперсных частиц можно пренебречь.

Проверим справедливость формулы (9) на примерах теоретических расчетов эффективных коэффициентов  $\alpha^*$  и  $\mu_w$  с учетом гидродинамического взаимодействия дисперсных частиц. Если мы в формулу (9) подставим коэффициент присоединенной массы (вычисленный с учетом взаимодействия частиц) в первом приближении по концентрации  $\mu_w = 1 + k_\mu^{(1)} f_2 + O(f_2^2)$ , то мы получим эффективный коэффициент теплопроводности  $\alpha^* = 1 + k_\alpha^{(1)} f_2 + k_\alpha^{(2)} f_2^2 + O(f_2^3)$  во втором приближении по концентрации. Поскольку на коэффициент  $k_\alpha^{(1)} = 3\beta$  взаимодействие дисперсных



**Рис. 4.** Сравнение формулы (13) с теоретическими расчетами других авторов с учетом гидродинамического взаимодействия дисперсных частиц.

частиц влияния не оказывает, нетрудно показать, что из формулы (9) следует

$$k_\alpha^{(2)} = \beta^2 k_\mu^{(1)}. \quad (12)$$

Если мы в формулу (12) или (9) подставим аналитическую зависимость  $k_\mu^{(1)} = \frac{151}{48} - \frac{4245}{112641} \frac{1-\gamma}{1+2\gamma} + \frac{40}{11264} \left( \frac{1-\gamma}{1+2\gamma} \right)^2$ , полученную в работе [11], то, с учетом (3), получим аналитическую зависимость  $k_\alpha^{(2)} = f(\beta)$  для вычисления эффективного коэффициента теплопроводности во втором приближении по концентрации:

$$k_\alpha^{(2)} = \beta^2 (3.1458 + 0.1884\beta + 8.88 \times 10^{-4} \beta^2). \quad (13)$$

На рис. 4 дано сравнение формулы (13) с расчетами коэффициентов  $k_\alpha^{(2)}$ , полученными в работе [13] независимым методом в результате решения задачи о теплопроводности дисперсной среды с учетом гидродинамического взаимодействия. Приведены также результаты расчета коэффициента  $k_\alpha^{(2)}$  с использованием формулы (12) и теоретические данные работ [3, 9].

Из рис. 4 видно, что аналитическая формула (13), которая является следствием формулы (9), вполне согласуется с теоретическими расчетами других авторов с учетом гидродинамического взаимодействия дисперсных частиц. Таким образом, полученная в настоящей работе функциональная связь эффективных коэффициентов  $\alpha^*$  и  $\mu_w$  (9) подтверждается и в условиях, когда необходимо

учитывать дистанционное гидродинамическое взаимодействие дисперсных частиц.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (госзадание № 121112200122-7).

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дульнев Г.Н., Новиков В.В.* Процессы переноса в неоднородных средах. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд., 1991. 248 с.
2. *Sangani A.S., Zhang D.Z., Prosperetti A.* The added mass, Basset, and viscous drag coefficients in nondilute bubbly liquids undergoing small amplitude oscillatory motion // *Phys. Fluids A*. 1991. V. 3. № 12. P. 2955–2970.  
<https://doi.org/10.1063/1.857838>
3. *Felderhof B.U.* Virtual mass and drag in two-phase flow // *J. Fluid Mech.* 1991. V. 225. P. 177–196.  
<https://doi.org/10.1017/S002211209100201X>
4. *Fackrell S.* Study of the added mass of cylinders and spheres. Ph.D. thesis. University of Windsor, 2011.
5. *Бошенятов Б.В.* К теории электро- и теплопроводности пузырьковых газожидкостных сред // *ДАН*. 2014. Т. 459. № 6. С. 693–695.  
<https://doi.org/10.7868/S0869565214360080>
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. Теоретическая физика. Т. VI. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 736 с.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. Т. 8. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. 620 с.
8. *Бошенятов Б.В.* Гидродинамическое взаимодействие и присоединенная масса дисперсных частиц // *Изв. вузов. Физика*. 2014. Т. 57. № 8/2. С. 50–60.  
<http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000515869>
9. *Van Wijngaarden L.* Hydrodynamic interaction between gas bubbles in liquid // *J. Fluid Mechanics*. 1976. V. 77 (1). P. 27–44.  
<https://doi.org/10.1017/S0022112076001110>
10. *Brennen C.E.* *Fundamentals of Multiphase Flows*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 414 p.
11. *Гуськов О.Б., Бошенятов Б.В.* Гидродинамическое взаимодействие сферических частиц в потоке невязкой жидкости // *ДАН*. 2011. Т. 438. № 5. С. 626–628.
12. *Бошенятов Б.В.* К расчету эффективных коэффициентов переноса в монодисперсных суспензиях сферических частиц // *Письма в ЖТФ*. 2015. Т. 41. Вып. 3. С. 67–73.
13. *Jeffrey D.J.* Conduction through a random suspension of spheres // *Proc. Roy. Soc. London*. 1973. V. A335. P. 355–367.  
<https://doi.org/10.1098/rspa.1973.0130>

## ANALYTICAL RELATIONSHIP BETWEEN THE COEFFICIENTS OF THE ADDED MASS AND THERMAL CONDUCTIVITY IN A SUSPENSION OF SPHERICAL PARTICLES

**B. V. Boshenyatov<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS R.I. Nigmatulin

An analytical dependence between the dimensionless coefficients of the added mass and thermal conductivity was obtained in a suspension of spherical particles. The dependence is confirmed by comparison with the theoretical data of other authors, including at elevated concentrations of dispersed particles, taking into account their hydrodynamic interaction.

*Keywords:* suspension, ideal incompressible fluid, added mass coefficient, thermal conductivity coefficient

УДК 539.3

## О РОЛИ КОЭФФИЦИЕНТА СВЯЗАННОСТИ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

© 2023 г. Академик РАН Н. Ф. Морозов<sup>1,2,\*</sup>, член-корреспондент РАН Д. А. Индейцев,  
К. Л. Муратиков<sup>3</sup>, Д. С. Вавилов<sup>1,4,\*\*</sup>, А. А. Кудрявцев<sup>5,\*\*\*</sup>

Поступило 22.03.2023 г.  
После доработки 22.03.2023 г.  
Принято к публикации 07.05.2023 г.

Рассматривается динамическая задача термоупругости в среде с сосредоточенным включением. Показано, что в резонансном режиме важную роль приобретает коэффициент связанности полей температуры и деформации. Связанность задачи и наличие дискретного спектра приводят к появлению в выражении для температуры дополнительного слагаемого, имеющего локализованный характер и не описывающего диффузионный процесс.

*Ключевые слова:* включение, динамическая термоупругость, коэффициент связанности

DOI: 10.31857/S2686740023050103, EDN: ZOAHEN

Одним из важных вопросов при исследовании динамики систем с различного рода дефектами и включениями является поиск условий существования локализованного решения, когда энергия не распространяется в виде волны в среде, а оказывается сосредоточенной вблизи включений. Этот вопрос сводится к доказательству существования вещественного дискретного спектра собственных частот колебаний, который может располагаться как отдельно от участка непрерывного спектра, так и быть включенным в него. Наиболее простым примером подобной модели с единственной характерной частотой являются продольные колебания полубесконечного стержня на упругом основании с инерционным включением на границе. Оно приводит к возникновению в сплошном спектре колебаний дискретной частоты, которой соответствует локализованная вблизи сосредоточенной массы форма, наиболее

ярко проявляющаяся в резонансном режиме. Данная частота расположена ниже так называемой частоты отсечки, отделяющей дискретный спектр частот от непрерывного. Здесь рассматривается обобщение этой задачи на случай теплового воздействия.

Задача об определении температурных напряжений в динамической постановке впервые была решена в работе В.И. Даниловской в 1950 г. [2]. В отсутствие массовых сил и тепловых источников и с учетом малости термических возмущений и деформаций система уравнений, описывающая распространение термоупругой волны, имеет вид [3, 4]

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \rho \ddot{\mathbf{u}} = (3\lambda + 2\mu) \nabla \Theta, \quad (1)$$

$$\chi \Delta \Theta - \dot{\Theta} = \nu \dot{v}.$$

Здесь  $\mathbf{u}$  – вектор перемещения,  $\Theta$  – изменение температуры по сравнению с ее равновесным значением  $T_0$ ,  $\lambda$  и  $\mu$  – постоянные Ламе,  $\chi$  – коэффициент температуропроводности. Через  $\nu = \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha T_0}{c_V}$ , где  $\alpha$  – это линейный коэффициент теплового расширения и  $c_V$  – удельная теплоемкость, обозначен так называемый коэффициент связанности, определяющий влияние деформаций на распределение температуры. Система уравнений (1), дополненная соответствующими граничными условиями, описывает связанную динамическую задачу термоупругости в общей постановке, поиск решения которой представляет собой сложную математическую проблему. Правда, в работах [5, 6] отмечается, что в боль-

<sup>1</sup>Институт проблем машиноведения  
Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,  
Санкт-Петербург, Россия

<sup>3</sup>Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе  
Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

<sup>4</sup>Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского,  
Санкт-Петербург, Россия

<sup>5</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет  
Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

\*E-mail: n.morozov@spbu.ru,

\*\*E-mail: londr@yandex.ru,

\*\*\*E-mail: kudryavtsev\_aa@spbstu.ru



шинстве практических случаев влиянием связанности можно пренебречь и сначала независимо решать уравнение теплопроводности, а затем по найденному температурному полю определять напряженно-деформированное состояние.

В данном сообщении будет показано, что этот вывод может оказаться несостоятельным в присутствии дефектов в деформируемом теле. В качестве примера рассмотрим одномерную модель полубесконечного стержня с плотностью  $\rho$  и модулем Юнга  $E$ , на торце которого находится сосредоточенная масса. Стержень опирается на упругое основание с коэффициентом жесткости  $k$ . Колебания данной системы описываются уравнением баланса импульса

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \ddot{u} - ku = 0. \quad (2)$$

Если связь между напряжением  $\sigma$  и деформацией  $\varepsilon$  задается с помощью соотношения Дюамеля–Неймана  $\sigma = E(\varepsilon - \alpha\Theta)$ , а процесс распространения тепла в стержне подчиняется закону Фурье, то динамические уравнения термоупругости имеют вид

$$\begin{aligned} \chi \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} - \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= \frac{\alpha E T_0}{c_V} \dot{\varepsilon}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \frac{k}{E} \varepsilon &= \alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $c_0^2 = \frac{E}{\rho}$  – скорость звука. После введения без-

размерных переменных  $\xi = \frac{c_0 x}{\chi}$ ,  $\tau = \frac{c_0^2 t}{\chi}$ ,  $\vartheta = \frac{\Theta}{T_0}$  система уравнений (3) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} &= \eta \dot{\varepsilon}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2} - \omega_c^2 \varepsilon &= \alpha T_0 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\eta = \frac{\alpha E}{c_V}$  – коэффициент связанности,

$\omega_c = \frac{\chi}{c_0} \sqrt{\frac{k}{\rho}}$  – безразмерная частота отсечки. Данную систему необходимо дополнить граничными условиями. В случае абсолютно жесткого контакта стержня с включением, когда их перемещения совпадают, деформация на торце при выполнении соотношения Дюамеля–Неймана удовлетворяет условию

$$\varepsilon|_{\xi=0} = \alpha T_0 \vartheta_0 + \beta \dot{u}_0, \quad (5)$$

где  $u_0$  и  $\vartheta_0$  – перемещение и температура на торце,  $\beta = \frac{\kappa h c_0}{\chi}$  – коэффициент, значение которого зависит от параметров сосредоточенной массы и стержня. Через  $h$  обозначен линейный размер включения, а через  $\kappa$  – отношение его плотности к плотности материала. Действие теплового источника на границе задается в виде потока тепла, определяемого функцией  $W(t)$ :

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{W(t)}{c_0 T_0}. \quad (6)$$

На бесконечности ставится условие ограниченности решения. При  $\eta = 0$  решение несвязанной задачи с нулевыми начальными условиями нетрудно получить, используя преобразование Лапласа. Изображения температуры  $\vartheta_{nc}$  и деформации  $\varepsilon_{nc}$  определяются выражениями

$$\vartheta_{nc}^L = \frac{W^L e^{-\sqrt{p}\xi}}{c_0 T_0 \sqrt{p}}, \quad (7)$$

$$\varepsilon_{nc}^L = \frac{\alpha W^L}{c_0 (\gamma_0^2 - p) \sqrt{p}} \left( \frac{\gamma_0 \left( \gamma_0^2 + \beta p^2 \right) e^{-\gamma_0 \xi}}{\gamma_0 + \beta p^2} - p e^{-\sqrt{p}\xi} \right), \quad (8)$$

где  $\gamma_0 = \sqrt{p^2 + \omega_c^2}$ . На границе области, где размещена сосредоточенная масса, выражение (8) может быть представлено в форме, аналогичной закону Дюамеля–Неймана при свободном расширении тела:

$$\varepsilon_{nc}^L|_{x=0} = \alpha_D(p) \Theta_{nc}^L, \quad (9)$$

однако коэффициент линейного теплового расширения  $\alpha_D$  в этом случае уже не является константой, а имеет динамический характер и определяется передаточной функцией [7]:

$$F(p) = \frac{\alpha_D}{\alpha} = \frac{1}{\gamma_0^2 - p} \left( \frac{\gamma_0 \left( \gamma_0^2 + \beta p^2 \right)}{\gamma_0 + \beta p^2} - p \right), \quad (10)$$

пример спектральной характеристики которой в зависимости от параметра  $\beta$  изображен на рис. 1, где  $\omega_a$  – безразмерная частота.

Эффективный коэффициент линейного теплового расширения ранее был введен в работе [8] на основе эволюционного уравнения для дефектов с целью описания их влияния на термоакустический сигнал в алюминиевых мембранах. С учетом сил инерции данный параметр обращается в бесконечность в точке, являющейся полюсом

выражения (10) и удовлетворяющей условию  $\gamma_0 + \beta p^2 = 0$ , которое при подстановке  $p = i\omega$  записывается в виде

$$\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2} = \beta\omega^2 \quad (11)$$

и означает существование дискретного спектра, лежащего ниже частоты отсечки. Полученный результат является следствием неучета связанности полей деформации и температуры.

Обратимся к случаю, когда  $\eta \neq 0$ . Обозначая через LF двойное интегральное преобразование (синус-преобразование Фурье над преобразованием Лапласа) и принимая во внимание граничное условие (5), из системы (3) находим

$$\varepsilon^{LF} = \frac{s\alpha T_0 \vartheta_0^L + s\beta p^2 u_0^L - \alpha T_0 p \vartheta^{LF}}{s^2 + \gamma^2}, \quad (12)$$

где  $\gamma = \sqrt{\gamma_0^2 + \delta p}$ . Через  $s$  и  $p$  обозначены аргументы изображений по Фурье и Лапласу соответственно. Параметр  $\delta = \alpha T_0 \eta$  пропорционален коэффициенту связанности и для большинства материалов  $\delta \ll 1$  [9]. После применения обратного преобразования Фурье с использованием уравнения свертки выражение (12) приводится к виду

$$\varepsilon^L = \alpha T_0 \vartheta_0^L e^{-\gamma \xi} + \beta p^2 u_0^L e^{-\gamma \xi} + \alpha T_0 p \int_0^\infty \vartheta^L(v) f(\xi - v) dv, \quad (13)$$

где  $f(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(s\xi)}{s^2 + \gamma^2} ds$ . Перемещение на торце  $u_0^L$  можно найти, интегрируя уравнение (13):

$$u_0^L = -\frac{\alpha T_0 \vartheta_0^L}{\gamma + \beta p^2} - \frac{\gamma \alpha T_0 p J}{\gamma + \beta p^2}, \quad (14)$$

где  $J = \int_0^\infty \vartheta(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta$ . Через  $\psi(\xi)$  обозначен интеграл от функции  $f(\xi)$ . После подстановки выражения (13) в первое из уравнений (4) задача сводится к интегро-дифференциальному уравнению относительно температуры:

$$\frac{d^2 \vartheta^L}{d\xi^2} - p \vartheta^L = \delta p \left( \frac{e^{-\gamma \xi} \gamma}{\gamma + \beta p^2} (\vartheta_0^L - \beta p^3 J) + p \int_0^\infty \vartheta^L(\zeta) f(\xi - \zeta) d\zeta \right), \quad (15)$$

решить которое в общем случае вряд ли возможно. Поэтому здесь мы ограничимся рассмотрением частного случая, когда тепловой поток на границе  $W(t)$  задается гармонической функцией с амплитудой  $W_0$  и частотой  $\omega$ , совпадающей с собственной частотой дискретного спектра, яв-

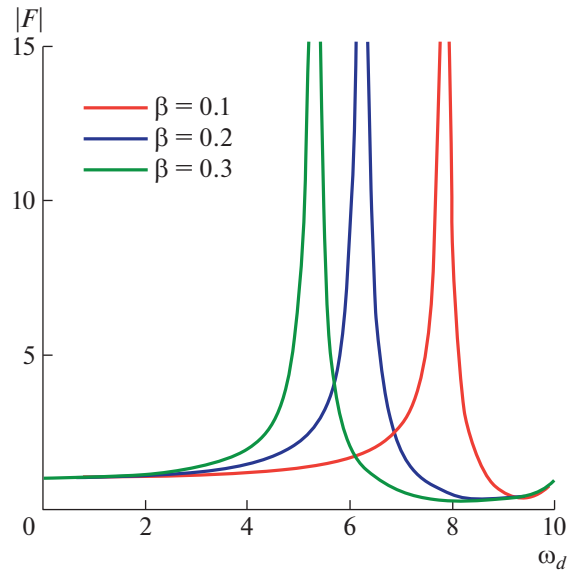


Рис. 1. Спектральная характеристика функции  $F(p)$ ,  $\omega_c = 10$ .

ляющей корнем уравнения (11). Разложив в ряд выражение  $\gamma = \sqrt{\gamma_0^2 + \delta p}$  по малому параметру  $\delta$ , получим для него следующее приближенное выражение:  $\gamma = \gamma_0 + \frac{\delta p}{2\gamma_0}$ . Тогда очевидно, что основной вклад в правую часть уравнения (15) вносит первое слагаемое, так как при нем происходит сокращение малого параметра. В данном приближении решение уравнения (15) с учетом граничного условия (6) имеет вид

$$\vartheta^L = \left( \frac{W^L}{c_0 T_0 \sqrt{p}} - \frac{2\gamma_0^3 (\vartheta_0^L - \beta p^3 J)}{\sqrt{p} (\gamma_0^2 - p)} \right) e^{-\sqrt{p} \xi} + \frac{2\gamma_0^2 (\vartheta_0^L - \beta p^3 J)}{(\gamma_0^2 - p)} e^{-\gamma_0 \xi}. \quad (16)$$

Положив  $\xi = 0$ , находим первое из уравнений для определения двух неизвестных величин  $\vartheta_0^L$  и  $J$ . Второе уравнение получится после умножения выражения (16) на функцию  $\psi(\xi)$  и интегрирования в пределах от 0 до  $\infty$ . В итоге система уравнений записывается в виде

$$\begin{aligned} a_{11} \vartheta_0^L + a_{12} J &= \frac{W^L}{c_0 T_0 \sqrt{p}}, \\ a_{21} \vartheta_0^L + a_{22} J &= \frac{W^L L_2}{c_0 T_0 \sqrt{p}}, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $a_{11} = 1 + \frac{2}{z(1+z)}$ ,  $a_{12} = \frac{2z\gamma_0^3}{1+z}$ ,  $a_{21} = -\frac{2L_1}{1-z^2}$ ,  $a_{22} = 1 - \frac{2\gamma_0^3 z^2 L_1}{1-z^2}$ ,  $z = \frac{\sqrt{p}}{\gamma_0}$ . При этом ее коэффициенты

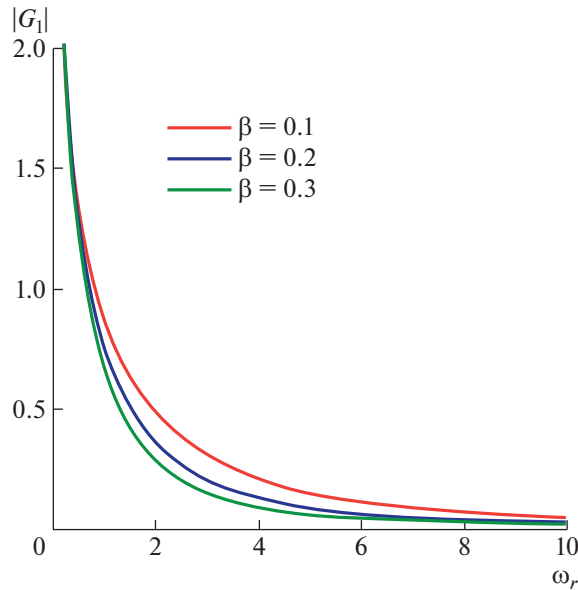


Рис. 2. Спектральная характеристика функции  $G_1(p)$ .

содержат неизвестные операторы  $L_1 = \int_0^\infty \psi(\zeta) \left( e^{-\gamma_0 \zeta} - \frac{\gamma_0}{\sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}\zeta} \right) d\zeta$  и  $L_2 = \int_0^\infty \psi(\zeta) e^{-\sqrt{p}\zeta} d\zeta$ .

Для их определения рассмотрим вспомогательное дифференциальное уравнение, заданное на положительной полуоси:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - g^2 y = -e^{-\lambda x}, \tag{18}$$

с двумя граничными условиями  $y|_{x=0} = 0, y|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ , где  $\lambda$  и  $g$  – положительные константы, не зависящие от  $x$ . Решение данного уравнения имеет вид

$$y = \frac{e^{-gx} - e^{-\lambda x}}{\lambda^2 - g^2}, \quad \lambda \neq g. \tag{19}$$

С другой стороны, применяя синус-преобразование Фурье, получим  $y^F = \frac{J_s}{s^2 + g^2}$ , где  $y^F = \frac{J_s}{s^2 + g^2}$ .

Используя обратное преобразование Фурье, найдем, что

$$y = -\int_0^\infty e^{-\lambda \zeta} f(x - \zeta) d\zeta. \tag{20}$$

Приравнявая выражения (19) и (20) друг другу и проинтегрировав полученное равенство, получим, что при  $x = 0$  должно быть справедливо следующее соотношение:

$$\int_0^\infty \psi(\zeta) e^{-\lambda \zeta} d\zeta = \frac{1}{(g + \lambda)g\lambda}. \tag{21}$$

Если положить в нем  $\lambda = \sqrt{p}$  и  $g = \gamma_0$ , то оказывается, что  $L_2 = -\frac{1}{(1+z)\gamma_0^3}$ . Когда  $\lambda = g$ , решение

уравнения (18) записывается в виде  $y = \frac{x e^{-\lambda x}}{2\lambda}$ . Проводя аналогичную процедуру и полагая  $\lambda = \gamma_0$ , находим  $L_1 = -\frac{1}{2\gamma_0^3} + \frac{1}{(1+z)z^2\gamma_0^3}$ . После определения интегралов решение системы (17) находится элементарно:

$$\begin{aligned} \vartheta_0^L &= \frac{W^L}{c_0 T_0 \sqrt{p}} \frac{z}{z+2}, \\ J &= \frac{W^L}{c_0 T_0 \sqrt{p}} \frac{1}{(z+2)\gamma_0^3}. \end{aligned} \tag{22}$$

Из полученного результата видно, что связь между тепловым потоком и температурой на границе задается с помощью передаточной функции

$$\begin{aligned} G_1(p) &= \frac{1}{\sqrt{p} + 2\gamma_0}; \\ \vartheta_0^L &= \frac{W^L G_1(p)}{c_0 T_0}. \end{aligned} \tag{23}$$

Ее зависимость от резонансной частоты  $\omega$ , при различных значениях параметра  $\beta$  изображена на рис. 2.

Возвращаясь к соотношению (16) и подставляя туда результат решения системы (22), представим изображение температуры в виде суммы двух слагаемых:

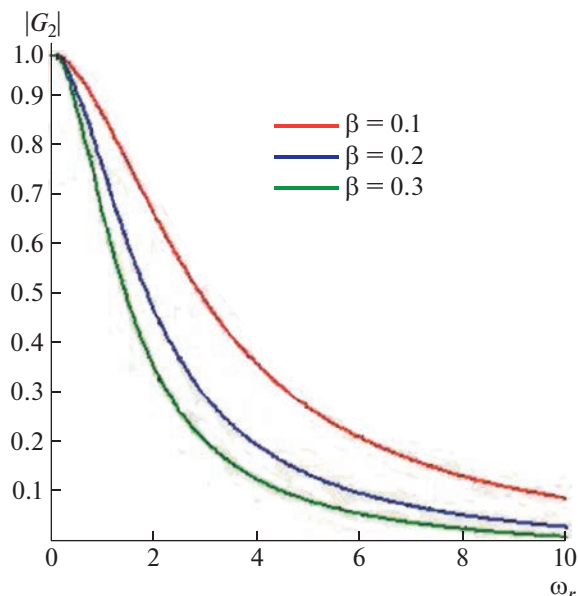


Рис. 3. Спектральная характеристика функции  $G_2(p)$ .

$$\vartheta^L = \vartheta_0^L \left( -\frac{(\gamma_0 + \sqrt{p})}{(\gamma_0 - \sqrt{p})} e^{-\sqrt{p}\xi} + \frac{2\gamma_0}{\gamma_0 - \sqrt{p}} e^{-\gamma_0\xi} \right), \quad (24)$$

где первое из них описывает распространение тепла в глубь стержня, а второе соответствует локализованному решению. На границе области при  $\xi = 0$  температура может быть записана в виде произведения классического решения несвязанной задачи и передаточной функции  $G_2(p) =$

$$= \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} + 2\gamma_0};$$

$$\vartheta_0^L = \vartheta_{0nc}^L G_2(p). \quad (25)$$

Спектральная характеристика этой функции показана на рис. 3.

При этом динамический коэффициент линейного теплового расширения, определяемый выражением (10), уже не обращается в бесконечность (рис. 4) благодаря наличию малого параметра  $\delta$ , выполняющего роль диссипативного элемента и определяющего амплитуду колебаний деформации.

Таким образом, учет связанности полей деформации и температуры приводит к возникновению дополнительного слагаемого в выражении для температуры (24), локализованного вблизи сосредоточенного включения и не описывающего диффузионный процесс. Характер распределения локализованного решения определяется свойствами дефекта, который в резонансном режиме выступает в качестве динамического гаси-

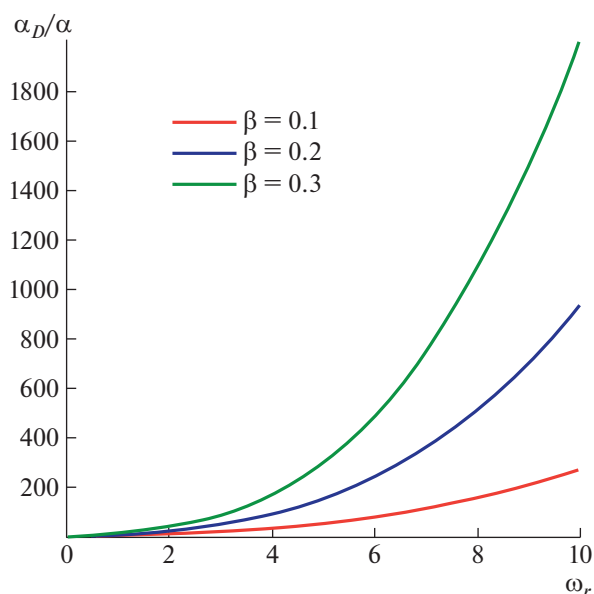


Рис. 4. Спектральная характеристика коэффициента линейного теплового расширения,  $\delta = 0.1$ .

теля тепловых колебаний и уменьшает температуру на поверхности по сравнению с решением несвязанной задачи.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование частично финансируется Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках программы Исследовательского центра мирового уровня “Передовые цифровые технологии” (соглашение № 075-15-2020-311 от 20.04.2022 г.).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Индейцев Д.А., Кузнецов Н.Г., Мотыгин О.В., Мочалова Ю.А. Локализация линейных волн. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2007. 342 с.
2. Даниловская В.И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы // Прикл. мат. и мех. 1950. Т. 14. № 3. С. 316–318.
3. Коваленко А.Д. Термоупругость. Киев: Вища шк., 1975. 216 с.
4. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. / М.: Мир, 1970. 254 с.
5. Ненахов Е.В., Карташов Э.М. Теория теплового удара в моделях динамической термоупругости // Тепловые процессы в технике. 2019. Т. 11. № 5. С. 230–240.

6. Карташов Э.М. Модельные представления теплового удара в динамической термоупругости // Russian Technological Journal. 2020. Т. 8. № 2. С. 85–108.
7. Морозов Н.Ф., Индейцев Д.А., Муратиков К.Л., Семенов Б.Н., Вавилов Д.С., Кудрявцев А.А. О влиянии релаксационных процессов на термоакустику материалов // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2021. Т. 500. С. 48–52.
8. Глазов А.Л., Муратиков К.Л. Акустические колебания алюминиевых мембран при лазерном возбуждении по термоупругому механизму // Письма в Журнал технической физики. 2020. Т. 46. № 10. С. 18–20.
9. Карташов Э.М., Партон В.З. Динамическая термоупругость и проблемы термического удара // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. 1991. Т. 22. С. 55–127.

## ON THE ROLE OF COUPLING COEFFICIENT IN DYNAMIC PROBLEM OF THERMOELASTICITY WITH LOCALIZED INCLUSION

Academician N. F. Morozov<sup>a,b</sup>, Corresponding Member of the RAS D. A. Indeitsev, K. L. Muratikov<sup>c</sup>,  
D. S. Vavilov<sup>a,d</sup>, and A. A. Kudryavtsev<sup>e</sup>

<sup>a</sup>*Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia*

<sup>b</sup>*St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia*

<sup>c</sup>*Ioffe Institute of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia*

<sup>d</sup>*A.F. Mozhaysky Military-Space Academy, St. Petersburg, Russia*

<sup>e</sup>*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia*

In the present paper the dynamic problem of thermoelasticity with a localized inclusion in the medium is considered. It is shown that in the resonant regime an important role is played by the coupling coefficient of the temperature and strain fields. The coupling of the problem and the presence of a discrete spectrum lead to the appearance of an additional term in the expression for temperature, which is localized and does not describe the diffusion process.

*Keywords:* inclusion, dynamic thermoelasticity, coupling coefficient

УДК 535.332

## РАМАН-ГЕОТЕРМОМЕТР ДЛЯ УГЛИСТЫХ ХОНДРИТОВ

© 2023 г. С. А. Воропаев<sup>1,\*</sup>, А. П. Кривенко<sup>1</sup>, Н. В. Душенко<sup>1</sup>

Представлено академиком РАН М.Я. Маровым 21.02.2023 г.

Поступило 21.02.2023 г.

После доработки 21.02.2023 г.

Принято к публикации 07.05.2023 г.

Образцы метеорита Murchison (углистый хондрит, тип CM2) выдерживались изотермически в специально сконструированном приборе при температурах 200, 500 и 800°C. После остывания образцов в инертной атмосфере гелия снимались спектры комбинационного (Раман) рассеяния. Было обнаружено усиление интенсивности G- и D-линий графита в зависимости от величины нагрева. Показано, что по такому характерному параметру этих линий, как отношение площадей,  $S_D/S_G$ , можно построить геотермометр для определения максимальной температуры теплового метаморфизма родительских тел углистых хондритов. Проведено сравнение с известными данными для углистого хондрита Allende (CV3), испытавшего сильный тепловой метаморфизм.

*Ключевые слова:* углистые хондриты, дегазация, углерод, Луна, раман-спектры

**DOI:** 10.31857/S2686740023050139, **EDN:** HWLJXD

В настоящее время основными процессами накопления воды и летучих в лунном реголите считаются миграция вещества в ранней Солнечной системе [1] и дегазация лунной мантии через разрывы коры. В первом случае углистые хондриты являются наиболее ценными источниками, так как содержат значительное количество воды (до 6 вес. %), углерод-содержащих соединений (до 2 вес. %) и редкоземельных металлов (до 3 вес. %). Попадая на лунную поверхность после соударений, обломки углистых хондритов оказываются со временем захороненными в толще реголита и подвергаются изменяющемуся со временем нагреву. При этом происходит дегазация и тепловое преобразование вещества, индикатором которого может служить графитизация внеземной органики. Известно, что спектр комбинационного (Раман) рассеяния (КР) графита содержит две линии 1-го порядка – G (~1580 1/см) и D (~1350 1/см). Их интенсивности и форма зависят от многих факторов, главными из которых являются размер и упорядоченность доменов графита в общей углеродной матрице [2].

Эта особенность КР-спектров углерод-содержащих земных пород легла в основу целого ряда геотермометров, где за основу брались различные характеристики G/D линий: например, полуши-

рина или отношение интенсивностей. В частности, были предприняты попытки определять степень зрелости углей с помощью Рамановской спектроскопии [3]. Сложность такого подхода заключается в том, что структура графитизированного углерода зависит как от химической природы прекурсора, так и условий преобразования исходной органики. Поэтому Раман-геотермометр, разработанный для земных углей, может не работать для органического вещества углистых хондритов. Чтобы проверить это утверждение, мы использовали изотермический отжиг вещества Murchison как наименее преобразованного углистого хондрита (тип CM2) при температурах 200, 500 и 800°C. Все три навески предварительно прокаливались в гелии при температуре 100°C с контролем состава отходящих газов на газовом хроматографе, до исчезновения земных примесей. Данная методика была отработана нами в экспериментах по дегазации хондритов и детально описана [4].

Как известно, колебания кристаллической решетки минералов отражаются в их КР-спектрах. Эффект неупругого рассеяния внешней электромагнитной волны за счет гармоник собственных колебаний решетки был открыт Раманом в 1928 г. (Рамановский сдвиг) и широко используется для определения минеральной композиции хондритов [5]. КР-спектры углистого хондрита Murchison были получены в диапазоне 220–2500 1/см с помощью конфокального рамановского спектрометра Renishaw inVia, оснащенного твердотельным лазером с диодной накачкой с длиной волны

<sup>1</sup>Институт геохимии и аналитической химии им. В.И. Вернадского Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: voropaev@geokhi.ru

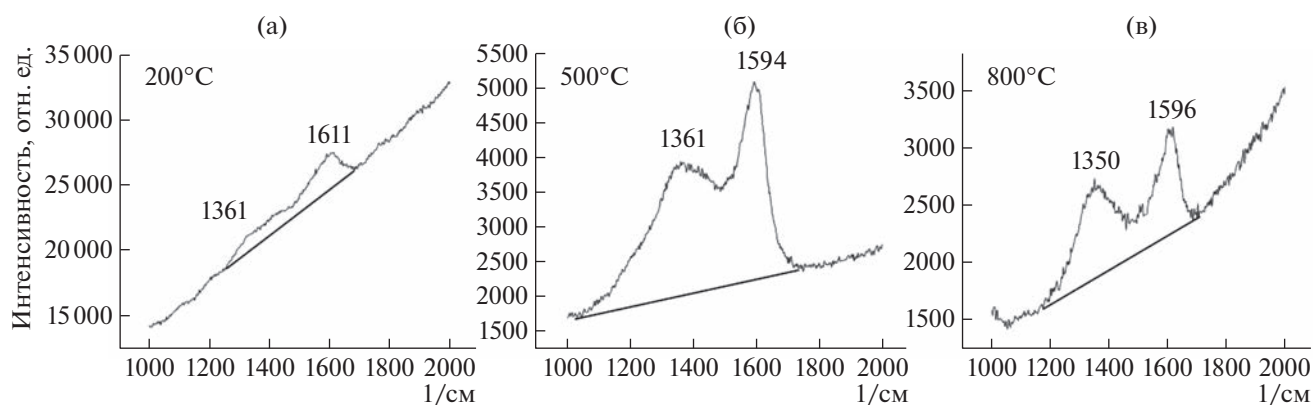


Рис. 1. КР-спектры Murchison после отжига при 200 (а), 500 (б) и 800°C (в).

532 нм. Эталонная кремниевая пластина ( $520.7 \pm \pm 0.5$  1/см) использовалась для калибровки прибора перед каждой серией измерений. Спектральное и пространственное разрешение составляли 1 1/см и 2 мкм соответственно. Матрица детектора Renishaw Centrus 2945K7 ( $1040 \times 256$  пикселей) охлаждалась до  $-70^\circ\text{C}$  с помощью модуля Пельтье. Чтобы избежать нагрева и сжигания вещества во время получения КР-спектров, мы использовали 5% от общей мощности лазера ( $\sim 1$  мВт, что соответствует плотности мощности лазера в  $\sim 0.625$  мВт/мкм<sup>2</sup>). Такая величина лазерного воздействия на образец недостаточна, чтобы вызвать какие-либо термические изменения или повреждение вещества. Время воздействия лазера составляло от 1 до 10 с, размер лазерного пятна около 2 мкм. В оптической части спектрометра использовалась дифракционная решетка 1200 линий/мм. Встроенное программное обеспечение Wire Рамановского спектрометра Renishaw (версия Wire 5.2) использовалось для постобработки

данных и оценки ширины на половине максимума (FWHM) для гармоник первого порядка.

В свое время в метеорите Murchison (CM2) было найдено множество сложных органических соединений внеземного происхождения: описаны аланин, аденин, глутаминовая кислота, аспарагиновая кислота и др. Тем не менее, несмотря на особый интерес к внеземной органике углистых хондритов, общий весовой вклад ее в веществе незначителен. Так, для Murchison была определена следующая концентрация органических соединений по категориям [6]: аминокислоты – 17–60 ppm; алифатические углеводороды  $\approx 35$  ppm; ароматические углеводороды – 3319 ppm; карбоновые кислоты  $\approx 300$  ppm; сульфокислоты – 68 ppm; спирты, гидрокарбоновые и фосфоновые кислоты  $\approx 2$ –10 ppm. Основную массу вещества составляют преобразованные филлосиликаты, силикатные хондры в матрице мелкодисперсной пыли и вторичные минералы, такие как доломит, магнетит и сульфиды [7]. Большую часть органики Murchison составляют полиароматические углеводороды (ПАУВ), которые под действием нагрева образуют сложную полимерную сетку с ее последующей графитизацией. В КР-спектрах образцов (снятых после их остывания в инертной атмосфере гелия) заметно усиление интенсивности G- и D-линий графита в зависимости от температуры нагрева (см. рис. 1).

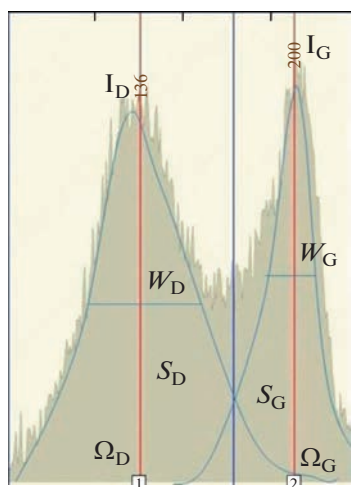


Рис. 2. Основные характеристики линий G и D в КР-спектре Murchison после отжига.

Люминесценция, возникающая при облучении лазером слабо-кристаллизованного вещества Murchison, вызывает заметный дрейф базовой линии. После линейной коррекции спектр принимает стандартный вид (см. рис. 2), который позволяет сделать количественные оценки таких величин, как полуширина линии, отношение интенсивностей и др. Современные пакеты обработки спектров, например, Origin 12, имеют встроенные функции для автоматического вычисления необходимых характеристик линий.

Используемый нами рамановский спектрометр Renishaw inVia позволяет снять карту спек-

**Таблица 1.** Средние данные КР-спектров Murchison после отжига

$t, ^\circ\text{C}$	$\Omega_D, 1/\text{см}$	$\Omega_G, 1/\text{см}$	$I_G/I_D$	$S_G/S_D$	$S_D/S_G$	$W_D, 1/\text{см}$	$W_G, 1/\text{см}$
800	1369	1604	1.083527	0.614207	1.628115	138	84
500	1351	1592	1.478019	0.746294	1.339954	180	100
200	1390	1601	1.84898	1.126919	0.887375	148	92

тров по точкам матрицы размером  $100 \times 100$ , с шагом 10 мкм. Это особенно удобно для статистического анализа, когда образец неоднороден по степени теплового метаморфизма. После обработки набора КР-спектров, содержащих линии графитизированной органики (для каждой температуры порядка 1000 спектров), мы получили средние данные (см. табл. 1).

Корреляционный анализ величин в табл. 1 показал эмпирическую нелинейную зависимость  $t$  ( $^\circ\text{C}$ ) от соотношения площадей:

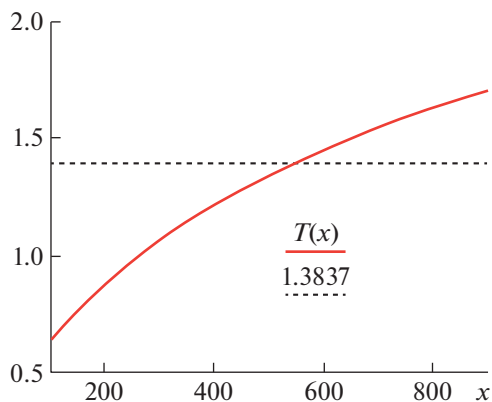
$$S_D/S_G = \sqrt{t/[b \cdot (1 + a(t - 500))]}, \quad (1)$$

где  $a = 1/6000$ ,  $b = 16.688$ .

График правой части как функции  $t$  ( $^\circ\text{C}$ ) приведен на рис. 3. Отклонения от данной зависимости укладываются в интервал погрешностей измерения спектров и вычисления параметров G- и D-линий графитизированной органики.

Для проверки зависимости (1) в качестве Раман-геотермометра мы рассмотрели вещество другого углистого хондрита – Allende (тип CV3), испытывавшего значительный тепловой метаморфизм [8]. КР-спектр Allende представлен на рис. 4, где заметен оливин (дублет линий 816 и 844  $1/\text{см}$ ) совместно с G- и D-линиями преобразованного органического вещества (ПОВ).

Численная оценка параметров G- и D-линий ПОВ Allende дает величину  $S_D/S_G \approx 1.3837$ , что по зависимости (1) отвечает максимальной температуре теплового метаморфизма родительского тела

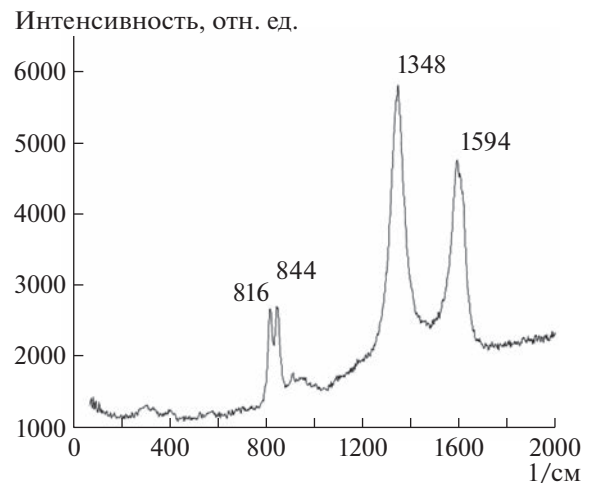
**Рис. 3.** Зависимость  $S_D/S_G$  от температуры для Раман-геотермометра.

(PMT) –  $t_M \approx 540^\circ\text{C}$ . Существует ряд других моделей, использующих частоты  $\Omega_G$  и  $\Omega_D$ , их полуширины  $W_G$  и  $W_D$ , отношение интенсивности линий  $I_D/I_G$  и другие параметры спектра. Наиболее простая модель [9] связывает PMT и  $W_D$  соотношением

$$\text{PMT}(^\circ\text{C}) = 931 - 5 \cdot W_D + 0.009(W_D)^2. \quad (2)$$

Используя среднее значение  $W_D \approx 80$ , полученное из КР-спектров Allende, его PMT по (2) оценивается как  $t_M \approx 580^\circ\text{C}$ . Здесь необходимо отметить, что на полуширину линии КР-спектра значительное влияние оказывает несовершенство кристаллической решетки. Поэтому привязка геотермометра (2) к  $W_D$  позволяет сравнивать между собой только “отстоявшиеся” структуры, когда их кристаллические решетки освободились от всевозможных дефектов. В случае геотермометра (1) эти ограничения снимаются, поскольку мы используем такие характеристики, как площадь линий, более устойчивые к несовершенству решетки.

Показательным примером значимости углистых хондритов для запасов летучих на Луне являются результаты эксперимента NASA, проведенного в 2009 г. космическим зондом LCROSS [10]. Разгонный блок ракеты был направлен на поверхность Луны в кратер Кабеус, находящийся примерно в 100 км от ее Южного полюса. Аппарат

**Рис. 4.** КР-спектр Allende (CV3): оливин + ПОВ.



пролетел через выброшенное облако газа и пыли, анализируя его химический состав. Одновременно наблюдения велись радиометром DLR с борта лунного орбитального спутника LRO. Совместными усилиями было определено наличие порядка 143–167 кг воды в виде пара и льда, что позволило оценить массовую долю водного льда в реголите от 3 до 8%. В целом спектроскопические данные, полученные приборами LRO, выявили наличие 570 кг угарного газа, 140 кг молекулярного водорода, 160 кг кальция, 120 кг ртути и 40 кг магния. Также, по данным зонда LCROSS, в поднятом облаке обнаружили следы натрия, аммиака, гидроксильных групп, углекислого газа и серебра.

Наличие большого количества угарного газа указывает на существенные запасы углерода и/или сложных углеродных соединений в лунном реголите, в том числе от углистых хондритов. Использование Раман-геотермометра *in situ* позволит не только качественно определить наличие ПОВ в окрестности метапосадки, но и корректно оценить тепловой режим в лунном реголите.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-17-00120).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маров М.Я., Инатов С.И.* Процессы миграции в Солнечной системе и их роль в эволюции Земли и планет // УФН. 2023. Т. 193. С. 2–32.
2. *Tuinstra F., Koenig J.L.* Raman spectrum of graphite // J. Chemical Physics. 1970. V. 53. P. 1126–1130.
3. *Wopenka B., Pasteris J.D.* Structural characterization of kerogens to granulite-facies graphite: Applicability of Raman microprobe spectroscopy // American Mineralogist. 1993. V. 78. P. 533–557.
4. *Воропаев С.А., Душенко Н.В., Федулов В.С., Сенин В.Г.* Особенности дегазации азота хондрита Dhajala (H3.8) // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2023. Т. 509. № 2. С. 20–26.
5. *Voropaev S., Boettger U., Pavlov S., Hanke F., Petukhov D.* Raman spectra of the Markovka chondrite (H4) // J. Raman spectroscopy. 2021. P. 1–9. <https://doi.org/10.1002/jrs.6147>
6. *Botta O., Bada J.* Extraterrestrial organic compounds in meteorites // Surveys in Geophysics. 2002. V. 23. P. 411–467.
7. *Zolensky M., Barrett R., and Browning L.* Mineralogy and composition of matrix and chondrule rims in carbonaceous chondrites // Geochim. Cosmochim. Acta. 1993. V. 57. P. 3123–3148.
8. *Krot A.N., Scott E.R.D., Zolensky M.E.* Mineralogic and chemical variations among CV3 chondrites and their components: Nebular and asteroidal processing // Meteoritics. 1995. V. 30. P. 748–775.
9. *Busemann H., Alexander C., Nittler L.* Characterization of insoluble organic matter in primitive meteorites by micro Raman spectroscopy // Meteoritics & Planetary Science. 2007. V. 42 (7/8). P. 1387–1416.
10. *Schultz P.H. et al.* The LCROSS Cratering Experiment // Science. 2010. V. 330. P. 468–472.

## RAMAN-GEOTHERMOMETER FOR CARBONACEOUS CHONDRITES

S. A. Voropaev<sup>a</sup>, A. P. Krivenko<sup>a</sup>, and N. V. Dushenko<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Vernadsky Institute of Geochemistry and Analytical Chemistry of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS M.Ya. Marov

Samples of the Murchison meteorite (carbonaceous chondrite, type CM2) were kept isothermally in a specially designed device at temperatures of 200, 500 and 800°C. After the samples cooled down in an inert helium atmosphere, Raman scattering spectra were taken. An increase in the intensity of the G- and D-lines of graphite was detected depending on the degree of heating. It is shown that using such a characteristic parameter of these lines as the area ratio,  $S_D/S_G$ , it is possible to define a geothermometer to determine the maximum temperature of thermal metamorphism of the parent bodies of carbonaceous chondrites. A comparison with the known data for carbonaceous chondrite Allende (CM3), which has experienced a significant thermal metamorphism, is carried out.

*Keywords:* carbonaceous chondrites, degassing, carbon, Moon, Raman spectra

УДК 669 + 539.374 + 539.424

## РОЛЬ ОСТАТОЧНОГО АУСТЕНИТА В ВЫСОКОЙ ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ НИЗКОЛЕГИРОВАННОЙ СТАЛИ

© 2023 г. Р. В. Мишнев<sup>1,2,\*</sup>, Ю. И. Борисова<sup>1,2</sup>, академик РАН М. Н. Ерохин<sup>1</sup>,  
С. М. Гайдар<sup>1</sup>, Р. О. Кайбышев<sup>1</sup>

Поступило 16.03.2023 г.

После доработки 16.03.2023 г.

Принято к публикации 10.05.2023 г.

Сталь типа 44ХГ2С2М после обработки закалка–распределение (Q&P) имеет высокий показатель произведения прочности на удлинение  $\sigma_B \cdot \delta > 30$  ГПа · % и предел текучести  $\sigma_{0,2} > 1000$  МПа, что соответствует требованиям для перспективных высокопрочных сталей третьего поколения. Уникальное сочетание прочности и пластичности связано с высокой объемной долей остаточного аустенита  $> 25\%$ , прочность которого обусловлена высоким содержанием углерода ( $\sim 1.3\%$ ) и высокой плотностью решеточных дислокаций ( $\sim 6 \times 10^{14} \text{ м}^{-2}$ ). Высокая пластичность стали обеспечивается трансформацией остаточного аустенита в мартенсит при растяжении, что приводит к упрочнению стали при пластической деформации и способствует достижению больших величин предела прочности  $\sigma_B$  и относительного удлинения  $\delta$ .

*Ключевые слова:* сталь, механические свойства, микроструктура, остаточный аустенит

DOI: 10.31857/S2686740023050097, EDN: URYAUW

Ключевыми характеристиками перспективных высокопрочных сталей – advanced high strength steel (AHSS) являются прочность и пластичность [1]. Материалы могут быть прочными или пластичными, однако сочетание высокой прочности с хорошей пластичностью встречается редко. Общепринятым критерием, характеризующим сочетание прочности и пластичности, является произведение прочности на удлинение:  $\sigma_B \cdot \delta$  (МПа · %) [1, 2]. Для AHSS сталей третьего поколения показатель  $\sigma_B \cdot \delta$  должен составлять от 20 до 40 ГПа · % [1]. Еще одним из требований к этим сталям является значение предела текучести ( $\sigma_{0,2}$ )  $\geq 1000$  МПа [1]. Сочетания таких высоких показателей  $\sigma_{0,2}$  и  $\sigma_B \cdot \delta$  не было достигнуто в сталях первого и второго поколения [1].

Преодолеть противоречие между прочностью и пластичностью в сталях позволяет разработанная почти 20 лет назад термическая обработка, которая получила название “Quenching and Parti-

tioning”, или Q&P (“закалка–распределение”) [1–4]. Эта обработка включает в себя нагрев выше температуры  $A_{c3}$ , полную аустенитизацию с последующим ускоренным охлаждением в расплавленной соли, нагретой до температуры  $T_3$ , между температурой начала ( $M_n$ ) и конца ( $M_k$ ) мартенситного превращения. Закалка в нагретой соли обеспечивает образование первичного мартенсита и остаточного аустенита [1–5]. Следующая операция – “распределение” – представляет собой отжиг, который также обычно проводят в расплавленной соли, нагретой до температуры  $T_p$ , как правило, выше температуры  $M_n$ ; следовательно  $T_p > T_3$  [1–5]. При этой операции происходит перераспределение углерода из первичного мартенсита в остаточный аустенит, который обогащается углеродом. Одновременно при “распределении” может происходить бейнитное превращение, но химический состав стали, температура и время распределения подбираются таким образом, чтобы минимизировать удельный объем формирующегося бейнита. Следует отметить, что выделение цементита не допускается при операции “распределение”. Это достигается благодаря высокому содержанию ( $\geq 1.5$  вес. %) Si в Q&P-сталях. Последней операцией в Q&P-обработке является закалка от температуры “распределения”, что приводит к частичной трансформации остаточного аустенита во вторичный мартенсит, ко-

<sup>1</sup>Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева, Москва, Россия

<sup>2</sup>Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия

\*E-mail: mishnev91@mail.ru

торый отличается от первичного мартенсита высоким содержанием углерода.

Низколегированные стали для Q&P-обработки с содержанием углерода от 0.4 до 0.56% характеризуются высоким значением параметра  $\sigma_B \cdot \delta \geq 30$  ГПа%, что в 2 и более раз выше, чем в низколегированных автосталях, относящихся к AHSS первого поколения, в сочетании с  $\sigma_{0.2} > 1000$  МПа. Особенностью этих сталей является наличие в структуре от 12 до 30% остаточного аустенита в форме блоков после Q&P-обработки [6–8]. Высокая пластичность этих сталей связана с TRIP-эффектом (Transformation induced plasticity – пластичность, наведенная превращением) [9]. При растяжении почти 90% остаточного аустенита превращается в мартенсит деформации [10]. В то же время природа высокого предела текучести в сталях с высоким содержанием остаточного аустенита, обогащенного углеродом после Q&P-обработки, не ясна и мало изучена. Считается, что остаточный аустенит имеет прочность почти в 2 раза ниже, чем предел текучести Q&P-сталей [5], высокая прочность которых может быть обусловлена суммированием прочности высокопрочного мартенсита и низкопрочного аустенита по аддитивному закону [1, 4].

Целью настоящего исследования является установление причин высокого значения предела текучести, относительного удлинения и параметра  $\sigma_B \cdot \delta$  в новой стали типа 44XГ2С2М после Q&P-обработки.

Исследования проводились на стали Fe–0.44%С–1.81%Si–1.33%Mn–0.82%Cr–0.28%Mo (в вес. %), которая была получена индукционной плавкой на воздухе с последующим электрошлаковым переплавом. Далее сталь подвергали отжигу при 1150°C в течение 4 ч с последующей ковкой. Образцы толщиной 3 мм были подвергнуты трехступенчатой термической обработке Q&P, включающей аустенитизацию при температуре 900°C в течение 5 мин с последующей закалкой в соляной ванне, нагретой до различных температур  $T_3$  от 140 до 300°C с выдержкой в течение 15 с и последующим “распределением” при температуре  $T_p = 400^\circ\text{C}$  в течение 60 с в соляной ванне, за которым следовало охлаждение на воздухе.

Испытания на растяжение проводились на образцах с длиной рабочей части 35 мм и поперечным сечением  $7 \times 3$  мм на испытательной машине “Instron 5882” при комнатной температуре. Микроструктурные исследования проводили с помощью растрового электронного микроскопа FEI Quanta 600 FEG, оснащенного анализатором картины дифракции обратно рассеянных электронов (EBSD). Плотность дислокаций была определена из EBSD-данных по методике, описанной в работе [11]. Объемную долю остаточного аустенита рассчитывали с помощью рентгеноструктурного

анализа (РСА) с использованием дифрактометра Rigaku Ultima IV с размером шага 0.02 град, 40 кВ и 40 мА.

Среднюю концентрацию углерода в остаточном аустените рассчитывали по формуле, приведенной в работе [12]:

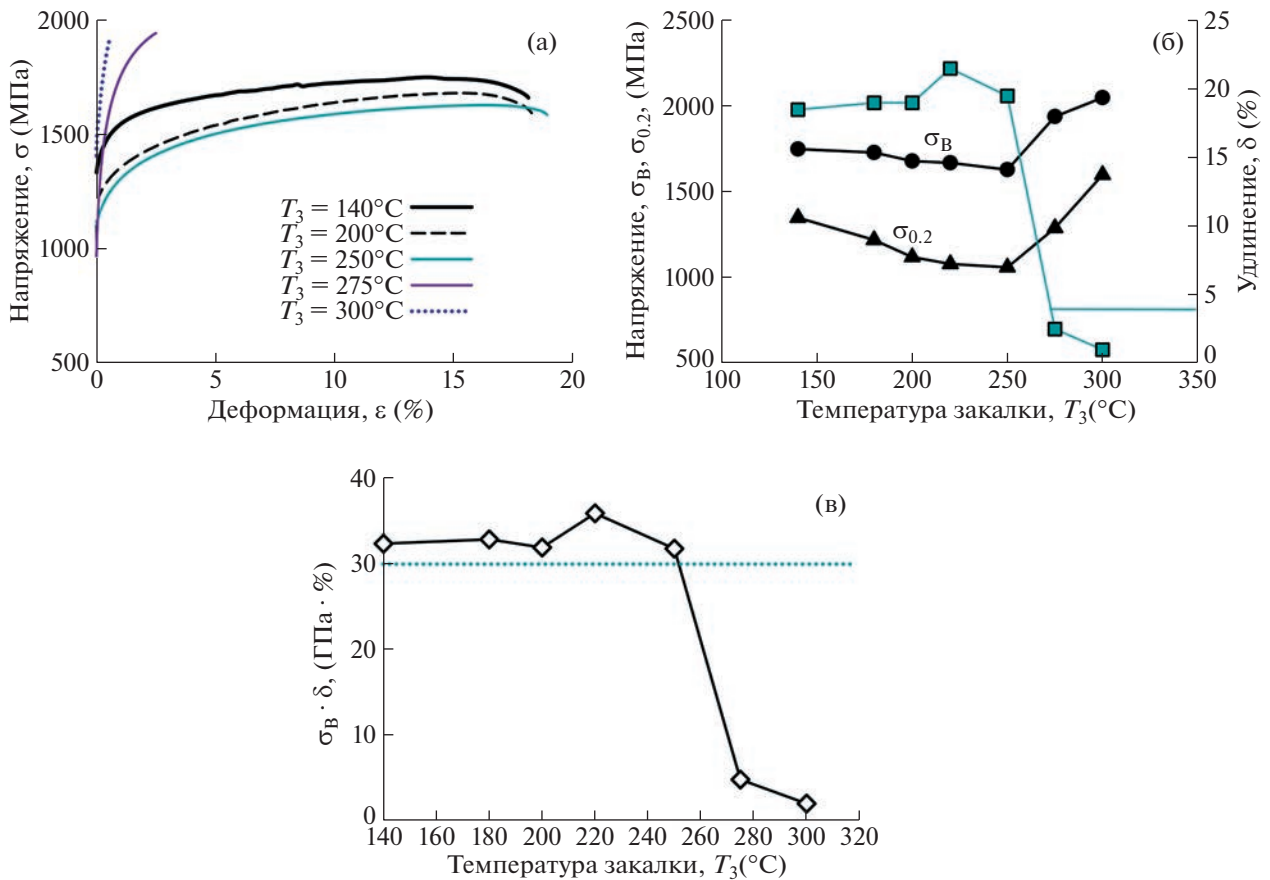
$$C_{O_A} = (a_\gamma - 3.547)/0.046, \quad (1)$$

где  $C_{O_A}$  – концентрация углерода в остаточном аустените,  $a_\gamma$  – параметр решетки аустенита.

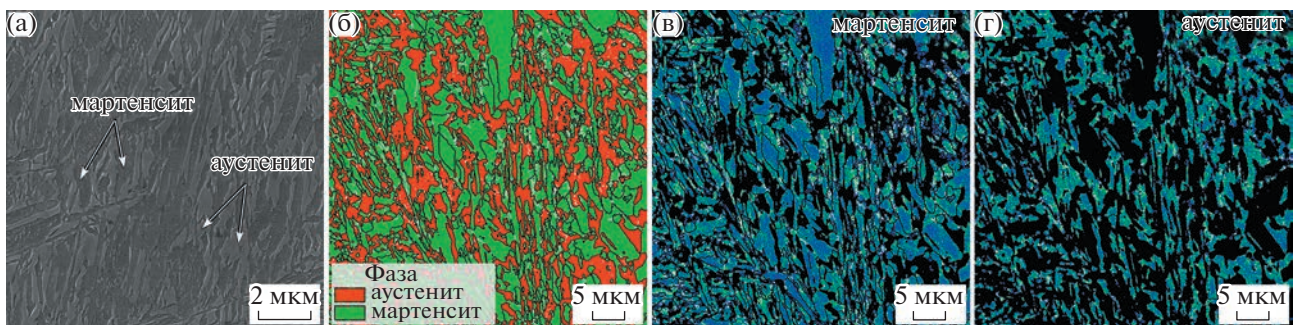
При испытании на растяжение относительное удлинение изменяется от 17.5 до 21.4% в интервале температур закалки 140–250°C, а предел прочности варьируется от  $\sigma_B = 1780$  МПа при  $T_3 = 140^\circ\text{C}$  до 1580 МПа при  $T_3 = 250^\circ\text{C}$ . В результате при температуре закалки  $\leq 250^\circ\text{C}$  значение  $\sigma_B \cdot \delta$  составляет  $>30$  ГПа·% (рис. 1), что в два раза выше, чем в автосталях, относящихся к AHSS первого поколения [1]. Величина  $\sigma_{0.2}$  варьируется от 1370 МПа при  $T_3 = 140^\circ\text{C}$  до 1170 МПа при  $T_3 = 250^\circ\text{C}$ . На кривых  $\sigma$ – $\epsilon$  не наблюдается площадки текучести, а деформационное упрочнение начинается после достижения предела текучести и идет вплоть до образования шейки. Следовательно, детали из этой стали могут изготавливаться листовой штамповкой [1]. Увеличение температуры закалки от 260 до 300°C ( $M_n = 270^\circ\text{C}$ ) приводит к резкому снижению пластичности и параметра  $\sigma_B \cdot \delta$ , что сопровождается существенным увеличением как предела текучести, так и предела прочности. Разрушение образца, закаленного при 300°C, происходит при небольшой деформации после достижения предела текучести.

Обработка Q&P в интервале температур закалки 140–250°C приводит к формированию структуры, состоящей из первичного мартенсита, вторичного мартенсита и остаточного аустенита (рис. 2). Мартенсит имеет типичную морфологию реечного мартенсита: исходные аустенитные зерна, блоки, пакеты и рейки [13]. Зерна остаточного аустенита имеют неправильную форму и расположены между блоками мартенсита (рис. 2). Средний размер зерен остаточного аустенита составляет 2.65 мкм ( $T_3 = 200^\circ\text{C}$ ). Важно отметить, что структура стали после закалки характеризуется высокой плотностью геометрически необходимых дислокаций, которая характеризует упругий изгиб решетки и определяется из EBSD-картин. При этом плотность дислокаций в остаточном аустените ( $\rho = 6.2 \times 10^{14} \text{ м}^{-2}$ ) и мартенсите примерно одинаковая при  $T_3 = 200^\circ\text{C}$ , что противоречит ранним представлениям о низкой плотности дислокаций в остаточном аустените в Q&P-сталях [5].

Объемная доля остаточного аустенита увеличивается с 16 до 25% при увеличении  $T_3$  от 140 до 250°C (рис. 3). Последующее повышение темпе-



**Рис. 1.** Инженерные кривые “напряжение–деформация” (а), влияние температуры закалки на механические свойства при растяжении ( $\sigma_B$ ,  $\sigma_{0.2}$ , относительное удлинение) (б), зависимость произведения прочности на удлинение  $\sigma_B \cdot \delta$  от температуры закалки исследуемой стали (в).



**Рис. 2.** Микроструктура стали Fe–0.44C после обработки Q&P при температуре закалки 200°C: РЭМ (а) и EBSD-анализ, демонстрирующий фазовый состав (б), КАМ-картина для мартенситной фазы (в), КАМ-картина для аустенитной фазы (г) (КАМ – kernel average misorientations – упругий изгиб решетки).

ратуры закалки с 250 до 300°C приводит к снижению объемной доли остаточного аустенита до 5%. То есть, если первичный мартенсит не образуется, то при “распределении” не происходит обогащения остаточного аустенита углеродом и он трансформируется в мартенсит при охлаждении с температуры  $T_p$ . Уменьшение содержания остаточного аустенита в 5 раз при увеличении температуры закалки свыше  $M_n$  коррелирует с падени-

ем пластичности и уменьшением параметра  $\sigma_B \cdot \delta$  почти в 10 раз, несмотря на увеличение предела прочности более чем на 40%. Очевидно, что высокая пластичность и высокие значения  $\sigma_B \cdot \delta$  данной стали, закаленной при температурах от 140 до 250°C, связаны с деформационным упрочнением при растяжении. Исследование образцов после растяжения в области разрушения (шейки) с помощью РСА показало, что объемная доля

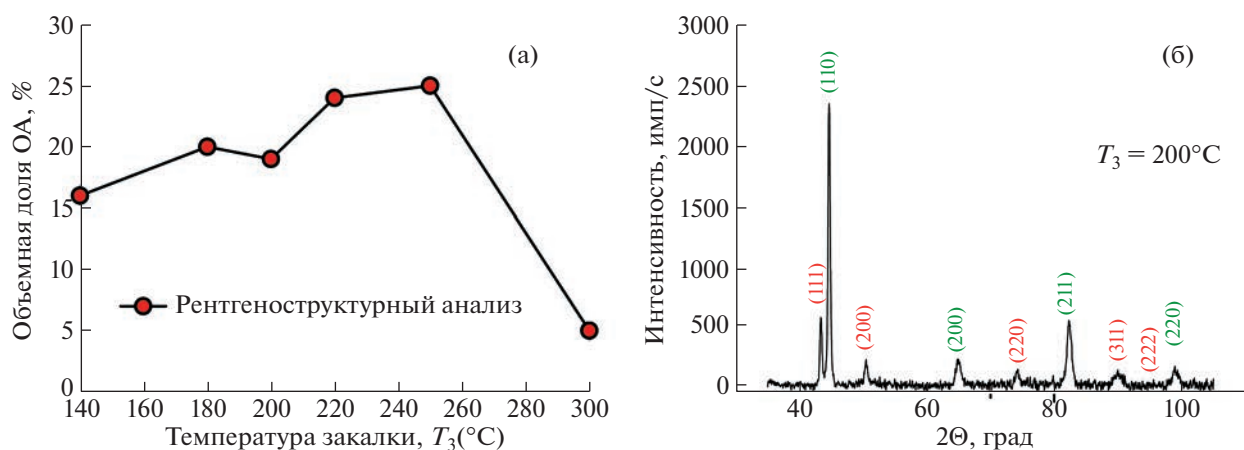


Рис. 3. Влияние температуры закалки на объемную долю ОА (а); типичный спектр РСА после закалки при 200°C (б).

остаточного аустенита в структуре не превышает 3%. Таким образом, более 80% остаточного аустенита трансформируется в мартенсит деформации при растяжении, что и обеспечивает деформационное упрочнение при растяжении, поскольку прочность мартенсита выше прочности аустенита при одинаковом содержании углерода. Это подтверждает предположение о том, что высокая пластичность стали после Q&P-обработки связана с TRIP-эффектом.

Для установления природы высокого значения предела текучести стали типа 44ХГ2С2М необходимо оценить предел текучести ( $\sigma_{0.2}$ ) остаточного аустенита. Это можно сделать на основе правила об аддитивном вкладе различных механизмов упрочнения в общий предел текучести для одной структурной составляющей [14]:

$$\sigma_{0.2} = \sigma_0 + \sigma_{SS} + \sigma_{HP} + \sigma_{disl}, \quad (2)$$

где  $\sigma_0$  – напряжение трения решетки  $\sim 63.5$  МПа в аустените чистого железа [14, 15],  $\sigma_{SS}$  – твердорастворное упрочнение,  $\sigma_{HP}$  – структурное упрочнение,  $\sigma_{disl}$  – дислокационное упрочнение. Твердорастворное упрочнение ( $\sigma_{SS}$ ) определяется содержанием элементов внедрения и замещения и может быть рассчитано с помощью следующего соотношения [14, 15]:

$$\sigma_{SS} = 356.5 \times (\%C) + 20.1 \times (\%Si) + 3.7 \times (\%Cr) + 14.6 \times (\%Mo). \quad (3)$$

Концентрация углерода  $C_{OA} = 1.38\%$  была получена методом РСА из уравнения (1), а содержание элементов замещения в аустените приняли равным их содержанию в стали, поскольку их перераспределение между структурными составляющими не происходит при Q&P-обработке [3]. Структурное упрочнение ( $\sigma_{HP}$ ) можно оценить с помощью уравнения Холла–Петча [14, 16, 17]:

$$\sigma_{HP} = K_{HP} D^{-0.5}, \quad (4)$$

где  $K_{HP}$  – коэффициент Холла–Петча. Для данного расчета использовали  $K_{HP} = 160$  МПа  $\cdot$  мкм $^{0.5}$ , полученное для аустенитной стали в работе [14]. Дислокационное упрочнение ( $\sigma_{disl}$ ) может быть выражено зависимостью Тейлора [14, 16, 17]:

$$\sigma_{disl} = \alpha M G b \rho^{0.5}, \quad (5)$$

где  $\alpha$  – коэффициент дислокационного упрочнения (около 0.24 для материалов с ГЦК-решеткой [16]),  $M$  – коэффициент Тейлора = 3.06 получается расчетом из карт разориентировок,  $G$  – модуль сдвига ( $=75$  ГПа [17]),  $b$  – вектор Бюргерса ( $= 0.25$  нм),  $\rho$  – плотность дислокаций, которая при  $T_3 = 200^\circ\text{C}$  составляет  $\rho = 6.2 \times 10^{14}$  м $^{-2}$ .

Согласно расчету по уравнению (2),  $\sigma_{0.2}$  для стали после Q&P при 200°C составляет  $\sigma_{0.2} = 63.5 + 536.5 + 98.3 + 343.4 = 1041.7$  МПа, что с высокой точностью совпадает с экспериментальным значением  $\sigma_{0.2} = 1120$  МПа.

Следовательно, обогащение остаточного аустенита углеродом при операции “распределение” и высокая плотность дислокаций в остаточном аустените играют основную роль в достижении высоких значений  $\sigma_{0.2}$  в среднеуглеродистой Q&P-стали. Есть все основания полагать, что пластическая деформация в многофазной структуре, которая образуется в стали типа 44ХГ2С2М после Q&P-обработки, начинается в наименее прочной фазе, которой является остаточный аустенит. Q&P-обработка обеспечивает высокую прочность остаточного аустенита, что и является причиной высоких значений предела текучести среднеуглеродистых Q&P-сталей с большим удельным объемом этой фазы с блочной морфологией.

Таким образом, сталь типа 44ХГ2С2М после обработки Q&P имеет высокие значения как параметра  $\sigma_B \cdot \delta > 30$  ГПа%, так и предела текучести  $\sigma_{0.2} > 1000$  МПа. Это обусловлено высокой объемной долей остаточного аустенита  $\sim 25\%$ , который

имеет блочную морфологию, высокое содержание углерода (~1.3%) и высокую плотность решеточных дислокаций (~ $6 \times 10^{14} \text{ м}^{-2}$ ). Морфология остаточного аустенита обуславливает трансформацию подавляющей его части в мартенсит при растяжении (TRIP-эффект), что обеспечивает высокое значение деформационного упрочнения, а это, в свою очередь, позволяет достигать высоких значений предела прочности и относительного удлинения одновременно. Сочетание высокой прочности и пластичности можно получить в Q&P-сталих с высоким содержанием остаточного аустенита, если эта фаза, помимо способности трансформироваться в мартенсит деформации, имеет высокую прочность за счет высокого содержания углерода и высокой плотности дислокаций.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Исследования выполнены на оборудовании Центра коллективного пользования “Технологии и материалы НИУ “БелГУ”.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-15-2021-572 от 31 мая 2021 г.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fonstein N.* Advanced High Strength Sheet Steels. Springer International Publishing, Cham, 2015.
2. *Xiong Zh., Jacques P.J., Perlade A., Pardo Th.* // Metallurgical Materials Transaction A. 2019. V. 50. P. 3502–3513. <https://doi.org/10.1007/s11661-019-05265-2>
3. *Speer J., Matlock D.K., De Cooman B.C., Schroth J.G.* // Acta Materialia. 2003. V. 51. P. 2611–2622. [https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(03\)00059-4](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(03)00059-4)
4. *Zhao J., Jiang Z.J.* // Progress in Materials Science. 2018. V. 94. P. 174–242. <https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2018.01.006>
5. *Seo E. J., Cho L., Estrin Yu., Cooman Br. C. De* // Acta Materialia. 2016. V.113. P. 124–139. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2016.04.048>
6. *Zhang K., Liu P., Li W., Guo Zh., Rong Y.* // Materials Science and Engineering: A. 2014. V. 619. P. 205–211. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2014.09.100>
7. *An B., Zhang C., Gao G., Gui X., Tan Z., Misra R.D.K., Yang Z.* // Materials Science and Engineering: A. 2019. V. 757. P. 117–123. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2019.04.099>
8. *Руцциц С.В., Ахмедьянов А.М., Маковецкий А.Н., Красноталов А.О.* // Вестник ЮУрГУ. Сер. Металлургия. 2018. Т. 18. № 4. С. 89–97. <https://doi.org/10.14529/met180410>
9. *Soleimani M., Kalthor A., Mirzadeh H.* // Materials Science Engineering A. 2020. V. 795. 140023. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2020.140023>
10. *Xiong X.C., Chen B., Huang M.X., Wang J.F., Wang L.* // Scripta Materialia. 2013. V. 68. P. 321–324. <https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2012.11.003>
11. *Zhilyaev A., Shakhova I., Belyakov A., Kaibyshev R., Langdon Terence G.* // Wear. 2013. V. 305. P. 89–99. <https://doi.org/10.1016/j.wear.2013.06.001>
12. *Chen K., Jiang Z., Liu F., Li H., Kang C., Zhang W., Wang A.* // Metallurgical and Materials Transactions A. 2020. V. 51. P. 3565–3575. <https://doi.org/10.1007/s11661-020-05777-2>
13. *Kitahara H., Ueki R., Tsuji N., Minamino Y.* // Acta Materialia. 2006. V. 54. P. 1279–1288. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2005.11.001>
14. *Odnobokova M., Belyakov A., Enikeev N., Kaibyshev R., Valiev R.Z.* // Metals. 2020. V. 1614. <https://doi.org/10.1614.10.3390/met10121614>
15. *Gavriljuk V.G., Berns H.* High Nitrogen Steels: Structure, Properties, Manufacture, Applications. B., Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1999.
16. *Malopheyev S., Kulitskiy V., Kaibyshev R.* // J. Alloys and Compounds. 2017. V. 698. P. 957–966. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2016.12.289>
17. *Odnobokova M.V., Belyakov A.N., Dolzhenko P.D., Kostina M.V., Kaibyshev R.O.* // Materials Letters. 2023. V. 331. 133502. <https://doi.org/10.1016/j.matlet.2022.133502>

## THE SIGNIFICANCE OF RETAINED AUSTENITE IN THE HIGH STRENGTH AND PLASTICITY OF MEDIUM CARBON Q&P STEEL

R. V. Mishnev<sup>a,b</sup>, Y. I. Borisova<sup>a,b</sup>, Academician of the RAS M. N. Erokhin<sup>a</sup>,  
S. M. Gaidar<sup>a</sup>, and R. O. Kaibyshev<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy, Moscow, Russia

<sup>b</sup>Belgorod State University, Belgorod, Russia

The Fe–0.44%C–1.8%Si–1.3%Mn–0.82%Cr–0.28%Mo steel treated by the quenching-partitioning process showed a product of strength and elongation of 30 GPa·% with yield stress of 1350 MPa. Such combination of high ultimate tensile strength and good ductility is attributed to a high portion of retained austenite (≥20%) transforming to martensite under tension. The high yield stress is provided by carbon supersaturation of austenite and a high dislocation density in this phase.

*Keywords:* steel, mechanical properties, microstructure, phase transformation

УДК 621.374.33

## ВЕКТОРНЫЙ $S$ -ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИГНАЛЬНЫХ ФАЗОДИНАМИЧЕСКИХ РАДИОИЗОБРАЖЕНИЙ

© 2023 г. С. С. Шадинов<sup>1,\*</sup>, М. С. Костин<sup>1</sup>, Г. В. Коняшкин<sup>1</sup>,  
А. С. Корчагин<sup>1</sup>, М. Ю. Романовский<sup>1</sup>, Н. Г. Гусейн-заде<sup>1,2</sup>

Представлено академиком РАН А.С. Сиговым 13.06.2023 г.

Поступило 15.05.2023 г.

После доработки 15.05.2023 г.

Принято к публикации 22.06.2023 г.

Предложен векторный метод регистрации фазодинамических радиоизображений посредством формирования и численного анализа  $S$ -параметрической матрицы рассеяния многопрофильных сигнатур материальных сред и объектов. Определены ключевые достоинства апертурного захвата сигнальных радиоизображений методом частотно-синтезируемой функции спектральной плотности мощности рассеянного волнового радиопрофиля. На основе векторного анализатора цепей СВЧ-диапазона и широкополосных антенн типа “Вивальди” построена экспериментально-лабораторная установка сигнальной регистрации масштабно-временных радиоизображений в спектральной области 0.03...6.0 ГГц. Экспериментально установлены зависимости влияния углометрических характеристик объекта на спектрально-временную структуру формирования фазодинамических радиоизображений. В качестве масштабно-временной постобработки радиоизображений предложен метод кепстрального преобразования  $S$ -параметрических характеристик со сверткой базисных сигнатур в радиогеном облучаемого объекта. Получена серия кепстральных сверток фазодинамических радиоизображений, устанавливающая функциональную связь смены сигнатуры объекта во времени с его радиогеномом.

*Ключевые слова:* радиогеном, векторный  $S$ -параметрический анализ, сигнальное фазодинамическое радиоизображение, кепстр, векторный анализатор, сигнатура объекта

DOI: 10.31857/S2686740023050115, EDN: IZYIBU

Научно-поисковые исследования в области сигнального радиовидения являются определяющим направлением модернизации и развития сенсорных СВЧ-технологий при создании средств технического зрения, радиообнаружения и радиоиентификации. Радиовизионные системы с синтезированной функцией спектральной плотности мощности (ФСПМ) представляют научно-практический интерес как при разработке исследовательских радиоволновых систем и приложений, так и при отладке средств радиосенсорной жестикюляции (РСЖ), иентификации объектов с динамической сигнатурой или неустойчивой эффективной площадью рассеяния (ЭПР). Как известно, основными средствами решения задач радиоволновой иентификации являются

системы, использующие финитные сверхкороткие импульсы, в волновой деформации рассеянного поля которых содержатся сигнальные радиоизображения сигнатур. Однако получение ФСПМ-методом частотно-временного синтеза позволяет оценить вклад отдельно взятой гармоники в формирование сигнального радиоизображения объекта в изолированных от влияния соседних частот условиях, что невозможно в случае СКИ-сигнала со сверхширокополосным (СШП) спектром. Кроме того, в системах радиовидения, синтезирующих ФСПМ сигнала с частотно-временной разверткой, отсутствует необходимость синхронизации фазы и поддержания динамического диапазона мощности излучения, а также учета влияния частотной дисперсии [1, 2].

<sup>1</sup>МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия

<sup>2</sup>Федеральный исследовательский центр “Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук”, Москва, Россия

\*E-mail: shadinov@mirea.ru

### 1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ВЕКТОРНОГО ФОРМИРОВАНИЯ ФАЗОДИНАМИЧЕСКИХ РАДИОИЗОБРАЖЕНИЙ

Одним из прототипных решений радиовизионной реализации получения фазодинамических

изображений может являться векторный анализатор цепей (ВАЦ), к которому подключены широкополосные узконаправленные антенны с калиброванной амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ).

При этом объект радиовизионного исследования с неустойчивой сигнатурой, приемно-передающие антенны и материальная среда распространения сигнала для ВАЦ выступают в качестве СВЧ-эквивалента четырехполосника, представляемого в виде S-параметрической матрицы рассеяния, элементы которой сформированы соответствующими импульсными характеристиками [3, 4]. Основным, наиболее полно отражающим характер формирования фазодинамического радиоизображения, учитывающим распространение электромагнитных волн через среду и рассеянную сигнатурой объекта наблюдения, является параметр  $S_{21}$ , который представляет собой отношение принятого сигнала к излученному сигналу в зависимости от частоты, т.е. передаточную характеристику в пределах частотного диапазона 0.03...6.0 ГГц. Синтезированный излученный сигнал аналитически описывается выражениями (1) и (2). При этом выражение (1) является описанием n-й гармоники синтезированного сигнала, а (2) представляет разнесенную по времени сумму N гармонических колебаний:

$$U_{\text{изл}}(n) = A_{\text{изл}} \exp(-j\omega_n t + \varphi_n) * h_A, \quad (1)$$

$$U_{\text{изл}} = \sum_{n=0}^{200} [\sigma(t - \Delta t n) A_{\text{изл}} \times \exp(-j(\omega_0 + \Delta\omega n)t + \varphi_n) - \sigma(t - \Delta t(n+1)) A_{\text{изл}} \times \exp(-j(\omega_0 + \Delta\omega n)t + \varphi_n)] * h_A, \quad (2)$$

где  $A_{\text{изл}}$  – амплитуда сигнала,  $\omega_n$  – угловая частота n-й гармоники синтезируемого сигнала,  $\varphi_n$  – фаза n-й гармоники,  $h_A$  – импульсная характеристика антенны [4, 5].

Учитывая импульсную характеристику среды, сигнатуры объекта и антенн, рассеянный сигнал будет иметь вид

$$U_{\text{отр}} = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K k_n A_{\text{изл}} \exp(-j\omega_n t + \varphi_{nk}) * h_A * h_{\text{ср}}, \quad (3)$$

где  $k_n = \sqrt{\frac{P_{\text{изл}} D_1 D_2 \lambda_n^2}{(4\pi R)^2}}$  – декремент затухания, определяемый для каждого дискретного значения частоты:  $P_{\text{изл}}$  – мощность сигнала,  $\lambda_n$  – длина волны n-й гармоники синтезированного сигнала,  $D_1$  и  $D_2$  – коэффициенты направленного действия передающей и приемной антенн соответственно [5].

Протяженность среды распространения (радиоканала распространения) сигнала с синтезируемой ФСПМ в ходе эксперимента позволяет пренебречь затуханием. Параметр  $S_{21}$  будет равен отношению принятого сигнала к излученному:

$$S_{21} = \frac{U_{\text{отр}}}{A_{\text{изл}} \exp(-j\omega_n t + \varphi_0) * h_A}. \quad (4)$$

Суммирование в выражении (4) по n обусловлено дискретным изменением частоты синтезированного сигнала в пределах диапазона 0.01...6.0 ГГц, по k – отражением гармоник синтезированного сигнала от массива элементарных плоскостей объекта, составляющих мгновенную сигнатуру. Геометрическая конфигурация и углометрические параметры объекта напрямую связаны с изменением ЭПР и картины фазодинамического распределения [6]. Топологию боковой поверхности объекта под разной сигнатурной конфигурацией (ракурсом) можно представить в виде суперпозиции плоскостей, каждая из которых находитесь на исходном расстоянии от антенны. В отличие от метода сигнального томографирования, построенного на квадратурном приеме при непрерывном зондировании, или импульсном режиме, где СКИ используется для определения расстояния до объекта, путем расчета фазы или времени задержки, соответственно, в предложенном методе регистрации радиоизображений используется принцип масштабного-временного преобразования [7]. Так, характер локального убывания параметра  $S_{21}$  обусловлен приемом рассеянного сигнала с противоположной фазой (рис. 1), т.е. увеличением коэффициента стоячей волны (КСВ), и описывается выражением

$$\lim_{(\varphi_0 - \varphi_n) \rightarrow \pi(2n+1)} \text{КСВ} = \text{КСВ}_{\text{max}}. \quad (5)$$

Выражение (5) для случая, не учитывающего затухание и переотражение, можно представить в виде

$$\lim_{(\varphi_0 - \varphi_n) \rightarrow \pi(2n+1)} S_{21} \rightarrow 0.$$

В реальных условиях равенство нулю параметра  $S_{21}$  не достигается, так как принимаемый сигнал с меньшей амплитудой и противоположной фазой при суммировании не компенсирует излученный сигнал, а также вследствие неполного поглощения объектом спектральных составляющих. Первая точка локального минимума передаточной функции определяет кратное половине длины волны  $\lambda_l$  расстояние между ближайшей отражающей поверхностью сигнатуры объекта и приемной антенной соответственно. При этом данная зависимость будет выполняться для каждой поверхности в сигнатуре. В выражении (5) разность фаз, равная нечетному числу  $\pi$ , может



достигаться при целых  $n$ , отсюда следует неоднозначность оценки конфигурации объекта, решаемая масштабно-временным преобразованием (временным масштабированием), при котором структура геометрических зависимостей объекта не изменяется. Квазипериодичность характера формирования параметра  $S_{21}$  определяется кратностью длин волн  $\lambda n$ , отвечающей выполнению условия выражения (5), и влиянием радиофизических (магнитоэлектрических) свойств материалов объекта.

Функция параметра  $S_{21}$  объекта, находящегося в некотором пространственном положении, является сигнатурой, соответствующей этому угломерическому состоянию. Число необходимых базовых сигнатур для идентификации с заданной вероятностью распознавания радиоизображения варьируется в зависимости от топологии профильной геометрии объекта наблюдения. Идентификацию радиоизображения с неустойчивой сигнатурой в работе предлагается производить с помощью кепстрального преобразования параметра  $S_{21}$  в область кепстрального времени.

Кепстральное преобразование параметра  $S_{21}$  выявляет масштабно-временные зависимости в сигнатурной конфигурации объекта. Кепстр передаточной характеристики позволяет перейти во временную (пространственно-временную) область, в которой распределение положений максимумов относительно нуля будет соответствовать числу отдельных отражающих (рассеивающих) плоскостей объекта на соответствующей удаленности от приемной антенны, и определяется выражением

$$K[q] = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \cdot \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nq\right),$$

где  $K[q]$  – дискретные отсчеты результата кепстрального преобразования,  $s[n]$  – отсчетные значения параметра  $S_{21}$ .

Массив отсчетных значений функции  $S_{21}$  сигнатуры помимо объекта наблюдения учитывает сцену материальной среды, в условиях которой происходит регистрация фазодинамического радиоизображения. Получение радиогеномов из сигнальных радиоизображений возможно при различных вариациях сцены неоднородной среды, влияние стационарного радиоизображения которой при анализе исключается. Так, свертка кепстров базовых сигнатур позволяет получить радиогеном, соответствующий объектам со схожими параметрами конфигурации и радиофизическими свойствами. Функция радиогенома  $G$  объекта формируется из совокупности базисных сигнатур следующим образом:

$$G = K_1[q] * K_2[q] * \dots * K_{N-1}[q] * K_N[q],$$

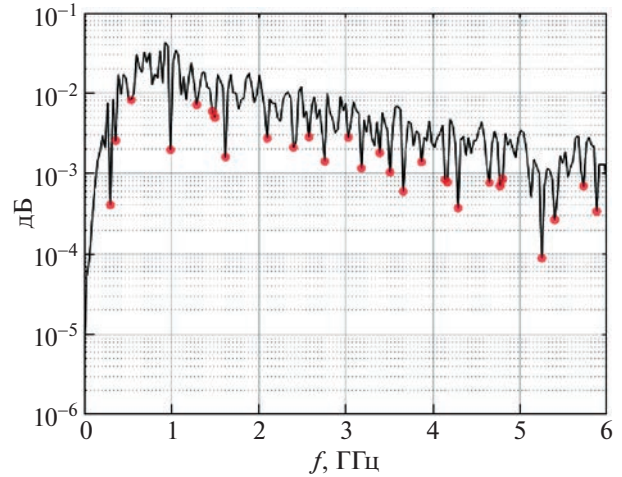


Рис. 1. Локальные минимумы функции  $S_{21}$ -параметра.

где  $K_n[q]$  – кепстр базовой сигнатуры,  $N$  – число базисных сигнатур.

## 2. ОПИСАНИЕ И АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ РЕГИСТРАЦИИ ФАЗОДИНАМИЧЕСКИХ РАДИОИЗОБРАЖЕНИЙ

Для проведения эксперимента построена стационарная испытательная лабораторная установка, состоящая из двух направленных антенн HE400UWB с рабочим диапазоном частот от 30 МГц до 6 ГГц и векторного анализатора цепей ZNLE6 с рабочим диапазоном 0.01–6.0 ГГц в режим среднего формирования спектральной полосы развертки с шагом 1 кГц. Объект помещается между двумя антеннами, направленными к нему под углом  $45^\circ$ , после чего происходит фиксация значений  $S_{21}$  при отношении сигнал–шум 12 дБ (рис. 2а).

В ходе проведения исследования получены фазодинамические изображения беспилотного летательного аппарата (БПЛА), а также серия радиоизображений динамических сигнатур при РСЖ. Для регистрации фазодинамических изображений объект помещался на расстоянии до 50 см от направленных антенн, после чего происходила запись значений параметра  $S_{21}$  на электронный носитель с помощью встроенного USB-порта векторного анализатора цепей, для дальнейшей программной обработки в программной среде Matlab.

*А. Получение радиогенома БПЛА.* В качестве экспериментального образца был выбран квадрокоптер DJI mini 2, представленный на рис. 2б. При исследовании вращения объекта в выбранной плоскости сигнатуру объекта можно привязать к углу поворота. Базовыми сигнатурами были

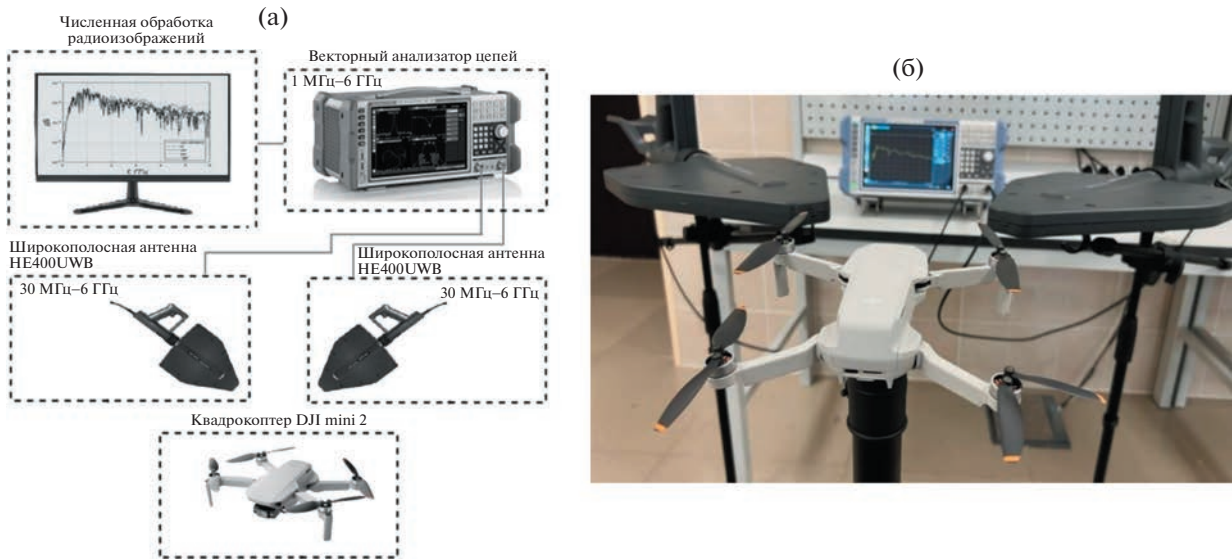


Рис. 2. Экспериментально-лабораторная установка. а – Структурная схема экспериментальной установки; б – общий вид лабораторного стенда.

выбраны четыре положения, соответствующие углам поворота  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ . Параметры  $S_{21}$  для четырех базовых сигнатур беспилотника изображены на рис. 3. На рис. 4. представлено радиоизображение сцены захвата S-параметрической матрицы рассеяния. Кепстры базовых сигнатур квадрокоптера представлены на рис. 5. Радиоеном, как результат свертки кепстров базовых сигнатур беспилотника, показан на рис. 6.

**Б. Радиосенсорная жестикуляция.** В работе предложен векторный метод идентификации функциональной динамики изменения конфигурации, положения и смены сигнатур объектов, что позволяет получить более подробные сведения

не только топологии объекта, но и о его радиофизических свойствах. В ходе эксперимента получены радиогеномы для серии жестов (рис. 7): “лопасть” – попеременное приближение и удаление вдоль направления визирования открытых ладоней к антеннам; “цикл” – вращение открытых ладоней друг относительно друга, при котором они попеременно лежат в двух параллельных плоскостях, перпендикулярных направлению визирования; “сжатие” – циклическое движение, представляющее собой синхронное сжимание в кулак и последующее раскрытие обеих рук оператора; “ножницы” – циклическое перекрестное перпендикулярное земной поверхности движение,

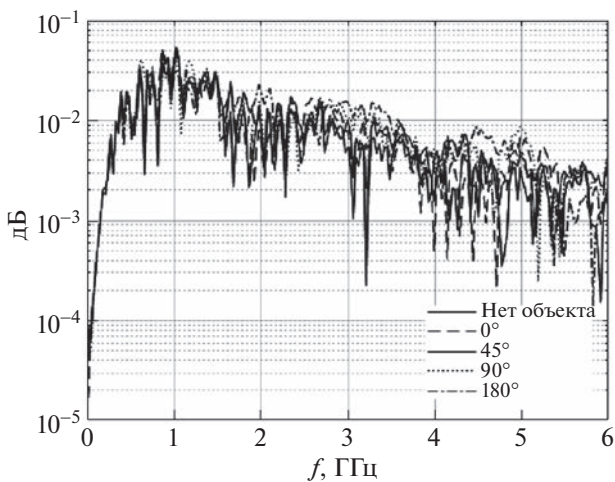


Рис. 3. Серия радиоизображений базовых сигнатур беспилотника.

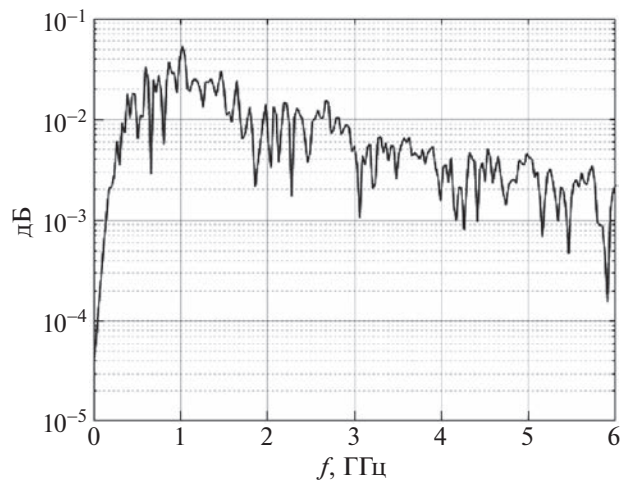


Рис. 4. Радиоизображение сцены.

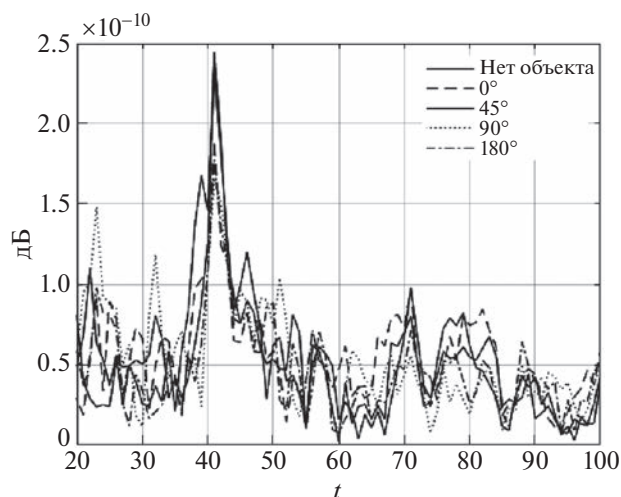


Рис. 5. Серия кепстров базовых сигнатур беспилотника.

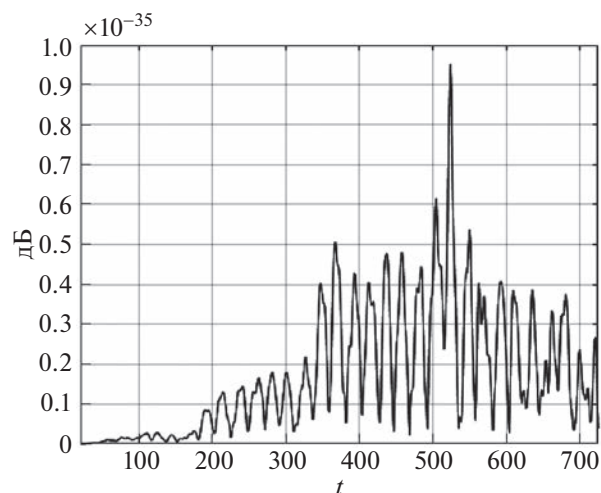


Рис. 6. Радиогеном (свертка кепстров базовых сигнатур беспилотника).

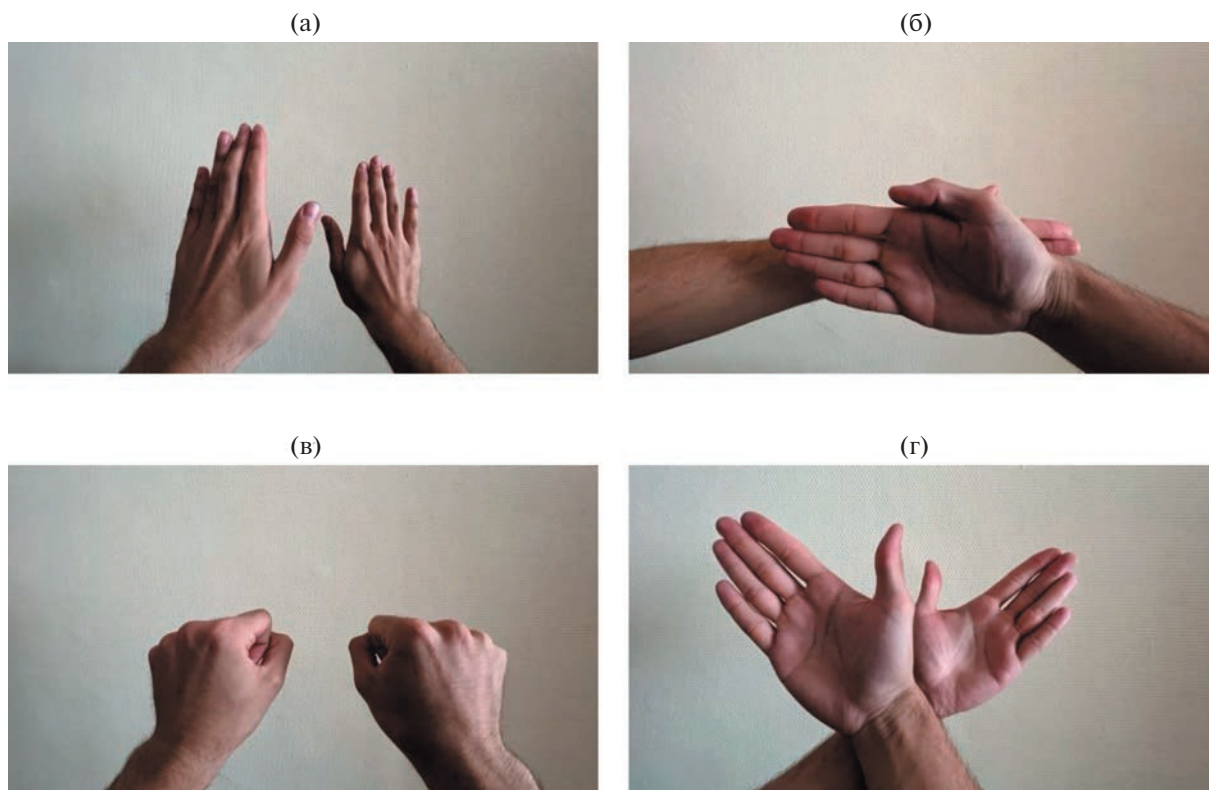


Рис. 7. Фотографическое изображение начальных фаз жестов, воспроизводимых операторами: а – “лопасть”, б – “цикл”, в – “сжатие”, г – “ножницы”.

относительно локтевой оси предплечий оператора.

Вышеописанные сенсорные жесты управления проделаны двумя независимыми операторами с относительно разной скоростью и нестабильной динамикой движения, что необходимо для корреляционной оценки воспроизводимости

идентичности (однозначности распознавания) по результатам постобработки радиоизображений.

Обратимся к анализу результатов исследования двух сетей РСЖ, представляющих наибольший интерес. Расположение рук, осуществляющих жестикуляцию, соответствует расположению БПЛА при захвате отсчетов передаточной

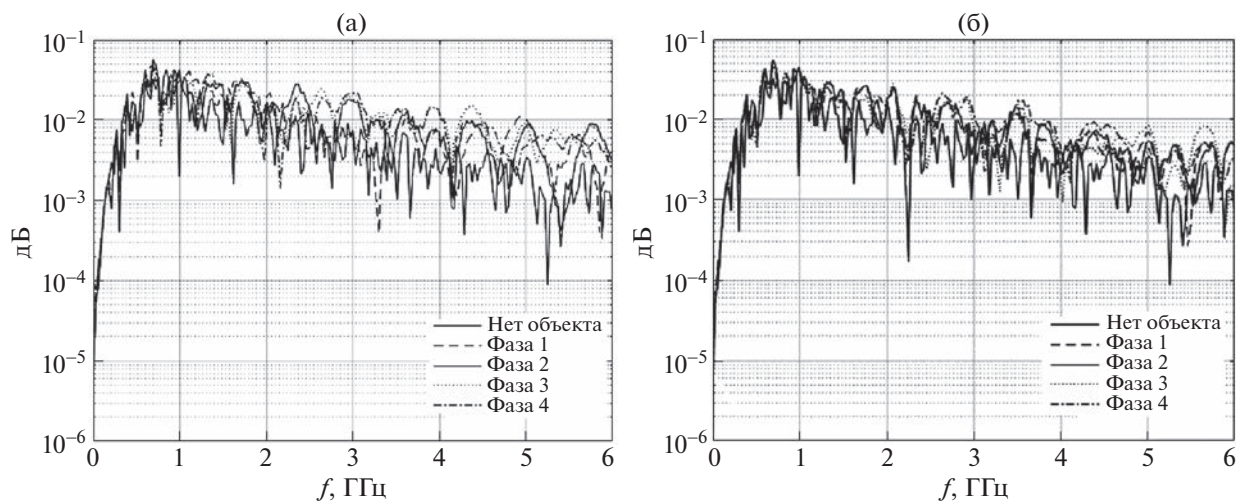


Рис. 8. Серия радиоизображений фаз жеста “лопасть”, выполненного первым (а) и вторым (б) оператором.

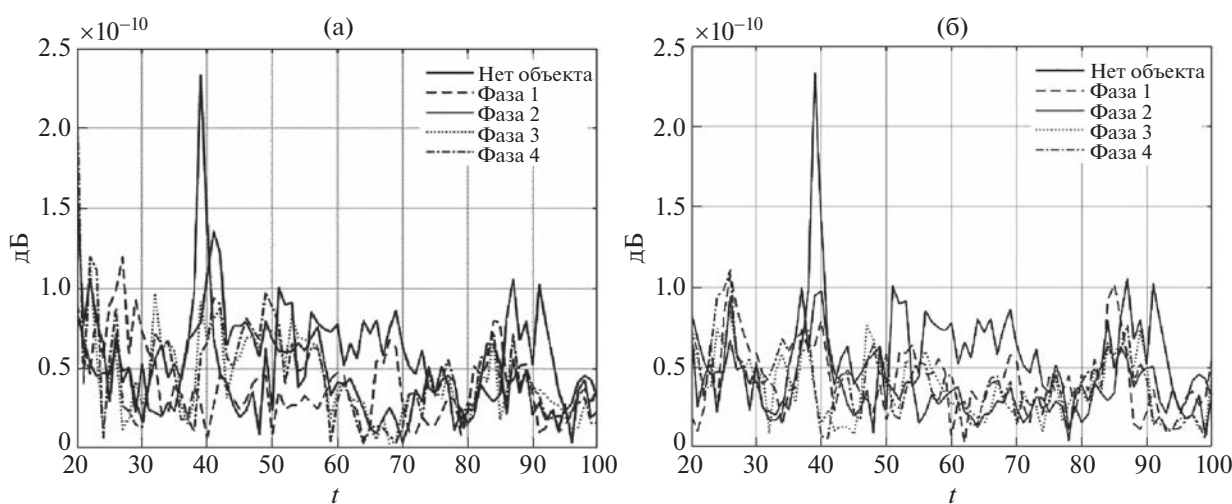


Рис. 9. Серия кепстров фаз жеста “лопасть”, выполненного первым (а) и вторым (б) оператором.

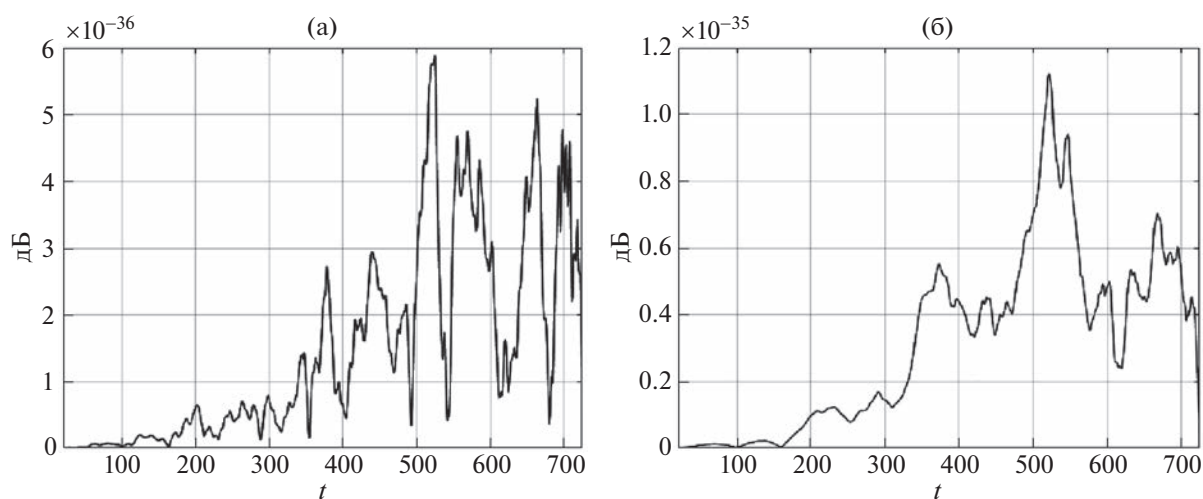


Рис. 10. Радиогеном жеста “лопасть”, выполненного первым (а) и вторым (б) оператором.

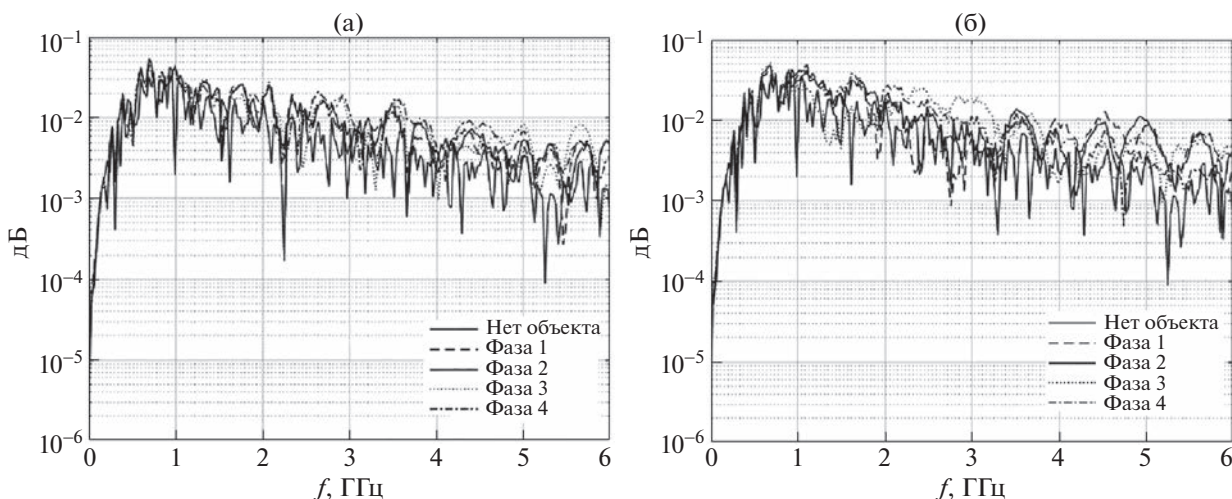


Рис. 11. Серия радиоизображений фаз жеста “цикл”, выполненного первым (а) и вторым (б) оператором.

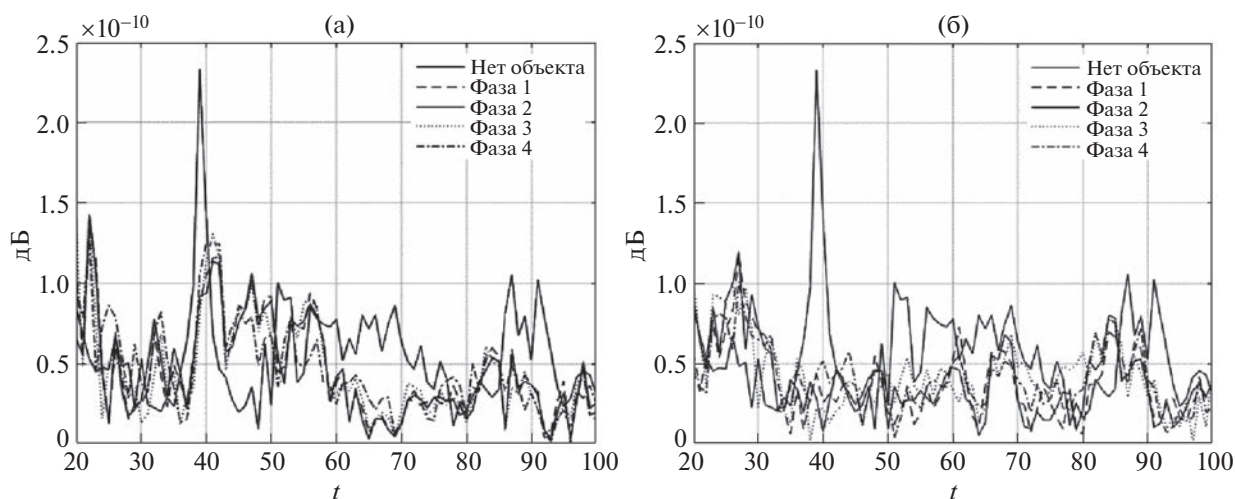


Рис. 12. Серия кепстров фаз жеста “цикл”, выполненного первым (а) и вторым (б) оператором.

характеристики  $S_{21}$ , т.е. дальности до 50 см от антенн по линии визирования. На рис. 8–10 представлены серии радиоизображений и кепстральных преобразований фаз, а также радиогеномы динамического жеста типа “лопасть”, выполненные поочередно первым и вторым операторами соответственно. Аналогично, на рис. 11–13 представлены серии радиоизображений и кепстральных преобразований фаз, а также радиогеномы динамического жеста типа “цикл”, выполненные поочередно первым и вторым операторами соответственно. При проведении оценки достоверности идентификации жестов за серию циклов получено 30 радиоизображений, для которых получены коэффициенты корреляции. Как правило,  $N$  – число необходимых “кадров” лежит в диапазоне 20...100. Далее определено математическое

ожидание корреляции. Относительное попадание корреляционной выборки (приведенное значение к  $N$ ) в интервал, превышающий рассчитанное математическое ожидание, является достоверностью воспроизводимости. Полученное значение – 0.91. Функции взаимной корреляции для двух жестов, выполненных операторами, представлены на рис. 14.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в работе векторный метод  $S$ -параметрической регистрации сигнальных фазодинамических изображений, а также программно-численный анализ радиоизображений на базе кепстральной масштабно-временной постобработки радиогеномов позволяют проводить

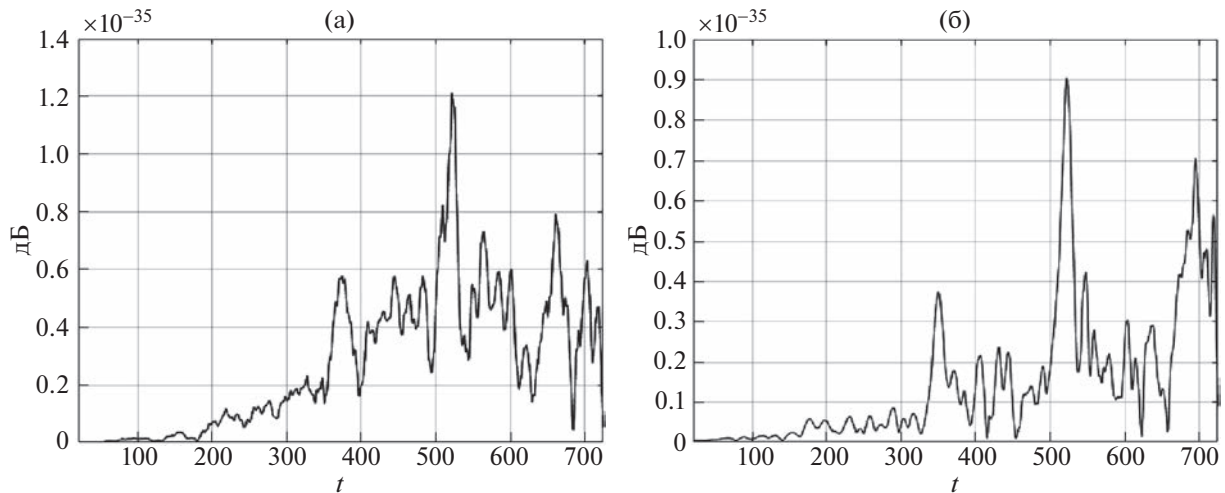


Рис. 13. Радиогеном жеста “цикл”, выполненного первым (а) и вторым (б) оператором.

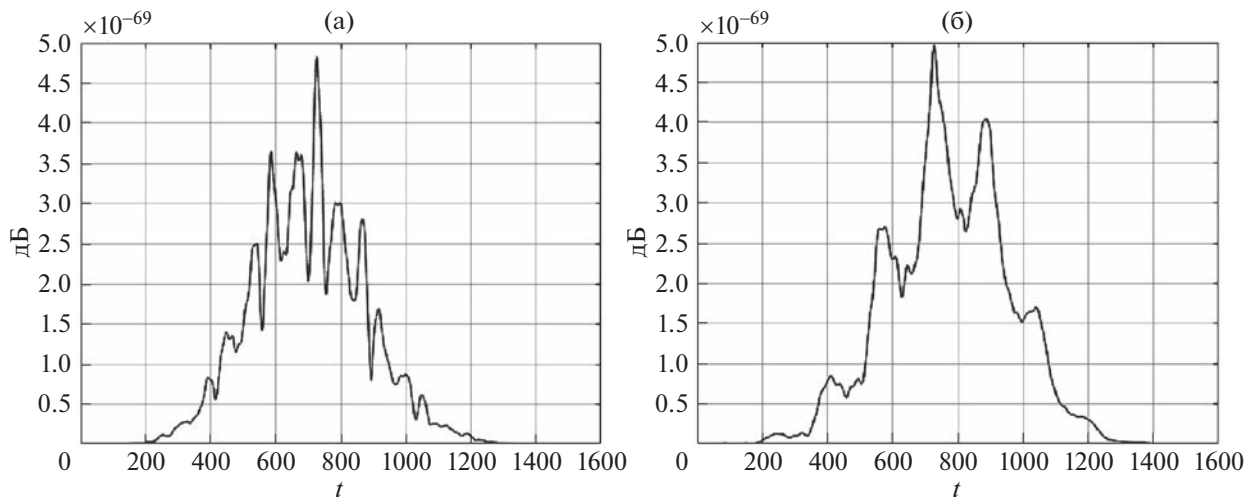


Рис. 14. Функция взаимной корреляции для жеста “лопасть” (а) и жеста “цикл” (б).

регистрацию и распознавание сигнальных радиоизображений объектов с неустойчивой (переменной во времени) сигнатурой. Впервые получена серия кепстральных сверток фазодинамических радиоизображений, устанавливающая функциональную связь смены сигнатуры объекта во времени с его радиогеномом. Предложенный алгоритм захвата и преобразования сигнальных радиоизображений в радиогеном динамически сменяемых сигнатур обеспечивает достоверность их распознавания с вероятностью не менее 0,9 при отношении сигнал–шум не менее 12 дБ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Костин М.С., Бойков К.А., Севрюгин П.В. Регистрация финитных радиоизображений в сигнальном

радиовидении субнаносекундного разрешения // Сборник научных статей V Международной научно-практической конференции “Радиоинфоком-2021”. М.: РТУ МИРЭА, 2021. С. 396.

2. Бойков К.А., Костин М.С., Куликов Г.В. Радиосенсорная диагностика целостности сигналов внутрисхемной и периферийной архитектуры микропроцессорных устройств // Российский технологический журнал. 2021. Т. 9. № 4 (42). С. 20.

3. Куликов Г.В., Костин М.С., Петленко Д.Б., Ярлыков А.Д. Синтез и анализ радиоволновых систем временной трансформации нестационарных полей сигнального радиовидения субнаносекундного разрешения // Журнал радиоэлектроники. 2020. № 5. С. 3.

4. Куликов Г.В., Костин М.С. Идентификация одиночных сверхкоротких радиоимпульсов // Сборник научных статей IV Международной научно-

- практической конференции “Радиоинфоком-2019”. М.: РТУ МИРЭА, 2019. С. 123.
5. Костин М.С., Севрюгин П.В. Анализ радиоизображений с субнаносекундным разрешением // Сборник научных статей IV Международной научно-практической конференции “Радиоинфоком-2021”. 2019. С. 253.
  6. Куликов Г.В., Костин М.С. Регистрация и аутентификация нестационарных полей сверхкороткоимпульсных сигналов радиовидения субнаносекундного разрешения // Журнал радиоэлектроники. 2019. № 11. С. 2.
  7. Костин М.С., Севрюгин П.В., Стешин И.А. // Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2019. № 7.  
<http://jre.cplire.ru/jre/jul19/5/text.pdf> (дата обращения: 18.04.2023).
  8. Куликов Г.В., Костин М.С. Методы сверхкороткоимпульсной идентификации параметров материальных сред по конфигурации нестационарных полей в радиовидении // Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2019. № 11.  
<http://jre.cplire.ru/jre/nov19/2/text.pdf> (дата обращения: 18.04.2023).
  9. Костин М.С., Бойков К.А. Радиоволновые технологии субнаносекундного разрешения: монография. М.: РТУ МИРЭА, 2021. 142 с.

## VECTOR *S*-PARAMETRIC ANALYSIS OF SIGNAL PHASE DYNAMIC RADIO IMAGES

S. S. Shadinov<sup>a</sup>, M. S. Kostin<sup>a</sup>, G. V. Konyashkin<sup>a</sup>, A. S. Korchagin<sup>a</sup>,  
M. Yu. Romanovsky<sup>a</sup>, and N. G. Guseyn-zade<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia*

<sup>b</sup>*Prokhorov General Physics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.S. Sigov

A vector method for recording phase-dynamic radio images is proposed by forming and numerically analyzing the *S*-parametric scattering matrix of multidisciplinary signatures of material media and objects. The key advantages of aperture capture of signal radio images by the method of frequency-synthesized power spectral density function of a scattered wave radio profile are determined. On the basis of a vector analyzer of microwave circuits and broadband antennas of the Vivaldi type, an experimental laboratory installation for signal registration of time-scale radio images in the spectral region of 0.03...6.0 GHz has been built. The dependences of the influence of the angular characteristics of the object on the spectral-temporal structure of the formation of phase-dynamic radio images have been experimentally established. As a time-scale postprocessing of radio images, a method of cepstral transformation of *S*-parametric characteristics with convolution of basic signatures in the radiogenic of the irradiated object is proposed. A series of cepstral convolutions of phase-dynamic radio images was obtained, establishing a functional relationship between the change of the signature of an object in time with its radio genome.

*Keywords:* radiogenic, vector *S*-parametric analysis, signal phase dynamic radio image, kepstr, vector analyzer, object signature