



ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Том 513, 2023

ФИЗИКА

Вихревое кольцо в ферромагнетике

А. Б. Борисов, Д. В. Долгих 5

Новые маркеры для определения химического и изомерного состава каротиноидов методом спектроскопии комбинационного рассеяния

Д. Д. Васимов, А. А. Ашихмин, М. А. Большаков, М. Н. Московский, С. В. Гудков, Д. В. Яныкин, В. С. Новиков 10

Современные тенденции создания высокоэнергетических импульсно-периодических лазеров непрерывной генерации

С. Г. Гаранин, В. Н. Деркач, К. Н. Макаров, В. А. Островский, М. И. Пергамент, М. В. Путилин, Д. В. Сизмин 18

Генерация прямоугольных наносекундных электромагнитных импульсов с пикосекундным фронтом нарастания

С. В. Гарнов, В. В. Булгакова, Т. В. Долматов, А. А. Ушаков, В. В. Букин 29

Распределение электрических полей на поверхности включений в матричном композите

В. И. Колесников, В. Б. Яковлев, И. В. Лавров, А. П. Сычев, А. В. Бардушкин 34

Эффект ускоренного всасывания жидкости в трубке при лазерной кавитации на лазерном нагревательном элементе

В. М. Чудновский, М. А. Гузев, Е. П. Дац, А. В. Кулик 41

МЕХАНИКА

О контактных задачах для двух штампов и модели трещин нового типа

В. А. Бабешко, О. В. Евдокимова, О. М. Бабешко, М. В. Зарецкая, В. С. Евдокимов 48

Калибровочно-инвариантный лагранжиан, определяемый n -точечной функцией плотности распределения вероятности поля вихря волновой оптической турбулентности

В. Н. Гребенёв, А. Н. Гришков 55

Точные решения неоднородных краевых задач теории упругости в прямоугольнике

М. Д. Коваленко, А. П. Кержаев, И. В. Меньшова, Ю. Н. Карнет 61

Аналитическое решение задачи о ползучести вязкоупругого материала в круглой трубе

Л. В. Ковтанюк 67

Диффузионное горение водорода в микроструе, истекающей из криволинейного канала

В. В. Козлов, А. В. Довгаль, М. В. Литвиненко, Ю. А. Литвиненко, А. Г. Шмаков 72

Молекулярно-динамическое исследование процесса кратерообразования при высокоскоростном взаимодействии металлических кластеров с подложкой

А. В. Уткин, В. М. Фомин 76

Оптимизация движения тела с внутренней массой при квадратичном сопротивлении

Ф. Л. Черноусько

81

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Монолитный фильтр с центральной частотой полосы пропускания 10 ГГц
на полосковых резонаторах с расщепленным проводником

*И. В. Говорун, Б. А. Беляев, Я. Б. Завьялов, Т. Ю. Шумилов, А. О. Афонин,
А. В. Угрюмов, Р. Г. Галеев*

88

Расчет двумерных периодических возмущений свободной поверхности жидкости
в различных моделях среды

Ю. Д. Чашечкин, А. А. Очиров

95

CONTENTS

Volume 513, 2023

PHYSICS

The Vortex Ring in Ferromagnet <i>A. B. Borisov, D. V. Dolgikh</i>	5
New Markers for Determination of Carotenoid Molecules Isomerism Using Raman Spectroscopy <i>D. D. Vasimov, A. A. Ashikhmin, M. A. Bolshakov, M. N. Moskovskiy, S. V. Gudkov, D. V. Yanykin, V. S. Novikov</i>	10
Current Trends in the Development of High-Energy Lasers <i>S. G. Garanin, V. N. Derkach, K. N. Makarov, V. A. Ostrovskiy, M. I. Pergament, M. V. Putilin, D. V. Sizmin</i>	18
Generation of Rectangular Nanosecond Electromagnetic Pulses with a Picoseconds Rise Front <i>S. V. Garnov, V. V. Bulgakova, T. V. Dolmatov, A. A. Ushakov, V. V. Bukin</i>	29
Distribution of Electric Fields on the Surface of Inclusions in Matrix Composite <i>V. I. Kolesnikov, V. B. Yakovlev, I. V. Lavrov, A. P. Sychev, A. V. Bardushkin</i>	34
The Effect of Accelerated Absorption of Liquid in a Tube During Laser Cavitation on a Laser Heating Element <i>V. M. Chudnovskii, M. A. Guzev, E. P. Dats, A. V. Kulik</i>	41

MECHANICS

On Contact Problems for Two Stamps and a New Type of Crack Model <i>V. A. Babeshko, O. V. Evdokimova, O. M. Babeshko, M. V. Zaretskaya, V. S. Evdokimov</i>	48
A Gauge-Invariant Lagrangian Determined by the n -Point Probability Density Function of Vorticity Field of the Wave Optical Turbulence <i>V. N. Grebenev, A. N. Grishkov</i>	55
Exact Solutions to Inhomogeneous Boundary Value Problems of the Theory of Elasticity in a Rectangle <i>M. D. Kovalenko, A. P. Kerzhaev, I. V. Menshova, Yu. N. Karnet</i>	61
Analytical Solution of the Creep Problem Viscoelastic Material in a Round Tube <i>L. V. Kovtanyuk</i>	67
Diffusion Combustion of a Hydrogen Microjet, Outflowing from a Curvilinear Channel <i>V. V. Kozlov, A. V. Dovgal, M. V. Litvinenko, Yu. A. Litvinenko, A. G. Shmakov</i>	72
Molecular Dynamic Study of the Cratering Process During High-Velocity Impact of Metallic Clusters with a Substrate <i>A. V. Utkin, V. M. Fomin</i>	76
Optimization of the Motion of a Body with an Internal Mass under Quadratic Resistance <i>F. L. Chernousko</i>	81

TECHNICAL SCIENCES

10 GHz Monolithic Filter Based on Stripline Resonators with Split Conductor

*I. V. Govorun, B. A. Belyaev, Ya. B. Zav'yalov, T. Y. Shumilov, A. O. Afonin,
A. V. Ugryumov, R. G. Galeev*

88

Free Surface Two-dimensional Periodic Disturbances in Various Models of the Fluid

Yu. D. Chashechkin, A. A. Ochirov

95

УДК 537.6

ВИХРЕВОЕ КОЛЬЦО В ФЕРРОМАГНЕТИКЕ

© 2023 г. Член-корреспондент РАН А. Б. Борисов^{1,*}, Д. В. Долгих^{1,**}

Поступило 02.06.2023 г.

После доработки 17.09.2023 г.

Принято к публикации 19.09.2023 г.

Предсказан новый тип вихревых структур в трехмерном ферромагнетике — вихревые кольца. Численными методами установлено, что эти структуры обладают конечной энергией. Также исследован характер взаимодействия пар таких колец в простейших случаях.

Ключевые слова: модель Гейзенберга, ферромагнетик, вихрь, вихревая нить, вихревое кольцо

DOI: 10.31857/S2686740023060020, **EDN:** HUEUTK

Вихревые распределения параметра порядка (вихри) широко используются в физике конденсированных сред. В теории магнетизма к таким структурам относятся плоские вихри (мероны), инстантоны [1–3] и скирмионы [4] в несоизмеримых двумерных магнетиках, предсказанные много лет назад. Помимо академического интереса такие структуры важны для спинтронной промышленности, где они рассматриваются как перспективные объекты переноса и хранения информации. Гамильтониан, определяющий магнитные структуры в ферромагнетиках, учитывает довольно много взаимодействий, которые образуют определенную иерархию. При этом наибольший вклад вносит обменное взаимодействие Гейзенберга. Поэтому один из подходов к исследованию новых локализованных магнитных структур заключается в минимизации обменной энергии и предсказании тем самым метастабильных состояний. В континуальном приближении статическим структурам отвечает плотность обменной энергии с постоянной J :

$$E_0 = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} J (\nabla n_i) (\nabla n_i) \quad (1)$$

для единичного вектора намагниченности $\mathbf{n} = \mathbf{M}/M_0$. В безразмерных переменных уравнения вариационной задачи для статических распределений параметра порядка $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x_1, x_2)$ имеют вид

$$\Delta \mathbf{n} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{n}) = 0, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (2)$$

Для дальнейшего анализа удобно параметризовать вектор $\mathbf{n}$ сферическими углами Φ, θ :

$$\mathbf{n} = (\cos \Phi \sin \theta, \sin \Phi \sin \theta, \cos \theta).$$

Тогда уравнения (2) записываются в виде

$$\Delta \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta (\nabla \Phi)^2 = 0, \quad (3)$$

$$2 \cos \theta (\nabla \theta \cdot \nabla \Phi) + \sin \theta \Delta \Phi = 0. \quad (4)$$

Модель (1) часто называется $O(3)$ -моделью в двумерном пространстве. Она имеет многочисленные приложения в теории поля и физике конденсированных сред (жидкие кристаллы [4]).

Магнитные вихри являются частным случаем дефектов физики конденсированных сред, которые достаточно давно наблюдались и исследовались в различных средах. Исторически исследование вихрей прежде всего связано с гидродинамикой. Начиная с работы Гельмгольца в 1868 г., в гидродинамике исследованы различные типы вихревых структур [5–7]. Среди них особый интерес вызывают тороидальные вихревые кольца в обычной жидкости и воздухе. Отметим также, что в последние годы активно исследуются вихревые кольца в различных молях теории поля (например, [8, 9]).

Цель этой работы — предсказать и проанализировать вихревые кольца в трехмерном ферромагнетике.

Плотность энергии (1) инвариантна относительно группы спиновых и пространственных вращений $SO(3) \times SO(3)$, и без ограничений общности мы рассмотрим решение для вихревой нити в форме окружности радиуса R в плоскости $z = 0$ с центром в начале координат, когда вектор

¹Институт физики металлов имени М.Н. Михеева
Уральского отделения Российской академии наук,
Екатеринбург, Россия

*E-mail: borisov@imp.uran.ru

**E-mail: dolgihd@imp.uran.ru

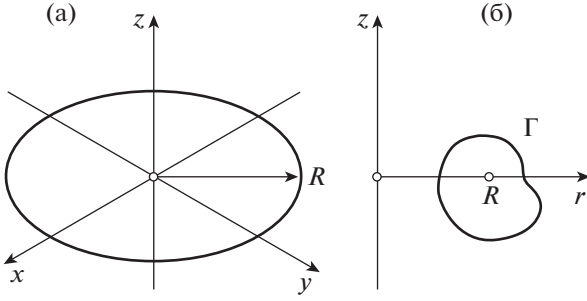


Рис. 1. Вихревое кольцо в плоскости Oxy декартовой системы координат (а) и контур Γ в цилиндрической системе (б).

намагниченности $\mathbf{n}$ лежит в плоскости ($\theta = \pi/2$). Тогда поле Φ в цилиндрической системе координат (r, z, φ) не зависит от угла φ , и уравнение (4) переходит в уравнение Лапласа

$$\partial_r^2 \Phi + \frac{1}{r} \partial_r \Phi + \partial_z^2 \Phi = 0. \quad (5)$$

Вихревая структура поля Φ (вихревое кольцо, рис. 1а) с топологическим зарядом $Q \in \mathbb{Z}$ характеризуется условием

$$\oint_{\Gamma} \partial_r \Phi dr + \partial_z \Phi dz = 2\pi Q, \quad \partial_r \Phi \rightarrow 0, \quad \partial_z \Phi \rightarrow 0 \quad (r^2 + z^2 \rightarrow \infty), \quad (6)$$

где Γ — произвольный контур в плоскости r, z , окружающий точку $r = R, z = 0$ (рис. 1б).

С помощью формулы Грина условие (6) записывается в виде некоммутативности частных производных от вихревого поля Φ :

$$\partial_z \partial_r \Phi - \partial_r \partial_z \Phi = \Delta(r, z). \quad (7)$$

Здесь введено обозначение $\Delta(r, z) = 2\pi Q \delta(r - R) \delta(z)$. Для решения задачи (5), (7) достаточно найти явный вид частных производных $\partial_r \Phi, \partial_z \Phi$, которые обозначим как новые поля $\varphi_1 = \partial_r \Phi, \varphi_2 = \partial_z \Phi$. Тогда, дифференцируя уравнение

$$\partial_r \varphi_2 - \partial_z \varphi_1 = \Delta(r, z)$$

по переменной r и складывая его с уравнением (5), продифференцированным по z , с учетом равенства $\partial_r \partial_z \varphi_1 = \partial_z \partial_r \varphi_1$ получаем замкнутое уравнение для расчета φ_2 :

$$\partial_r^2 \varphi_2 + \partial_z^2 \varphi_2 + \frac{1}{r} \partial_r \varphi_2 = \partial_r \Delta + \frac{1}{r} \Delta. \quad (8)$$

Уравнение

$$\partial_r^2 \varphi_1 + \partial_z^2 \varphi_1 + \partial_r \left(\frac{1}{r} \varphi_1 \right) = \partial_z \Delta \quad (9)$$

можно получить аналогичным способом. Решение линейного неоднородного уравнения (8) имеет вид

$$\varphi_2(r, z) = \int_0^\infty dr' \int_{-\infty}^\infty dz' G_2(r, r', z, z') \times \left(\partial_{r'} \Delta(r', z') + \frac{1}{r'} \Delta(r', z') \right), \quad (10)$$

где функция Грина $G_2(r, r', z, z')$ подчиняется уравнению

$$\partial_r^2 G_2 + \frac{1}{r} \partial_r G_2 + \partial_z^2 G_2 = \delta(r - r') \delta(z - z'). \quad (11)$$

Ее явный вид можно получить, используя представление в виде

$$G_2(r, r', z, z') = \frac{1}{2\pi} \iint J_0(k_2 r) C(k_1, k_2, r') \exp i k_1 (z - z') dk_1 dk_2 \quad (12)$$

и выражая правую часть уравнения (11) через функции Бесселя J_0 первого рода нулевого порядка:

$$\delta(r - r') \delta(z - z') = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty J_0(k_2 r') \times J_0(k_2 r) k_2 dk_2 \int_{-\infty}^\infty \exp(i k_1 (z - z')) dk_1.$$

Тогда

$$C(k_1, k_2, r') = -\frac{r' k_2}{k_1^2 + k_2^2} J_0(k_2 r')$$

и интеграл в (12) вычисляется с помощью теоремы о вычетах и табличной формулы:

$$\int_0^\infty \exp(-px) J_0(bx) J_0(cx) dx = \frac{k}{\pi \sqrt{bc}} K(k),$$

где

$$k = \frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{p^2 + (b+c)^2}}.$$

В результате функция Грина выражается через полный эллиптический интеграл первого рода $K(k)$ [10]:

$$G_2(r, r', z, z') = \frac{r'}{\pi \sqrt{(z - z')^2 + (r + r')^2}} K(k) \quad (13)$$

с модулем

$$k = \frac{2\sqrt{rr'}}{\sqrt{(z - z')^2 + (r + r')^2}}, \quad (14)$$

зависящим от координат r, r', z, z' . Нетрудно убедиться, что величина k меняется от нуля (при

$r \rightarrow \infty$) до единицы (при $r' \rightarrow r$, $z' \rightarrow z$). Из-за сингулярного поведения полного эллиптического интеграла первого рода

$$K(k) \approx \ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}}$$

при $k \rightarrow 1$ выражение (13) при $r' \rightarrow r$, $z' \rightarrow z$ имеет характерную логарифмическую особенность. Тогда из (10) сразу следует явное выражение для $\partial_z \Phi$:

$$\begin{aligned} \partial_z \Phi &= -\partial_{r'} G_2(r, R, z, 0) + \frac{1}{r'} G_2(r, R, z, 0) = \\ &= -\frac{Q}{\sqrt{(R+r)^2 + z^2}} \left[\frac{R^2 - r^2 - z^2}{(R-r)^2 + z^2} E(\kappa) + K(\kappa) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

через полные эллиптические интегралы первого $K(\kappa)$ и второго рода $E(\kappa)$ с модулем

$$\kappa = \frac{2\sqrt{rR}}{\sqrt{(R+r)^2 + z^2}}. \quad (16)$$

Подобным образом с помощью функции Грина

$$G_1(r, r', z, z') = -\frac{r'}{2\pi k \sqrt{r'}} [(2-k^2)K(k) - 2E(k)],$$

где k определяется формулой (14), для уравнения (9) можно найти выражение для $\partial_r \Phi$:

$$\begin{aligned} \partial_r \Phi &= -\frac{Qz}{r\sqrt{(R+r)^2 + z^2}} \times \\ &\times \left[\frac{R^2 + r^2 + z^2}{(R-r)^2 + z^2} E(\kappa) - K(\kappa) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда из (15), (17) находим вихревую структуру поля Φ при $r \rightarrow R$, $z \rightarrow 0$:

$$\Phi(r, z) = -Q \arctg \frac{r-R}{z}. \quad (18)$$

В явном виде функцию $\Phi(r, z)$ можно получить численным интегрированием уравнения (15) или (17). В поперечном сечении плоскостью $x=0$ ясно виден дублет плоских вихрей с зарядами $Q = -1$ и $Q = 1$ в точках $(z=0, y=1)$ и $(z=0, y=-1)$ соответственно (рис. 2). Для наиболее полного понимания структуры кольца в R^3 мы приводим два видеоролика, в которых векторное поле представлено с помощью сечений вертикальной плоскостью, проходящей через ось Oz : в первом [11] плоскость вращается относительно оси Oz неподвижной системы координат $Oxyz$, во втором [12] поле представлено в этой же секущей плоскости, наблюдаемой в связанной с ней подвижной системе координат.

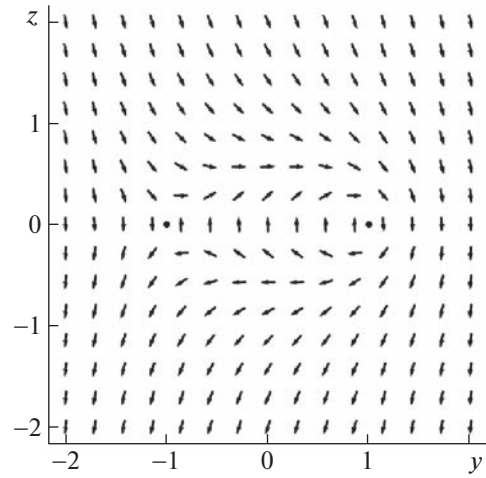


Рис. 2. Структура векторного поля $\mathbf{n} = (\cos \Phi, \sin \Phi)$ в окрестности вихревого кольца при $R=1$, сечение плоскостью $x=0$.

Обсудим энергию вихревого кольца. В соответствии с (1), (15), (17) полная энергия E вихревого кольца имеет вид

$$E = \frac{1}{2} J \int [(\partial_r \Phi)^2 + (\partial_z \Phi)^2] dr.$$

Известно [1, 2], что полная энергия плоского вихря в магнетике в образце с размером L пропорциональна $\pi \ln(L/a)$, где a — радиус кора (сердцевинный вихрь). На расстояниях $r < a$ не применимо континуальное приближение, и нужно использовать аппроксимацию решений или учитывать дискретность решетки. Энергия взаимодействия двух плоских вихрей (рис. 2), удаленных друг от друга на расстоянии $2R$, пропорциональна $\pi \ln(R/a)$. Поэтому в грубом приближении энергия вихревого кольца должна быть пропорциональна $\pi \ln(R/a)$, умноженной на длину кольца $2\pi R$, и не должна зависеть от размеров образца. Проведенные численные расчеты приводят к формуле

$$E \sim JQ^2 R \left(2\pi^2 b \ln \frac{R}{a} + c \right) \quad (b \approx 1.01, c \approx 0.87). \quad (19)$$

Параметры b и c вычислены методом наименьших квадратов. Эта формула хорошо аппроксимирует энергию кольца при численных расчетах (рис. 3) и очень хорошо совпадает с качественной оценкой в логарифмическом приближении. Отметим, что при вычислениях мы не учитываем область внутри тороида

$$(r^2 + z^2 + R^2 - a^2)^2 - 4R^2(r^2) = 0,$$

где неприменимо континуальное приближение.

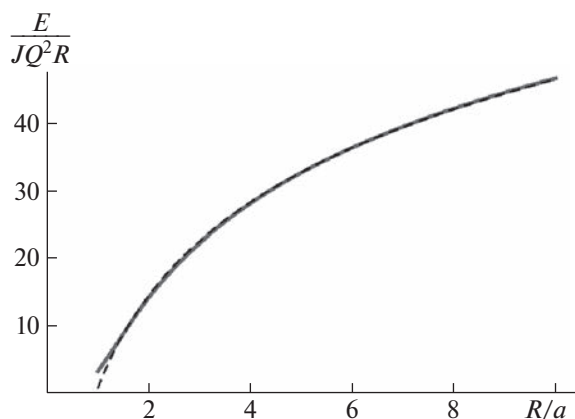


Рис. 3. Энергия кольца E , отнесенная к радиусу R (сплошная серая линия – численный расчет), и ее аппроксимация (19) (штриховая линия).

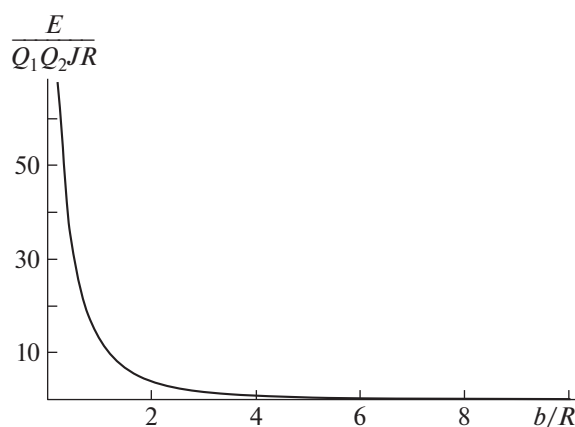


Рис. 4. Зависимость энергии взаимодействия двух соосных колец от расстояния между их центрами b (численный расчет). Радиус кора $a = 0.1R$, $Q_i \in \mathbb{Z}$, $Q_1 \cdot Q_2 > 0$.

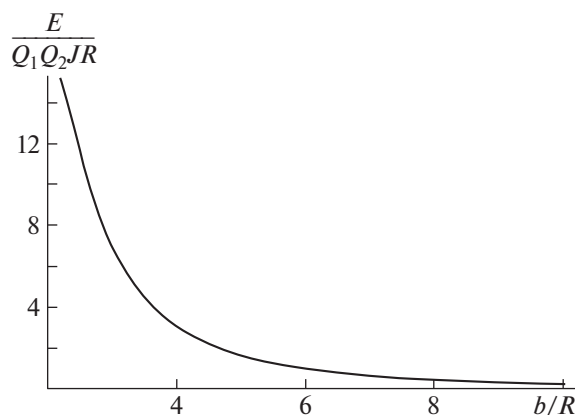


Рис. 5. Зависимость энергии взаимодействия двух колец, расположенных в одной плоскости, от расстояния между их центрами b (численный расчет). Радиус кора $a = 0.1R$, $Q_i \in \mathbb{Z}$, $Q_1 \cdot Q_2 > 0$.

Чтобы понять характер взаимодействия вихревых колец, были проведены численные расчеты для двух простых случаев. Вначале мы рассмотрели два вихревых кольца одинакового радиуса R с положительными топологическими зарядами Q_1 и Q_2 , центры которых располагаются на оси Oz и отстоят друг от друга на расстоянии b . График зависимости энергии их взаимодействия от b приведен на рис. 4.

Во втором случае исследовалось взаимодействие двух колец, расположенных в плоскости xOy . Зависимость энергии взаимодействия от расстояния между центрами колец b качественно соответствует предыдущему случаю (рис. 5). Аналитическое описание взаимодействия вихревых колец является предметом дальнейшего изучения.

Предсказанные вихревые кольца метастабильны. Такие структуры могут зарождаться только при учете тепловых флуктуаций. В реальных трехмерных магнетиках кольца стабильны только при наличии дефекта в центре кольца или при наличии анизотропии или магнитного поля в легкой плоскости.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы глубоко признательны В.В. Киселеву за интерес к работе и полезные замечания.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (тема “Квант”, номер г.р. 122022000038-7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. Киев: Наукова думка, 1983. 123 с.
2. Kosevich A.M., Ivanov B.A., Kovalev A.S. Magnetic Solitons // Physics Reports. 1990. V. 194. № 3–4. P. 117–238.
[https://doi.org/10.1016/0370-1573\(90\)90130-T](https://doi.org/10.1016/0370-1573(90)90130-T)
3. Богданов А.Н., Яблонский Д.А. Термодинамические устойчивые “вихри” в магнитоупорядоченных кристаллах. Смешанное состояние магнетиков // ЖЭТФ. 1989. Т. 95. № 1. С. 178–182.
4. Курик М.В., Лаврентович О.Д. Дефекты в жидких кристаллах: гомотопическая теория и экспериментальные исследования // УФН. 1988. № 3. С. 381–431.
<https://doi.org/10.3367/UFG.0154.198803b.0381>
5. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М: Мир, 1973. 778 с.

6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.
7. Ламб Г. Гидродинамика. М.: ОГИЗ, 1947. 929 с.
8. Bazeia D., Marques M.A., Melnikov D. Planar ringlike vortices // *Physics Letters B*. 2018. V. 785. № 10. P. 454–461.
<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.09.012>
9. Bazeia D., Liao M.A., Marques M.A., Menezes R. Multilayered vortices // *Phys. Rev. Research*. 2019. V. 1. P. 033053.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.1.033053>
10. Byrd P.F., Friedman M.D. Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists. N.Y., Heidelberg, Berlin: Springer–Verlag, 1971. 358 p.
11. Структура векторного поля в R^3 .
<https://youtu.be/Hi0PwsjwEs4>
12. Векторное поле в поперечном сечении вихревого кольца. <https://youtu.be/zuBcOU5Ds6U>

THE VORTEX RING IN FERROMAGNET

Corresponding Member of the RAS **A. B. Borisov^a** and **D. V. Dolgikh^a**

^a*M.N. Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia*

A new type of vortex structures in the 3D ferromagnet is predicted – the vortex rings. It was established by experimental methods that these structures have finite energy. The nature of the interaction of pairs of such rings in the simplest cases was investigated.

Keywords: Heisenberg model, ferromagnet, vortex, vortex axis, vortex ring

УДК 543.424.2

НОВЫЕ МАРКЕРЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХИМИЧЕСКОГО И ИЗОМЕРНОГО СОСТАВА КАРОТИНОИДОВ МЕТОДОМ СПЕКТРОСКОПИИ КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ

© 2023 г. Д. Д. Васимов¹, А. А. Ашихмин², М. А. Большаков², М. Н. Московский³,
С. В. Гудков^{1,3}, Д. В. Яныкин^{1,2}, В. С. Новиков^{1,*}

Представлено академиком РАН В.И. Коновым 31.08.2023 г.

Поступило 31.08.2023 г.

После доработки 31.08.2023 г.

Принято к публикации 07.09.2023 г.

Проанализированы экспериментальные и рассчитанные на основе теории функционала плотности спектры комбинационного рассеяния каротиноидов растительного и бактериального происхождения: нейроспорина, сфероидена, ликопина, спириллоксантина, β -каротина, лютеина, ζ -каротина, α -каротина и γ -каротина. Впервые описан ряд характерных особенностей в спектрах комбинационного рассеяния каротиноидов, позволяющих определять структуру концевых групп молекул и различать их изомеры.

Ключевые слова: спектроскопия комбинационного рассеяния света, теория функционала плотности, каротиноиды, пигменты, *цис-транс*-изомерия

DOI: 10.31857/S2686740023060147, **EDN:** HSYSNV

Каротиноиды выполняют большое количество важных функций в различных живых организмах: от бактериальных клеток до высших растений и млекопитающих [1]. В человеческом организме эти соединения выступают в качестве антиоксидантов, нейтрализуя свободные радикалы, обладают провитаминными, иммуностимулирующими и лечебно-профилактическими свойствами [2, 3]. В частности, лютеин используется для лечения заболеваний глаз, например возрастной атрофии сетчатки, катаракты; ликопин предотвращает вакуолизацию в эпителиальных клетках хрусталика глаза человека [4, 5]. α -каротин, β -каротин и ликопин обладают антиканцерогенными и антиоксидантными свойствами [6, 7]. Человеческий организм не синтезирует каротиноиды, а получает их из пищи и лекарственных средств для наружного применения.

Каротиноиды являются компонентами системы сбора света в хлоропластах и играют важную роль в защите растений от фотоокислительного повреждения [8].

Основным элементом структуры каротиноидов является полиеновая цепь. Молекулы каротиноидов различаются длиной полиеновой цепи (длиной сопряжения), структурой боковых и концевых групп.

Кроме того, для каротиноидов характерна геометрическая изомерия, однако в природе преобладают термодинамически наиболее стабильные *транс*-изомеры каротиноидов, в то время как их *цис*-изомеры встречаются реже [9, 10]. Количество двойных связей в “скелете” молекулы каротиноида определяет возможный набор *цис*-конфигураций [11]. Могут существовать *цис*-изомеры как с одной *цис*-связью (моно-*цис*-изомеры), так и с несколькими (поли-*цис*-изомеры). В гомогенных растворах каротиноиды имеют тенденцию к изомеризации с образованием смеси из моно-/поли-*цис*-изомеров и полностью *транс*-изомеров. В тканях человека присутствует определенное количество *цис*-изомеров каротиноидов [12]. Как структура молекул каротиноидов, так и наличие изомерии существенно влияют на их биодоступность, провитаминную активность, антиоксидантные и прочие ключевые для живых организмов свойства [9, 13, 14]. Таким образом, определение химического и изомерного составов

¹Институт общей физики им. А.М. Прохорова
Российской академии наук, Москва, Россия

²Федеральный исследовательский центр
“Пушкинский научный центр биологических исследований
Российской академии наук”, Пушкино, Московская обл.,
Россия

³Федеральный научный агроинженерный центр ВИМ,
Москва, Россия

*E-mail: vs.novikov@kapella.gpi.ru

каротиноидов является чрезвычайно важным и востребованным при анализе пищевых продуктов и лекарственных средств, имеет большое диагностическое значение, например, при исследовании кожи человека [15]. Вследствие возможной изомеризации молекул каротиноидов под действием ультрафиолетового излучения, повышенной температуры, под влиянием растворителей и т.п. производить диагностику изомерного состава каротиноидов более достоверно и более удобно в составе продуктов и лекарств без их выделения.

Спектроскопия комбинационного рассеяния (КР) света является неразрушающим и высокоинформативным методом анализа молекулярных веществ [16, 17]. За счет возникновения эффекта резонансного усиления интенсивности линий в спектрах КР каротиноидов из-за наличия в их молекулах последовательности сопряженных двойных связей при возбуждении спектров КР излучением сине-зеленого диапазона можно детектировать даже малые концентрации этих пигментов в сложных системах, таких как биологические ткани [18, 19].

Как правило, практический интерес представляет исследование каротиноидов в малых концентрациях в составе образца, и в этом случае низкая фото-, термо- и окислительная стабильность этих соединений в чистом виде не являются препятствием для анализа методом спектроскопии КР. Однако, при разработке методов спектроскопии КР для анализа химического и изомерного состава каротиноидов, необходимо проанализировать спектры КР изомеров чистых каротиноидов. В этом случае в качестве дополнительного метода очень полезным является моделирование спектров КР каротиноидов, основанное на методах квантовой химии. Анализ экспериментальных спектров КР с привлечением результатов моделирования позволяет более достоверно определить и связать изменения в структуре молекул с изменениями в спектрах КР.

К настоящему моменту накоплен значительный объем знаний о спектрах КР α -каротина, β -каротина и ликопина (см. ссылки из работы [20]), в то время как спектры других каротиноидов исследованы очень мало. Наиболее важным результатом в области спектроскопии КР каротиноидов на сегодняшний день является установление зависимости положения полосы валентных колебаний $C=C$ -связей от длины сопряжения (см. ссылки из работы [20]). В работе [20] было показано, что положение этой полосы слабо зависит от структуры боковых и концевых групп и в основном определяется длиной сопряжения. Зависимость частоты этого колебания от длины сопряжения описывается обратной функцией при учете частичного сопряжения двойных связей в составе иононовых колец с полиеновой цепью

для каротиноидов, имеющих иононовые кольца в качестве концевых групп. В этой же работе было показано, что положение полосы валентных колебаний $C-C$ -связей зависит сложным образом от длины сопряжения, структуры боковых и концевых групп.

На данный момент остаются нерешенными две важнейшие задачи спектроскопии КР каротиноидов: определение зависимости спектров КР от типа изомера и определение влияния окружения молекулы каротиноида на ее спектр КР. Известно, что в растворах и в коже человека наблюдаются сдвиги полос валентных колебаний $C-S$ и $C=C$ -связей [21], однако решение этой задачи остается за рамками данного исследования. Данная работа посвящена определению зависимости спектров КР от типа изомера.

В работе [21] было показано, что в спектрах КР изомеров β -каротина наблюдаются сдвиг, перераспределение интенсивности и расщепление полос валентных колебаний $C-C$ - и $C=C$ -связей, а также изменение спектральных характеристик других полос. Таким образом, для анализа химического и изомерного состава каротиноидов необходимо найти дополнительные маркеры в спектрах КР.

Целью данной работы являлось обнаружение новых, связанных с интенсивностями и положениями линий характерных особенностей в спектрах КР каротиноидов для определения химического состава молекул, а также идентификации различных изомеров каротиноидов.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

В работе экспериментально были исследованы следующие каротиноиды: нейроспорин, сфероиден, ликопин, спириллоксантин, β -каротин и лютеин, а также изолированные Д1/Д2/цитохром *b559* комплексы фотосистемы 2 (реакционные центры фотосистемы 2 (РЦ ФС2)). Этот набор образцов позволяет исследовать зависимость положений и интенсивностей линий КР от длины сопряжения и структуры концевых групп.

Нейроспорин был выделен из *Rhodobacter sphaeroides* G1C. Сфероиден и спириллоксантин были очищены от *Rhodobacter sphaeroides* 2.4.1 и *Rhodospirillum rubrum* соответственно [22]. Также использовали три коммерческих препарата каротиноидов (лютеин (RealCaps, Россия), ликопин (Renessans, Россия), β -каротин (Merck, EC)). Экстракция и выделение каротиноидов были проведены методом, описанным в работе [23]. Реакционные центры ФС2 были выделены из листьев шпината согласно методу, описанному ранее [24].

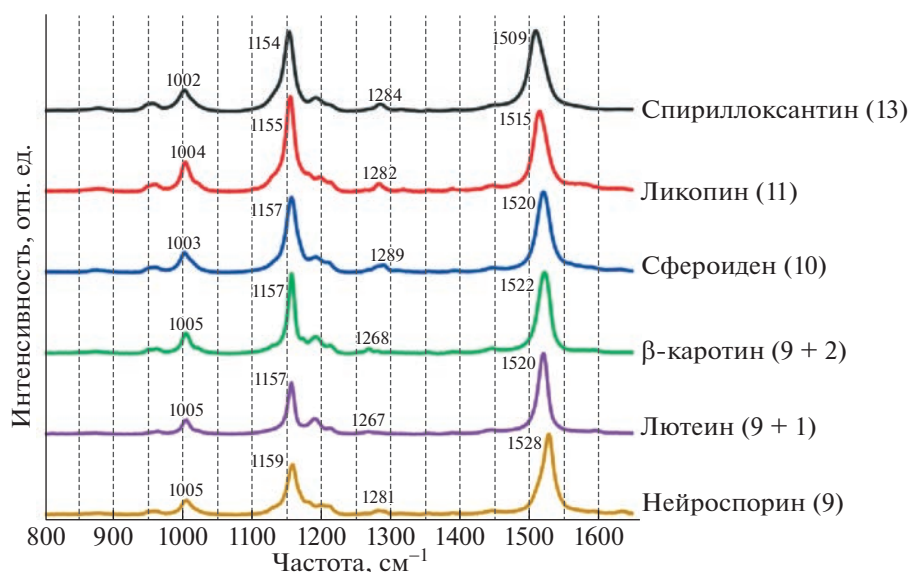


Рис. 1. Экспериментальные спектры КР нейроспорина, сфероидена, ликопина, спириллоксантина, β -каротина и лютеина. На спектрах обозначены положения максимумов линий КР. В скобках указаны длины сопряжения с учетом частичного сопряжения двойных связей в иононовых кольцах с полиеновой цепью.

Экспериментальные спектры КР исследуемых веществ были зарегистрированы с помощью конфокального КР-микроскопа Senterra II (Bruker Optics, США) с длинами волн возбуждающего излучения 532 и 785 нм. Спектры записывали при 180° -рассеянии со спектральным разрешением 1.5 см^{-1} . Мощность лазера на поверхности образца составляла 6.25 мВт при длине волны возбуждения 532 нм и 25 мВт — при 785 нм.

Помимо экспериментального исследования в работе производили расчет структур и спектров КР молекул каротиноидов. Были рассчитаны структуры и спектры КР всех каротиноидов, исследуемых экспериментально, а также ζ -каротина, α -каротина и γ -каротина. Для моделирования структур и спектров КР всех исследуемых молекул использовали теорию функционала плотности (ТФП). Расчеты проводили в некоммерческой программе “Природа” с использованием функционала OLYP и расширенного базиса гауссова типа (4z) [21, 25]. Для сравнения рассчитанных спектров с экспериментальными учитывалась конечная ширина линий в экспериментальных спектрах при помощи процедуры уширения, детально описанной в [21]. Для исключения из теоретического анализа зависимости интенсивностей линий КР от длины волны возбуждающего излучения рассчитывали значения Raman Scattering Activity (R.S.A., формула (4) из работы [21]).

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 1 представлены экспериментальные спектры КР нейроспорина, сфероидена, ликопи-

на, спириллоксантина, β -каротина и лютеина в области спектра от 800 до 1600 см^{-1} . В спектрах КР всех каротиноидов в этом диапазоне мы наблюдаем три основные линии: около 1000 см^{-1} (деформационные колебания боковых групп), около 1150 см^{-1} (валентные колебания С—С-связей) и около 1520 см^{-1} (валентные колебания С=C-связей) [21]. Максимумы линий, соответствующих валентным колебаниям С—С- и С=C-связей, в спектрах КР смещаются в сторону больших частот с уменьшением длины полиеновой цепи в молекулах каротиноидов. Этот результат находится в согласии с опубликованными данными других авторов (см. ссылки в работе [20]).

Линии в спектрах КР каротиноидов в диапазоне $1265\text{--}1290 \text{ см}^{-1}$ представляют особый интерес. Обнаружено, что положение наиболее интенсивных линий в этой области является маркером для определения строения концевых групп молекул (рис. 1). При использовании длины волны возбуждения 532 нм для регистрации спектров, в спектрах КР молекул β -каротина и лютеина, концевые группы которых содержат иононовое кольцо, положение наиболее интенсивной линии составляет 1268 и 1267 см^{-1} соответственно. Для других каротиноидов, не содержащих иононовых колец, оно смещено примерно на $15\text{--}20 \text{ см}^{-1}$ в сторону больших частот и находится в области $1282\text{--}1289 \text{ см}^{-1}$. Кроме того, в спектрах каротиноидов, молекулы которых не содержат иононовых колец, интенсивность линий в этом диапазоне заметно выше. Несмотря на низкую интенсивность линий в диапазоне $1265\text{--}1290 \text{ см}^{-1}$, положение

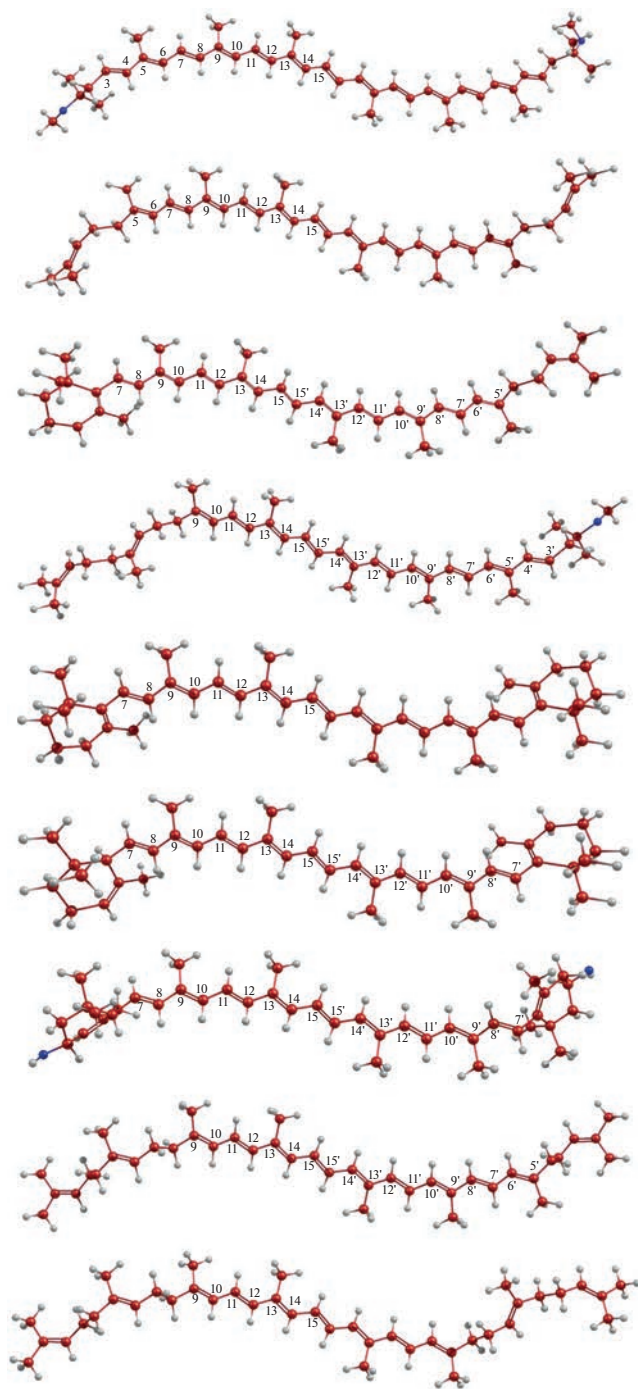


Рис. 2. Рассчитанные структуры *транс*-изомеров спириллоксантина, ликопина, γ -каротина, сфероидена, β -каротина, α -каротина, лютеина, нейроспорины, ζ -каротина. Атомы углерода, кислорода и водорода обозначены красным, синим и серым цветами соответственно.

наиболее интенсивных линий можно определить с необходимой для анализа точностью из-за большого сдвига линий. Аналогичная зависимость наблюдается в случае длины волны возбуждения 785 нм, а именно положение наиболее интенсив-

ной линии в этом диапазоне составляет 1267 и 1270 см^{-1} для β -каротина и лютеина и лежит в диапазоне $1283\text{--}1287\text{ см}^{-1}$ для остальных каротиноидов.

Для более детального анализа различных изомеров молекул и отнесения линий в спектрах КР к определенным типам колебаний были рассчитаны оптимизированные структуры и спектры КР *транс*- и моно-*цис*-изомеров молекул нейроспорины, сфероидена, ликопина, спириллоксантина, β -каротина, лютеина, ζ -каротина, α -каротина и γ -каротина.

Оптимизированные геометрии *транс*-изомеров молекул каротиноидов представлены на рис. 2. Для обозначения *цис*-изомеров каротиноидов использовались общепринятые обозначения. Номер в обозначении указывает порядковый номер атома углерода в молекуле, около которого находится *цис*-связь. Отсчет атомов углерода ведется от концевой группы. Для обозначения номеров атомов углерода в молекулах каротиноидов с неэквивалентными концевыми группами использованы числа без штрихов при подсчете от одной концевой группы и со штрихами при подсчете от другой.

Рассчитанные спектры КР *транс*-изомеров молекул каротиноидов хорошо описывают основные особенности в экспериментальных спектрах КР (рис. 3а), что позволяет предположить, что в исследуемых экспериментально образцах молекулы находятся преимущественно в *транс*-конфигурации. Этот результат находится в согласии с ожидаемым конфигурационным составом выделенных каротиноидов. При этом мы наблюдаем смещение рассчитанных линий относительно экспериментально наблюдаемых для всех исследуемых каротиноидов. Линии, отвечающие валентным колебаниям С—С-связей, в рассчитанных спектрах смещены примерно на 10 см^{-1} в сторону больших частот, а линии, отвечающие валентным колебаниям С=С-связей, на 20 см^{-1} в сторону меньших частот. Однако все закономерности, в том числе зависимости положений и относительных интенсивностей линий от длины сопряжения, совпадают для рассчитанных и экспериментальных спектров. Далее будет показано, что в спектрах КР *цис*-изомеров каротиноидов присутствуют характерные линии, которые не наблюдаются в экспериментальных спектрах каротиноидов (рис. 3а), что также свидетельствует о том, что молекулы в исследуемых образцах находятся в *транс*-конфигурации.

В структурах 9-*цис*, 9'-*цис*, 13-*цис* и 13'-*цис* изомеров всех исследуемых каротиноидов, а также всех 5-*цис* и 5'-*цис* изомеров, возможных для ряда исследуемых в работе каротиноидов, около *цис*-связи находится атом углерода, у которого одним из заместителей является CH_3 -группа (рис. 2). Та-

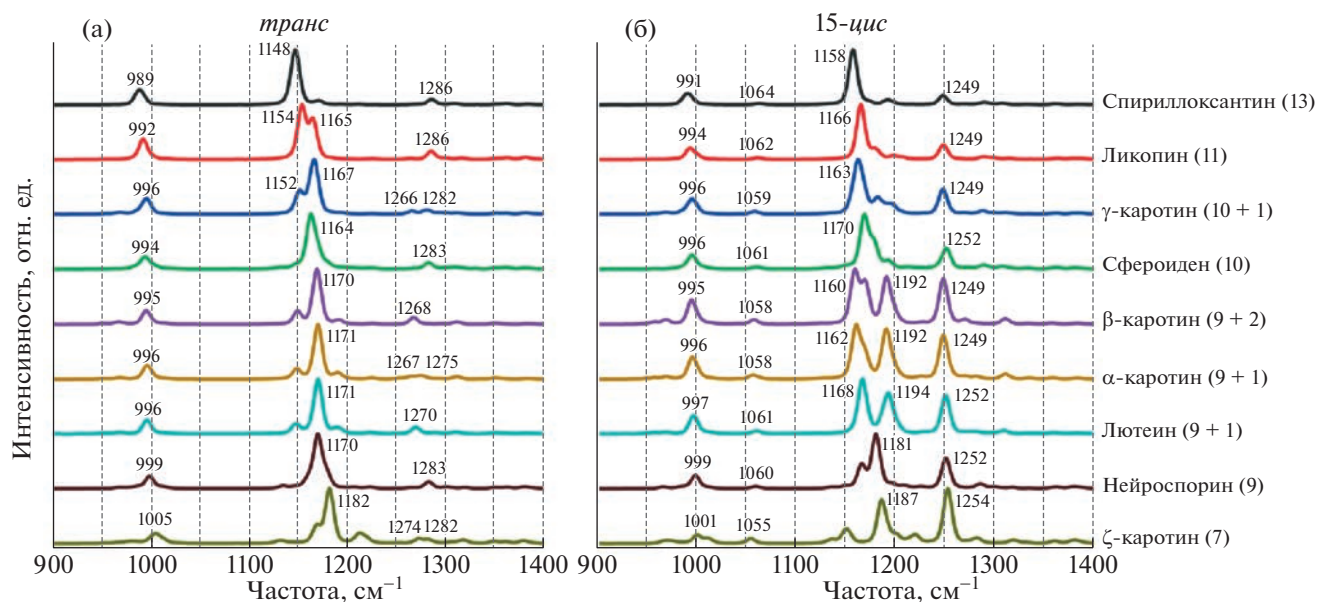


Рис. 3. Рассчитанные спектры КР *транс* (а) и 15-*цис*-изомеров (б) молекул спириллоксантина, ликопина, γ -каротина, сфероидена, β -каротина, α -каротина, лютеина, нейроспорина, ζ -каротина. В скобках указаны длины сопряжения с учетом частичного сопряжения двойных связей в иононовых кольцах с полиеновой цепью.

кие изомеры называются метилированными [26, 27]. Изомеры, у которых атомы углерода около *цис*-связи не имеют в качестве одного из заместителей CH_3 -группу, называются неметилированными.

15-*цис* изомеры для всех исследуемых в работе каротиноидов являются эквивалентными по структуре 15'-*цис* изомерам и, следовательно, по спектрам КР. На рис. 3б представлены рассчитанные спектры КР 15-*цис*-изомеров молекул нейроспорина, сфероидена, ликопина, спириллоксантина, β -каротина, лютеина, ζ -каротина, α -каротина и γ -каротина. Для данного изомера у всех исследуемых каротиноидов в рассчитанных спектрах наблюдаются линии около 1060 и 1250 см⁻¹. Эти линии не наблюдаются в рассчитанных спектрах других изомеров этих каротиноидов. Присутствие и отсутствие этих линий хорошо согласуются с результатами работ [27, 28], где авторы наблюдали такие же полосы в экспериментальных спектрах КР 15-*цис*-изомера β -каротина в растворах. Аналогичные результаты были получены для кристаллических образцов 15-*цис*-изомера β -каротина, спектры которого были зарегистрированы при 77 К [29].

При анализе спектров КР, рассчитанных с применением метода ТФП, установлено, что линия вблизи 1060 см⁻¹ соответствует валентным колебаниям С—С- и С=C-связей, расположенных вблизи *цис*-связи в молекуле, а линия вблизи 1250 см⁻¹ соответствует валентным колебаниям С—С- и С=C-связей по всему скелету молекулы, с

наиболее интенсивными колебаниями вблизи *цис*-связи. Таким образом, было обнаружено, что наличие этих линий является маркером для детектирования 15-*цис* изомеров молекул каротиноидов.

Для дополнительного экспериментального подтверждения результатов наших расчетов нами были зарегистрированы спектры КР Д1/Д2/цитохром *b559* комплексов фотосистемы 2, содержащих две молекулы β -каротина в каждом РЦ ФС2. Мы обнаружили (рис. 4), что в спектрах наблюдается линия, указывающая на присутствие *транс* изомера каротиноида (полоса около 1157 см⁻¹) и минорного количества 15-*цис* изомера (полоса около 1242 см⁻¹). Это согласуется с результатами работ [28, 30, 31], согласно которым в РЦ ФС2 шпината, использованного в настоящей работе, в нативном состоянии содержатся *транс*-изомеры каротиноидов, а появление 15-*цис*-изомеров может быть обусловлено изомеризацией β -каротина при хранении образцов под действием освещения.

Анализ рассчитанных спектров позволил установить, что в спектрах КР метилированных изомеров, у которых *цис*-связь находится не рядом с сопряженными двойными связями на краю полиеновой цепочки в "скелете" молекул, наблюдается линия, отвечающая валентным колебаниям С—С-связей, находящихся в непосредственной близости от *цис*-связи. На рис. 5а и 5б представлены рассчитанные спектры КР 9-*цис*- и 13-*цис*-изомеров нейроспорина, сфероидена, ликопина, спириллоксантина, β -каротина, лютеина, ζ -ка-

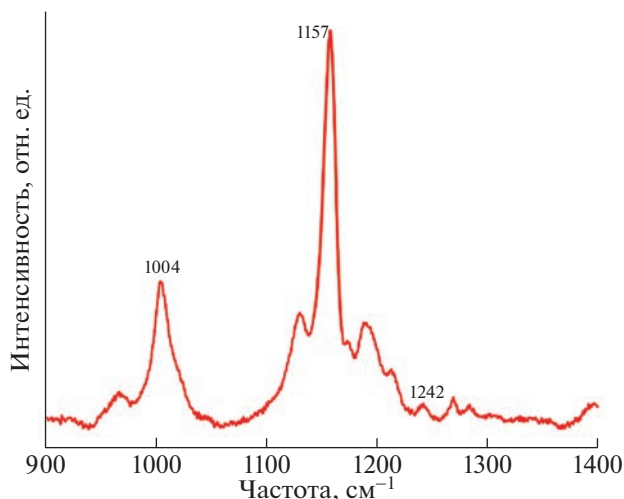


Рис. 4. Экспериментальный спектр КР Д1/Д2/цитохром *b559* комплексов фотосистемы 2.

ротина, α -каротина и γ -каротина. В рассчитанных спектрах этих изомеров линия, отвечающая данным колебаниям, находится на частоте около 1140 см^{-1} . Это позволяет отличать подобные изомеры от метилированных *цис*-изомеров. Наши результаты совпадают с экспериментальными данными, полученными для β -каротина в растворах [27, 28].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе впервые предложены новые маркеры определения структуры концевых групп каротиноидов и типа изомера по спектрам КР. Выводы работы подтверждены результатами эксперимен-

тальных исследований и квантово-химического моделирования.

Были получены экспериментальные спектры КР нейроспорина, сфероидена, ликопина, спироиллоксантина, β -каротина и лютеина. Эти спектры были подробно описаны путем сравнения с теоретическими спектрами КР *транс*-изомеров этих соединений, полученных при помощи квантово-химических расчетов. Мы показали, что в экспериментальных образцах чистых каротиноидов преимущественно содержатся *транс*-изомеры молекул.

Был произведен подробный анализ и выявлена связь между рассчитанными структурами молекул и спектрами КР моно-*цис*-изомеров нейроспорина, сфероидена, ликопина, спироиллоксантина, β -каротина, лютеина, ζ -каротина, α -каротина и γ -каротина.

Установлено, что анализ спектров КР позволяет различать моно-*цис*-изомеры между собой. Мы обнаружили, что в спектрах КР 15-*цис*-изомеров каротиноидов наблюдаются линии около 1060 и 1250 см^{-1} , которые отсутствуют для других изомеров каротиноидов.

Также мы обнаружили, что наличие линии около 1140 см^{-1} в спектрах КР исследуемых каротиноидов говорит о том, что молекулы являются метилированными *цис*-изомерами.

Обнаружено, что положение наиболее интенсивных линий в спектрах КР каротиноидов в диапазоне $1265\text{--}1290\text{ см}^{-1}$ является маркером для определения строения концевых групп молекул. В спектрах КР β -каротина и лютеина, содержащих иононовое кольцо в качестве концевой группы, положение наиболее интенсивной линии составляет 1268 и 1267 см^{-1} , соответственно. Для

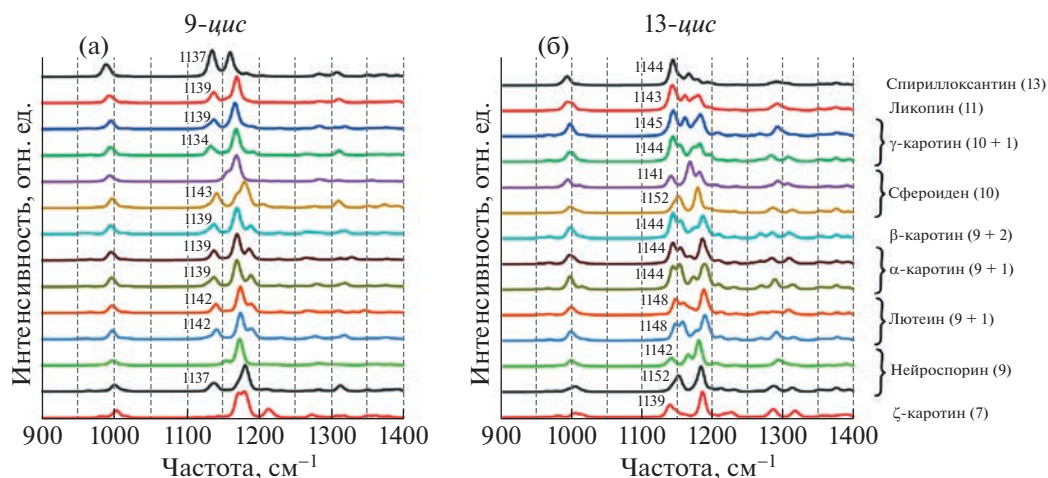


Рис. 5. Рассчитанные спектры КР 9-*цис*-изомеров (а) и 13-*цис*-изомеров (б) молекул спироиллоксантина, ликопина, γ -каротина, сфероидена, β -каротина, α -каротина, лютеина, нейроспорина, ζ -каротина. В скобках указаны длины сопряжения с учетом частичного сопряжения двойных связей в иононовых кольцах с полиеновой цепью.

других каротиноидов, не содержащих иононовых колец, оно смещено примерно на $15\text{--}20\text{ см}^{-1}$ в сторону больших частот и находится в области $1282\text{--}1289\text{ см}^{-1}$.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность МСЦ РАН за предоставление вычислительных ресурсов. Авторы благодарят профессора S. Takaichi из Nippon Medical School (Япония) за предоставленные образцы *Rhodospirillum rubrum* G1C.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет средств гранта Министерства науки и высшего образования Российской Федерации на проведение крупных научных проектов по приоритетным направлениям научно-технологического развития (идентификатор субсидии 075-15-2020-774).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Thomas D.B. et al. Non-destructive descriptions of carotenoids in feathers using Raman spectroscopy // *Anal. Methods*. 2014. V. 6. № 5. P. 1301–1308. <https://doi.org/10.1039/C3AY41870G>
2. Elvira-Torales L.I., García-Alonso J., Periago-Castón M.J. Nutritional Importance of Carotenoids and Their Effect on Liver Health: A Review // *Antioxidants*. 2019. V. 8. № 7. P. 229. <https://doi.org/10.3390/antiox8070229>
3. Meléndez-Martínez A.J., Stinco C.M., Mapelli-Brahm P. Skin Carotenoids in Public Health and Nutricosmetics: The Emerging Roles and Applications of the UV Radiation-Absorbing Colourless Carotenoids Phytoene and Phytofluene // *Nutrients*. 2019. V. 11. № 5. P. 1093. <https://doi.org/10.3390/nu11051093>
4. Mohanty I. et al. Lycopene prevents sugar-induced morphological changes and modulates antioxidant status of human lens epithelial cells // *Br. J. Nutr.* 2002. V. 88. № 4. P. 347–354. <https://doi.org/10.1079/BJN2002659>
5. Brown L. et al. A prospective study of carotenoid intake and risk of cataract extraction in US men // *Am. J. Clin. Nutr.* 1999. V. 70. № 4. P. 517–524. <https://doi.org/10.1093/ajcn/70.4.517>
6. Johnson E.J. The Role of Carotenoids in Human Health // *Nutr. Clin. Care*. 2002. V. 5. № 2. P. 56–65. <https://doi.org/10.1046/j.1523-5408.2002.00004.x>
7. Böhm V. et al. Trolox Equivalent Antioxidant Capacity of Different Geometrical Isomers of α -Carotene, β -Carotene, Lycopene, and Zeaxanthin // *J. Agric. Food Chem.* 2002. V. 50. № 1. P. 221–226. <https://doi.org/10.1021/jf010888q>
8. Demmig-Adams B., Gilmore A.M., Iii W.W.A. In vivo functions of carotenoids in higher plants // *FASEB J.* 1996. V. 10. № 4. P. 403–412. <https://doi.org/10.1096/fasebj.10.4.8647339>
9. Khoo H.-E. et al. Carotenoids and Their Isomers: Color Pigments in Fruits and Vegetables // *Molecules*. 2011. V. 16. № 2. P. 1710–1738. <https://doi.org/10.3390/molecules16021710>
10. Guo W.-H.H., Tu C.-Y.Y., Hu C.-H.H. Cis–Trans Isomerizations of β -Carotene and Lycopene: A Theoretical Study // *J. Phys. Chem. B*. 2008. V. 112. № 38. P. 12158–12167. <https://doi.org/10.1021/jp8019705>
11. Britton G. Carotenoids // *Natural Food Colorants*. Boston, MA: Springer US, 1996. P. 197–243. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-2155-6_7
12. Stahl W. et al. Separation of beta-carotene and lycopene geometrical isomers in biological samples. // *Clin. Chem.* 1993. V. 39. № 5. P. 810–814.
13. Boileau T.W.-M., Boileau A.C., Erdman J.W. Bioavailability of all-trans and cis–Isomers of Lycopene // *Exp. Biol. Med.* 2002. V. 227. № 10. P. 914–919. <https://doi.org/10.1177/153537020222701012>
14. Wang H. et al. Antioxidant, anticancer activity and molecular docking study of lycopene with different ratios of Z-isomers // *Curr. Res. Food Sci.* 2023. V. 6. P. 100455. <https://doi.org/10.1016/j.crfs.2023.100455>
15. Lademann J. et al. Carotenoids in human skin // *Exp. Dermatol.* 2011. V. 20. № 5. P. 377–382. <https://doi.org/10.1111/j.1600-0625.2010.01189.x>
16. Smith G.D., Jaffe R.L. Quantum chemistry study of conformational energies and rotational energy barriers in n-alkanes // *J. Phys. Chem.* 1996. V. 100. № 48. P. 18718–18724. <https://doi.org/10.1021/jp960413f>
17. Новиков В.С., Кузнецов С.М., Кузьмин В.В., Прохоров К.А., Сагитова Е.А., Дарвин М.Е., Ладеманн Ю., Устынюк Л.Ю., Николаева Г.Ю. Анализ природных и синтетических соединений, содержащих полиеновые цепи, методом спектроскопии комбинационного рассеяния // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2021. Т. 500. С. 26–33. <https://doi.org/10.31857/S2686740021050060>
18. Darvin M.E., Gersonde I., Ey S., Brandt N. N., Albrecht H., Gonchukov S.A., Sterry W. and J.L. Noninvasive selective detection of lycopene and β -carotene in human skin using Raman spectroscopy // *Laser Phys.* 2004. V. 14. № 2. P. 231–233.
19. Ishigaki M. et al. Unveiling the Aggregation of Lycopene in Vitro and in Vivo: UV-Vis, Resonance Raman, and Raman Imaging Studies // *J. Phys. Chem. B*. 2017. V. 121. № 34. P. 8046–8057. <https://doi.org/10.1021/acs.jpcc.7b04814>
20. Novikov V.S. et al. Relations between the Raman spectra and molecular structure of selected carotenoids: DFT study of α -carotene, β -carotene, γ -carotene and lycopene // *Spectrochim. Acta Part A Mol. Biomol. Spectrosc.* Elsevier, 2022. V. 270. P. 120755. <https://doi.org/10.1016/j.saa.2021.120755>
21. Novikov V.S. et al. DFT study of Raman spectra of polyenes and β -carotene: Dependence on length of polyene chain and isomer type // *Spectrochim. Acta Part A Mol. Biomol. Spectrosc.* Elsevier B.V. 2021. V. 255. P. 119668. <https://doi.org/10.1016/j.saa.2021.119668>

22. *Ashikhmin A., Makhneva Z., Moskalenko A.* The LH2 complexes are assembled in the cells of purple sulfur bacterium *Ectothiorhodospira haloalkaliphila* with inhibition of carotenoid biosynthesis // *Photosynth. Res.* 2014. V. 119. № 3. P. 291–303.
<https://doi.org/10.1007/s11120-013-9947-6>
23. *Ashikhmin A. et al.* Incorporation of spheroidene and spheroidenone into light-harvesting complexes from purple sulfur bacteria // *J. Photochem. Photobiol. B Biol.* 2017. V. 170. P. 99–107.
<https://doi.org/10.1016/j.jphotobiol.2017.03.020>
24. *Nanba O., Satoh K.* Isolation of a photosystem II reaction center consisting of D-1 and D-2 polypeptides and cytochrome b-559 // *Proc. Natl. Acad. Sci.* 1987. V. 84. № 1. P. 109–112.
<https://doi.org/10.1073/pnas.84.1.109>
25. *Laikov D.N., Ustynyuk Y.A.* PRIRODA-04: a quantum-chemical program suite. New possibilities in the study of molecular systems with the application of parallel computing // *Russ. Chem. Bull.* 2005. V. 54. № 3. P. 820–826.
<https://doi.org/10.1007/s11172-005-0329-x>
26. *Lunde K., Zechmeister L.* Infrared Spectra and cis-trans Configurations of Some Carotenoid Pigments // *J. Am. Chem. Soc.* 1955. V. 77. № 6. P. 1647–1653.
<https://doi.org/10.1021/ja01611a071>
27. *Koyama Y. et al.* Raman and infrared spectra of the all-trans, 7-cis, 9-cis, 13-cis and 15-cis isomers of β -carotene: Key bands distinguishing stretched or terminal-bent configurations form central-bent configurations // *J. Raman Spectrosc.* 1988. V. 19. № 1. P. 37–49.
<https://doi.org/10.1002/jrs.1250190107>
28. *Koyama Y. et al.* Configuration of the carotenoid in the reaction centers of photosynthetic bacteria. Comparison of the resonance Raman spectrum of the reaction center of *Rhodospseudomonas sphaeroides* G1C with those of cis-trans isomers of β -carotene // *Biochim. Biophys. Acta – Bioenerg.* 1982. V. 680. № 2. P. 109–118.
[https://doi.org/10.1016/0005-2728\(82\)90001-9](https://doi.org/10.1016/0005-2728(82)90001-9)
29. *Saito S., Tasumi M., Eugster C.H.* Resonance Raman spectra ($5800\text{--}40\text{ cm}^{-1}$) of All-trans and 15-cis isomers of β -carotene in the solid state and in solution. Measurements with various laser lines from ultraviolet to red // *J. Raman Spectrosc.* 1983. V. 14. № 5. P. 299–309.
<https://doi.org/10.1002/jrs.1250140503>
30. *Telfer A.* What is β -carotene doing in the photosystem II reaction centre? // *Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. B Biol. Sci.* / ed. Barber J., Anderson J.M. 2002. V. 357. № 1426. P. 1431–1440.
<https://doi.org/10.1098/rstb.2002.1139>
31. *Bialek-Bylka G.E. et al.* 15-cis-carotenoids found in the reaction center of a green sulfur bacterium *Chlorobium tepidum* and in the Photosystem I reaction center of a cyanobacterium *Synechococcus vulcanus* // *Photosynth. Res.* 1998. V. 58. № 2. P. 135–142.
<https://doi.org/10.1023/A:1006112323144>

NEW MARKERS FOR DETERMINATION OF CAROTENOID MOLECULES ISOMERISM USING RAMAN SPECTROSCOPY

**D. D. Vasimov^a, A. A. Ashikhmin^b, M. A. Bolshakov^b, M. N. Moskovskiy^c, S. V. Gudkov^a,
D. V. Yanykin^{a,b}, and V. S. Novikov^a**

^a*Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*FRC PSCBR, Russian Academy of Sciences, Pushchino, Moscow Region, Russia*

^c*Federal Scientific Agroengineering Center VIM, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.I. Konov

The paper presents an analysis of the experimental and calculated Raman spectra of plant and bacterial carotenoids: neurosporin, spheroiden, lycopene, spirilloxanthin, β -carotene, lutein, ζ -carotene, α -carotene and γ -carotene. A number of characteristic features in the Raman spectra of carotenoids are described for the first time, which make it possible to determine the structure of end groups of molecules and to distinguish their isomers.

Keywords: Raman spectroscopy, density functional theory, carotenoids, pigments, *cis-trans* isomerism

УДК 621.373.826

СОВРЕМЕННЫЕ ТЕНДЕНЦИИ СОЗДАНИЯ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЛАЗЕРОВ НЕПРЕРЫВНОЙ ГЕНЕРАЦИИ

© 2023 г. Академик РАН С. Г. Гаранин¹, В. Н. Деркач¹, К. Н. Макаров^{2,*}, В. А. Островский², М. И. Пергамент², М. В. Путилин², Д. В. Сизмин¹

Поступило 19.07.2023 г.

После доработки 19.07.2023 г.

Принято к публикации 27.07.2023 г.

Рассматриваются современные тенденции создания высокоэнергетических импульсно-периодических лазеров непрерывной генерации с энергией импульсов десятки и сотни джоулей. Анализируются активные среды на предмет их использования в таких лазерах. Экспериментально исследуются при температуре от 100 до 295 К Yb:YAG активные кристаллические и керамические элементы российского производства. Приводятся данные системы криогенного охлаждения активных элементов. Описываются диодная система накачки активных элементов и гомогенизатор ее излучения. Приводятся физико-технические характеристики системы накачки. Экспериментально измеряются френелевские потери на поглощение и потери за счет усиленного спонтанного излучения, уменьшающие энергию, запасаемую в инверсной населенности. Приводятся результаты измерения усиления в многопроходных схемах с различным набором активных элементов.

Ключевые слова: импульсно-периодические лазеры, диодная накачка, газовое (криогенное) охлаждение

DOI: 10.31857/S2686740023060068, **EDN:** HTWWNJ

Высокоэнергетические импульсно-периодические лазеры непрерывной генерации сегодня широко востребованы как в науке, так и в промышленности. В мировой практике главным направлением создания лазерных установок с большой энергией импульсов и высокой средней мощностью является использование усилительных модулей (УМ) с диодной продольной накачкой, с дисковыми активными элементами, в зазорах между которыми прокачивается охлаждающий газ. Для создания усилительных модулей требуется выполнить разработку и провести исследования экспериментальных образцов усилительных модулей с диодной накачкой и частотой повторения импульсов до 10 Гц для отработки физических принципов и конструкторских реше-

ний создания лазерных установок с энергией в импульсе 2–10 кДж. Ключевыми элементами таких лазерных установок являются активные элементы (АЭ) с поглотителем (клатдингом) лазерного излучения по торцам АЭ для предотвращения развития паразитного усиленного спонтанного излучения (УСИ). Достичь требуемой эффективности с АЭ без клатдинга практически невозможно. В РФ существует производство АЭ из оптической керамики Yb:YAG с клатдингом и кристаллических Yb:YAG АЭ. В то же время увеличение энергии генерируемых импульсов – это прежде всего увеличение световой апертуры, т.е. увеличение размеров АЭ, желательно, по крайней мере, до размеров 300 × 300 мм, поскольку лучевая прочность просветляющих покрытий при частоте 10 Гц резко падает. (В действующих лазерах, работающих при частоте 10 Гц, она не превышает 2 Дж/см².) Однако при увеличении размеров АЭ до размеров 300 × 300 мм резко возрастает УСИ, становясь основным препятствием. Поэтому необходимы физические и инженерные исследования, чтобы найти путь снижения эффекта паразитного усиленного спонтанного излучения, что позволит достичь требуемой эффективности и увеличить размеры АЭ. Другая задача – технологическая – повысить лучевую прочность просветляющих и

¹Российский федеральный ядерный центр
Всероссийский научно-исследовательский институт
экспериментальной физики,
Институт лазерно-физических исследований,
Саров, Нижегородская область, Россия

²Государственный научный центр Российской Федерации
Троицкий институт инновационных и термоядерных
исследований, Троицк, Москва, Россия

*E-mail: makarov@triniti.ru

зеркальных покрытий оптических элементов до значений 3–5 Дж/см².

В науке создание таких лазеров — это, прежде всего, проблемы лазерного термоядерного синтеза (ЛТС — создание лазерного драйвера для гибридного термоядерного реактора) и накачка усилителей chirпированных петаваттных импульсов для компактных ускорителей частиц. В промышленности такие лазеры также найдут широкое практическое применение, в частности, для модификации и упрочнения структуры поверхности изделий с использованием ударных волн — например, лопаток турбин авиационных двигателей. Такие применения известны, но не могут быть реализованы в РФ из-за отсутствия необходимого опыта и, тем более, ряда ключевых элементов лазерных систем.

За рубежом разработка высокоэнергетических импульсно-периодических лазеров непрерывной генерации началась за 15 лет до начала работ в этой области в РФ. Были разработаны лазерные системы Mercury [1] (первая установка такого типа, 55 Дж, 10 Гц, 2006 г.), DiPOLE100 [2] (100 Дж, 10 Гц, 2015 г.), NAPLS [3] (200 Дж, 10 Гц, 2018 г.). Разрабатываются проекты лазерных систем ЛТС, с энергией импульса в канале в несколько килоджоулей, например HiPER [4], LIFE [5]. Полученные результаты опубликованы.

Но в научных статьях сообщается, какие результаты получены, но не какие трудности встретились по пути и, главное, как они были преодолены. Так что проблемы остаются. Как можно будет увидеть из дальнейшего, в РФ уже многое сделано для решения этих проблем, а оставшиеся решаются.

В сообщении рассматриваются основные научные, инженерные и технологические аспекты разработки усилительных модулей и их составных частей на основе АЭ отечественного производства; обсуждаются основные проблемы разработки высокоэнергетических лазерных систем высокой средней мощности и пути преодоления существующих трудностей.

1. АКТИВНЫЕ СРЕДЫ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЛАЗЕРОВ НЕПРЕРЫВНОЙ ГЕНЕРАЦИИ

Основная проблема при создании промышленных высокоэнергетических лазеров — это реализация работы лазеров с частотой порядка 10 Гц и эффективностью преобразования электрической энергии в лазерную лучше, чем 10%. Существующие исследовательские установки ЛТС (NIF, LMJ) имеют достаточную энергию импульсов в одном канале (около 20 кДж в первой гармонике), но частота их работы (около 10⁻⁴ Гц) и

КПД (доли процента) очень далеки от необходимых, что связано с использованием неодимового стекла в качестве активной среды и ламповой накачки.

Для повышения частоты следования импульсов и эффективности следует использовать: 1) накачку лазерными диодами, 2) активные элементы с высокой теплопроводностью (кристаллические или керамические) и малым квантовым дефектом, 3) эффективное (газовое или жидкостное) охлаждение активной среды. Применение активной среды с большим временем жизни возбужденного состояния позволяет уменьшить необходимую мощность системы накачки, которая определяет основную часть стоимости лазерной системы.

Одним из наиболее перспективных материалов для активной среды лазеров с большой энергией импульсов, работающих в частотном режиме, считается иттриево-алюминиевый гранат, легированный иттербием (Yb:YAG) [6]. Он обладает совокупностью важных свойств: высокой теплопроводностью, лучевой и механической прочностью, малым квантовым дефектом, большим временем жизни возбужденного состояния (0.95 мс). Положение и ширина полосы поглощения Yb:YAG находятся вблизи длины волны 940 нм, что обеспечивает эффективное поглощение излучения лазерных диодов на гетероструктурах InGaAs, используемых для накачки. Простота структуры уровней энергии Yb³⁺ в матрице YAG обуславливает отсутствие концентрационного тушения и ап-конверсии, что, в сочетании с малой разностью радиусов Yb³⁺ и Y³⁺, позволяет делать кристаллы с высоким уровнем легирования, и это особенно полезно для лазеров на тонких дисках. Основным недостатком Yb:YAG является квазитрехуровневая схема лазерного усиления, что является обратной стороной малого квантового дефекта. Нижний лазерный подуровень имеет энергию всего 0.076 эВ и населенность 4.6% при комнатной температуре, поэтому для повышения эффективности лазерных усилителей Yb:YAG необходимо использовать криогенное охлаждение. Еще одним недостатком является относительно высокий нелинейный коэффициент показателя преломления YAG (по различным сведениям, от 6 до 8) × 10⁻⁷ см²/ГВт, т.е. в 2–3 раза больше, чем у стекол), который, однако, меньше, чем у большинства других оксидных лазерных кристаллов.

При охлаждении до криогенных температур свойства Yb:YAG улучшаются: растут сечение вынужденного излучения на лазерной длине волны 1030 нм и сечение поглощения на длине волны накачки 940 нм, уменьшается коэффициент теплового расширения и dn/dT и увеличивается теплопроводность.

Для подавления усиленного спонтанного излучения и предотвращения паразитной генерации периферийные зоны активных элементов должны быть выполнены в виде кладдинга — области с таким же показателем преломления, как у активной среды, но с высоким коэффициентом поглощения на лазерной длине волны. На практике в качестве кладдинга АЭ Yb:YAG чаще всего используется Cr^{4+} :YAG, хотя могут применяться и другие материалы, например, Co^{3+} :YAG, коэффициент поглощения которого на 1030 нм меньше зависит от температуры [7].

Среди других материалов для активных элементов следует отметить Yb:CaF₂, который имеет большее время затухания люминесценции (1.9 мс), что в сочетании с малым показателем преломления ($n = 1.43$) и малым сечением вынужденного излучения ($\sigma_e \approx 3 \times 10^{-21} \text{ см}^2$ [8]) обеспечивает высокую эффективность накачки. Теплопроводность Yb:CaF₂ почти так же высока, как YbYAG, а коэффициент теплового расширения и производная dn/dT имеют разный знак, что снижает термонаведенные aberrации. Полоса поглощения на 980 нм в Yb:CaF₂ имеет достаточно большую ширину для использования обычной диодной накачки, что позволяет работать с особо малым квантовым дефектом 5%, при генерации на 1030 нм, или даже 1.2%, если использовать полосу усиления на 992 нм [9] (тогда как YbYAG накачивается на длине волны 940 нм и имеет квантовый дефект 9%). Нелинейный коэффициент показателя преломления Yb:CaF₂ в 5 раз меньше, чем у Yb:YAG. Существует технология производства керамики Yb:CaF₂ большого размера [10]. Однако низкое сечение усиления приводит к малой эффективности извлечения запасенной энергии. Лазерная система на Yb:CaF₂ будет обладать намного меньшей эффективностью преобразования энергии накачки в лазерное излучение, чем при использовании Yb:YAG, поэтому она бесперспективна для использования при создании промышленных высокоэнергетических лазеров. Однако мощность диодов накачки, необходимая для получения той же энергии импульса, может быть, напротив, в несколько раз меньше. Следовательно, применение Yb:CaF₂ эффективно в приложениях, где нет высоких требований на КПД, но важны капитальные затраты, особенно для лазерных систем, предназначенных для прямого усиления ультракоротких (чирпированных) импульсов, поскольку Yb:CaF₂ обладает широкой полосой усиления. Пример подобной системы — лазерная установка Polaris [11].

2. АКТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Итак, иттриево-алюминиевый гранат, легированный иттербием (Yb:YAG), считается одним из

наиболее перспективных материалов для создания высокоэнергетических лазеров. Для моделирования процессов накачки и усиления необходимо знать зависимости сечений поглощения $\sigma_a(\lambda, T)$ и вынужденного излучения $\sigma_e(\lambda, T)$ от длины волны и температуры. Сечения поглощения $\sigma_a(\lambda, T)$ рассчитывались из спектральной зависимости коэффициента пропускания образцов, измерение которой производилось спектрофотометром СФ-56 (ЛОМО, Ст. Петербург). Для расчета сечения вынужденного излучения $\sigma_e(\lambda, T)$ использовался метод Фюхтбауэра—Ладенбурга [12], который основывается на измерении спектра люминесценции $I(\lambda, T)$ времени затухания люминесценции. Для накачки среды использовался диодный модуль с оптоволоконным выходом. Спектр люминесценции $I(\lambda, T)$ измерялся с помощью спектрометра “Колибри-2” (ООО “ВМК-Оптоэлектроника”, Новосибирск) в диапазоне длин волн 912–1046 нм, а время затухания люминесценции τ_{rad} вычислялось по форме импульса люминесценции, которая измерялась фотодиодом. Нами проведены измерения спектров поглощения и времени затухания люминесценции образцов лазерной керамики Yb:YAG в диапазоне температур от 100 до 295 К. По полученным данным рассчитаны сечения поглощения и сечения вынужденного излучения.

Образцы лазерной керамики Yb:YAG, изготовленной ФКП ГЛП “Радуга”, представлены на рис. 1. Размер образцов 55×55 мм, толщина 5 мм. Концентрация иттербия 0.9 ат. %. На лицевые поверхности образцов нанесено двустороннее просветляющее покрытие с коэффициентом отражения $\leq 0.2\%$ для длин волн 940 и 1030 нм.

Для захлаживания образцов лазерной керамики при их испытаниях использовался заливной азотный оптический криостат LN-120-XL (ООО “Криотрейд инжиниринг”, Москва) с образцом в вакууме. Криостат позволяет регулировать температуру образца в диапазоне от 78 до 420 К.

При измерении спектральной зависимости коэффициента пропускания спектрофотометр использовался в режиме сканирования в диапазоне длин от 850 до 1100 нм.

На рис. 2 показаны спектры поглощения $\sigma_a(\lambda, T)$ и вынужденного излучения $\sigma_e(\lambda, T)$ Yb:YAG при различной температуре. И то и другое совпадает с литературными данными. Близки к ним и наши измерения спектров поглощения и вынужденного излучения Yb:YAG кристаллов. Заметим, кстати, что, как это следует из работы [13], генерационные характеристики Yb:YAG кристаллов с кладдингом и Yb:YAG керамики и их зависимость от температуры практически идентичны (в том числе и коэффициенты усиления слабого сигнала). В РФ кристаллы более доступны, чем кера-

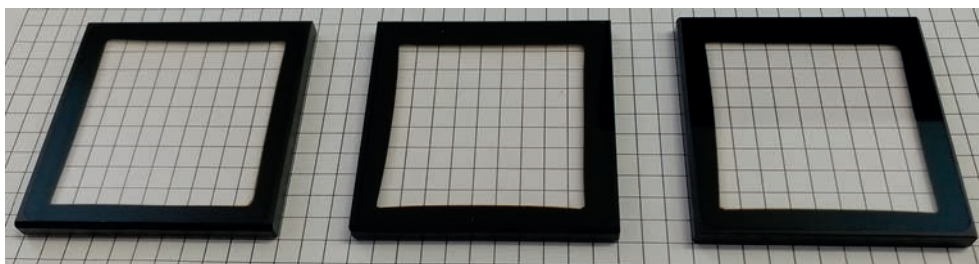


Рис. 1. Образцы лазерной керамики ГЛЦ “Радуга” с кладдингом, концентрация иттербия 0.9 ат. %.

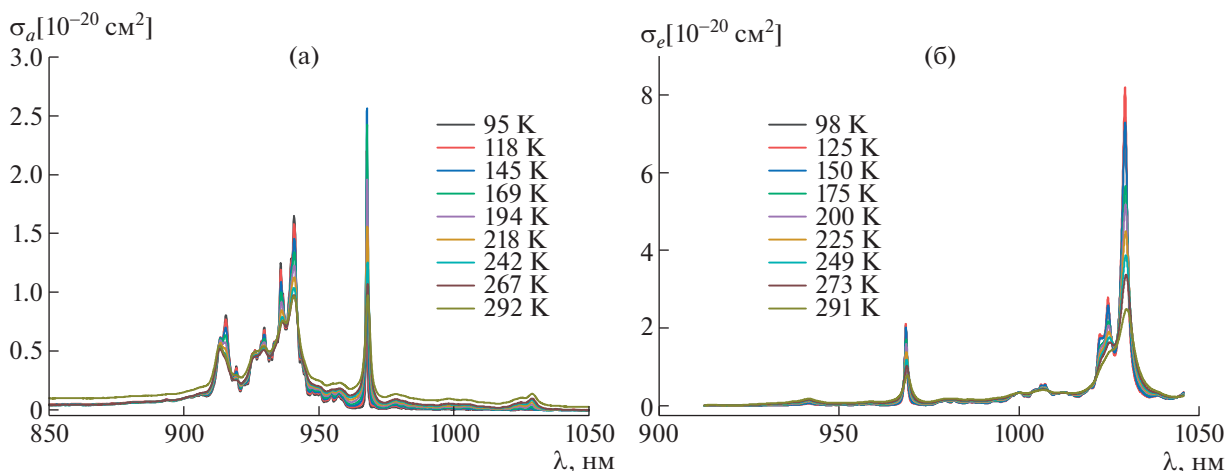


Рис. 2. Спектры поглощения (а) и вынужденного излучения (б) Yb:YAG при различной температуре.

мика, так что задача кладдинга для кристаллов стоит очень остро. Поэтому сегодня начаты работы по изготовлению “градиентного” кладдинга с плавным изменением концентрации легирования хромом Cr^{4+} от границы кристалла к краю АЭ, чтобы избежать, насколько это возможно, тепловой нагрузки на кристалл, и методов сварки кладдинга и кристалла.

3. СИСТЕМА КРИОГЕННОГО ОХЛАЖДЕНИЯ АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Криогенная система охлаждения АЭ состоит из двух частей – системы приготовления охлаждающей среды и УМ, содержащего АЭ. Системы генерации охлаждающей среды разработаны совместно с МГТУ им. Н.Э. Баумана. Был разработан и изготовлен для охлаждения и поддержания температуры лазерных активных элементов типоряд криогенных систем приготовления охлаждающей среды в диапазоне криогенных температур 100–295 К и мощностью охлаждения 2 кВт и 6 кВт, с массовой скоростью ее циркуляции в системе 25 и 56 г/см² соответственно, а также криорефрижератор замкнутого цикла с производительностью 200 г/с и мощностью охлаждения

6 кВт, для диапазона температур от 173 до 320 К, не нуждающийся в жидком азоте.

Криогенная система приготовления охлаждающей среды представляет собой замкнутый контур, в котором циркулирует газообразный гелий чистотой 99.999% и рабочим давлением до 20 атм. Поток гелия снимает тепло с активных элементов, а сам охлаждается в теплообменном устройстве гелий – жидкий азот за счет кипящего при атмосферном давлении жидкого азота. Для регулировки и поддержания заданной температуры гелия используются криогенный вентилятор, обеспечивающий скорость прокачки гелия через систему, и два клапана с электроприводами, которые перераспределяют поток гелия между контуром теплообменного устройства и байпасной линией. Высокооборотный криогенный вентилятор, обеспечивающий циркуляцию гелия в контуре, состоит из электродвигателя с частотой вращения до 80000 об/мин и проточной части. Управление скоростью вращения осуществляется с помощью преобразователя частоты. Охлаждение электродвигателя осуществляется как за счет продувки двигателя, так и за счет внешнего пассивного охлаждения статора. В установке предусмотрена возможность быстрого нагрева системы от рабочих температур до температур окружающей среды.

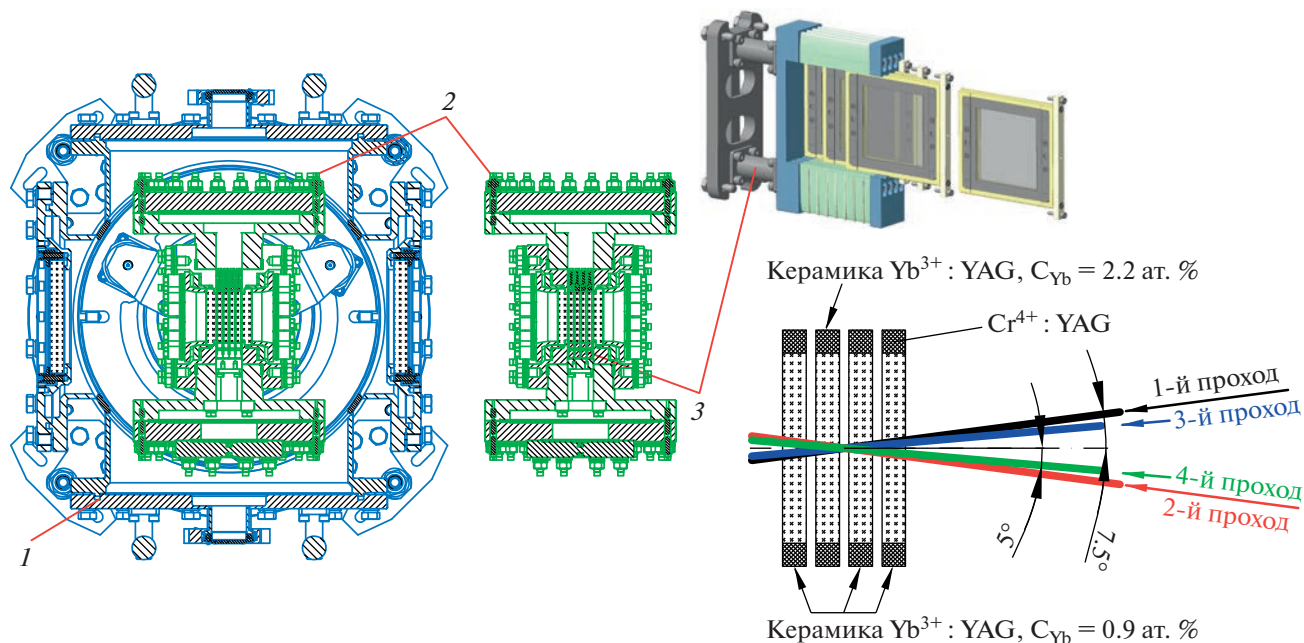


Рис. 3. Конструкция усилительного модуля: 1 – вакуумная камера; 2 – криогенная камера; 3 – кассета с АЭ.

Для этого в системе установлен электрический нагреватель с регулируемой мощностью до 1.5 кВт. Система соединяется с камерой гибкими трубопроводами с вакуумной изоляцией. Для защиты системы от избыточного давления предусмотрен предохранительный клапан на 20 атм.

Установка автоматизирована, задание параметров работы системы осуществляется с сенсорной панели оператора, управление ею происходит с помощью программируемого логического контроллера. Предусмотрена возможность удаленного управления системой. Температура гелия в контуре поддерживается с точностью ± 1.0 К.

Конструкция усилительного модуля понятна из рис. 3. Охлаждающий газ прокачивается перпендикулярно чертежу, сверху и снизу вакуумной камеры расположены фланцы для ее откачки, в правом нижнем углу рис. 3 представлен использованный нами набор керамических АЭ и показан ход лучей в многопроходной схеме усиления. Вакуумная камера откачивается до давления порядка 10^{-7} Торр, что необходимо для теплоизоляции находящейся внутри нее камеры с криогенной температурой и, прежде всего, для того, чтобы избежать запотевания окон, через которые вводятся усиливаемые лучи. Описанная конструкция претерпела десятки циклов захолаживания с целью смены комплектов АЭ, чем доказала свою надежность.

4. ДИОДНАЯ СИСТЕМА НАКАЧКИ АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для накачки активных элементов усилительного модуля использовалась система из двух (в ряде экспериментов четырех) одинаковых комплектов, каждый из которых состоит из следующих частей: 1) диодного излучателя – матрицы (набора линеек) лазерных диодов, смонтированных в теплоотводящем корпусе с опорно-юстировочным устройством; 2) блока питания диодного излучателя; 3) системы водяного охлаждения диодного излучателя; 4) оптических систем гомогенизации и трансляции излучения.

Каждый диодный излучатель обеспечивает:

- генерацию излучения на длине волны 940 ± 5 нм;
- среднюю мощность излучения импульса не менее 18 кВт в телесном угле $0.5 \times 11^\circ$;
- длительность импульса излучения до 1.5 мс, при частоте следования импульсов до 10 Гц;
- непрерывную работу устройства не менее 8 ч.

При этом размер излучающей площадки излучателя составляет 80 мм вдоль быстрой оси и 11 мм вдоль медленной оси.

Блок питания диодного излучателя обеспечивает генерацию импульсов тока накачки лазерных диодов с параметрами, необходимыми для получения излучения с характеристиками, указанными выше. Передний фронт импульсов питания имеет длительность менее 200 мкс, а задний – менее 100 мкс. Система охлаждения позволяет охлаждать диодные излучатели и поддерживать в

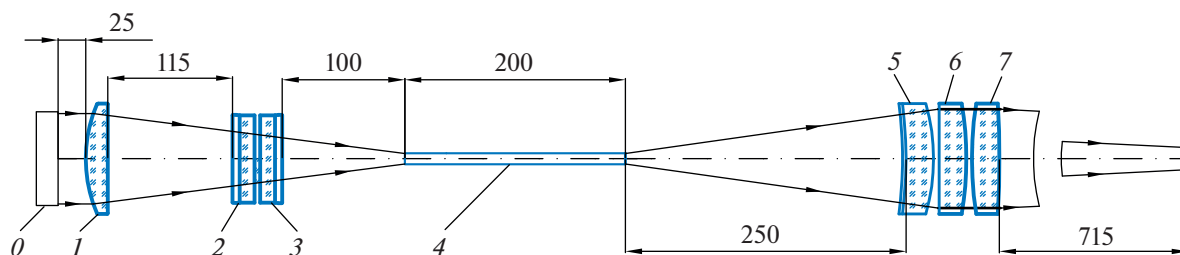


Рис. 4. Оптическая система гомогенизации. 0 — диодный излучатель; 1 — линза цилиндрическая; 2 — линза цилиндрическая; 3 — линза цилиндрическая; 4 — световод; 5—7 — сферические линзы.

автоматическом режиме их температуру в диапазоне от 10 до 40°C с точностью $\pm 1^\circ\text{C}$. Оптическая система накачки дает возможность гомогенизировать излучение накачки для получения минимальной неоднородности ее излучения в активной среде и доставку излучения в зону активных элементов усилительного модуля в виде квадратного пучка заданного размера; а также обеспечивает наведение пучка в центр активной среды с точностью 0.5 мм в поперечном направлении и 10 мм в продольном направлении.

Для гомогенизации излучения в действующих образцах используются световоды. Оптическая схема гомогенизации приведена на рис. 4. Пучок накачки от диодной матрицы фокусируется одной цилиндрической линзой (1) в вертикальном направлении (по быстрой оси) и парой цилиндрических линз (2 и 3) в горизонтальном направлении (по медленной оси) в световод квадратного сечения (4), размером $10 \times 10 \times 200$ мм, в котором, за счет многократного полного внутреннего отражения, происходит перемешивание и гомогенизация излучения. Изображение выходного торца световода перестраивается с увеличением в активную среду системой из трех сферических линз (5—7). На рис. 4 приведены габариты устройства. Точка 0 соответствует выходному торцу матрицы накачки, крайняя правая точка чертежа — центру сборки АЭ в усилительном модуле. В настоящее время рассматривается возможность использования линзового раstra для гомогенизации излучения взамен достаточно сложной, описанной выше оптической схемы.

Измерения параметров диодной накачки подтвердили, что мощность излучения каждой из них практически равна 18 кВт. Поскольку потери в системах гомогенизации и трансляции излучения составляют ~15%, в зону активных элементов приходит ~15 кВт от каждого излучателя. Результаты спектральных измерений, сделанных при токе питания матрицы накачки 260 А, представлены на рис. 5. Как видно из рисунка, необходимая длина волны излучения 940 нм достигается только при предельно возможной температуре в 40°C. Естественно, что такая ситуация определе-

на параметрами тех полупроводниковых диодов, из которых сформирована матрица. Заметим, что производная длины волны по температуре $d\lambda/dT \approx 0.3 \text{ нм}/^\circ\text{C}$.

Измерение формы пучка производилось с помощью профилометра лазерного луча на основе камеры ПЗС (Camera Beam Profiler BC106N-VIS/M, компания Thorlabs, Германия) с объективом Индустар 50/3.5. Синхронизация кадра ПЗС с лазерным импульсом осуществлялось синхроимпульсом задающего генератора PLS-NS-1030 (ООО «Авеста-Проект»). Задержка синхроимпульса относительно лазерного импульса регулируется в широком диапазоне программным образом.

Распределение мощности накачки одного излучателя в зоне усилительного модуля представлено на рис. 6. Причиной недостаточно равномерного (особенно по оси Y) распределения интенсивности является неполное перемешивание излучения в световоде. Из-за малой расходимости излучения диодной матрицы вдоль быстрой оси происходит недостаточное количество отражений от граней световода. Повысить равномерность можно, увеличивая длину световода или расходимость излучения на входе в него за счет уменьшения фокусного расстояния цилиндрической линзы. Например, показано, что, при введении в состав оптической системы накачки рассеивателя (матового стекла) перед вводом излучения в световод, наблюдается резкое повышение однородности пучка, однако мощность излучения в этом случае уменьшается более чем в 2 раза, главным образом из-за сильного рассеяния. Отметим, что при использовании двух или тем более четырех модулей накачки однородность суммарного распределения интенсивности в активной среде будет выше.

5. МНОГОПРОХОДНЫЕ СХЕМЫ УСИЛЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ С РАЗЛИЧНЫМИ АКТИВНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Описанные ниже и исследованные многопроходные оптические схемы отличаются от обычных лишь тем, что в качестве собственно усилите-

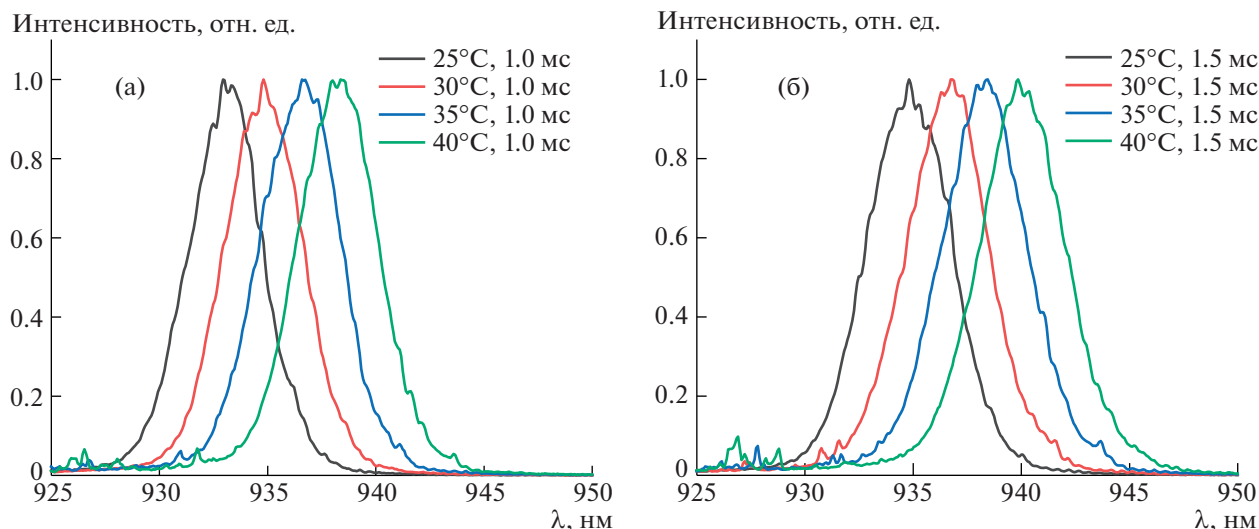


Рис. 5. Спектры излучателя в зависимости от температуры и длительности импульса: $f = 10$ Гц, $I = 260$ А, $\tau = 1$ мс (а), $\tau = 1.5$ мс (б).

для излучения в них используется усилительный модуль (см. рис. 3). Исследованы, в том числе при отладке методики измерения, конфигурации активных элементов: с 4 монокристаллами Yb:YAG (без кладдинга) и с 4 керамическими образцами (с кладдингом). Исследована зависимость коэффициента усиления слабого сигнала от температуры активной среды, длительности импульса накачки, количества проходов, длины волны зондирующего лазерного излучения.

Методика измерения стандартная: на вход усилительной схемы подается известный сигнал и исследуется сигнал на выходе системы. В качестве входного лазерного импульса использовалось излучение, формируемое лазерным задающим генератором (ЗГ, модель PLS-NS-1030, ООО «Авеста-проект»). Измерения проводились для импульса со следующими параметрами: длительность $\tau = 10$ нс, энергия $E \leq 5$ мДж, луч 10 мм в диаметре. На рис. 7 представлены временная форма лазерного импульса и пространственный профиль лазерного пучка, формируемые ЗГ.

Активная среда усилительного модуля состоит из четырех АЭ, которые помещаются в кассету, как показано на рис. 3. В свою очередь, кассета помещается в криогенную камеру УМ (рис. 3), что позволяет контролируемым образом менять температуру АЭ. Система охлаждения АЭ за счет потока гелия при давлении до 20 атм позволяет снимать тепловую нагрузку с активной среды и изменять температуру АЭ в диапазоне от 100 до 295 К.

При измерении коэффициента усиления лазерного импульса в УМ необходимо синхронизовать момент прохождения лазерным импульсом активной среды с моментом достижения максимума инверсной населенности. Система, позво-

ляющая контролировать синхронизацию срабатывания системы накачки и генерации лазерного импульса, работает следующим образом. Сигнал регенеративного усилителя ЗГ запускает источники питания лазерных диодов и с задержкой τ_{delay} сигнал ЗГ. Задержка формируется контроллерами ЗГ и может быть изменена в пределах от 0 до 10 мс с точностью до наносекунды.

При измерениях коэффициента усиления использовались два модуля диодной накачки со следующими параметрами: ток питания диодных излучателей $I = 360$ А, напряжение $U = 120$ В, длительность импульса диодной накачки τ_{pump} от 0.5 до 1.5 мс, температура охлаждающей воды $T_{\text{охл}} = 20^\circ\text{C}$. При указанных выше параметрах мощность диодных излучателей примерно равна 18 кВт, а мощность на входе в активную среду около 15 кВт. Эксперименты проводились в монопериодном режиме. При необходимости задержка τ_{delay} между началом импульса диодной накачки и моментом прохождения лазерного импульса через усилитель варьировалась в пределах от 0 до 1.5 мс.

Измерение коэффициента усиления k_{amp} керамических АЭ с концентрацией 0.9 и 2.2 ат. % на четырех проходах проводилось на длине волны $\lambda = 1030$ нм. Длительности импульса накачки τ_{pump} составляли 0.5, 1.0 и 1.5 мс, а температура охлаждения АЭ от 100 до 240 К. Комбинация АЭ в кассете показана на рис. 3. (Вообще говоря, такая композиция не оптимальна с точки зрения накачки.) Результаты измерений представлены на рис. 8. Температура потока гелия измерялась на выходе из криогенной камеры, измерения коэффициента усиления проводились в монопериодном ре-

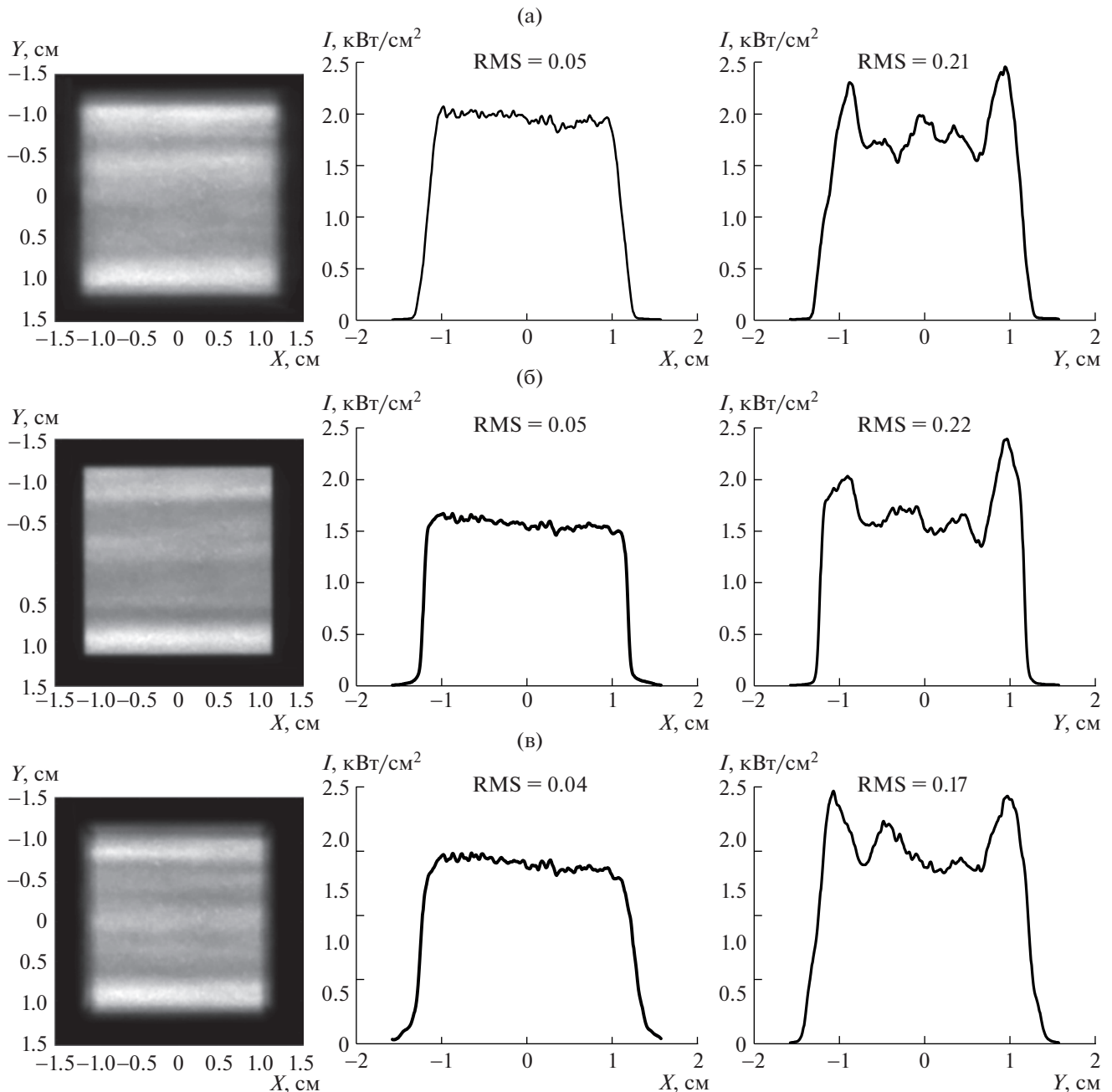


Рис. 6. Распределение мощности накачки одного излучателя в зоне усиительного модуля. $\Delta z = -25$ мм от плоскости центра АЭ в усиительном модуле (а), $\Delta z = 0$ мм (б), $\Delta z = +25$ мм (в).

жиме, поэтому температура АЭ должна быть равна температуре гелия. После достижения необходимой температуры потока гелия измерения проводились с задержкой в 5 мин. Контроль совпадения геометрического положения лазерного луча и области диодной накачки проводился с помощью ПЗС-камеры. Следует отметить, что если три образца лазерной керамики Yb:YAG с концентрацией 0.9 ат. % были переданы ГЛП “Радуга” в ТРИНИТИ для испытаний в 2022 г., то образец с

концентрацией 2.2 ат. % был изготовлен “Радугой” в 2020 г. Этот образец, в отличие от изготовленных позднее, имел окрашенную центральную часть и повышенное поглощение в длинноволновой области спектра. Вероятно, при его изготовлении часть хрома из кладдинга попала в световую зону.

Используя результаты измерений энергии импульсов в многопроходной схеме, можно рассчитать коэффициенты усиления на каждом проходе. Зависимости коэффициентов усиления при длительности накачки 1.5 мс после одного, двух,

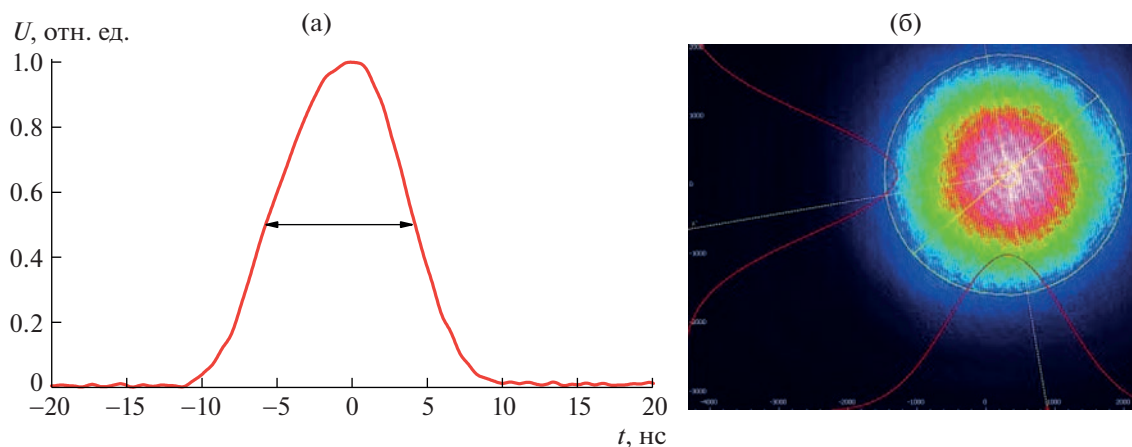


Рис. 7. Форма импульса задающего генератора (а) и пространственный профиль пучка 3Г (б).

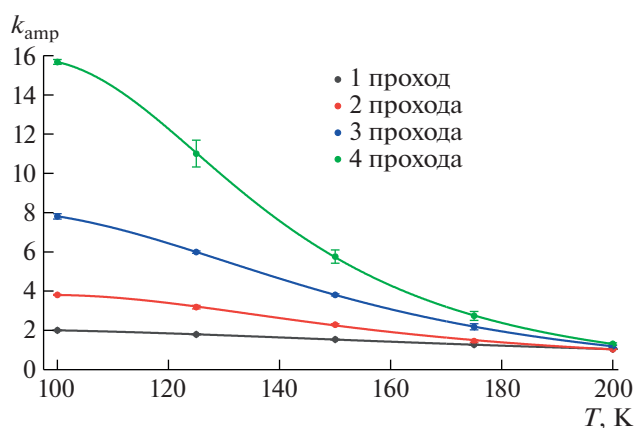


Рис. 8. Зависимость коэффициента усиления от температуры АЭ после одного, двух, трех и четырех проходов.

трех и четырех проходов от температуры активной среды приведены на рис. 8.

На все оптические элементы четырехпроходной оптической схемы (зеркала, линзы, окна) нанесены многослойные диэлектрические покрытия, обеспечивающие потери для *s*- и *p*-поляризации $\leq 0.2\%$ (согласно ТЗ) на отражение или при прохождении одной поверхности. При каждом проходе четырехпроходной оптической схемы лазерный луч проходит 20 поверхностей. Если полагать, что при прохождении (отражении) любой из поверхностей коэффициент пропускания равен T_{sur} , то общий коэффициент пропускания при прохождении N поверхностей будет равен $T_{pass}^{cal} = T_{sur}^N$. Из сравнения экспериментально измеренного значения T_{pass}^{exp} расчетным значением T_{pass}^{cal} следует, что величина экспериментально измеренного коэффициента пропускания колеблется в пределах от 99.4 до 99.5%, что существенно хуже значения, указанного в ТЗ, и значений измеренных при

входном контроле только что изготовленных компонент T_{sur} (99.8%).

Все приведенные выше результаты получены для *p*-поляризации зондирующего лазерного излучения. Сравнение результатов измерения показало, что при *s*-поляризации зондирующего излучения величина коэффициента отражения меньше, но не существенно, чем в случае *p*-поляризации (всего на 6%). Коэффициенты пропускания для *p*- и *s*-поляризаций лазерного излучения с длиной волны $\lambda = 1029.5$ нм одинаковы в пределах ошибки измерения.

ВЫВОДЫ

1. Проведенные исследования позволили выявить и проанализировать основные физические принципы и концепции создания высокоэнергетических импульсно-периодических лазеров непрерывной генерации.

2. Из анализа перечня свойств активных сред сделан вывод, что Yb:YAG керамика и Yb:YAG

кристаллы с кладдингом являются наилучшими кандидатами для использования в высокоэнергетических импульсно-периодических лазерах.

3. Показано, что их спектры поглощения $\sigma_a(\lambda, T)$ и вынужденного излучения $\sigma_e(\lambda, T)$, коэффициенты усиления слабого сигнала ничем не уступают лучшим зарубежным аналогам.

4. Начаты работы по изготовлению “градиентного” кладдинга с плавным изменением концентрации легирования хромом Cr^{4+} от границы кристалла к краю АЭ и методов сварки кладдинга и кристалла.

5. Проведенные испытания систем криогенного охлаждения АЭ в диапазоне криогенных температур 100–295 К и мощностями охлаждающей способности систем 2 и 6 кВт, а также криорефрижератора замкнутого цикла с мощностью охлаждающей способности 6 кВт, для диапазона температур от 173 до 320 К, свидетельствуют о том, что разработанные совместно с МГТУ им. Н.Э. Баумана системы генерации охлаждающей среды надежны и могут быть рекомендованы для широкого применения.

6. Эксплуатация усилительного модуля показала его надежность и эффективность. Он также может быть рекомендован для использования в многопроходных схемах усиления непрерывно генерирующих лазеров, требующих криогенного охлаждения АЭ.

7. Исследование гомогенизатора системы криогенного охлаждения АЭ показало недостаточность сглаживания луча накачки вдоль быстрой оси (Y). Повысить однородность излучения без потерь энергии можно, если увеличить расходимость излучения по вертикальной оси перед световодом. Другой путь создания однородной структуры пучка накачки исследовать возможность применения для гомогенизации линзового растра.

8. Реализована четырехпроходная схема усиления и проведены ее исследования.

9. Проведенные измерения доказали соответствие экспериментальных результатов расчетным оценкам и позволяють рассчитывать на получение заданных показателей разработки.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках Государственного контракта от 21.04.2023 № Н.4к.241.09.23.1068.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликтов интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bayramian A., Armstrong P., Ault E. et al. The Mercury Project: A High Average Power, Gas-Cooled Laser for

Inertial Fusion Energy Development // Fusion Science and Technology. 2007. V. 52. P. 383.

2. Mason P., Divoky M., Ertel K. et al. Kilowatt average power 100 J-level diode pumped solid state laser // Optica. 2017. V. 4 (4). P. 438–439.
3. Haefner C.L., Bayramian A., Spinka T. et al. HAPLS: A Robust Driver for High Intensity Laser Matter Interactions Enabling Precision Science and Commercial Applications // The Review of Laser Engineering. 2018. V. 46 (3). P. 138–141.
4. Chanteloup J.C., Albach D., Lucianetti A. et al. Multi kJ level Laser Concepts for HiPER Facility // J. Phys.: Conf. Ser. 2010. V. 244. P. 012010.
5. Bayramian A., Aceves S., Anklam T. et al. Compact, Efficient Laser Systems Required for Laser Inertial Fusion Energy // Fusion Science and Technology. 2011. V. 60. P. 28.
6. Albach D. Amplified Spontaneous Emission and Thermal Management on a High Average-Power Diode-Pumped Solid-State Laser – The Lucia Laser System / PhD Thesis, P.: École Polytechnique, 2010.
7. Hamamoto K., Tokita S., Yoshida H. et al. Temperature-dependent absorption assessment of YAG ceramics as cladding material // Opt. Mater. Express. 2018. V. 8 (8). P. 2378–2386.
8. Körner J., Jambunathan V., Hein J. et al. Spectroscopic characterization of Yb³⁺ doped laser materials at cryogenic temperatures // Appl. Phys. 2014. B 116. P. 75–81.
9. Ricaud S., Papadopoulos D.N., Pellegrina A. et al. High-power diode-pumped cryogenically cooled Yb:CaF₂ laser with extremely low quantum defect // Opt. Lett. 2011. V. 36 (9). P. 1602–1604.
10. Handbook of solid-state lasers: Materials, systems and applications / Eds B. Denker, E. Shklovsky. Cam.: Woodhead Publishing, 2013.
11. Hornung M., Liebetrau H., Keppler S. et al. 54 J pulses with 18 nm bandwidth from a diode-pumped chirped-pulse amplification laser system // Opt. Lett. 2016. V. 41. P. 5413–5416.
12. Payne S.A., Chase L.L., Smith L.K. et al. Infrared cross-section measurements for crystals doped with Er³⁺, Tm³⁺, and Ho³⁺ // IEEE J. Quantum Electron. 1992. V. 28 (11). P. 2619–2630.
13. Divoky M., Pilar Y., Hanus M., Navratil P., Sawickachyla M., De vido M., Phillips P.J., Ertel K., Butcher T., Fibrich M., Green Y.T., Koselja M., Preclikova Y., Kubat Y., Houzicka Y., Rus B., Collier J., Lucianetti A., and Moeck T. Performance comparison of Yb:YAG ceramics and crystal gain material in a large-area, high-energy, high average-power diode-pumped laser and crystal gain material in a large-area, high-energy, high average-power diode-pumped laser // Optics Express 3636. 2020. V. 28. № 3 (February).

CURRENT TRENDS IN THE DEVELOPMENT OF HIGH-ENERGY LASERS

Academician of the RAS S. G. Garanin^a, V. N. Derkach^a, K. N. Makarov^b,
V. A. Ostrovskiy^b, M. I. Pergament^b, M. V. Putilin^b, and D. V. Sizmin^a

^a*The Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Scientific Research Institute of Experimental Physics,
Institute of Laser Physical Research, Sarov, Nizhny Novgorod Region, Russia*

^b*State Research Center of the Russian Federation Troitsk Institute for Innovation and Fusion Research,
Troitsk, Moscow, Russia*

Current trends in developing high-energy lasers with pulse energies in the tens and hundreds of joules are considered. Active media are analyzed for their use in such lasers. Yb:YAG active crystalline and ceramic elements (AE) of Russian production are experimentally investigated at temperatures from 100 K to 295 K. The data of the AE cryogenic cooling system are presented. A diode pumping system for AE and a homogenizer of its radiation are described. The physical and technical characteristics of the pumping system are given. Fresnel losses, absorption losses, and losses due to amplified spontaneous emission (ASE), which reduce the energy stored in an inverted population, are experimentally measured. The results of measuring the gain in multipass circuits with different sets of AEs are presented.

Keywords: repetitively pulsed lasers, diode pumping, gas (cryogenic) cooling

УДК 537.8

ГЕНЕРАЦИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ НАНОСЕКУНДНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ИМПУЛЬСОВ С ПИКΟΣЕКУНДНЫМ ФРОНТОМ НАРАСТАНИЯ

© 2023 г. Член-корреспондент РАН С. В. Гарнов¹, В. В. Булгакова^{1,*},
Т. В. Долматов¹, А. А. Ушаков¹, В. В. Букин¹

Поступило 25.09.2023 г.

После доработки 25.09.2023 г.

Принято к публикации 25.10.2023 г.

Предложен и исследован способ генерации сверхширокополосных электромагнитных импульсов наносекундной длительности с пикосекундным фронтом нарастания. В качестве излучателя использована рупорная антенна с фотопроводящим ключом, переключаемым пикосекундными лазерными импульсами. Показано, что длительность сверхширокополосных электромагнитных импульсов определяется длиной антенны и полупроводниковым материалом, а фронт нарастания — длительностью лазерных импульсов, используемых для инициации фотопроводящего ключа. В работе представлены характерные длительности импульсов ~1 нс с фронтом нарастания до ~34 пс.

Ключевые слова: сверхширокополосное излучение, рупорная антенна, фотопроводящий ключ, пикосекундные лазерные импульсы

DOI: 10.31857/S2686740023060159, **EDN:** GEFVUF

Создание излучателей сверхширокополосных (СШП) электромагнитных импульсов (ЭМИ) нано- и пикосекундного диапазона длительностей является актуальной проблемой [1–10]. Такие импульсы находят свое применение при решении широкого класса прикладных и фундаментальных задач, таких как визуализация объектов, защищенная радиосвязь, зондирование поверхности Земли, атмосферы и ионосферы [10], силовое воздействие на электронику и сверхширокополосная радиолокация [11]. В то же время СШП спектр излучения и короткие длительности ЭМИ могут позволить измерять переходные характеристики детекторов, что важно для задач метрологии. При этом для решения метрологических задач встает важный вопрос о возможности создания квазипрямоугольных ЭМИ, которые позволяли бы напрямую измерять переходные процессы в детекторах и определять их аппаратную функцию. Для генерации подобных импульсов обычно предлагается следующее техническое решение: антенна-излучатель подключается посредством коаксиально-волноводного перехода к генератору импульсного напряжения (ГИН). Для подобных излучателей длительность ЭМИ определяет-

ся как конструкцией антенны, так и импульсом напряжения, подаваемого с ГИН. Существующие наиболее быстродействующие ГИН позволяют сформировать импульсы длительностью порядка 100 пикосекунд, что ограничивает возможность получения более коротких длительностей сверхширокополосных электромагнитных импульсов в излучателях подобного типа.

В настоящей работе предлагается новая конструкция антенного излучателя СШП ЭМИ, в котором ГИН и коаксиально-волноводный переход заменяются на полупроводниковый коммутатор, оптически переключаемый короткими лазерными импульсами пикосекундной длительности. Подобная замена позволяет генерировать ЭМИ с существенно более короткими временами нарастания, которые определяются в первую очередь свойствами материала полупроводника и длительностью лазерных импульсов.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Модель генератора электромагнитных импульсов наносекундной длительности с пикосекундными фронтами нарастания (полеобразующая система) представлена на рис. 1. Фотопроводящий полупроводниковый элемент располагается в вершине полеобразующей системы в промежутке между металлическими пластинами, на которые подается импульсное напряжение от внешнего ис-

¹Институт общей физики им. А.М. Прохорова
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: vbulgakova573@gmail.com

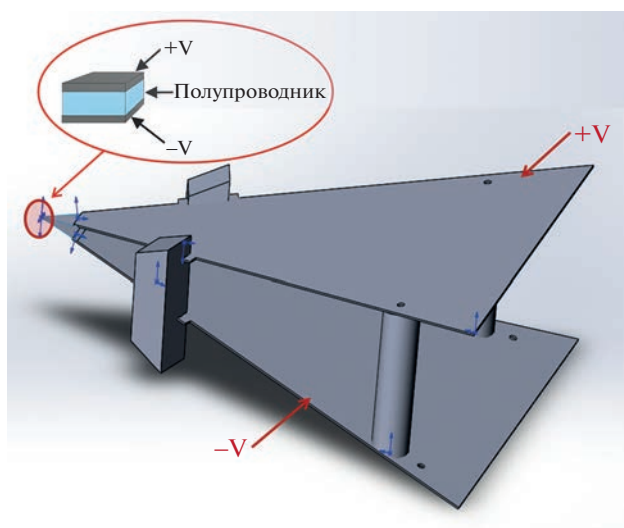


Рис. 1. Модель излучателя сверхширокополосных электромагнитных импульсов.

точника. Под действием лазерного излучения в полупроводниковом материале создаются носители заряда, которые, двигаясь в приложенном внешнем поле смещения, вызывают в полеобразующей системе фототок с фронтом нарастания, определяемым длительностью лазерного импульса.

После возникновения фототока происходит разрядка напряжения, приложенного к металлическим пластинам, и генерация бегущей электромагнитной волны. Длительность основной части

генерируемого импульса соответствует времени распространения электромагнитной волны по линии, образованной металлическими пластинами. Схема экспериментальной установки представлена на рис. 2.

При проведении экспериментов по генерации СШП ЭМИ в качестве источника возбуждения фотопроводящего полупроводникового ключа был использован фемтосекундный волоконный лазер с центральной длиной волны $\lambda = 1030$ нм, длительностью импульсов 2 пс и частотой следования импульсов 100 Гц. В качестве фотопроводящих ключей использовались: высокоомный арсенид галлия с удельным сопротивлением $\rho = 10^7$ Ом · см; кремний с удельным сопротивлением $\rho = 10^4$ Ом · см; алмаз, выращенный методом НРНТ (термобарический метод, основанный на кристаллизации алмаза из расплава углерода при высокой температуре и при высоком давлении) с концентрацией азотистой примеси 100 ppm. При использовании в качестве фотопроводящего ключа алмаза его фотовозбуждение осуществлялось второй гармоникой лазерного излучения с длиной волны $\lambda = 515$ нм. Для регистрации временной формы генерируемых СШП ЭМИ внутри полеобразующей системы располагался широкополосный измеритель магнитного поля с чувствительностью 53 мВ/(А/м) и временем нарастания переходной характеристики 35 пс. Амплитуда приложенного к пластинам антенны импульсного напряжения смещения составляла 1 кВ, при длительности импульса ~ 10 нс.

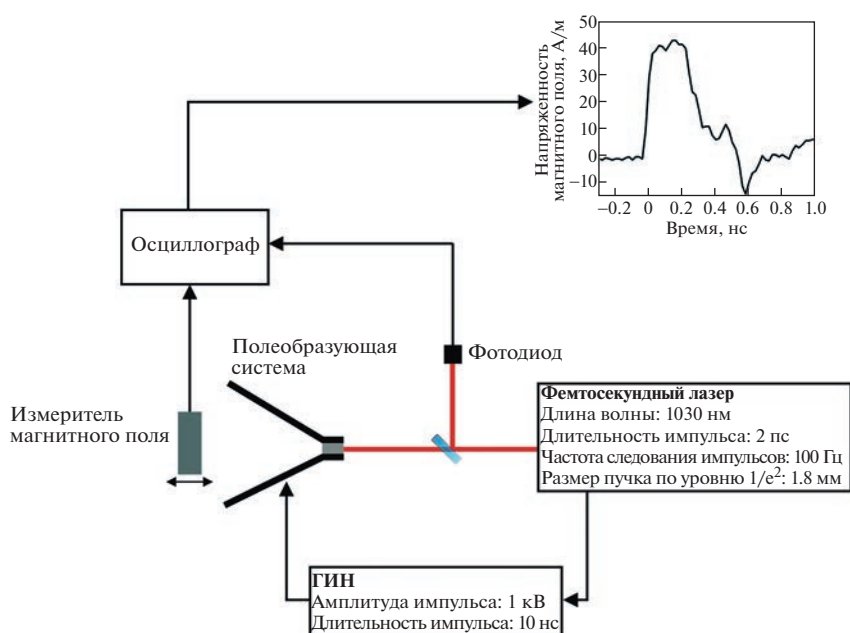


Рис. 2. Схема экспериментальной установки по генерации и детектированию прямоугольных ЭМИ наносекундной длительности с пикосекундными фронтами нарастания.

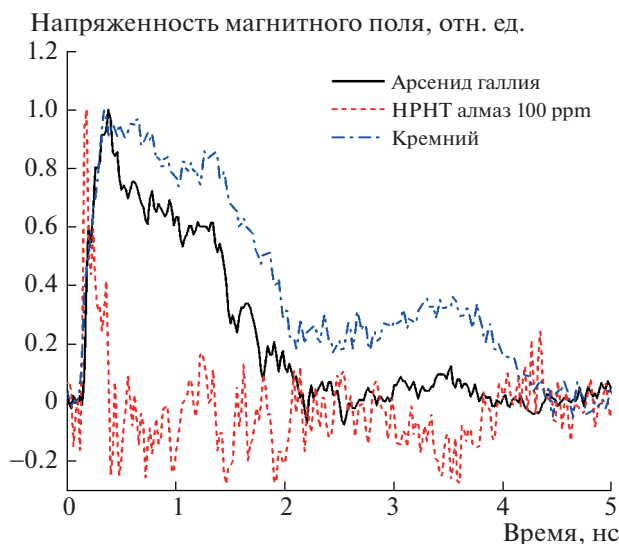


Рис. 3. Осциллограммы напряженности магнитного поля (нормировано) внутри полеобразующей системы (на расстоянии 250 мм от полупроводникового ключа) при использовании различных фотопроводящих ключей.

На рис. 3 представлены зарегистрированные осциллограммы напряженности магнитного поля (нормированные на единицу) при генерации электромагнитного излучения с использованием различных фотопроводящих ключей. Длина полеобразующей системы в описываемой серии экспериментов составляла 500 мм. Измеритель магнитного поля располагался на одинаковом расстоянии от фотопроводящего материала в экспериментах с различными фотопроводящими ключами. Из рис. 3 следует, что длительность генерируемого электромагнитного импульса различна для разных фотопроводящих материалов и явно зависит от времени жизни фотоиндуцированных носителей заряда [12]. В стандартной схеме оптической накачки — терагерцового зондирования [13] были измерены времена жизни фотоиндуцированных носителей заряда для образцов, используемых в качестве фотопроводящих ключей в полеобразующей системе. Так, для арсенида галлия время жизни носителей заряда составило $\tau = 620 \pm 100$ пс (при фотовозбуждении лазерным излучением с длиной волны 800 нм); для НРНТ алмаза $\tau = 10 \pm 1$ пс (при фотовозбуждении лазерным излучением с длиной волны 400 нм). Время жизни носителей заряда в кремнии составляет более 10 нс. При этом измеренные времена нарастания ЭМИ (34 пс) для всех исследованных полупроводниковых материалов совпадают с собственным временем нарастания (35 пс) использованного измерителя магнитного поля. Последнее дает основание сделать вывод о том, что в действительности фронт генерируемого в экспери-

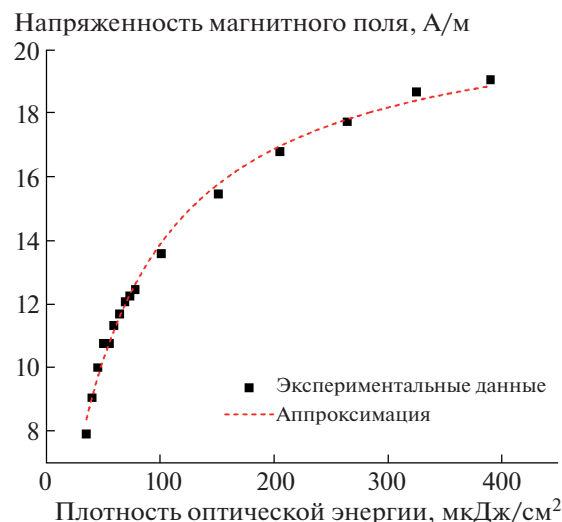


Рис. 4. Зависимость амплитуды напряженности магнитного поля электромагнитного излучения, генерируемого полеобразующей системой на основе арсенида галлия от плотности оптической энергии, коммутирующей фотопроводящий ключ.

ментах СШП ЭМИ оказывается существенно меньше 30 пс и зависит главным образом от длительности возбуждающих фотопроводник лазерных импульсов.

В работе проведены эксперименты по измерению зависимости напряженности магнитного поля от оптической энергии переключения фотопроводящего коммутатора на основе арсенида галлия (рис. 4). Экспериментальные данные были аппроксимированы зависимостью (1) [14], учитывающей эффект насыщения напряженности генерируемого поля:

$$H \approx \beta \left(\frac{F}{F + F_{\text{нас}}} \right), \quad (1)$$

$$F_{\text{нас}} = \frac{h\nu(1 + \sqrt{\epsilon})}{e\mu Z_0(1 - R)}, \quad (2)$$

где H — напряженность магнитного поля; β — константа, характеризующая амплитуду излучаемого поля, которая зависит от приложенного поля смещения; F — плотность энергии оптического излучения падающего на полупроводниковый элемент; $F_{\text{нас}}$ — плотность оптической энергии насыщения (2) ($h\nu$ — энергия кванта возбуждающего излучения, e — заряд электрона и ϵ , μ , R — диэлектрическая проницаемость, подвижность, коэффициент отражения полупроводника на длине волны излучения накачки, Z_0 — импеданс свободного пространства).

Из аппроксимации экспериментальной зависимости, приведенной на рис. 4, было получено значение плотности оптической энергии насы-

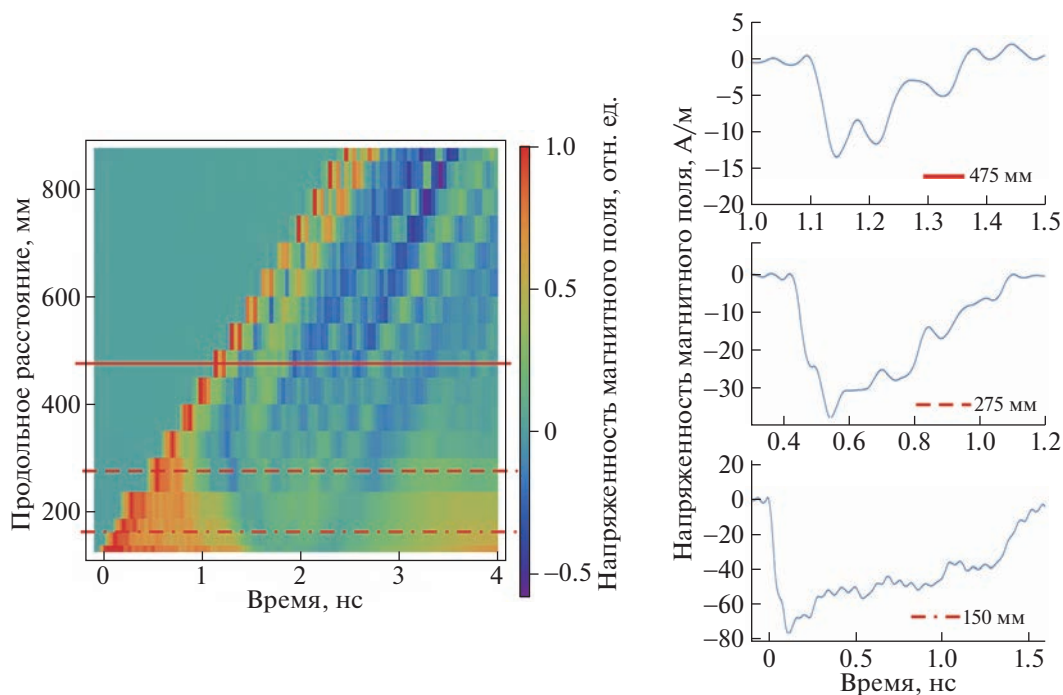


Рис. 5. Нормированная трехмерная зависимость временного распределения напряженности магнитного поля от положения измерителя магнитного поля. За начало отсчета принято расположение фотопроводящего ключа (арсенида галлия). На вставке приведены временные зависимости напряженности магнитного поля, измеренные на расстоянии: 150 мм, 275 мм и 475 мм.

щения, равное 55 мкДж/см^2 при напряженности электрического поля смещения 16 кВ/см , что согласуется со значением, полученным в работе [15] (40 мкДж/см^2 на длине волны излучения накачки 770 нм и напряженности электрического поля смещения 11 кВ/см). Константа, характеризующая амплитуду излучаемого поля β , при этом составила 22 А/м .

Было исследовано изменение формы ЭМИ по мере распространения вдоль полеобразующей линии, а также при выходе в свободное пространство. Для этого измеритель магнитного поля перемещался вдоль направления распространения ЭМИ с одновременной регистрацией осциллограмм напряженности магнитного поля. На рис. 5 представлена трехмерная зависимость временного распределения напряженности магнитного поля от расстояния, отсчитанного относительно расположения фотопроводящего ключа (арсенид галлия). Длина полеобразующей системы в описываемой серии экспериментов составляла 300 мм . Из рис. 5 видно, что в точке, примерно равной длине рупора $\sim 275 \text{ мм}$, происходит изменение временной формы напряженности магнитного поля, а в точке 475 мм излучение переходит в дальнюю зону, поскольку импульс перестает изменять форму, уменьшаясь только по амплитуде.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных исследований разработана и создана полеобразующая система на основе рупорной антенны с фотопроводящим ключом для генерации электромагнитных импульсов наносекундной длительности с пикосекундными фронтами нарастания. Продемонстрирована генерация электромагнитных импульсов в указанной полеобразующей системе с использованием различных полупроводниковых фотопроводящих ключей: арсенида галлия, кремния и НРНТ-алмаза. Исследовано изменение формы генерируемых СШП ЭМИ по мере их распространения внутри полеобразующей системы и в свободном пространстве. Установлено, что длительность генерируемых электромагнитных импульсов определяется длиной полеобразующей системы и временем жизни фотоиндуцированных носителей заряда в полупроводнике, а их фронт оказывается существенно меньше 30 пс и зависит главным образом от длительности возбуждающих фотопроводник пикосекундных лазерных импульсов.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят В.В. Кононенко за предоставление образца НРНТ алмаза.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства науки и высшего образования РФ № 075-15-2020-790.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yalandin M.I., Luybutin S.K., Rukin S.N. et al. Formation of nano- and subnanosecond width high-PRF powerful voltage pulses by using a hybrid modulator schemes // Proc. of 13th Intern. Symp. on High Current Electronics – Tomsk, Russia. 25–29 July 2004. P. 153.
2. Koshelev V.I., Gubanov V.P., Efremov A.M. et al. High-Power ultrawideband radiation source with multielement array antenna // Proc. of 13th Intern. Symp. on High Current Electronics – Tomsk, Russia. 25–29 July 2004. P. 258.
3. Efanov V.M. Gigawatt all solid state nano- and picosecond pulse generators for radar applications // Proc. on 14th IEEE Int. Pulsed Power Conf. Dallas, TX. June 2003. P. 100.
4. Prather W.D., Baum C.E., Torres R.J. et al. Survey of worldwide high-power wideband capabilities // IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility. V. 46. No. 3. August 2004. P. 335–344.
5. Mesyats G.A., Rukin S.N., Shpak V.G., Yalandin M.I. Generation of high-power sub-nanosecond pulses // Ultra-Wideband, Short-Pulse Electromagnetics 4 / Ed. by E. Heyman, B. Mandelbaum, and J. Shiloh. N.Y.: Plenum, 1999.
6. Efanov V.M., Fedorov V.M., Grekhov I.V. et al. Multiunit UWB Radiator of Electro-Magnetic Waves with Controlled Directional Pattern // Proc. of 13th Intern. Symp. on High Current Electronics – Tomsk, Russia. 25–29 July 2004. P. 262.
7. Сахаров К.Ю. Излучатели сверхкоротких электромагнитных импульсов и методы измерений их параметров. М.: Московский гос. ин-т электроники и мат., 2006. 159 с.
8. Fedorov V.M., Efanov M.V., Ostashev V.Ye. et al. Antenna Array with TEM-Horn for Radiation of High-Power Ultra Short Electromagnetic Pulses // Electronics. 2021. V. 10. № 9. P. 1011. <https://doi.org/10.3390/electronics10091011>
9. Ефанов М.В., Лебедев Е.Ф., Ульянов А.В. и др. Излучательно-измерительный комплекс для исследования прохождения сверхширокополосных сигналов в атмосфере и ионосфере земли // Теплофиз. выс. темп. 2021. Т. 59. № 6. С. 877–884. <https://doi.org/10.31857/S0040364421060028>
10. Гарнов С.В., Селемир В.Д., Букин В.В., Долматов Т.В., Горбенко Д.А., Жданов В.С., Ефанов М.В., Лебедев Е.Ф., Остафьев В.Е., Семенов В.А., Ульянов А.В., Федоро В.М., Шурупов М.А. Прямой эксперимент по прохождению сверхширокополосных импульсов субнаносекундной длительности в атмосфере Земли // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2023. Т. 509. № 1. С. 9–14. <https://doi.org/10.31857/S2686740023020062>
11. Кондратьев А.А. Угловое и спектральное распределение сверхширокополосного излучения фотоэмиссионного источника // Журн. техн. физики. 2018. Т. 88. № 3. С. 434–437. <https://doi.org/10.1134/S1063784218030106>
12. Пат. US20160197215A1BAE, US14/588,467. Generation of Flexible High Power Pulsed Waveforms / Alexander Kozyrev, John McGeehan, Yannick Morel; заявитель и патентообладатель Systems Information and Electronic Systems Integration Inc; опубл. 02.01.2015.
13. Němec H., Kadlec F., Kužel P. Methodology of an optical pump-terahertz probe experiment: An analytical frequency-domain approach // The Journal of chemical physics. – 2002. Т. 117. № 18. С. 8454–8466.
14. Ropagnol X. et al. Toward high-power terahertz emitters using large aperture ZnSe photoconductive antennas // IEEE Photonics Journal. 2011. V. 3. № 2. P. 174–186.
15. You D. et al. Generation of high-power sub-single-cycle 500-fs electromagnetic pulses // Optics letters. 1993. V. 18. № 4. P. 290–292.

GENERATION OF RECTANGULAR NANOSECOND ELECTROMAGNETIC PULSES WITH A PICOSECONDS RISE FRONT

Corresponding Member of the RAS S. V. Garnov^a, V. V. Bulgakova^a,
T. V. Dolmatov^a, A. A. Ushakov^a, and V. V. Bukin^a

^aProkhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

A method for generation of ultra-wideband electromagnetic pulses with a nanosecond duration and a picosecond rise time has been studied. The emitter is a horn antenna with a photoconductive switch irradiated by laser pulses. It has been shown that the duration of ultra-wideband electromagnetic pulses is determined by the length of the antenna and the semiconductor material, and the rising front is determined by the front of the laser pulses used to initiate the photoconductive switch. The work shows typical pulse durations of ~1 ns with a rising edge of up to ~34 ps.

Keywords: ultra-wideband radiation, horn antenna, photoconductive switch, picosecond laser pulses

УДК 537.2

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ВКЛЮЧЕНИЙ В МАТРИЧНОМ КОМПОЗИТЕ

© 2023 г. Академик РАН В. И. Колесников¹, В. Б. Яковлев², И. В. Лавров²,
А. П. Сычев^{3,*}, А. В. Бардушкин²

Поступило 15.06.2023 г.

После доработки 15.06.2023 г.

Принято к публикации 04.08.2023 г.

Получены выражения для операторов концентрации напряженности и индукции электрического поля на поверхности включений в матричном композите в зависимости от формы и объемной доли включений в материале. Данные операторы связывают поля на поверхности включения со стороны матрицы со средними величинами напряженности и индукции электрического поля в образце композита.

Ключевые слова: композит, матрица, включение, операторы концентрации напряженности и индукции электрического поля, приближение Максвелла–Гарнетта, обобщенное сингулярное приближение

DOI: 10.31857/S2686740023060093, EDN: HTSKME

Задачи исследования свойств поликристаллов и композитов условно могут быть разделены на две отдельные категории. К первой относятся задачи вычисления эффективных характеристик, т.е. характеристик неоднородного материала как целого [1, 2]. Ко второй — задачи по определению локального перераспределения значений приложенных к материалу воздействий [3–5]. Особое место среди таких задач занимают методы анализа физико-механических полей на поверхности включений в неоднородных средах [6, 7].

Межзеренные и межфазные границы играют важнейшую роль в формировании электрофизических и механических свойств поликристаллов и композитов, так как они являются областями (зонами) скопления дефектов и примесей. При этом их роль резко возрастает при уменьшении размеров кристаллитов и включений [8]. Распределение полей на границах раздела формирует движущие силы процессов диффузии и переноса, что, в конечном счете, приводит к сегрегации заключенной в материале примеси на определенной ча-

сти поверхности зерен неоднородности. Это может приводить к упрочнению/ослаблению связи между включениями и матрицей в композите (кристаллитами и аморфной межкристаллитной фазой в поликристалле), формированию нанокластеров на поверхности включений и ко многим другим явлениям, результатами которых будут являться изменения эксплуатационных физико-механических характеристик материалов.

В настоящей работе эта задача решена для матричного композита с учетом объемного содержания компонентов, формы и ориентации включений. Решение данной задачи является актуальным вследствие возможности использования ее результатов в микро- и нанoeлектронике, машиностроении и других областях науки и техники.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОПЕРАТОРЫ КОНЦЕНТРАЦИИ ПОЛЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ УЕДИНЕННОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ МАТРИЦЕ

Определим операторы концентрации напряженности $K_{ij}^E(\mathbf{r})$ и индукции $K_{ij}^D(\mathbf{r})$ электрического поля на поверхности включения со стороны матрицы формулами

$$E_i^m(\mathbf{r}) = K_{ij}^E(\mathbf{r}) \langle E_j \rangle, \quad D_i^m(\mathbf{r}) = K_{ij}^D(\mathbf{r}) \langle D_j \rangle, \quad (1)$$

где $E_i^m(\mathbf{r})$ и $D_i^m(\mathbf{r})$ — компоненты векторов напряженности и индукции электрического поля на поверхности включения со стороны матрицы,

¹Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону, Россия

²Институт нанотехнологий микроэлектроники Российской академии наук, Москва, Россия

³Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия

*E-mail: aleks_sap@mail.ru

$\langle E_j \rangle$ и $\langle D_j \rangle$ — компоненты соответствующих векторов приложенного (среднего) поля к материалу образца, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки на поверхности включения.

Отметим, что в (1) и далее по тексту нижние индексы компонент векторов и тензоров принимают значения 1, 2, 3.

Ставится задача — найти выражения для данных операторов в зависимости от формы включения. Для нахождения $K_{ij}^E(\mathbf{r})$ и $K_{ij}^D(\mathbf{r})$ рассмотрим операторы проектирования на поверхности включения. Любой вектор на поверхности включения может быть разложен на две компоненты — нормальную и тангенциальную [9]:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^n + \mathbf{a}^\tau,$$

определяющиеся с помощью скалярного и векторного произведений:

$$\mathbf{a}^n = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}), \quad \mathbf{a}^\tau = -[\mathbf{n}[\mathbf{n} \mathbf{a}]], \quad (2)$$

где $\mathbf{n}$ — вектор внешней единичной нормали в данной точке поверхности включения. В индексных обозначениях выражения (2) могут быть записаны как

$$a_i^n = n_i n_j a_j = n_{ij} a_j, \quad a_i^\tau = (\delta_{ij} - n_j) a_j \equiv \theta_{ij} a_j,$$

где n_{ij} и θ_{ij} — компоненты операторов проектирования на внешнюю нормаль и касательную плоскость в данной точке поверхности, δ_{ij} — символ Кронекера. Отметим некоторые свойства операторов n_{ij} и θ_{ij} :

$$n_{ij} n_{jl} = n_{il}, \quad n_{ij} \theta_{jl} = 0, \quad \theta_{ij} \theta_{jl} = \theta_{il}.$$

Условия на границе матрица–включения можно записать в виде (здесь и далее по тексту верхние индексы “ p ” (*particle*) и “ m ” (*matrix*) обозначают принадлежность к включению и матрице соответственно):

$$n_{ij} D_j^m(\mathbf{r}) = n_{ij} D_j^p(\mathbf{r}), \quad \theta_{ij} E_j^m(\mathbf{r}) = \theta_{ij} E_j^p(\mathbf{r}), \quad (3)$$

что означает непрерывность нормальной составляющей индукции и тангенциальной составляющей напряженности электрического поля на границе раздела. Далее аргумент $\mathbf{r}$, где это возможно, будем опускать. С учетом условий (3) можно записать

$$D_j^m = \epsilon_{jk}^m E_k^m = \epsilon_{jk}^m n_{kl} E_l^m + \epsilon_{jk}^m \theta_{kl} E_l^p,$$

где ϵ_{jk}^m — тензор диэлектрической проницаемости матрицы, при этом

$$n_{ij} D_j^m = n_{ij} D_j^p = n_{ij} \epsilon_{jk}^m n_{kl} E_l^m + n_{ij} \epsilon_{jk}^m (\delta_{kl} - n_{kl}) E_l^p.$$

Группируя поля в матрице и во включении, имеем

$$n_{ij} \epsilon_{jk}^m n_{kl} E_l^m = n_{ij} \epsilon'_{jk} E_k^p + n_{ij} \epsilon_{jk}^m n_{kl} E_l^p,$$

где $\epsilon'_{jk} = \epsilon_{jk}^p - \epsilon_{jk}^m$. Поскольку $n_j \epsilon_{jk}^m n_k$ — скалярная функция компонент вектора нормали и тензора диэлектрической проницаемости матрицы, то

$$n_{il} E_l^m = \frac{n_i n_j}{n_j \epsilon_{jk}^m n_k} \epsilon'_{js} E_s^p + n_{il} E_l^p.$$

Сложим последнее уравнение со вторым из уравнений (3), тогда после преобразований и индексных переобозначений будем иметь:

$$E_i^m = (\delta_{il} + A_{ij}(\mathbf{n}) \epsilon'_{jl}) E_l^p,$$

где

$$A_{ij}(\mathbf{n}) = \frac{n_i n_j}{n_j \epsilon_{jk}^m n_k}.$$

Заметим, что в векторном виде последние две формулы можно записать как

$$\mathbf{E}^m = (\mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{n}) \boldsymbol{\epsilon}') \mathbf{E}^p, \quad (4)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}) = \frac{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\epsilon}^m \mathbf{n})}, \quad (5)$$

где $\mathbf{I}$ — единичный тензор 2-го ранга. Связь векторов индукции электрического поля на поверхности включения со стороны матрицы и напряженности электрического поля во включении будет определяться выражением:

$$\mathbf{D}^m = (\boldsymbol{\epsilon}^m + \boldsymbol{\epsilon}^m \mathbf{A}(\mathbf{n}) \boldsymbol{\epsilon}') \mathbf{E}^p. \quad (6)$$

Формулы (4) и (6) справедливы для включения любой формы с гладкой поверхностью. Для определения оператора концентрации электрических полей на поверхности включения необходимо связать приложенное (среднее по материалу) поле с полем во включении. Данную задачу решить в аналитическом виде удастся только для включения эллипсоидальной формы, частными предельными случаями которой являются бесконечный эллиптический цилиндр, тонкий эллиптический диск и шар.

Рассмотрим задачу для неоднородного тела объема V с поверхностью S , состоящего из однородной матрицы с тензором $\boldsymbol{\epsilon}^m$ диэлектрической проницаемости, в которую погружен однородный эллипсоид, занимающий область V^p с границей S^p . Тензор диэлектрической проницаемости эллипсоида — $\boldsymbol{\epsilon}^p$. К поверхности S тела приложено однородное электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}_0$. Формулировка данной задачи имеет вид

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}) \nabla \varphi(\mathbf{r}) = 0, \quad \phi|_S = -(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}), \quad (7)$$

где $\varphi(\mathbf{r})$ — электростатический потенциал, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r})$ — тензор диэлектрической проницаемости тела, являющийся кусочно-постоянной функцией точки внутри тела:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^m, & \mathbf{r} \notin V^p; \\ \boldsymbol{\varepsilon}^p, & \mathbf{r} \in V^p. \end{cases}$$

Наряду с задачей (7) рассматривается краевая задача для однородного тела сравнения такой же формы, полностью состоящего из матрицы:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^m \nabla \varphi^c(\mathbf{r}) = 0, \quad \varphi^c|_S = -(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}), \quad (8)$$

где $\varphi^c(\mathbf{r})$ — электростатический потенциал в точках тела сравнения. Вычитая (8) из (7), имеем краевую задачу

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^m \nabla \varphi'(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{r}) \nabla \varphi(\mathbf{r}), \quad \varphi'|_S = 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi'(\mathbf{r}) &= \varphi(\mathbf{r}) - \varphi^c(\mathbf{r}), \\ \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{r}) &= \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\varepsilon}^m = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \notin V^p; \\ \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m, & \mathbf{r} \in V^p. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

Введем функцию Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ условиями

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^m \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1 \in S} = 0, \quad (11)$$

тогда решение задачи (9) можно записать в виде интеграла [10]

$$\varphi'(\mathbf{r}) = \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) (\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{r}_1) \nabla \varphi(\mathbf{r}_1)) d\mathbf{r}_1. \quad (12)$$

Преобразуем (12) по формуле Остроградско-Гаусса. Тогда с учетом граничного условия в (11) и того, что $\mathbf{E}(\mathbf{r}_1) = -\nabla \varphi(\mathbf{r}_1)$, получим

$$\varphi'(\mathbf{r}) = \int_V \nabla^1 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{r}_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1, \quad (13)$$

верхний индекс 1 у дифференциального оператора Гамильтона означает дифференцирование по $\mathbf{r}_1$. В пределе при $V \rightarrow \infty$ имеем: $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})$. Учтем также (10), тогда (13) примет вид

$$\varphi'(\mathbf{r}) = \int_{V^p} \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m) \mathbf{E}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1.$$

Поле внутри эллипсоидального включения однородно [11], поэтому данное выражение может быть записано в следующей форме:

$$\varphi'(\mathbf{r}) = \left(\int_{V^p} \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) d\mathbf{r}_1 \right) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m) \mathbf{E}(\mathbf{r}_0), \quad (14)$$

$\mathbf{r}_0 \in V^p.$

Объемный интеграл в скобках

$$I_p = \int_{V^p} \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) d\mathbf{r}_1 \quad (15)$$

сходится при любом $\mathbf{r} \in V^p$ (V^p считается открытым множеством). Действительно, учитывая, что [11]

$$G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) = \left(4\pi \sqrt{\det \boldsymbol{\varepsilon}^m} \sqrt{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})^T (\boldsymbol{\varepsilon}^m)^{-1} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})} \right)^{-1},$$

имеем

$$\begin{aligned} \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) &= \\ &= -\frac{1}{4\pi \sqrt{\det \boldsymbol{\varepsilon}^m}} \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^m)^{-1} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})}{[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})^T (\boldsymbol{\varepsilon}^m)^{-1} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})]^{3/2}}, \end{aligned} \quad (16)$$

т.е. подынтегральная функция в (15) имеет особенность только в точке $\mathbf{r}$. Рассмотрим шар V_δ малого радиуса δ с центром в точке $\mathbf{r}$, целиком содержащийся в V^p . Оценим норму интеграла I_δ от $\nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})$ по шару V_δ . Пусть $\boldsymbol{\varepsilon}_{\min}^m$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{\max}^m$ — наименьшая и наибольшая главные компоненты тензора $\boldsymbol{\varepsilon}^m$, тогда

$$\begin{aligned} \|I_\delta\| &= \left\| \int_{V_\delta} \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) d\mathbf{r}_1 \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{4\pi (\boldsymbol{\varepsilon}_{\min}^m)^{3/2}} \int_{V_\delta} \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_{\min}^m)^{-1} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|}{(\boldsymbol{\varepsilon}_{\max}^m)^{-3/2} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|^3} d\mathbf{r}_1 = \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_{\max}^m)^{3/2}}{(\boldsymbol{\varepsilon}_{\min}^m)^{5/2}} \delta. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (17) следует, что $I_\delta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, что влечет сходимость интеграла I_p .

Данный результат позволяет преобразовать объемный интеграл (15) к поверхностному [12]:

$$I_p = \oint_{S^p} G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \mathbf{n}_1 dS_1, \quad (18)$$

где $\mathbf{n}_1$ — внешняя единичная нормаль к S^p (интегрирование ведется по $\mathbf{r}_1$). Таким образом, выражение (14) можно записать в виде

$$\varphi'(\mathbf{r}) = \left(\oint_{S^p} G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \mathbf{n}_1 dS_1 \right) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m) \mathbf{E}(\mathbf{r}_0), \quad (19)$$

$\mathbf{r}_0 \in V^p.$

Вектор-функция $G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \mathbf{n}_1(\mathbf{r}_1)$ и тензорная функция $\nabla G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \otimes \mathbf{n}_1(\mathbf{r}_1)$ непрерывны при $\mathbf{r} \in V^p$ и $\mathbf{r}_1 \in S^p$, поэтому в (19) справедливо дифференцирование под знаком интеграла [12], т.е.

$$\begin{aligned} \nabla \varphi'(\mathbf{r}) &= \left(\oint_{S^p} \nabla G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \otimes \mathbf{n}_1 dS_1 \right) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m) \mathbf{E}(\mathbf{r}_0), \\ &\mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \in V^p, \end{aligned}$$

откуда, принимая $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}$ и учитывая, что $\nabla G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) = -\nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})$, получим:

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \left(\oint_{S^p} \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \otimes \mathbf{n}_1 dS_1 \right) \cdot (\boldsymbol{\epsilon}^p - \boldsymbol{\epsilon}^m) \mathbf{E}(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{r} \in V^p,$$

где $\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_0$ (решением задачи (8) является $\phi^c(\mathbf{r}) = -(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})$). Таким образом, для напряженности поля внутри включения $\mathbf{E}^p$ имеем уравнение

$$\mathbf{E}^p = \mathbf{E}_0 + \left(\oint_{S^p} \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \otimes \mathbf{n}_1 dS_1 \right) \cdot (\boldsymbol{\epsilon}^p - \boldsymbol{\epsilon}^m) \mathbf{E}^p, \quad (20)$$

$$\mathbf{r} \in V^p.$$

Интеграл в скобках в (20) не зависит от $\mathbf{r}$ при $\mathbf{r} \in V^p$, поскольку остальные величины, входящие в (20), не зависят от $\mathbf{r}$. Возьмем начало координат в центре эллипсоида, примем $\mathbf{r} = 0$, тогда выражение для этого интеграла будет определять тензор $\mathbf{g}$, используемый в обобщенном сингулярном приближении (ОСП) [5, 10, 13]:

$$\mathbf{g} = \oint_{S^p} \nabla^1 G(\mathbf{r}_1) \otimes \mathbf{n}_1 dS_1. \quad (21)$$

Таким образом, из (20) и (21) получаем связь между напряженностью поля $\mathbf{E}^p$ внутри эллипсоида и напряженностью приложенного поля $\mathbf{E}_0$ в бесконечной матрице:

$$\mathbf{E}^p = [\mathbf{I} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\epsilon}^p - \boldsymbol{\epsilon}^m)]^{-1} \mathbf{E}_0. \quad (22)$$

Компоненты тензора $\mathbf{g}$ можно вычислить по формуле [5]

$$g_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{n_i n_j}{n_k \epsilon_{kl}^m n_l} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (23)$$

где компоненты нормали к поверхности эллипсоида выражаются через сферические углы ϑ, φ . В векторном виде (23) может быть записана как

$$\mathbf{g} = -\frac{1}{4\pi} \oint_{S^p} \frac{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\epsilon}^m \mathbf{n})} d\Omega, \quad (24)$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла. Интегрирование в (24) проводится по всем направлениям нормали $\mathbf{n}$ к поверхности S^p эллипсоидального включения. Выражение (24) можно также интерпретировать как среднее по всем направлениям:

$$\mathbf{g} = -\left\langle \frac{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\epsilon}^m \mathbf{n})} \right\rangle_{\Omega},$$

или с учетом (5):

$$\mathbf{g} = -\langle \mathbf{A}(\mathbf{n}) \rangle_{\Omega}, \quad (25)$$

тогда связь между напряженностями приложенного поля и поля внутри включения примет вид

$$\mathbf{E}^p = [\mathbf{I} + \langle \mathbf{A}(\mathbf{n}) \rangle_{\Omega} (\boldsymbol{\epsilon}^p - \boldsymbol{\epsilon}^m)]^{-1} \mathbf{E}_0 =$$

$$= \langle \mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{n})(\boldsymbol{\epsilon}^p - \boldsymbol{\epsilon}^m) \rangle_{\Omega}^{-1} \mathbf{E}_0. \quad (26)$$

Из (4) и (26) вытекает связь между напряженностями поля на границе включения со стороны матрицы и приложенного поля:

$$\mathbf{E}^m = (\mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{n})(\boldsymbol{\epsilon}^p - \boldsymbol{\epsilon}^m))(\mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{n})(\boldsymbol{\epsilon}^p - \boldsymbol{\epsilon}^m))_{\Omega}^{-1} \mathbf{E}_0. \quad (27)$$

Усреднив (27) по всем направлениям, получим:

$$\langle \mathbf{E}^m |_{S^p} \rangle_{\Omega} = \mathbf{E}_0,$$

т.е. средняя по всем направлениям напряженность поля на границе эллипсоидального включения со стороны матрицы равна напряженности приложенного поля.

Таким образом, из (27) следует, что в случае изолированного эллипсоидального включения в бесконечной матрице оператор концентрации электрического поля на границе включения имеет вид

$$\mathbf{K}^{sE}(\mathbf{r}) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{n}(\mathbf{r}))(\boldsymbol{\epsilon}^p - \boldsymbol{\epsilon}^m)) \times$$

$$\times [\mathbf{I} + \langle \mathbf{A}(\mathbf{n}(\mathbf{r})) \rangle_{\Omega} (\boldsymbol{\epsilon}^p - \boldsymbol{\epsilon}^m)]^{-1}, \quad (28)$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{n}(\mathbf{r}))$ определяется выражением (5). Умножив левую и правую части (27) на $\boldsymbol{\epsilon}^m$, аналогично получим оператор концентрации электрической индукции на поверхности включения:

$$\mathbf{K}^{sD}(\mathbf{r}) = (\boldsymbol{\epsilon}^m + \boldsymbol{\epsilon}^m \mathbf{A}(\mathbf{n}(\mathbf{r}))(\boldsymbol{\epsilon}^p - \boldsymbol{\epsilon}^m)) \times$$

$$\times [\boldsymbol{\epsilon}^m + \boldsymbol{\epsilon}^m \langle \mathbf{A}(\mathbf{n}(\mathbf{r})) \rangle_{\Omega} (\boldsymbol{\epsilon}^p - \boldsymbol{\epsilon}^m)]^{-1}. \quad (29)$$

ОПЕРАТОРЫ КОНЦЕНТРАЦИИ ПОЛЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ВКЛЮЧЕНИЙ В МАТРИЧНОМ КОМПОЗИТЕ

Рассмотрим теперь случай матричного композита с эллипсоидальными включениями, количество которых в образце объемом V данного композита будем считать равным N . Пусть к поверхности S данного образца приложено постоянное электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}_0$, причем в данных условиях средняя по образцу напряженность поля будет совпадать с $\mathbf{E}_0$, т.е. $\langle \mathbf{E} \rangle = \mathbf{E}_0$ [14]. Если включение входит в состав неоднородной среды, то в формуле (21) вместо напряженности приложенного поля $\mathbf{E}_0$ следует использовать напряженность действующего, или эффективного, поля $\mathbf{E}^{eff}$. Напряженность такого поля можно принять равной средней напряженности поля в

матрице, что характерно для приближения Максвелла–Гарнетта [15] как частного случая ОСП, если в качестве тела сравнения взять матрицу [10]

$$\mathbf{E}^{eff} = \langle \mathbf{E}^m \rangle.$$

Среднюю напряженность поля и среднюю электрическую индукцию в матрице в зависимости от средней напряженности поля $\langle \mathbf{E} \rangle$ и средней индукции $\langle \mathbf{D} \rangle$ в образце композита можно получить с помощью операторов объемной концентрации полей $\mathbf{K}^{vE}$ и $\mathbf{K}^{vD}$:

$$\langle \mathbf{E}^m \rangle = \mathbf{K}^{vE} \langle \mathbf{E} \rangle, \quad \langle \mathbf{D}^m \rangle = \mathbf{K}^{vD} \langle \mathbf{D} \rangle.$$

В свою очередь, операторы $\mathbf{K}^{vE}$ и $\mathbf{K}^{vD}$ для точек, лежащих в объеме матрицы, в ОСП имеют вид [5]

$$\mathbf{K}^{vE} = \langle (\mathbf{I} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^m))^{-1} \rangle^{-1},$$

$$\mathbf{K}^{vD} = \boldsymbol{\varepsilon}^m \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{I} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^m))^{-1} \rangle^{-1}.$$

Вычисляя средние, получим:

$$\mathbf{K}^{vE} = [(1-f)\mathbf{I} + f\langle (\mathbf{I} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m))^{-1} \rangle]^{-1},$$

$$\mathbf{K}^{vD} = \boldsymbol{\varepsilon}^m [(1-f)\boldsymbol{\varepsilon}^m + f\langle \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{I} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^m))^{-1} \rangle]^{-1}, \quad (30)$$

где усреднение производится по всем включениям, погруженным в матрицу, а f – их полная объемная доля в образце композита.

Таким образом, поля на поверхности включения со стороны матрицы в матричном композите могут быть найдены по следующим формулам:

$$\mathbf{E}^m(\mathbf{r}) = \mathbf{K}^E(\mathbf{r}) \langle \mathbf{E} \rangle, \quad \mathbf{D}^m(\mathbf{r}) = \mathbf{K}^D(\mathbf{r}) \langle \mathbf{D} \rangle, \quad \mathbf{r} \in S^p,$$

где $\mathbf{K}^E(\mathbf{r})$, $\mathbf{K}^D(\mathbf{r})$ – полные операторы концентрации полей на границе включения со стороны матрицы в образце композита:

$$\mathbf{K}^E(\mathbf{r}) = \mathbf{K}^{sE}(\mathbf{r})\mathbf{K}^{vE},$$

$$\mathbf{K}^D(\mathbf{r}) = \mathbf{K}^{sD}(\mathbf{r})\mathbf{K}^{vD}, \quad \mathbf{r} \in S^p, \quad (31)$$

$\mathbf{K}^{sE}(\mathbf{r})$, $\mathbf{K}^{sD}(\mathbf{r})$ – операторы поверхностной концентрации поля на границе включения со стороны матрицы, определяются выражениями (28), (29); $\mathbf{K}^{vE}(\mathbf{r}^m)$, $\mathbf{K}^{vD}(\mathbf{r}^m)$ – операторы объемной концентрации поля в матрице, определяются выражениями (30).

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ МАТРИЧНОГО КОМПОЗИТА СО СФЕРИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Рассмотрим матричный композит с изотропной матрицей ($\boldsymbol{\varepsilon}^m = \varepsilon^m \mathbf{I}$) и изотропными сферическими включениями ($\boldsymbol{\varepsilon}^p = \varepsilon^p \mathbf{I}$) радиусом r . В этом случае по формулам (5), (23) получим:

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}) = \frac{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}}{\varepsilon^m}, \quad \mathbf{g} = -\langle \mathbf{A}(\mathbf{n}) \rangle_{\Omega} = -\frac{1}{3\varepsilon^m} \mathbf{I}. \quad (32)$$

Для операторов объемной концентрации полей по формулам (30) имеем:

$$\mathbf{K}^{vE} = \frac{2\varepsilon^m + \varepsilon^p}{2\varepsilon^m + \varepsilon^p - f(\varepsilon^p - \varepsilon^m)} \mathbf{I},$$

$$\mathbf{K}^{vD} = \frac{2\varepsilon^m + \varepsilon^p}{2\varepsilon^m + \varepsilon^p + 2f(\varepsilon^p - \varepsilon^m)} \mathbf{I}, \quad (33)$$

оба эти оператора – диагональные. Для операторов поверхностной концентрации по формулам (28), (29) с учетом (32) получим:

$$\mathbf{K}^{sE}(\mathbf{r}) = \mathbf{K}^{sD}(\mathbf{r}) =$$

$$= \left(\mathbf{I} + \frac{\varepsilon^p - \varepsilon^m}{\varepsilon^m} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})|_{\mathbf{r}} \right) \frac{3\varepsilon^m}{2\varepsilon^m + \varepsilon^p}, \quad \mathbf{r} \in S^p.$$

В итоге для полных операторов концентрации полей на поверхности включений имеем:

$$\mathbf{K}^E(\mathbf{r}) =$$

$$= \left(\mathbf{I} + \frac{\varepsilon^p - \varepsilon^m}{\varepsilon^m} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}|_{\mathbf{r}} \right) \frac{3\varepsilon^m}{2\varepsilon^m + \varepsilon^p - f(\varepsilon^p - \varepsilon^m)},$$

$$\mathbf{K}^D(\mathbf{r}) =$$

$$= \left(\mathbf{I} + \frac{\varepsilon^p - \varepsilon^m}{\varepsilon^m} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}|_{\mathbf{r}} \right) \frac{3\varepsilon^m}{2\varepsilon^m + \varepsilon^p + 2f(\varepsilon^p - \varepsilon^m)}, \quad \mathbf{r} \in S^p. \quad (34)$$

Пусть $\mathbf{E}_0$ – напряженность приложенного поля к образцу композита, тогда из (33) получим, что средняя напряженность поля в матрице

$$\langle \mathbf{E}^m \rangle = \frac{2\varepsilon^m + \varepsilon^p}{2\varepsilon^m + \varepsilon^p - f(\varepsilon^p - \varepsilon^m)} \mathbf{E}_0.$$

В частности, для случая сильно контрастных включений при $\varepsilon^p \gg \varepsilon^m$

$$\langle \mathbf{E}^m \rangle \approx \frac{1}{1-f} \mathbf{E}_0. \quad (35)$$

В другом предельном случае при $\varepsilon^m \gg \varepsilon^p$

$$\langle \mathbf{E}^m \rangle \approx \frac{2}{2+f} \mathbf{E}_0. \quad (36)$$

Введем систему координат x, y, z с началом в центре выбранного включения со сферической поверхностью S^p , направив ось z по направлению $\mathbf{E}_0$; оси x , y направим перпендикулярно оси z . Рассмотрим две точки на S^p : точку $A(0; 0; r)$, лежащую на оси z , и точку $B(r; 0; 0)$ – на оси x . Векторы нормали в этих точках: $\mathbf{n}(A) = (0; 0; 1)$, $\mathbf{n}(B) = (1; 0; 0)$.

Из (34) получим, что оператор $\mathbf{K}^E(A)$ – диагональный с компонентами

$$K_{11}^E(A) = K_{22}^E(A) = \frac{3\varepsilon^m}{2\varepsilon^m + \varepsilon^p - f(\varepsilon^p - \varepsilon^m)},$$

$$K_{33}^E(A) = \frac{3\varepsilon^p}{2\varepsilon^m + \varepsilon^p - f(\varepsilon^p - \varepsilon^m)},$$

причем в случае сильно контрастных включений при $\varepsilon^p \gg \varepsilon^m$ имеем:

$$K_{33}^E(A) \approx \frac{3}{1-f},$$

т.е. напряженность поля в точке A со стороны матрицы

$$\mathbf{E}^m(A) \approx \frac{3}{1-f} \mathbf{E}_0$$

и фактически в три раза больше средней напряженности поля в матрице (см. (35)). В то же время, в случае $\varepsilon^m \gg \varepsilon^p$ имеем

$$\mathbf{E}^m(A) \approx \frac{3}{2+f} \frac{\varepsilon^p}{\varepsilon^m} \mathbf{E}_0,$$

т.е. $\mathbf{E}^m(A) \ll \langle \mathbf{E}^m \rangle$.

В точке B оператор $\mathbf{K}^E$ также диагональный с компонентами

$$K_{11}^E(B) = \frac{3\varepsilon^p}{2\varepsilon^m + \varepsilon^p - f(\varepsilon^p - \varepsilon^m)},$$

$$K_{22}^E(B) = K_{33}^E(B) = \frac{3\varepsilon^m}{2\varepsilon^m + \varepsilon^p - f(\varepsilon^p - \varepsilon^m)}.$$

Напряженность поля в точке B со стороны матрицы:

$$\mathbf{E}^m(B) = \frac{3\varepsilon^m}{2\varepsilon^m + \varepsilon^p - f(\varepsilon^p - \varepsilon^m)} \mathbf{E}_0,$$

причем в приближении Максвелла–Гарнетта она равна напряженности поля внутри включения (в силу диагональности оператора $\mathbf{K}^E$ в точке B нормальная к поверхности сферы составляющая напряженности поля отсутствует, а касательная — непрерывна при переходе через поверхность сферы). Для случая сильно контрастных включений при $\varepsilon^p \gg \varepsilon^m$ имеем:

$$\mathbf{E}^m(B) \approx \frac{3\varepsilon^m}{(1-f)\varepsilon^p} \mathbf{E}_0,$$

т.е. $\mathbf{E}^m(B) \ll \langle \mathbf{E}^m \rangle$. В другом предельном случае при $\varepsilon^m \gg \varepsilon^p$

$$\mathbf{E}^m(B) \approx \frac{3}{2+f} \mathbf{E}_0,$$

что фактически в полтора раза больше, чем среднее поле в матрице (см. (36)).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом настоящей работы являются выражения (28)–(31) для операторов концентрации напряженности и индукции электрического поля на поверхности включения в матричном композите, которые позволяют прогнозировать значения данных величин в любой точке поверхности включений в зависимости от внешнего приложенного поля, от объемных долей и материальных характеристик компонентов композита, от формы и ориентации включений.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 122040800154-7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Milton G. The Theory of Composites. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 719 p.
2. Физика композиционных материалов / Под ред. Н.Н. Трофимова. Т. 2. М.: Мир, 2005. 344 с.
3. Волков С.Д., Ставров В.П. Статистическая механика композитных материалов. Минск: Изд-во БГУ, 1978. 208 с.
4. Кунин И.А., Соснина Э.Г. // ПММ. 1973. Т. 37. С. 306–315.
5. Колесников В.И., Яковлев В.Б., Бардушкин В.В., Лавров И.В., Сычев А.П., Яковлева Е.Н. // ДАН. 2016. Т. 467. № 3. С. 275–279. <https://doi.org/10.7868/S0869565216090097>
6. Маслов Б.П. // ПМ. 1990. Т. 26. № 6. С. 13–19.
7. Шермергор Т.Д., Яковлев В.Б. // Известия РАН. Физика Земли. 1993. № 2. С. 81–89.
8. Gleiter H. // Acta mater. 2000. V. 48. № 1. P. 1–29. [https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(99\)00285-2](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(99)00285-2)
9. Hill R. // Mech. Phys. Solids. 1983. V. 31. No. 4. P. 347–357.
10. Колесников В.И., Яковлев В.Б., Бардушкин В.В., Лавров И.В., Сычев А.П., Яковлева Е.Н. // ДАН. 2013. Т. 452. № 1. С. 27–31. <https://doi.org/10.7868/S0869565213260083>
11. Giordano S., Palla P.L. // J. Phys. A: Math. Theor. 2008. V. 41. № 41. 415205 (24 pp). <https://doi.org/10.1088/1751-8113/41/41/415205>
12. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. 2. М.: Наука, 1991. 544 с.
13. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
14. Stroud D. // Phys. Rev. B. 1975. V. 12. № 8. P. 3368–3373. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.12.3368>
15. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 660 с.

DISTRIBUTION OF ELECTRIC FIELDS ON THE SURFACE OF INCLUSIONS IN MATRIX COMPOSITE

Academician of the RAS V. I. Kolesnikov^a, V. B. Yakovlev^b, I. V. Lavrov^b, A. P. Sychev^c, and A. V. Bardushkin^b

^a*Rostov State Transport University, Rostov-on-Don, Russia*

^b*Institute of Nanotechnology of Microelectronics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^c*Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russia*

Expressions are obtained for operators of concentration of electric field strength and displacement on the surface of inclusions in matrix composite depending on shape and volume fraction of inclusions in material. These operators relate the fields on the inclusion surface on the matrix side with the average values of the electric field strength and displacement in the composite sample.

Keywords: composite, matrix, inclusion, operators of concentration of electric field strength and displacement, Maxwell Garnett approximation, generalized singular approximation

ЭФФЕКТ УСКОРЕННОГО ВСАСЫВАНИЯ ЖИДКОСТИ В ТРУБКЕ ПРИ ЛАЗЕРНОЙ КАВИТАЦИИ НА ЛАЗЕРНОМ НАГРЕВАТЕЛЬНОМ ЭЛЕМЕНТЕ

© 2023 г. В. М. Чудновский¹, академик РАН М. А. Гузев¹, Е. П. Дац^{1,*}, А. В. Кулик¹

Поступило 07.07.2023 г.

После доработки 07.07.2023 г.

Принято к публикации 21.08.2023 г.

Экспериментально и численно исследуются расширение и схлопывание кавитационного пузырька при лазерном нагреве и вскипании с недогревом воды в окрестности кончика оптоволокну (лазерном нагревательном элементе), установленного в заполненной водой стеклянной трубке с двумя открытыми концами. Кавитация, инициированная непрерывным лазерным излучением, сопровождается выталкивающим и втягивающим движением разогретой жидкости в трубке и за ее пределами. Впервые показано, что в трубке с установленным лазерным нагревательным элементом в потоке жидкости, движущемся за стенками пузырька, при его схлопывании на удаленном от торца полюсе поверхности пузырька возникает жидкая струя, направленная через пузырек к торцу оптоволокну. Струя ускоряет процесс всасывания жидкости в трубку.

Ключевые слова: лазер, кавитация, численное моделирование, двухфазная среда

DOI: 10.31857/S2686740023060056, **EDN:** AFIKMM

Лазерная (лазероиндуцированная) кавитация [1, 2] представляет собой паровую кавитацию, образующуюся при быстром лазерном нагреве и вскипании жидкости, находящейся в относительно “холодном” окружении, недогретом до температуры насыщения (кипение с недогревом). При лазерной кавитации возникающий при вскипании паровой пузырек сначала быстро увеличивается до некоторого максимального объема, а затем, вследствие контакта с “холодным” (недогретым) окружением, ускоренно схлопывается, что определяет его как кавитационный [3, 4]. Большой интерес представляет исследование лазерной кавитации в трубках, заполненных жидкостью, поскольку с этими исследованиями связаны технология струйной печати, создание микронасосов, очистка поверхности, технологии лазерной хирургии и др. [5–12]. В трубке лазерный нагрев можно осуществлять дистанционно, фокусируя излучение в нужном объеме, либо контактно, когда излучение доставляется через оптоволокну, кварцевый кончик которого погружен в жидкость, с которой он непосредственно контактирует. Лазерная кавитация с использованием дистанционной фокусировки излучения в жидкость активно исследуется

[5, 6, 8, 9, 14], чего нельзя сказать о методах контактной инициации с использованием непрерывного лазерного излучения, проводимого по оптоволокну, хотя использование оптоволокну очень удобно для доставки лазерного излучения к различным объектам [7]. Оптоволокну обладает большой гибкостью и способно проникать в узкие каналы, трубки, щели и иглы для перкутанного воздействия и таким образом позволяет генерировать кавитационные пузырьки в условиях, где использование других методов – “искрового” [13] и связанного с фокусировкой лазерного излучения [14] затруднительно либо неосуществимо. Кроме того, диаметр кварцевой жилы обычно применяемых оптических волокон мал и находится в пределах 0.1–1 мм, поэтому при конверсии лазерного излучения в тепло кварцевый кончик оптоволокну будет являться сосредоточенным нагревательным элементом нагревательного прибора – лазерного аппарата, излучающего через оптоволокну с рекордно большим тепловым потоком [3, 4].

Особенность лазерной кавитации, инициированной на лазерном нагревательном элементе в трубке, заключается в том, что зарождение и эволюция кавитационного пузырька происходят в окрестности двух поверхностей – цилиндрической поверхности кончика оптоволокну и внутренней цилиндрической поверхности трубки. Известно, что в свободном объеме лазерная кави-

¹Институт прикладной математики

Дальневосточного отделения Российской академии наук, Владивосток, Россия

*E-mail: datsep@gmail.com

тация в окрестности кончика оптоволокну приводит к генерации двух аксиальных кумулятивных струй, возникающих при схлопывании пузырька. Одна устремлена к торцу оптоволокну, другая — в противоположном направлении, от торца в глубь жидкости [3, 4]. Эти струи возникают в результате столкновения и преобразования в аксиальные встречных радиальных потоков жидкости, движущейся за поверхностью схлопывающегося пузырька [3, 4]. Однако в трубке, из-за влияния на кавитационный пузырек внутренней замкнутой поверхности, радиальные встречные потоки вообще не возникают и существенным становится только аксиальное движение жидкости, движущейся за стенками кавитационного пузырька. При росте пузырек выталкивает жидкость из трубки, а при схлопывании всасывает и, если при этом возникнут струи, они, с одной стороны, будут иметь совершенно иную природу, с другой — изменять скорость всасывания жидкости в трубку. Важно, что при лазерном нагреве потоки жидкости, выходящие и входящие в трубку, будут со временем разогреваться, что в итоге может привести к необратимой денатурации белков и санации поверхности. Данное обстоятельство можно использовать как в технических приложениях, так и в медицинских технологиях.

Цель работы — исследовать динамику и нагрев жидкости при лазерной кавитации, инициированной непрерывным лазерным излучением на лазерном нагревательном элементе, установленном в стеклянной трубке, заполненной жидкостью.

В работе экспериментально и численно исследуются расширение и схлопывание кавитационного пузырька при лазерном нагреве и вскипании с недогревом воды в окрестности кончика оптоволокну (лазерном нагревательном элементе), установленного в заполненной водой стеклянной трубке с двумя открытыми концами. Показано, что в трубке с установленным лазерным нагревательным элементом в потоке жидкости, движущемся за стенками пузырька, при его схлопывании на удаленном от торца полюсе поверхности пузырька возникает жидкая струя, направленная через пузырек к торцу оптоволокну. Эта струя ускоряет процесс всасывания жидкости в трубку.

В экспериментах использовался полупроводниковый лазер с длиной волны излучения 1.47 мкм, излучение которого проводилось по кварц-кварц-полимерному волокну диаметром 600 мкм. Использовалось непрерывное излучение с мощностью 6 Вт. Оптоволокну помещалось в центр стеклянной трубки с открытыми концами длиной 80 мм, заполненной недеаэрированной дистиллированной водой. Трубка устанавливалась вертикально в стеклянной чашке с размерами

$12.5 \times 2.3 \times 4.1$ см, также заполненной недеаэрированной водой. Наружный диаметр трубки 5 мм, внутренний 3.3 мм. Расстояние от кварцевого кончика оптоволокну до внутренних стенок трубки 1.35 мм. Расстояние от торца оптоволокну до нижней границы трубки 7.5 мм, а от нижней границы до дна чашки 3 мм. Излучение с длиной волны 1.47 мкм хорошо поглощается в воде с коэффициентом поглощения $\sim 25 \text{ см}^{-1}$ [15], что позволяет инициировать вблизи торца оптоволокну объемное вскипание жидкости. Все эксперименты проводились при температуре 300 К с использованием скоростной видеокамеры PHOTRON FASTCAM SA-Z со скоростью съема до 10^5 кадров в секунду. Исследовался элементарный акт вскипания — динамика роста и схлопывания одиночного пузырька в трубке. Численное моделирование реализовано в коммерческом пакете Ansys Fluent 2021 с использованием метода “Volume of Fluid”, в котором рассматривается двухфазная среда “вода—пар”. В качестве механизма межфазного массообмена используется модель испарения-конденсации Ли [16], в которой скорость парообразования и конденсации пропорциональна разнице между текущей температурой и температурой насыщения. Параметры моделирования выбирались из условий эксперимента, а также таким образом, чтобы динамика межфазной границы в численном расчете соответствовала динамике роста/схлопывания пузырька в эксперименте. Моделирование осуществлено в двумерной осесимметричной постановке, где ось симметрии соответствует оси симметрии оптоволокну. Сходимость численного решения проверялась на равномерных сетках с квадратными элементами различного размера (1, 2, 4 мкм) при помощи сопоставления динамики поверхности пузырька с одномерным решением уравнения Рэлея—Плессета [1], описывающего закон движения радиуса кавитационного пузырька в вязкой несжимаемой жидкости.

Результаты эксперимента по лазерной кавитации в окрестности торца оптоволокну, помещенного в стеклянную трубку, показаны на рис. 1. Вскипание воды происходит перед торцом волокна, установленного вертикально. В период роста пузырек приобретает форму вертикально вытянутого сфероида, охватывает кончик оптоволокну, и после достижения максимального размера через 0.55 мс начинает схлопываться. При схлопывании на нижнем полюсе пузырька формируется аксиальная струя жидкости, направленная к торцу оптоволокну (рис. 1, 0.8–1.05 мс), в которой средняя скорость движения переднего фронта ($v \approx 4 \text{ м/с}$) превосходит среднюю скорость движения межфазной границы на остальных участках поверхности пузырька ($v_1 \approx 3.3 \text{ м/с}$). Кадры 0.85–

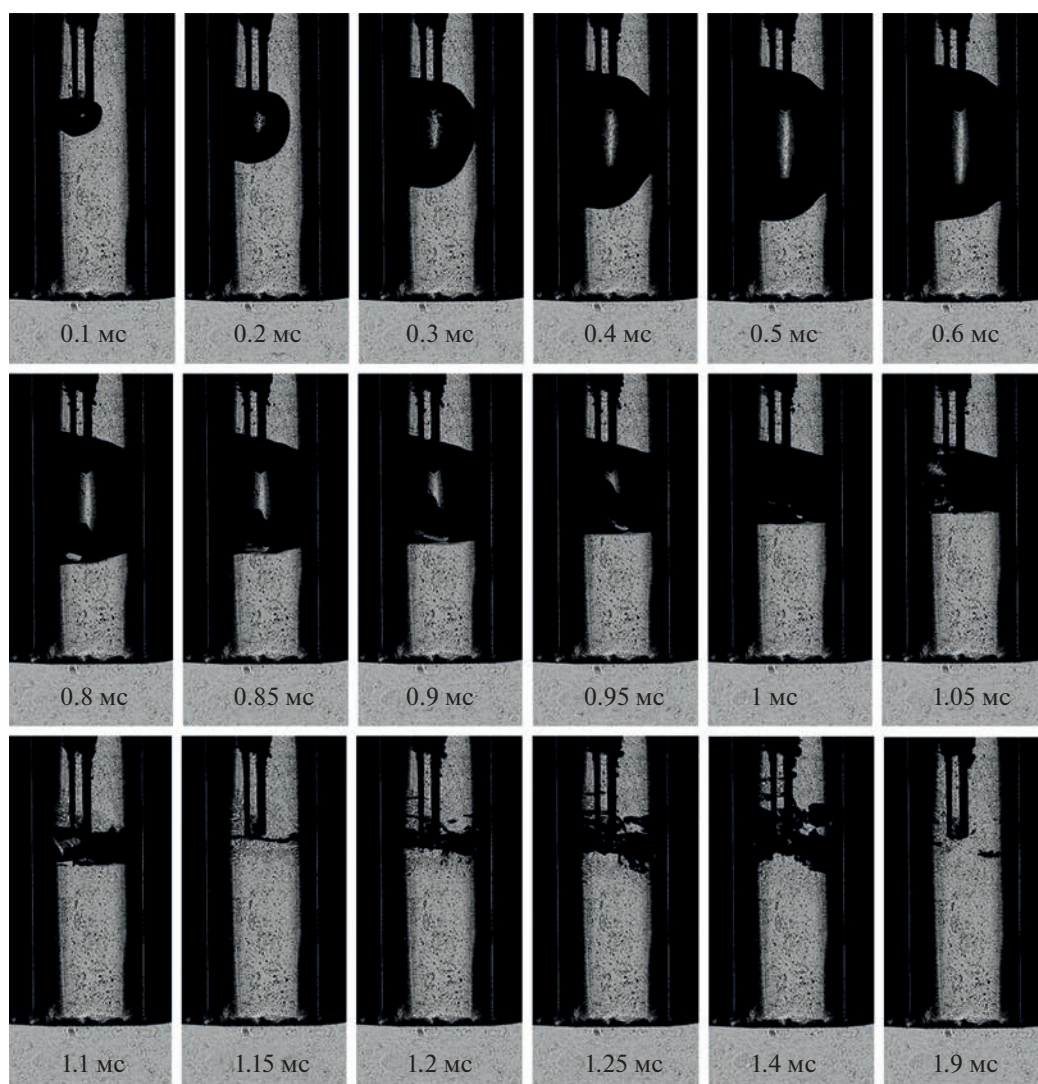


Рис. 1. Рост и схлопывания парового пузырька, возникающего на торце оптоволокну, помещенного в стеклянную трубку. Диаметр оптоволокну 0.6 мм. Временные интервалы обозначены в миллисекундах от начала момента роста.

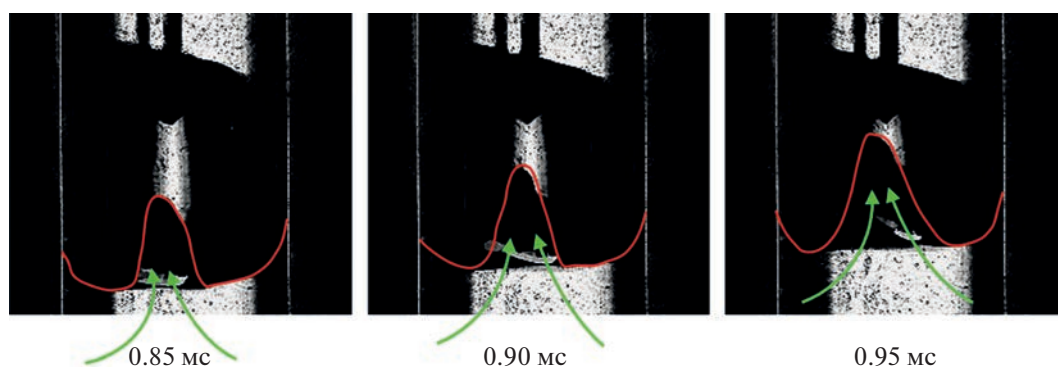


Рис. 2. Струя, распространяющаяся через схлопывающийся пузырек и направленная к торцу оптоволокну в различные моменты времени.

0.95 мс детально показаны на рис. 2, откуда получаем, что средняя скорость движения объема жидкости, сосредоточенной в струе, $V \approx 7.63$ мл/с.

Коллапс пузырька сопровождается ускоренным встречным движением жидкости сверху и снизу. В терминальной стадии коллапса пузырька

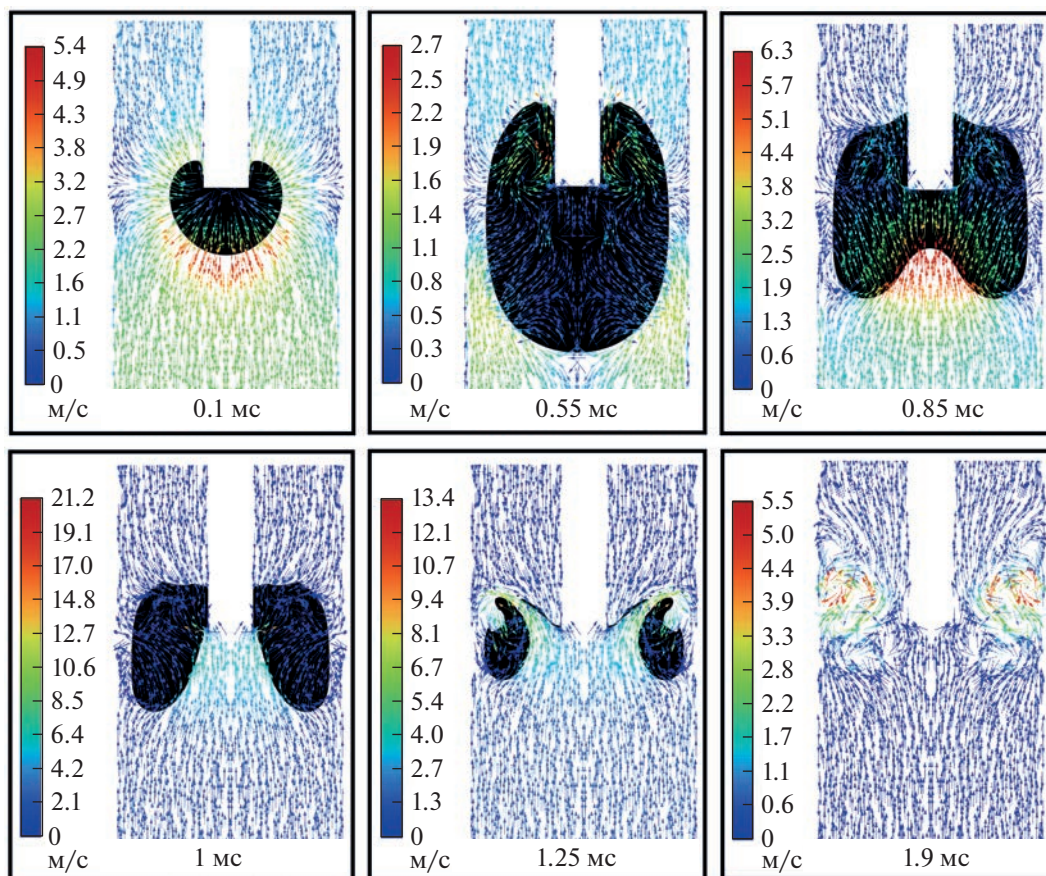


Рис. 3. Поле скоростей в процессе моделирования роста схлопывания пузырька в трубке. Черным цветом отмечена газовая фаза.

происходит столкновение струи с торцом оптоволоконной трубки, а также жидкости, движущейся во встречном направлении. В этот момент пузырек сжимается до минимальных размеров (рис. 1, 1.15 мс). Однако последующая эволюция приводит к воспроизведению горизонтально вытянутого пузырька — «отскоку» и вторичному разрушению пузырька (рис. 1, 1.2–1.9 мс).

На рис. 3 показано поле скоростей, полученное в результате численного моделирования процесса роста и схлопывания пузырька на кончике оптоволоконной трубки. Вводимые параметры для численного моделирования соответствуют экспериментальным значениям. На стадии роста пузырек выталкивает жидкость в направлении из трубки, тогда как при схлопывании пузырька жидкость, наоборот, втекает в трубку. Видно, что при коллапсе на нижнем полюсе пузырька формируется направленная к торцу оптоволоконной трубки струя (рис. 3, 0.85 мс), в которой скорость движения жидкости превосходит скорость движения межфазной границы на остальных участках поверхности пузырька. Максимальная скорость

движения жидкости наблюдается в момент удара (рис. 3, 1 мс) переднего фронта жидкой струи о торец оптоволоконной трубки. Далее в пространстве между торцом оптоволоконной трубки и внутренней стенкой трубки возникает вихрь, вращение которого частично обусловлено как столкновением, так и встречным движением жидкости при схлопывании пузырька, принявшего тороидальную форму. В дальнейшем в окрестности торца оптоволоконной трубки возникает тороидальный вихрь, способный формировать стационарное течение вдоль трубки. Анализ динамики изменения поля скоростей жидкости в период роста-схлопывания пузырька в трубке показывает, что к моменту достижения максимального размера пузырька, согласно рис. 3, жидкость вытекает из пространства между радиальной поверхностью пузырька и внутренней стенкой трубки, поэтому давление здесь на поверхность пузырька минимально, тогда как на полюсах давление жидкости на пузырек остается максимальным. Таким образом, струя формируется вдоль оси, соединяющей аксиально расположенные полюса поверх-

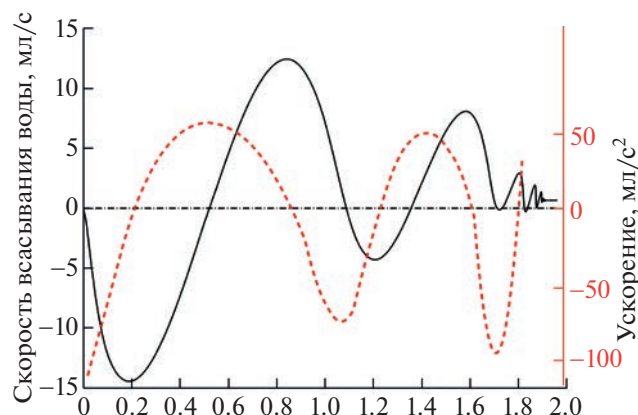


Рис. 4. Изменение объемной скорости и ускорения через нижний торец трубки. Отрицательные значения обозначают скорость выталкивания объема воды в процессе роста пузырька, положительные — скорость всасывания воды при его схлопывании.

ности пузырька в направлении от полюса пузырька к торцу оптоволоконка.

Зависимость полученной численно объемной скорости и ускорения движения воды через нижний торец трубки от времени показана на рис. 4. Отрицательные значения соответствуют вытал-

киванию объема воды из трубки при росте пузырька, положительные — всасыванию воды в трубку при схлопывании пузырька. Из графика следует, что скорость всасывания воды в трубку максимальна в период образования и движения струи (0.8–1 мс) и достигает значений ~12.5 мл/с. Большое ускорение получает вытекающая из

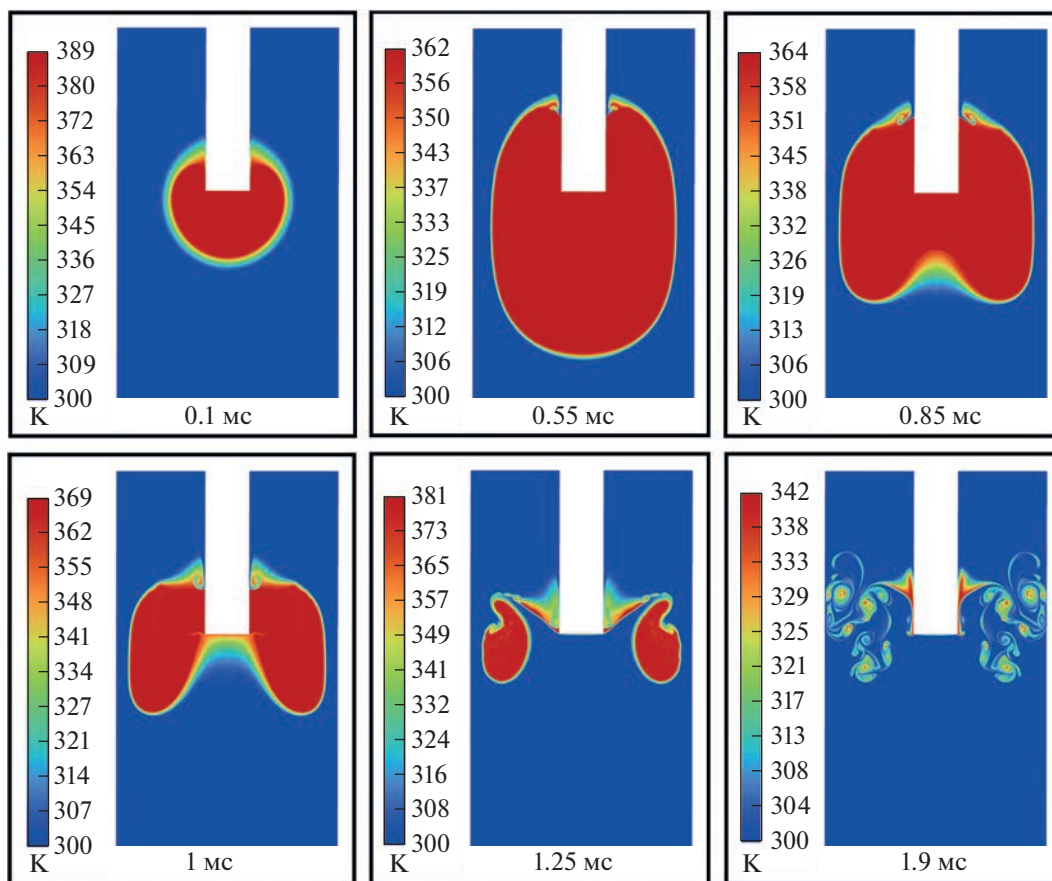


Рис. 5. Распределение температуры в процессе моделирования роста-схлопывания парового пузырька.

трубки жидкость при первом расширении парового пузырька. При этом скорость выхода воды из трубки превосходит скорость всасывания воды при его схлопывании, тогда как в последующих циклах (отскоках) скорость всасывания воды превосходит ее выброс, и жидкость преимущественно периодически втекает в трубку. В конце устанавливается небольшой стационарный поток, направленный снизу вверх через трубку. Этот поток обеспечивает тороидальный вихрь, показанный на рис. 3 (1.9 мс).

Результаты расчета температуры двухфазной среды показаны на рис. 5. Из рисунка следует, что через 1.9 мс в момент исчезновения паровой фазы температура жидкости вблизи внутренней поверхности трубки достигает 325 К (повышается на 25 градусов). При многократном повторении данного процесса жидкость нагреется до температур, при которых произойдет необратимая денатурация всех белков, находящихся на поверхности, т.е. произойдет санация поверхности.

Эффект выталкивания и последующего всасывания разогретой жидкости в трубку может иметь большое практическое значение в технических и медицинских приложениях. Например, этот эффект может быть полезен для санации поверхности и при лечении ран.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа проведена при финансовой поддержке Российского научного фонда (№ 22-19-00189).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhong X., Eshraghi J., Vlachos P., Dabiri S., Ardekani A.M. A model for a laser-induced cavitation bubble // Intern. J. Multiphase Flow. 2020. V. 132. 103433. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103433>
2. Zhang Jy., Du Yx., Liu Jq. et al. Experimental and numerical investigations of the collapse of a laser-induced cavitation bubble near a solid wall // J. Hydrodyn. 2022. V. 34. P. 189–199. <https://doi.org/10.1007/s42241-022-0017-4>
3. Chudnovskii V.M., Levin A.A., Yusupov V.I., Guzev M.A., Chernov A.A. The formation of a cumulative jet during the collapse of a vapor bubble in a subcooled liquid formed as a result of laser heating // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 2020. № 150. P. 119286. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.119286>
4. Fursenko R.V., Chudnovskii V.M., Minaev S.S., Okajima Junnosuke. Mechanism of high velocity jet formation after a gas bubble collapse near the micro fiber immersed in a liquid // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 2020. V. 163. P. 120420. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.120420>
5. Tao Lü, Wei Zhang, Fang Chen, Zhongchi Liu. Microliquid jet induced by tunable holmium laser: a potential microsurgery scalpel // Microfluid Nanofluid. 2016. V. 20. P. 10. <https://doi.org/10.1007/s10404-015-1692-z>
6. Ohl C.-D., Arora M., Dijkink R., Janve V., Lohse D. Surface cleaning from laser-induced cavitation bubbles // Appl. Phys. Lett. 2006. V. 89. P. 074102.
7. Christos B., Ioannis K., Efthymis S., Ioanna Z. Laser-induced forward transfer of silver nanoparticle ink: time-resolved imaging of the jetting dynamics and correlation with the printing quality // Microfluid Nanofluid. 2014. V. 16. P. 493–500.
8. Robles V., Gutierrez-Herrera E., Devia-Cruz L.F., Banks D., Camacho-Lopez S., and Aguilar G. Soft material perforation via double-bubble laser-induced cavitation microjets // Phys. Fluids. 2020. V. 32. P. 042005. <https://doi.org/10.1063/5.0007164>
9. George S.D., Chidangil S., Mathur D. Minireview: Laser-induced formation of microbubbles – biomedical implications // Langmuir. 2019. V. 35. 010139.
10. Abushkin I.A., Chudnovskii V.M., Guzev M.A., Polyayev Yu.A., Garbuzov R.V. Laser Interstitial Thermotherapy in Surgical Treatment of Vascular Anomalies // Bulletin of Experimental Biology and Medicine. 2023. V. 174. № 3. January. <https://doi.org/10.1007/s10517-023-05716-2>
11. Yusupov V., Chudnovskii V. The origin of loud claps during endovenous laser treatments // The Journal of the Acoustical Society of America. 2023. V. 153. P. 1525–1533. <https://doi.org/10.1121/10.0017436>
12. Chan Kin Foong, Pfefer T. Joshua, Teichman Joel M.H., Welch Ashley J. A Perspective on Laser Lithotripsy: The Fragmentation Processes // J. Endourology. 2001. P. 257–273. <https://doi.org/10.1089/089277901750161737>
13. Wanga Shi-Ping, Wang Qianxi, Zhanga A-Man. Eleanor Stride. Experimental observations of the behaviour of a bubble inside a circular rigid tube // Intern. J. Multiphase Flow. 2019. V. 121. P. 103096. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2019.103096>
14. Horvat Darja, Orthaber Uroš, Schillec Jörg, Hartwigc Lars, Löschner Udo, Vrecko Andrej, Petkovšek Rok. Laser-induced bubble dynamics inside and near a gap between a rigid boundary and an elastic membrane // Intern. J. Multiphase Flow. 2018. V. 100. P. 119–126. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2017.12.010>
15. Deng R., He Y., Qin Y., Chen Q., Chen L. Measuring pure water absorption coefficient in the near-infrared spectrum (900–2500 nm) // Yaogan Xuebao – Journal of Remote Sensing. 2012. V. 16. № 1. P. 192–206.
16. Lee W.H. A pressure iteration scheme for two-phase flow modeling T. Veziroglu (Ed.). Multiphase Transport Fundamentals, Reactor Safety, Applications. V. 1. Hemisphere Publishing, 1980. P. 407–432.

THE EFFECT OF ACCELERATED ABSORPTION OF LIQUID IN A TUBE DURING LASER CAVITATION ON A LASER HEATING ELEMENT

V. M. Chudnovskii^a, Academician of the RAS M. A. Guzev^a, E. P. Dats^a, and A. V. Kulik^a

^aInstitute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russia

The expansion and collapse of a cavitation bubble during laser heating and subcooled boiling of water in the vicinity of the tip of an optical fiber (laser heating element) installed in a water-filled glass tube with two open ends is studied experimentally and numerically. Cavitation, initiated by continuous laser radiation, is accompanied by the pushing and pulling movement of the heated liquid in the tube and outside it. For the first time, it has been shown that in a tube with an installed laser heating element in a liquid flow moving behind the walls of the bubble, when it collapses at the pole of the bubble surface remote from the end, a liquid jet appears, directed through the bubble to the end of the optical fiber. The jet speeds up the process of sucking liquid into the tube.

Keywords: laser, cavitation, numerical modeling, two-phase medium

УДК 539.3

О КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ДВУХ ШТАМПОВ И МОДЕЛИ ТРЕЩИН НОВОГО ТИПА

© 2023 г. Академик РАН В. А. Бабешко^{1,2,*}, О. В. Евдокимова¹,
О. М. Бабешко², М. В. Зарецкая², В. С. Евдокимов²

Поступило 02.06.2023 г.

После доработки 17.09.2023 г.

Принято к публикации 19.09.2023 г.

Впервые строится точное решение контактной задачи о взаимодействии с многослойным основанием двух полубесконечных штампов, торцы которых параллельны друг другу. Штампы предполагаются абсолютно жесткими, а расстояние между ними может иметь любую конечную величину. Задача является важным этапом в алгоритме построения моделей трещины нового типа в материалах разных реологий. Механизм разрушения среды трещинами нового типа кардинально отличается от механизма разрушения среды трещинами Гриффитса и пока изучен слабо. Гриффитс объяснил происхождение своих трещин с гладкой границей как результат сжатия с боков эллиптической полости в пластине. Трещины нового типа имеют кусочно-гладкую границу, получаются в результате замены эллипса прямоугольником, сжимаемым с боков. Представленную в статье задачу можно рассматривать как результат формирования трещины нового типа с абсолютно жесткими берегами и деформируемой нижней границей. После ее решения появляется возможность перехода к деформируемым штампам и трещине нового типа в реологической среде. Решение этой задачи оказалось возможным вследствие построения точных решений интегральных уравнений Винера–Хопфа на конечном отрезке.

Показано, как решение одной из ранее не решавшихся точно задач позволяет исследовать и решать точно другие задачи, выявлять ранее не известные свойства и резонансы. В результате построения точного решения задачи подтвердился факт о неединственности решения динамических контактных задач для систем штампов и построено дисперсионное уравнение для нахождения резонансных частот.

Ключевые слова: контактная задача, многослойные среды, штампы, интегральное уравнение Винера–Хопфа, бесконечные алгебраические системы, резонансы

DOI: 10.31857/S2686740023060019, **EDN:** YCDLOT

Обзоры исследований по теории и методам решения контактных задач для одного штампа на многослойной среде весьма обширны. Часть из них изложена в работах [1–20]. Обзоров по теории контактных задач для совокупностей штампов значительно меньше. В работах [2–5] приводятся некоторые примеры исследований по контактным задачам для нескольких штампов, где применяются как аналитические, асимптотические, так и численные подходы. Роль этих задач важна во многих вопросах конструирования и

прочности. В работе [19] предложен один из способов точного решения достаточно общей контактной задачи для одного штампа, опирающийся на точное решение интегрального уравнения Винера–Хопфа на конечном отрезке. В настоящей работе на его основе строится точное решение контактной задачи для двух полубесконечных штампов, чем расширены возможности метода Винера–Хопфа. Заметим, что именно этот метод, в сочетании с методом блочного элемента, позволил обнаружить существование трещин нового типа, а с ними и новых землетрясений, названных стартовыми [20]. Этот тип землетрясений, пока единственный, который можно прогнозировать, дал ответ на причины разнообразия видов подвижек поверхности Земли в зонах эпицентров. Все связано с характером взаимного движения литосферных плит в зоне разлома, представляющего трещину нового типа [21]. Сле-

¹Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия

²Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

*E-mail: babeshko41@mail.ru

дует заметить, что попытки использования трещин Гриффитса в сейсмологии не дали ожидаемого результата, хотя успешны в инженерной практике. Наиболее детально математически они исследованы академиком Н.Ф. Морозовым [22], охватившим широкий спектр теории и приложений этих трещин. Рассматриваемая в настоящем сообщении контактная задача для двух абсолютно жестких штампов является важным этапом в алгоритме исследования трещин нового типа в реологических средах [21]. Можно трактовать эту контактную задачу как рассмотрение трещины нового типа, имеющей абсолютно твердые берега и деформируемое дно, представимое зоной многослойной среды, на поверхности которой находятся штампы. Частный случай этой задачи рассматривался в [23], но только для критического случая, когда расстояние между торцами штампов стало нулевым и концентрации контактных напряжений в зоне сближения плит оказывались сингулярными. Открытым оставался важнейший вопрос о поведении концентрации контактных напряжений при изменении расстояния между штампами и о поведении системы при вибрации. В работе [24], при изучении высокочастотного резонанса для двух штампов, был установлен факт не единственности решения для некоторых параметров задачи. Однако получить дисперсионное уравнение не удалось. В настоящей работе этот вопрос решается строго математически и может служить средством для использования в различных прикладных вопросах. В частности, в строительстве возникают проблемы оценки поведения и живучести сооружений, имеющих треснувшие фундаменты. Развиваемый при этом математический метод применим при решении ряда технических проблем, таких как разделительная дамба разной ширины для водоемов, термоизоляция отдаленных или близких объектов на термоупругом основании, электрические поля в зоне между пьезоэлектрическими объектами на некотором основании, для моделирования самоорганизации и самосборки наночастиц при их сближении [25] и других. Контактная задача для совокупностей штампов возникает при создании элементной базы электроники, фильтров на поверхностных акустических волнах, прочности сооружений при параллельных креплениях, стабильности креплений шахтных штолен при параллельном их расположении и во многих других практически важных вопросах прочности.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается многослойная линейно деформируемая среда, находящаяся в условиях вибрации, описываемой функцией $e^{-i\omega t}$. Считая, что внешние воздействия на многослойную среду осуществляются с такой же временной функцией,

исключая ее из уравнений и граничных условий, приходим к стационарной граничной задаче. На ее верхней границе вводится декартова система координат таким образом, что ось ox_3 направлена по внешней нормали, оси ox_1, ox_2 лежат в касательной плоскости. Предполагается, что в областях Ω_{-A} ($-\infty < x_1 \leq -A, |x_2| \leq \infty$), Ω_A ($A \leq x_1 < \infty, |x_2| \leq \infty$) действуют абсолютно жесткие штампы, контактирующие без трения с многослойным основанием.

Контактная задача, отвечающая этой постановке, описывается системой интегральных уравнений вида [1, 2]

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_{-A}} h(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q_{-A}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \\ & + \iint_{\Omega_A} h(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q_A(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = u_r(x_1, x_2), \\ & x_1, x_2 \in \Omega_r, \quad r = -A, A, \\ & \langle \alpha, x \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \end{aligned} \quad (1)$$

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} H(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\langle \alpha, x \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$H(\alpha_1, \alpha_2) = O(u^{-1}), \quad u = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \rightarrow \infty.$$

Здесь $u_r(x_1, x_2)$ — заданные смещения оснований штампов, $q_r(x_1, x_2)$ — контактные напряжения. Считаем, что функция $H(\alpha_1, \alpha_2)$ — четная по обоим переменным мероморфная функция двух комплексных переменных $\alpha_k, k = 1, 2$, ее примеры приведены в многочисленных публикациях. Например, в [2] построены интегральные уравнения для линейно упругого слоя конечной толщины, жестко соединенного с абсолютно твердым основанием. Ядро для динамического случая имеет подобный вид:

$$\begin{aligned} H(u) &= x_2^2(\sigma_1 \text{sh} \sigma_1 \text{ch} \sigma_2 - u^2 \sigma_2^{-1} \text{sh} \sigma_2 \text{ch} \sigma_1) \Delta^{-1}(u), \\ \Delta(u) &= u^2(2u^2 - \theta_2^2) + u^2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \text{sh} \sigma_1 \times \\ &\times \text{sh} \sigma_2 [2u^4 - (\theta_1^2 + 2\theta_2^2)u^2 + \theta_1^2 \theta_2^2 + 0.25\theta_2^4] - \\ &- \text{ch} \sigma_1 \text{ch} \sigma_2 (2u^4 - \theta_2^2 u^2 + 0.25\theta_2^4), \\ \sigma_1 &= \sqrt{u^2 - \theta_1^2}, \quad \sigma_2 = \sqrt{u^2 - \theta_2^2}, \\ \theta_1^2 &= (\lambda + 2\mu)^{-1} \rho \omega^2 h^2, \quad \theta_2^2 = \mu^{-1} \rho \omega^2 h^2. \end{aligned}$$

Применим к двумерному интегральному уравнению (1) преобразование Фурье по координате x_2 . В результате место координаты x_2 у каждой, подвергнутой преобразованию Фурье функции, займет свободный параметр преобразования Фурье α_2 . Чтобы упростить формулы, временно скроем параметр α_2 введением обозначений

$$\begin{aligned}
h(x_1) &= h(x_1, \alpha_2), \quad q_r(\xi_1) = q_r(\xi_1, \alpha_2), \\
h(x_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad H(\alpha_1) = H(\alpha_1, \alpha_2), \quad (2) \\
u_r(x_1) &= u_r(x_1, \alpha_2), \quad r = -A, A.
\end{aligned}$$

В результате принятых замен получим систему одномерных интегральных уравнений с двумя неизвестными вида

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{-A} h(x_1 - \xi_1) q_{-A}(\xi_1) d\xi_1 + \\
& + \int_A^{\infty} h(x_1 - \xi_1) q_A(\xi_1) d\xi_1 = u_{-A}(x_1), \quad -\infty < x_1 \leq -A, \\
& \int_{-\infty}^{-A} h(x_1 - \xi_1) q_{-A}(\xi_1) d\xi_1 + \\
& + \int_A^{\infty} h(x_1 - \xi_1) q_A(\xi_1) d\xi_1 = u_A(x_1), \quad A \leq x_1 < \infty.
\end{aligned} \quad (3)$$

В случае многослойной среды функция $H(\alpha_1)$, являясь мероморфной, имеет счетное число нулей z_{mo} и полюсов ξ_{so} . Им свойственно асимптотическое поведение вида

$$\begin{aligned}
\xi_{so} &= iv(s + 0.5)(1 + o(1)), \quad s \rightarrow \infty, \\
z_{mo} &= ivm(1 + o(1)), \quad m \rightarrow \infty, \quad v = \text{const} > 0.
\end{aligned}$$

В динамическом случае при достаточно большой частоте ω появляется конечное число вещественных нулей и полюсов. В этом случае представление ядра интегрального уравнения описывается интегралом, берущимся по контуру:

$$h(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} H(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1.$$

Контур γ совпадает с вещественной осью всюду, кроме зон вещественных полюсов, которые обходятся им по полуокружностям малого радиуса [2].

Составим в преобразованиях Фурье уравнение перемещения всей поверхности многослойной среды с учетом обоих контактных зон. Для этого продолжим систему интегральных уравнений (3) на всю ось, добавив справа на отрезке $[-A, A]$ новую неизвестную функцию $w_0(x_1)$, представляющую перемещение поверхности среды в промежутках между штампами. Применив к этой системе уравнений преобразование Фурье по x_1 , приходим к функциональному уравнению вида

$$\begin{aligned}
H(\alpha_1) Q_0^-(\alpha_1) + W_0(\alpha_1) + H(\alpha_1) Q_0^+(\alpha_1) &= \\
&= U_0^-(\alpha_1) + U_0^+(\alpha_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_0^-(\alpha_1) &= \int_{-\infty}^{-A} q_{-A}(x_1) e^{ix_1 \alpha_1} dx_1, \\
Q_0^+(\alpha_1) &= \int_A^{\infty} q_A(x_1) e^{ix_1 \alpha_1} dx_1, \\
U_0^-(\alpha_1) &= \int_{-\infty}^{-A} u_{-A}(x_1) e^{ix_1 \alpha_1} dx_1, \\
U_0^+(\alpha_1) &= \int_A^{\infty} u_A(x_1) e^{ix_1 \alpha_1} dx_1.
\end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $W_0(\alpha_1)$ – преобразование Фурье функции перемещения $w_0(x_1)$ в свободной от напряжений зоны между штампами. В том случае, когда штампы сошлись торцами, имеем $W_0(\alpha_1) = 0$ и уравнение принимает вид

$$H(\alpha_1) Q_0^-(\alpha_1) + H(\alpha_1) Q_0^+(\alpha_1) = U_0^-(\alpha_1) + U_0^+(\alpha_1). \quad (5)$$

Это уравнение исследовано в [20, 21], где показано, что оно имеет сингулярную концентрацию контактных напряжений в зоне сближения штампов. Применим для исследования функционального уравнения (4) аппарат факторизации функций [1, 2], позволяющий свести его к отдельным интегральным уравнениям. С этой целью для четной функции $H(\alpha_1)$ осуществим деление всех членов функционального уравнения (4) на $H(\alpha_1)$. В результате получим соотношение

$$\begin{aligned}
Q_0^-(\alpha_1) + H^{-1}(\alpha_1) W_0(\alpha_1) + Q_0^+(\alpha_1) &= \\
&= H^{-1}(\alpha_1) [U_0^-(\alpha_1) + U_0^+(\alpha_1)].
\end{aligned} \quad (6)$$

Осуществим переход от функционального уравнения (6) к интегральному уравнению, применив к (6) обращение Фурье, получим его в виде

$$\begin{aligned}
& \int_{-A}^A h_0(x_1 - \xi_1) w_0(\xi_1) d\xi_1 = f_0(x_1), \quad |x_1| \leq A, \\
w_0(x_1) &= w_0(x_1, \alpha_2), \quad h_0(x_1) = h_0(x_1, \alpha_2), \\
w_0(x_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_0(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \\
h_0(x_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H^{-1}(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1,
\end{aligned} \quad (7)$$

$$H^{-1}(\alpha_1) = P^{-1}(\alpha_1) R(\alpha_1).$$

Здесь функция $f_0(x_1)$ имеет представление

$$\begin{aligned}
f_0(x_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H^{-1}(\alpha_1) [U_0^-(\alpha_1) + U_0^+(\alpha_1)] e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \\
&|x_1| \leq A.
\end{aligned}$$

Свойства ядра интегрального уравнения (7) обуславливают у функции $H^{-1}(\alpha_1)$ на бесконечности асимптотическое поведение вида

$$H^{-1}(\alpha_1) = O(|\alpha_1|).$$

Это свидетельствует о том, что интегральное уравнение, представленное с помощью классических функций, является интегро-дифференциальным.

Не изменяя это уравнение, приведем его к представлению, как интегро-дифференциальное, вынеся дифференциальный оператор. Введем произвольный параметр $\tau > 0$ и представим уравнение в виде

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \tau^2\right) \int_{-A}^A h_1(x_1 - \xi_1) w_0(\xi_1) d\xi_1 &= f_0(x_1), \\ H_1(\alpha_1) &= (\alpha_1^2 + \tau^2)^{-1} H^{-1}(\alpha_1), \\ h_1(x_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1^2 + \tau^2)^{-1} H^{-1}(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \\ H_1(\alpha_1) &= O(\alpha_1^{-1}). \end{aligned} \quad (8)$$

Рассматривая в (8) интеграл слева как неизвестную функцию, на которую действует дифференциальный оператор, обратим его, тогда получим представление вида

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A h_1(x_1 - \xi_1) w_0(\xi_1) d\xi_1 &= f(x_1), \\ f(x_1) &= f_1(x_1) + c_1 f_2(x_1) + c_2 f_2(x_1), \\ f_1(x_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\eta) e^{-i\eta x_1} d\eta, \quad |x_1| \leq A, \\ f_2(x_1) &= e^{\tau x_1}, \quad f_3(x_1) = e^{-\tau x_1}, \\ F_1(\eta) &= H^{-1}(\eta) (\eta^2 + \tau^2)^{-1} [U_0^-(\eta) + U_0^+(\eta)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь постоянные обращения дифференциального оператора c_m , $m = 1, 2$, нуждаются в определении, что будет выполнено после построения решения интегрального уравнения (9).

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Метод построения точного решения интегрального уравнения (9) контактной задачи на многослойной среде опирается на работу авторов [19]. Ради краткости и возможности использования результатов этой работы введем в уравнении (9) новые обозначения, чтобы воспользоваться принятыми в работе [19] обозначениями:

$$h_1(x) = k(x), \quad w_0(\xi_1) = \varphi(\xi), \quad A = a. \quad (10)$$

В результате интегральное уравнение (9) приобретает принятый в работе [19] вид:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a k(x - \xi) \varphi(\xi) d\xi &= f(x), \\ |x| \leq a, \quad k(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(u) e^{-iux} du, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} K(u) &= (u^2 + \tau^2)^{-1} H^{-1}(u), \\ f(x_1) &= f_1(x_1) + c_1 f_2(x_1) + c_2 f_2(x_1). \end{aligned}$$

Это позволяет применять использованные там обозначения и полученные необходимые формулы. Поскольку многослойная среда имеет конечную толщину, то преобразование Фурье ядра интегрального уравнения, функция $K(u)$, является мероморфной в комплексной плоскости переменного u и обладает свойствами, принятыми в [19]:

$$K(u) = A|u|^{-1} [1 + o(1)], \quad |u| \gg 1.$$

В изотропном случае она является четной и может представляться в виде $K(u) = P^{-1}(u)R(u)$. Здесь целые функции $R(u)$ и $P(u)$ имеют первый порядок и конечный тип, обладают счетными множествами нулей, которые предполагаются однократными, имеющими точки сгущения на бесконечности в окрестности мнимых полуосей. Асимптотическое представление нулей и полюсов верхней полуплоскости, свойственное многослойной среде, имеет вид [19], свойственный функции $K(u)$:

$$\xi_s = ir(s+0.5)(1+o(1)), \quad s \rightarrow \infty, \quad z_m = ir m(1+o(1)), \quad (12)$$

$$m \rightarrow \infty, \quad r = \text{const} > 0.$$

Используя описанные нули (12), строятся четные целые функции $R(u, z)$, $P(u, z)$ в форме бесконечных произведений [19]. Последние будут иметь вид

$$\begin{aligned} R(u^2, z) &= R_+(u, z) R_-(u, z), \\ R_{\pm}(u, z) &= T_{\mp} e^{\mp iu} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 \pm \frac{u}{z_s}\right) e^{\frac{u}{\pm z_s}}, \quad T_{\mp} = \text{const}, \\ P(u, \xi) &= P_{\mp}(u, \xi) P_{\pm}(u, \xi), \\ P_{\pm}(u, \xi) &= S_{\mp} e^{\mp iu} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 \pm \frac{u}{\xi_s}\right) e^{\frac{u}{\pm \xi_s}}, \quad S_{\mp} = \text{const}. \end{aligned} \quad (13)$$

Они, после деления на $P(u)$, дадут мероморфные функции, обозначенные $K(u) = P^{-1}(u, \xi) R(u, z)$. Их нулями являются $\pm z_m$, а полюсами $\pm \xi_s$ (12).

С помощью полученных функций построим мероморфные функции, обозначающие факторизованный в виде произведения вид [19]:

$$K_{\pm}(u) = P_{\pm}^{-1}(u, \xi) R_{\pm}(u, z).$$

ПОСТРОЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Следуя [19], будем искать решение интегрального уравнения (11) для правой части $f(x)$ в виде

$$\varphi(x) = F(\eta)e^{-i\eta x} + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n^+ e^{iz_n(a+x)} + C_n^- e^{iz_n(a-x)}],$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\eta) e^{-i\eta x} d\eta, \quad (14)$$

$$F(\eta) = \int_{-a}^a [f_1(x_1) + c_1 f_2(x_1) + c_2 f_2(x_1)] e^{i\eta \xi} d\xi.$$

Внесем его в интегральное уравнение (11), предварительно вычислив представление ядра по вычитам и получив выражение [19]

$$k(x) = i \sum_{s=1}^{\infty} b_s e^{i\xi_s |x|}, \quad b_s = [P'(\xi_s)]^{-1} R(\xi_s).$$

В результате вычислений и приравнивания левой части интегрального уравнения правой приходим к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений вида

$$[A \pm B(a)] X(\pm) = D(\pm),$$

$$A = \left\| \frac{1}{\xi_r - z_m} \right\|, \quad B(a) = \left\| \frac{\exp i2az_m}{\xi_r + z_m} \right\|, \quad (15)$$

$$D(\pm) = \left\{ \frac{F(\eta)}{K(\eta)} \left[\frac{e^{i\eta \eta}}{\eta + \xi_r} \pm \frac{e^{-i\eta \eta}}{\eta - \xi_r} \right] \right\},$$

$$X(\pm) = \{x_m(\pm)\}, \quad x_m(\pm) = C_m^+ \pm C_m^-.$$

Знаки в системе уравнений берутся в соответствии с этажностью.

Построенная бесконечная система уравнений изучалась в [19]. В ней построена обратная к A матрица A^{-1} , имеющая вид

$$A^{-1} = \|\tau_{gr}\|, \quad \tau_{gr} = \frac{1}{K_+(-z_g)(\xi_r - z_g)[K_+(-\xi_r)]'}.$$

Для дальнейшего исследования остановимся на выборе случая верхнего этажа в уравнении (15), случай нижнего изучается аналогично. Подействуем для случая верхнего этажа слева обратной матрицей A^{-1} на уравнение (15), получим уравнение второго рода вида

$$X = -A^{-1}B(a)X + A^{-1}D. \quad (16)$$

В работе [19] показано, что оно может решаться методом последовательных приближений для всех значений параметра a .

Тогда в этом интервале изменения параметра a на конечном отрезке $[-a, a]$ методом последовательных приближений можно построить точное решение интегрального уравнения Винера–Хопфа, которое имеет вид

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (A^{-1}B(a))^n A^{-1}D. \quad (17)$$

Средствами функционального анализа, посредством представления функции от бесконечной матрицы, в виде [19]

$$X = [I + A^{-1}B(a)]^{-1} A^{-1}D. \quad (18)$$

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ТРЕЩИНЫ НОВОГО ТИПА

Построенное решение содержит произвольные постоянные c_1, c_2 , входящие в $f(x)$ (9), которые необходимо определить. Для их определения возвратимся к функции $w_0(x_1)$ (10). В силу линейности интегрального уравнения построенное решение имеет представление, в котором указанные постоянные явно выделены. С учетом наличия у решения $w_0(x_1)$ данного типа интегрального уравнения (11) особенности вида $\sqrt{a^2 - x_1^2}$ [19], запишем его в форме с этой выделенной особенностью и составляющими решения при постоянных $c_n, n = 1, 2$, т.е.

$$w_0(x_1) = \frac{m_1(x_1) + c_1 m_2(x_1) + c_2 m_3(x_1)}{\sqrt{a^2 - x_1^2}}. \quad (19)$$

Функции $m_n(x_1), n = 1, 2, 3$, являются решениями интегрального уравнения (11) для функций $f_n(x)$ в правой части соответственно. Постоянные c_n вычисляются из условия ограниченности функции $w_0(x_1)$ у краев штампов $\pm a$. Соответствующие уравнения имеют вид

$$c_1 m_2(a) + c_2 m_3(a) + m_1(a) = 0,$$

$$c_1 m_2(-a) + c_2 m_3(-a) + m_1(-a) = 0.$$

Искомые постоянные принимают значения

$$c_1 = \Delta^{-1} [m_1(-a)m_3(a) - m_1(a)m_3(-a)],$$

$$c_2 = \Delta^{-1} [m_1(a)m_2(-a) - m_1(-a)m_2(a)],$$

$$\Delta = m_2(a)m_3(-a) - m_2(-a)m_3(a).$$

На основании полученного результата определяются остальные параметры трещины нового типа, у которой у дна находится многослойная среда, а боковые берега формируются абсолютно жесткими штампами. Для нахождения контактных напряжений под штампом подставим вычисленные параметры $c_n, n = 1, 2$, в решение интегрального уравнения (19) и затем внесем это найденное решение в функциональное уравнение (6).

В функциональном уравнении осуществим факторизацию всех членов в виде суммы. В результате приходим к традиционному в методе Винера–Хопфа аналитическому продолжению комплексных функций, регулярных в верхней и нижней полуплоскостях на всю плоскость функцией $\Gamma(\alpha_1)$, являющейся в нашем случае тождественным нулем [1, 2]:

$$\begin{aligned} & Q_0^-(\alpha_1) + \{K^{-1}(\alpha_1)W_0(\alpha_1)\}^- - \\ & - \{K^{-1}(\alpha_1)[U_0^-(\alpha_1) + U_0^+(\alpha_1)]\}^- = \\ & = \{K^{-1}(\alpha_1)[U_0^-(\alpha_1) + U_0^+(\alpha_1)]\}^+ - \\ & - \{K^{-1}(\alpha_1)W_0(\alpha_1)\}^+ - Q_0^+(\alpha_1) = \Gamma(\alpha_1) \equiv 0. \end{aligned}$$

Здесь скобка $\{\}^\pm$ обозначает результат факторизации по параметру α_1 в виде суммы функции, заключенной в скобке, с обеспечением регулярностью в верхней комплексной полуплоскости для плюса и в нижней полуплоскости — для минуса.

Следуя методу решения функциональных уравнений Винера–Хопфа [1, 2], таким путем находим преобразования Фурье контактных напряжений под обоими штампами. Они имеют вид, с учетом временно скрытого параметра α_2 в (2):

$$\begin{aligned} Q_0^-(\alpha_1, \alpha_2) &= \{K^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)[U_0^-(\alpha_1, \alpha_2) + U_0^+(\alpha_1, \alpha_2)]\}^- - \\ &- \{K^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)W_0(\alpha_1, \alpha_2)\}^-, \\ Q_0^+(\alpha_1, \alpha_2) &= \{K^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)[U_0^-(\alpha_1, \alpha_2) + U_0^+(\alpha_1, \alpha_2)]\}^+ - \\ &- \{K^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)W_0(\alpha_1, \alpha_2)\}^+. \end{aligned}$$

Воспользовавшись обозначениями (2) и перейдя к старым, содержащим параметр α_2 , значения контактных напряжений можем представить в виде

$$\begin{aligned} q_{-A}(x_1, x_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q_0^-(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2, \\ &|x_1| \geq A, \quad |x_2| < \infty, \\ q_A(x_1, x_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q_0^+(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2. \end{aligned}$$

Полученный результат, в случае динамической задачи, показывает, что наличие двух штампов приводит к резонансу в среде и к неединственности решения контактной задачи для двух штампов при некоторых значениях параметров. Дисперсионное уравнение, описывающее резонансные частоты ω , входит в знаменатели постоянных c_n , $n = 1, 2$, и имеет вид

$$m_2(a)m_3(-a) - m_2(-a)m_3(a) = 0.$$

Наличие изолированных резонансных частот подтверждает ранее полученное иным способом

утверждение о неединственности решений интегральных уравнений динамических контактных задач для двух абсолютно жестких штампов [24].

ВЫВОД

Построенное точное решение контактной задачи для двух абсолютно жестких штампов позволило не только подтвердить ранее полученный результат о неединственности решения динамических контактных задач для совокупности штампов на многослойной среде, но и получить дисперсионное уравнение для определения резонансных частот. Полученные результаты могут найти применение в разных областях инженерной практики. В сейсмологии этот результат показал, что сейсмическая напряженность может нарастать даже до того, как литосферные плиты сблизилась и вызвали стартовое землетрясение [20, 21]. Резонанс может побудить этот процесс колебательными воздействиями с возросшей амплитудой. Эти же процессы приводят в движение наночастицы при их самоорганизации и сборке [25].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект 22-21-00128.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., 1974. 456 с.
2. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
3. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
4. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.: Гостехиздат, 1949. 272 с.
5. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 256 с.
6. Papangelo A., Ciavarella M., Barber J.R. Fracture Mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws // Proc. Roy. Soc (London). 2015. A 471 Issue: 2180: Article Number: 20150271.
7. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem // I-Theory, II-Examples, Int. J. Solids Struct. 1998. 35. P. 2349–2378.
8. Zhou S., Gao X.L. Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2013. T. 64. S. 145–166.
9. Guler M.A., Erdogan F. The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings // Int. J. Mech. Sci 2007. V. 49. P. 161–182.

10. Ke L.-L., Wang Y.-S. Two-Dimensional Sliding Frictional Contact of Functionally Graded Materials // *Eur. J. Mech. A/Solids*. 2007. V. 26. P. 171–188.
11. Almqvist A., Sahlin F., Larsson R., Glavatskih S. On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces // *Tribology International*. 2007. V. 40 (4). P. 574–579.
12. Almqvist A. An lcp solution of the linear elastic contact mechanics problem. <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange> 2013. V. 43216.
13. Andersson L.E. Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction // *Appl. Math. Optim.* 2000. V. 42. P. 169–202.
14. Cocou M. A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2015. V. 22. P. 508–519.
15. Cocou M., Rocca R. Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion. *Math. Modelling and Num.* // *Analysis*. 2000. V. 34. P. 981–1001.
16. Kikuchi N., Oden J. Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods // *SIAM Studies in Applied Mathematics*. 1988. SIAM, Philadelphia.
17. Raous M., Cangermi L., Cocou M. A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 1999. V. 177. P. 383–399.
18. Shillor M., Sofonea M., Telega J.J. Models and Analysis of Quasistatic Contact // *Lect. Notes Phys.* 655. B., Heidelberg: Springer, 2004.
19. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Зарецкая М.В., Евдокимов В.С. Точное решение уравнения Винера-Хопфа на отрезке для контактных задач и задач теории трещин в слоистой среде // *Доклады РАН. Физика, технические науки*. 2023. Т. 509. С. 39–44.
20. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach // *Acta Mechanica*. 2018. V. 229. № 5. P. 2163–2175. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-2092-0>
21. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Earthquakes and cracks of new type complementing the Griffith-Irvin's crack. Ch. 2 // *Advanced Structured Materials* Editors H. Altenbach, V.A. Eremeyev, L.A. Igumnov. Springer. 2021. P. 11–26. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-54928-2>
22. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.
23. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Сингулярные решения контактных задач и блочные элементы // *ДАН*. 2017. Т. 475. № 1. С. 34–38. <https://doi.org/10.1134/S1028335817070011>
24. Бабешко В.А. О неединственности решений динамических смешанных задач для систем штампов // *ДАН СССР*. 1990. Т. 310. № 6. С. 1327–1334.
25. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. // Об одной механической модели самоорганизации наночастиц // *МТТ*. 2022. № 6. С. 12–18. <https://doi.org/10.31857/S0572329922060034>

ON CONTACT PROBLEMS FOR TWO STAMPS AND A NEW TYPE OF CRACK MODEL

Academician of the RAS V. A. Babeshko^{a,b}, O. V. Evdokimova^a, O. M. Babeshko^b,
M. V. Zaretskaya^b, and V. S. Evdokimov^b

^a*Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russia*

^b*Kuban State University, Krasnodar, Russia*

In this work, for the first time, an exact solution of the contact problem of interaction with a multilayer base of two semi-infinite stamps, the ends of which are parallel to each other, is constructed. Stamps are assumed to be absolutely rigid, and the distance between them can have any finite value. The task is an important stage in the algorithm for constructing models of a new type of crack in materials of different rheologies. The mechanism of destruction of the medium by cracks of a new type is radically different from the mechanism of destruction of the medium by Griffiths cracks, and has so far been poorly studied. Griffiths formed his cracks with a smooth border as a result of compression from the sides of an elliptical cavity in the plate. Cracks of a new type have a piecewise smooth border, resulting from the replacement of an ellipse with a rectangle compressed from the sides. The problem considered in the article can be considered as the result of the formation of a new type of crack with absolutely rigid banks and deformable lower boundary. Thanks to it, after the solution, it becomes possible to switch to deformable stamps and a crack of a new type in the rheological medium. The solution of this problem turned out to be possible due to the construction of exact solutions of the Wiener–Hopf integral equations on a finite segment. The paper shows how the solution of one of the previously unsolved problems allows us to investigate and solve exactly other problems, to identify previously unknown properties and resonances. As a result of constructing an exact solution to the problem, the fact that the solution of dynamic contact problems for stamp systems is not unique was confirmed and a dispersion equation for finding resonant frequencies was constructed.

Keywords: contact problem, multilayer media, stamps, Wiener–Hopf integral equation, infinite algebraic systems, resonances

УДК 532.517.45

КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫЙ ЛАГРАНЖИАН, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЙ n -ТОЧЕЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ПОЛЯ ВИХРЯ ВОЛНОВОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

© 2023 г. В. Н. Гребенёв^{1,*}, А. Н. Гришков^{2,**}

Представлено академиком РАН М.П. Федоруком 02.03.2023 г.

Поступило 07.03.2023 г.

После доработки 07.03.2023 г.

Принято к публикации 27.07.2023 г.

Методы геометрии полей Янга–Миллса калибровочных преобразований применяются к нахождению инвариантного лагранжиана в расслоении конфигурационного $2d$ пространства X турбулентного потока, определяемого n -точечной функцией плотности распределения вероятности f_n (ФПРВ). Рассматривается двумерная волновая оптическая турбулентность в случае обратного каскада переноса энергии турбулентности при внешнем воздействии в виде белого гауссова шума и крупномасштабного трения. n -Точечная ФПРВ поля вихря удовлетворяет f_n -уравнению из иерархии Ландгрена–Монина–Новикова (ЛМН), и найдены условия инвариантности уравнения при внешнем воздействии. Построен лагранжиан, инвариантный относительно подгруппы $H \subset G$ – группы калибровочных преобразований в расслоении пространства X , и сохраняющиеся токи.

Ключевые слова: оптическая турбулентность, калибровочные преобразования, уравнения Ландгрена–Монина–Новикова, инвариантный лагранжиан

DOI: 10.31857/S2686740023060081, **EDN:** HTSZXS

Работа посвящена исследованию [1, 2] о конформной инвариантности n -точечной статистики линий нулевой завихренности. В [1] методология, представленная в [3–5] для вычисления преобразований симметрии 1-точечной статистики, используется при доказательстве конформной инвариантности n -точечной ($n > 1$) статистики изолиний $x(l)$ в случае двумерной гидродинамической турбулентности в отсутствие внешнего воздействия и нулевой вязкости. В [2] результаты работы [1] применены к двумерной волновой оптической турбулентности, которая изучается в рамках гидродинамического приближения нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ) для весового поля скорости $\mathbf{u}$ [6] (оптический фазовый градиент волновой функции). Получен результат о конформной инвариантности n -точечной статистики (вероятностной меры) линии нулевой за-

вихренности $x(l, t)$ или контура кластера оптических вихрей. Граница кластеров вихрей наблюдается в [7], вне вихревого ядра поле скорости $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, где вариация плотности (оптическая интенсивность волновой функции) от фонового значения $\rho = 1$ незначительна. Эксперименты для двухмерных квантовых жидкостей (поляритонов) демонстрируют турбулентные состояния, появление обратного каскада в диссипативных квантовых жидкостях, совместно с формированием кластеров вихрей. Указана возможность определить вклад сжимаемой и несжимаемой компонент поля скорости $\mathbf{u} = \sqrt{\rho/2}\mathbf{v}$ с весовой функцией $\sqrt{\rho}$ (ρ , $\mathbf{v}$ – плотность и скорость квантовой жидкости) в кинетическую энергию турбулентности, необходимую для формирования кластеров вихрей благодаря прямому доступу к измерению фазы квантовой жидкости на основе аналогии между квантовыми жидкостями и оптическими системами. Результаты применены к тороидальным оптическим вихрям. В [8] представлены данные экспериментов формирования тороидальных структур лучей в оптике. Для обоснования привлекалось $3d$ -линейное уравнение Шрёдингера (параболическое приближение НУШ) при аномальной дисперсии групповой скорости волнового пакета Ψ ,

¹Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Новосибирск, Россия

²Институт математики и статистики, Университет Сан-Паулу, Сан-Паулу, Бразилия

*E-mail: vngrebenev@gmail.com

**E-mail: grishkov@ime.usp.br

которое является инвариантным при конформных преобразованиях комплексной прямой $\mathbb{C}$, где расположены два фазовых элемента Ψ . Уравнение используется в определенных приближениях, без учета нелинейных эффектов распространения оптических волн и взаимодействия с фоном случайных волн. Последнее ведет к тому, что обоснование подобных структур должно быть дано в рамках статистической теории с изучением симметрии статистических распределений поля завихренности. Расширение симметрии до конформной инвариантности – программа, предложенная А.М. Поляковым [9] для $2d$ -статистической теории гидродинамической турбулентности. Цель сообщения – найти условия инвариантности f_n -уравнению иерархии ЛМН при внешнем воздействии в виде белого гауссова шума и крупномасштабного трения. Построить инвариантный лагранжиан, тензор энергии-импульса и бесконечное число сохраняющихся токов в пространстве расслоений конфигурационного $2d$ -пространства X , что позволяет применить методы конформной теории поля [10] для статистической теории турбулентности.

1. ОСНОВНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

1.1. Статистическая модель

Статистические выборки рассматриваются на многообразии X , возможно несвязном и недифференцируемом. Статистические модели представляют собой совокупность вероятностных мер $\{\mu_x | x \in X\}$ (параметризованных переменной $x \in X$) или функций плотности распределения вероятностей, заданных на некотором пробном пространстве $\mathcal{M}$ наблюдаемых данных ω . Статистическая модель физической задачи состоит в выборе вероятностной меры. Рассмотрим n -точечную выборку $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) \in X$, которой соответствуют наблюдаемые данные $(\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(n)})$ и X как конфигурационное пространство $2d$ -турбулентного потока такое, что $\omega_{(i)}$ – значения компоненты завихренности $\Omega(x_{(i)}, t)$. Пространство состояний точки $x_{(i)}$ турбулентного потока – одномерное расслоение $\mathcal{M} \simeq R$ над X . Пространство состояний n -точечной выборки $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ – прямое произведение $\mathcal{M}^n = \mathcal{M} \times \dots \times \mathcal{M} \simeq R^n$. Рассмотрим семейство вероятностных мер $\{\mu_x | x \in X\}$ (параметризованных x) на $\mathcal{M}$ и стандартную меру Лебега ν , определенную в $\mathcal{M}$. Предполагается, что семейство мер $\{\mu_x\}$ является абсолютно непрерывным относительно меры ν . Тогда отображение $\mu_x \rightarrow (d\mu_x/d\nu)^{1/2}$, где $d\mu_x/d\nu$ – производная Радона–Никодима, определяет вложение семейства

$\{\mu_x | x \in X\}$ в единичную сферу S гильбертова пространства $L^2(\mathcal{M}, \nu)$. Производная $d\mu_x/d\nu = f$ является ФПРВ в S , вид которой будет приведен ниже для модели волновой оптической турбулентности.

1.2. Калибровочные преобразования

В соответствии с теорией калибровочных преобразований выбирается группа преобразований (группа Ли), действующая на многообразии X , и рассматриваем конформные отображения $2d$ -многообразия X , которые представляют собой бесконечномерную псевдо-группу Ли, реализованную на комплексной прямой $\mathbb{C}$, действие которой может быть поднято на расслоение $\mathcal{P} = P_{x_{(1)}} \times \dots \times P_{x_{(n)}}$ многообразия X с базой $x_{(j)}$, где слой $P_{x_{(j)}}$ – группа преобразований G_j . В дифференциальной геометрии такие расслоения называются главными.

1.3. Волновая оптическая турбулентность

Статистическое описание совокупности оптических вихрей основано на аналогии оптических и гидродинамических полей [12]. Имея гидродинамическое приближение НУШ, определяемое уравнением Эйлера идеальной несжимаемой жидкости, уравнения для многоточечных функций плотности распределения вероятностей f_n , $n = 1, \dots, \infty$, поля вихря w определяются иерархией ЛМН-уравнений. Мы интересуемся свойствами статистики, которые не зависят от свойств внешней случайной силы, т.е. инвариантностью, когда турбулентность реализуется на масштабах, превышающих радиус корреляции внешней силы или в обратных каскадах. Для моделирования нелинейного распространения оптических волн, в терминах скалярной волновой комплексной функцией $\Psi(X, Y, T)$ для огибающих, привлекается НУШ, которое в безразмерных переменных x, y, t и ψ имеет вид

$$i\psi_t + \Delta\psi + \psi - |\psi|^2\psi = 0. \quad (1)$$

Преобразование Маделунга [11]:

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{i\phi}, \quad |\psi|^2 = \rho,$$

где $|\psi|^2$ – оптическая интенсивность, ϕ – фаза волновой функции, устанавливает соответствие между оптическими и гидродинамическими полями, ρ и v удовлетворяют уравнениям Эйлера для невязкого политропного газа с показателем адиабаты $\gamma = 2$. Таким образом, оптическая интенсивность представляет собой плотность ρ , оптический фазовый градиент $\nabla\phi$ является скоростью v , нелинейное возмущение показателя рефракции соответствует давлению p , расстояние,

пройденное оптической волной, — время t . В точках $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i) \in R^2$, где $\psi = 0$, фаза ϕ неопределена, завихренность является распределением дельта-функции $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$. Переход к скорости $\mathbf{u} = \sqrt{\rho}\mathbf{v}$, как это сделано в [6], аппроксимируя $\mathbf{v}$ вблизи $\mathbf{x}_i$ вихревым решением Питаевского [13]) с весом $\sqrt{\rho}$, позволяет перейти к локализованному и быстро убывающему полю завихренности $\mathbf{w}$, которое все еще сингулярно при $r = 0 (r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|)$, но уже не является распределением дельта-функции. Гамильтониан НУШ

$$H = \int [|\nabla\psi|^2 + 1/2(|\nabla\psi|^2 - 1)^2] d\mathbf{x} \quad (2)$$

в гидродинамических переменных $\mathbf{u}$, ρ имеет вид

$$H = H_K + H_0, \quad H_K = \frac{1}{2} \int u^2 d\mathbf{x}, \quad (3)$$

$$H_0 = \frac{1}{2} \int [(\rho - 1)^2 + 2|\nabla\sqrt{\rho}|^2] d\mathbf{x}, \quad u = |\mathbf{u}|,$$

H_K совпадает с гамильтонианом идеальной несжимаемой жидкости. Как показано в [6], гамильтониан H_K является доминантным в разложении H на масштабах движения $\sim \xi$ радиуса ядра вихря, где значительно изменение давления ρ и $\rho \approx 1$ (фоновое значение плотности) для $r \gg \xi$. Дивергенция поля $\mathbf{u}$, т.е. $\gamma(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \mathbf{u}$, на этих масштабах движения есть величина $\gamma(\mathbf{x}) \ll 1$, см. [6]. Таким образом, гидродинамическое приближение НУШ на масштабах движения $\sim \xi$ определяется уравнением Эйлера идеальной несжимаемой жидкости.

1.4. Статистическое описание поля оптических вихрей

f_n -Уравнение иерархии ЛМН рассматривается при внешнем воздействии: белый гауссовый шум и крупномасштабное экмановское трение, что ведет к статистической стационарности ФПРВ. Используются следующие обозначения: $f_n(\mathbf{x}_{(1)}, \omega_{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{(n)}, \omega_{(n)})$ есть n -точечная ФПРВ, $n = 1, \dots$, $\omega_{(i)}$, $i = 1, \dots, n$ — значение компоненты завихренности $\Omega(\mathbf{x}_{(i)}, t) (\equiv \Omega_{(i)})$ в точке $\mathbf{x}_{(i)}$. Верхний индекс обозначает компоненту вектора. Используя $\mathbf{x}_{(i)}$, введем комплексные переменные $z_{(i)} = x_{(i)} + ix_{(i)}^2$, или $z_{(i)} = x_{(i)} + iy_{(i)}$. Произвольное f_n -уравнение иерархии ЛМН в комплексных переменных принимает вид [14]

$$\sum_{j=1}^n \text{Re}(\nabla_{z_{(j)}} \cdot [\langle {}^0 u(z_{(j)}, \bar{z}_{(j)}) | \{\omega_{(l)}, z_{(l)}, \bar{z}_{(l)}\} \rangle]) f_n = \mathcal{F}, \quad (4)$$

$$\mathcal{F} = \beta \frac{\partial}{\partial \omega_{(n)}} (\omega_{(n)} f_n) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n Q(x_{(n)} - x_{(j)}) \frac{\partial^2}{\partial \omega_{(j)}^2} f_n, \quad (5)$$

$$\beta = \text{const.}$$

Первое слагаемое — фрикционное демпфирование (трение Экмана), посредством которого энергия взаимодействия сдвигается в большие масштабы обратного каскада. Второе слагаемое — возбуждение системы белым гауссовым шумом с коротким радиусом корреляции, $Q(x_{(n)} - x_{(j)})$ — амплитуда внешнего воздействия, $j = 1, \dots, n$, где $n = 1, \dots, \infty$. Re — действительная часть комплексного числа. Вектор скорости равен

$$\langle {}^0 u(z_{(j)}, \bar{z}_{(j)}, t) | \{\omega_{(l)}, z_{(l)}, \bar{z}_{(l)}\} \rangle = \langle u(\mathbf{x}_{(j)}, t) | \omega_{(l)}, \mathbf{x}_{(l)} \rangle + i \langle v(\mathbf{x}_{(j)}, t) | \omega_{(l)}, \mathbf{x}_{(l)} \rangle, \quad (6)$$

$$\langle u(\mathbf{x}_{(j)}, t) | \{\omega_{(l)}, \mathbf{x}_{(l)}\} \rangle = \int d\mathbf{x}_{(n+1)} d\omega_{(n+1)} \omega_{(n+1)} \alpha^1(\mathbf{x}_{(j)} - \mathbf{x}_{(n+1)}) \times \quad (7)$$

$$\times \frac{f_{n+1}(\mathbf{x}_{(n+1)}, \omega_{(n+1)}, \{\mathbf{x}_{(l)}, \omega_{(l)}\}, t)}{f_n(\{\mathbf{x}_{(l)}, \omega_{(l)}\}, t)},$$

$$\langle v(\mathbf{x}_{(j)}, t) | \{\omega_{(l)}, \mathbf{x}_{(l)}\} \rangle = \int d\mathbf{x}_{(n+1)} d\omega_{(n+1)} \omega_{(n+1)} \alpha^2(\mathbf{x}_{(j)} - \mathbf{x}_{(n+1)}) \times \quad (8)$$

$$\times \frac{f_{n+1}(\mathbf{x}_{(n+1)}, \omega_{(n+1)}, \{\mathbf{x}_{(l)}, \omega_{(l)}\}, t)}{f_n(\{\mathbf{x}_{(l)}, \omega_{(l)}\}, t)}.$$

Класс ФПРВ определяется условиями нормализации, совпадения и разделения ФПРВ [14] на соответствующих масштабах.

2. КОНФОРМНО-КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТАТИСТИКИ ПОЛЯ ВИХРЯ

2.1. Инфинитезимальный оператор

Калибровочное преобразование — функция $g(\mathbf{x})$, принимающая значения в группе G , действующей в пространстве расслоений над X . Действие псевдо-группы Ли конформных преобразований X может быть поднято на расслоение $\mathcal{P}$ многообразия X с базой $\mathbf{x}_{(j)}$. Слой $P_{\mathbf{x}_{(j)}}$ — группа преобразований Ли G_j (алгеброй Ли $\mathfrak{g}_j$), определяемая инфинитезимальным оператором $S_{(j)}$, $j = 1, \dots, n$ [1]:

$$S_{(j)} = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x_{(1)}} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x_{(1)}^2} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial \omega_{(1)}} + \dots$$

$$\dots + \xi^{3n-2} \frac{\partial}{\partial x_{(n)}^1} + \xi^{3n-1} \frac{\partial}{\partial x_{(n)}^2} + \xi^{3n} \frac{\partial}{\partial \omega_{(n)}} + \eta_{(n)}^1 \frac{\partial}{\partial f_n} + \quad (9)$$

$$+ \xi^{3n+1} \frac{\partial}{\partial x_{(n+1)}^1} + \xi^{3n+2} \frac{\partial}{\partial x_{(n+1)}^2} +$$

$$+ \xi^{3n+3} \frac{\partial}{\partial \omega_{(n+1)}} + \eta_{(n)}^2 \frac{\partial}{\partial f_{n+1}},$$

j индексирует $\xi^{3n+1}, \xi^{3n+2}, \xi^{3n+3}$. Координаты инфинитезимального оператора определяются формулами

$$\xi^1 = c^{11}(\mathbf{x}_{(1)})x_{(1)}^1 + c^{12}(\mathbf{x}_{(1)})x_{(1)}^2 + d^1(\mathbf{x}_{(1)}), \quad (10)$$

$$\xi^2 = c^{21}(\mathbf{x}_{(1)})x_{(1)}^1 + c^{22}(\mathbf{x}_{(1)})x_{(1)}^2 + d^2(\mathbf{x}_{(1)}), \quad (11)$$

$$\xi^3 = [6c^{11}(\mathbf{x}_{(1)})]\omega_{(1)}, \quad (12)$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\xi^{3n-2} = c^{11}(\mathbf{x}_{(n)})x_{(n)}^1 + c^{12}(\mathbf{x}_{(n)})x_{(n)}^2 + d^1(\mathbf{x}_{(n)}), \quad (13)$$

$$\xi^{3n-1} = c^{21}(\mathbf{x}_{(n)})x_{(n)}^1 + c^{22}(\mathbf{x}_{(n)})x_{(n)}^2 + d^2(\mathbf{x}_{(n)}), \quad (14)$$

$$\xi^{3n} = [6c^{11}(\mathbf{x}_{(n)})]\omega_{(n)}, \quad (15)$$

$$\xi^{3n+1} = c^{11}(\mathbf{x}_{(j)})x_{(n+1)}^1 + c^{12}(\mathbf{x}_{(j)})x_{(n+1)}^2 + d^1(\mathbf{x}_{(j)}), \quad (16)$$

$$\xi^{3n+2} = c^{21}(\mathbf{x}_{(j)})x_{(n+1)}^1 + c^{22}(\mathbf{x}_{(j)})x_{(n+1)}^2 + d^2(\mathbf{x}_{(j)}), \quad (17)$$

$$\xi^{3n+3} = [2c^{11}(\mathbf{x}_{(j)})]\omega_{(n+1)}, \quad (18)$$

$k = 1, \dots, n$, c^{ls} удовлетворяют соотношениям $c^{11} = c^{22}$, $c^{12} = -c^{21}$, c^{11}, c^{12} и каждая пара $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{3n-2}, \xi^{3n-1}$ — произвольные сопряженные гармонические функции. Координаты $\eta_{(n)}^1$ и $\eta_{(n)}^2$ имеют вид

$$\eta_{(n)}^1 = a_{(n)}^{00}(t, \mathbf{x}_{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{(n)})f_n, \quad (19)$$

$$a_{(n)}^{00} = -\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_{(1)}^1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_{(1)}^2} + \dots + \frac{\partial \xi^{3n-2}}{\partial x_{(n)}^1} + \frac{\partial \xi^{3n-1}}{\partial x_{(n)}^2}\right), \quad (20)$$

$$\eta_{(n)}^2 = a_{(n+1)}^{00}(t, \mathbf{x}_{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{(n+1)})f_{(n+1)}, \quad (21)$$

$$a_{(n+1)}^{00} = -\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_{(1)}^1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x_{(1)}^2} + \frac{\partial \xi^4}{\partial x_{(2)}^1} + \frac{\partial \xi^5}{\partial x_{(2)}^2} + \dots + \frac{\partial \xi^{3n+1}}{\partial x_{(n+1)}^1} + \frac{\partial \xi^{3n+2}}{\partial x_{(n+1)}^2}\right). \quad (22)$$

Инфинитезимальный оператор $S_{(j)}$ порождает (псевдо-)группу Ли G_j ($G_j, G_k, j \neq k$ изоморфны), которая инвариантно преобразует уравнение характеристики (4) (см. [1])

$$\frac{d}{ds} \mathbf{X}_{n(j)}(s) = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}_{(j)}, t) | \omega_{(l)}, \mathbf{x}_{(l)} \rangle \Big|_{\{\omega_{(l)}, \mathbf{x}_{(l)}\} = \{\Omega_{(l)}(s), \mathbf{X}_{n(l)}(s)\}} \quad (23)$$

с нулевой завихренностью $\Omega_{(l)}(s) = 0$, $l = 1, \dots, n$, и уравнение (4) вдоль $\mathbf{X}_{n(j)}(s)$. Определим $G = G_1 \times \dots \times G_n$, как прямое произведение групп Ли G_j , G есть снова (псевдо-)группа Ли. Под дей-

ствием G -преобразований f_n -уравнение остается инвариантным только вдоль $\mathbf{X}_{n(j)}(s)$, $j = 1, \dots, n$, с $\Omega_{(l)}(s) = 0$. G сохраняет класс ФПРВ [2]. Далее, левая часть (4) вдоль $\mathbf{X}_{n(j)}(s)$ преобразуется как

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \operatorname{Re}(\nabla_{z_{(j)}}^* \cdot [\langle U^*(z_{(j)}^*, \bar{z}_{(j)}^*) | \{\omega_{(l)}^*, z_{(l)}^*, \bar{z}_{(l)}^*\} \rangle]) f_n^* = \\ & = \gamma \sum_{j=1}^n \operatorname{Re}(\nabla_{z_{(j)}} \cdot [\langle U(z_{(j)}, \bar{z}_{(j)}) | \{\omega_{(l)}, z_{(l)}, \bar{z}_{(l)}\} \rangle]) f_n, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\gamma = \prod_{j=1}^n |F_{z_{(j)}}|^{-2}, \quad (25)$$

соответственно первое слагаемое правой части (4)

$$\beta \frac{\partial}{\partial \omega_{(n)}^*} (\omega_{(n)}^* f_n^*) = \gamma \beta \frac{\partial}{\partial \omega_{(n)}} (\omega_{(n)} f_n). \quad (26)$$

Рассмотрим второе слагаемое в F в преобразованных переменных

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n Q^*(x_{(n)}^* - x_{(j)}^*) \frac{\partial^2}{\partial \omega_{(j)}^2} f_n^* = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n Q^*(x_{(n)}^* - x_{(j)}^*) |F_{z_{(j)}}|^{-4} \gamma \frac{\partial^2}{\partial \omega_{(j)}^2} f_n. \end{aligned} \quad (27)$$

Для инвариантности (4) требуется условие на преобразование $Q(x_{(n)} - x_{(j)})$, именно

$$Q^*(x_{(n)}^* - x_{(j)}^*) = |F_{z_{(j)}}|^4 Q(x_{(n)} - x_{(j)}). \quad (28)$$

Из вида $S_{(j)}$ следует, что инфинитезимальный оператор

$$\begin{aligned} T_{(j)} &= \xi^{3j-2} \frac{\partial}{\partial x_{(j)}^1} + \xi^{3j-1} \frac{\partial}{\partial x_{(j+1)}^2} + \eta_{(n)}^1 \frac{\partial}{\partial f_n}, \\ \eta_{(n)}^1 &= -2\xi_{x_{(j)}^1}^{3j-2}, \end{aligned} \quad (29)$$

порождает подалгебру Ли $\mathfrak{t}_j \subset \mathfrak{s}_j$ и (псевдо-)группу Ли H_j , действующую в $K_{\mathbf{x}_{(j)}} = C \times S$:

$$\begin{aligned} z_{(j)}^* &= F(z_{(j)}), \quad dz_{(j)}^* = F_{z_{(j)}} dz_{(j)}, \quad d\bar{z}_{(j)}^* = \bar{F}_{\bar{z}_{(j)}} d\bar{z}_{(j)}, \\ f_n^* &= |F_{z_{(j)}}|^{-2} f_n, \quad |F_{z_{(j)}}|^2 = F_{z_{(j)}} \bar{F}_{\bar{z}_{(j)}}, \end{aligned} \quad (30)$$

где $F = U + iV$, U, V — сопряженные гармонические функции, т.е. F — конформное отображение, $F_{z_{(j)}}$ — производная по $z_{(j)}$, параметр группы a опущен в обозначениях. Соответственно, $H = H_1 \times \dots \times H_n$ — (псевдо-)группа Ли в $\mathcal{H} = K_{\mathbf{x}_{(1)}} \times \dots \times K_{\mathbf{x}_{(n)}} \subset \mathcal{P}$. Найдем представление алгебры Ли $\mathfrak{t}_j$. В комплексных переменных оператор $T_{(j)}$ принимает вид

$$T_{(j)} = F(z_{(j)}) \frac{\partial}{\partial z_{(j)}} + \bar{F}(\bar{z}_{(j)}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{(j)}} - F_{z_{(j)}}(z_{(j)}) f_n \frac{\partial}{\partial f_n} - \bar{F}_{\bar{z}_{(j)}}(\bar{z}_{(j)}) f_n \frac{\partial}{\partial f_n}. \quad (31)$$

Преобразования $z_{(j)} \mapsto z_{(j)} + \epsilon(z_{(j)})$, $\bar{z}_{(j)} \mapsto \bar{z}_{(j)} + \bar{\epsilon}(\bar{z}_{(j)})$ определяют представление оператора $T_{(j)}$. Инфинитезимальные голоморфные преобразования $z_{(j)}$ и $\bar{z}_{(j)}$ имеют вид

$$\begin{aligned} z_{(j)}^* &= z_{(j)} + \epsilon(z_{(j)}) = z_{(j)} + F(z_{(j)}) \delta s, \\ \bar{z}_{(j)}^* &= \bar{z}_{(j)} + \bar{\epsilon}(\bar{z}_{(j)}) = \bar{z}_{(j)} + \bar{F}(\bar{z}_{(j)}) \delta s. \end{aligned} \quad (32)$$

Используем разложение в ряд Лорана

$$\epsilon(z_{(j)}) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n z_{(j)}^{n+1}, \quad \bar{\epsilon}(\bar{z}_{(j)}) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\epsilon}_n \bar{z}_{(j)}^{n+1}.$$

Каждая гармоника ряда порождает преобразование $z_{(j)} \rightarrow z_{(j)}^* \equiv z_{(j)} - \epsilon_n z_{(j)}^{n+1}$, $\bar{z}_{(j)} \rightarrow \bar{z}_{(j)}^* \equiv \bar{z}_{(j)} - \bar{\epsilon}_n \bar{z}_{(j)}^{n+1}$ и соответствующие инфинитезимальные операторы $l_n = -z_{(j)}^{n+1} \frac{d}{dz_{(j)}}$, $\bar{l}_n = -\bar{z}_{(j)}^{n+1} \frac{d}{d\bar{z}_{(j)}}$, где ϵ_n , $\bar{\epsilon}_n$ — параметры преобразования, которые являются базисом бесконечномерной конформной алгебры Ли (две копии алгебры Витта): базис оператора $T_{(j)}$ есть $k_n \oplus \bar{k}_n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} k_n &= -z_{(j)}^{n+1} \frac{d}{dz_{(j)}} - (n+1) z_{(j)}^n f_n \frac{d}{df_n}, \\ \bar{k}_n &= -\bar{z}_{(j)}^{n+1} \frac{d}{d\bar{z}_{(j)}} - (n+1) \bar{z}_{(j)}^n f_n \frac{d}{df_n}. \end{aligned} \quad (33)$$

Таким образом, алгебра, порожденная инфинитезимальным оператором $T_{(j)}$: $\mathfrak{t}_j \subset \mathfrak{s}_j$, — линейная оболочка над $\mathbb{C}$ базисных элементов $k_n \oplus \bar{k}_n$ и скобкой Ли: $[k_n, k_m]f = k_n k_m f - k_m k_n f = (n-m)k_{n+m}$, $[\bar{k}_n, \bar{k}_m]f = (n-m)\bar{k}_{n+m}f$, $[k_n, \bar{k}_m]f = 0$.

2.2. Лагранжиан

Инварианты групп преобразований — составная часть физического процесса. Геометрический объект, который стоит за процедурой измерения, — лагранжево многообразие с интегралом действия (лагранжиан) [15]. Центральные моменты или дифференциальные формы определяют собой дифференциальные инварианты допускаемой группы преобразований [15]. Рассмотрим слой $K_{x_{(j)}}$ и дифференциальную форму $dz_{(j)} d\bar{z}_{(j)} = 1/2 (dz_{(j)} \otimes d\bar{z}_{(j)} + d\bar{z}_{(j)} \otimes dz_{(j)})$ [16]. Простые вычисления показывают с учетом (30), что инфинитезимальный оператор $T_{(j)}$ порождает инвариант $dl_{(j)}^2 = f_n dz_{(j)} d\bar{z}_{(j)}$ (псевдо-)группы Ли H_j . Интеграл

действия траектории (лагранжиан) $\gamma_{(j)}$, параметризованной параметром $\tau_{(j)}$ (ее длиной в метрике $dl_{(j)}^2$), определяется формулой [16]

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(j)} &= \int_{\gamma_{(j)}} f_n^{-1} (\tau_{(j)x_{(j)}^1}^2 + \tau_{(j)x_{(j)}^2}^2) d\tau_{(j)}, \\ \tau_{(j)x_{(j)}^1}^2 + \tau_{(j)x_{(j)}^2}^2 &= f_n, \end{aligned} \quad (34)$$

или

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(j)} &= 4 \int_{\gamma_{(j)}} (f_n)^{-1} (z_{(j)} \bar{z}_{(j)}) \partial z_{(j)} \tau_{(j)}(z_{(j)}, \bar{z}_{(j)}) \times \\ &\quad \times \partial \bar{z}_{(j)} \tau_{(j)}(z_{(j)}, \bar{z}_{(j)}) d\tau_{(j)}. \end{aligned} \quad (35)$$

H_j инвариантно преобразует (34), следовательно, и (35). Для доказательства инвариантности (34) достаточно найти симметрии уравнения (уравнение эйконала) (см. (34))

$$\tau_{(j)x_{(j)}^1}^2 + \tau_{(j)x_{(j)}^2}^2 = f_n. \quad (36)$$

Наиболее широкая группа преобразований (36) — преобразования эквивалентности, которая вычислена в [17]. Подалгебра алгебры преобразований эквивалентности, оставляющая инвариантным $\tau_{(j)}$, имеет вид

$$\begin{aligned} Y_{(j)} &= \Phi(x_{(j)}^1, x_{(j)}^2) \frac{\partial}{\partial x_{(j)}^1} + \Psi(x_{(j)}^1, x_{(j)}^2) \frac{\partial}{\partial x_{(j)}^2} - \\ &\quad - 2\Phi_{x_{(j)}^1}(x_{(j)}^1, x_{(j)}^2) f_n \frac{\partial}{\partial f_n}, \end{aligned} \quad (37)$$

где Φ , Ψ — произвольные сопряженные функции. Таким образом, $T_{(j)}$, $Y_{(j)}$ совпадают.

Для лагранжиана (34) тензор энергии-импульса [16] имеет компоненты

$$\begin{aligned} T_{11} &= 2\tau_{(j)x_{(j)}^1}^2 - f_n, \quad T_{22} = 2\tau_{(j)x_{(j)}^2}^2 - f_n, \\ T_{12} &= T_{21} = 2\tau_{(j)x_{(j)}^1} \tau_{(j)x_{(j)}^2}. \end{aligned} \quad (38)$$

$T = \{T_{ik}\}$ — бесследовый тензор, так как $T_{11} + T_{22} = 2(\tau_{(j)x_{(j)}^1}^2 + \tau_{(j)x_{(j)}^2}^2 - f_n) = 0$. Следовательно, $T_{z_{(j)}\bar{z}_{(j)}} = T_{\bar{z}_{(j)}z_{(j)}} = 0$, что подразумевает $\partial_{\bar{z}_{(j)}} T_{z_{(j)}\bar{z}_{(j)}} = \partial_{z_{(j)}} T_{\bar{z}_{(j)}z_{(j)}} = 0$. Следовательно, тензор имеет только две ненулевых компоненты: $T(z_{(j)}) = T_{z_{(j)}z_{(j)}}(z_{(j)}) = 1/4(T_{11} - 2iT_{12} - T_{22})$ и $\bar{T}(\bar{z}_{(j)}) = T_{\bar{z}_{(j)}\bar{z}_{(j)}}(\bar{z}_{(j)}) = 1/4(T_{11} + 2iT_{12} - T_{22})$. Кроме того, $T_{z_{(j)}z_{(j)}} = (\partial_{z_{(j)}} \tau_{(j)})^2$ и $T_{\bar{z}_{(j)}\bar{z}_{(j)}} = (\partial_{\bar{z}_{(j)}} \tau_{(j)})^2$. Как результат, H_j сохраняет бесконечное число токов $j_{z_{(j)}} = T_{z_{(j)}z_{(j)}} \epsilon_n z_{(j)}^{n+1}$ и $j_{\bar{z}_{(j)}} = T_{\bar{z}_{(j)}\bar{z}_{(j)}} \bar{\epsilon}_n \bar{z}_{(j)}^{n+1}$.

Таким образом, лагранжиан и ток на расслоении $\mathcal{H}$ определяются как векторы $\mathbf{E} = (\mathcal{E}_{(1)}, \dots, \mathcal{E}_{(n)})$ и $\mathbf{j} = (j_{z_{(1)}}, \dots, j_{z_{(n)}})$, $\bar{\mathbf{j}} = (j_{\bar{z}_{(1)}}, \dots, j_{\bar{z}_{(n)}})$, $n = 1, \dots, \infty$. Псевдо-группа Ли H инвариантно

преобразует $\mathbf{E}$ и сохраняет токи. H_j допускает интерпретацию как преобразование эквивалентности уравнения эйконала (36), сохраняющее длину луча.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00287, <https://rscf.ru/project/22-11-00287/>. А.Н. Гришков поддержан FAPESP (Brazil), проект 2021/09845-0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гребенев В.Н., Гришков А.Н., Оберлак М. Симметрии уравнений Лангрена—Монина—Новикова для распределения вероятности поля вихря // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2023. Т. 508. № 1. С. 42–47.
2. Гребенев В.Н., Гришков А.Н., Медведев С.Б., Федорук М.П. Гидродинамическое приближение для двумерной оптической турбулентности: симметрии статистических распределений // Квантовая электроника. 2022. Т. 52. № 11. С. 1023–1030.
3. Grebenev V.N., Wacławczyk M., Oberlack M. Conformal invariance of the zero-vorticity Lagrangian path in 2D turbulence // J. Phys. A: Math. Theor. 2019. V. 50. P. 335501.
4. Wacławczyk M., Grebenev V.N., Oberlack M. Conformal invariance of characteristic lines in a class of hydrodynamic models // Symmetry. 2020. V. 12. P. 1482.
5. Wacławczyk M., Grebenev V.N., Oberlack M. Conformal invariance of the 1-point statistics of the zero-isolines of $2d$ scalar fields in inverse turbulent cascades // Phys. Rev. Fluids. 2021. V. 6. P. 084610.
6. Bustamante M., Nazarenko S.V. Derivation of the Biot-Savart equation from the nonlinear Schrödinger equation // Phys. Rev. E. 2015. V. 92. P. 052912.
7. Panico R., Comaron P., Matuszewski M., Lanotte A.S., Trypogeorgos D., Gigli G., De Giorgi M., Ardiszone V., Sanvitto D., Ballarini D. // Onset of vortex clustering and inverse energy cascade in dissipative quantum fluids // arXiv:2205.02925 [cond-mat.quant-gas] 2022.
8. Wan C., Cao Q., Chen J., Chong A., Zhan Q. Toroidal vortices of light // Nature Photonics. 2022. V. 16. P. 519–522.
9. Polyakov A.M. The theory of turbulence in two dimensions // Nuclear Phys. B. 1993. V. 396. P. 367–385.
10. Belavin A.A., Polyakov A.M., Zamolodchikov A.A. Conformal field theory // Nuclear Phys. B. 1984. V. 241. P. 333–380.
11. Madelung E. Quantentheorie in hydrodynamischer form // Zeitschrift für Physik. 1927. V. 40. P. 322–326.
12. Bortolozzo U., Laurie J., Nazarenko S., Residori S. Optical wave turbulence and the condensation of light // J. Optical Soc. America B. 2009. V. 26 (12). P. 2280–2284.
13. Pitaevskii L. Vortex Lines in an imperfect Bose gas // Sov. Phys. JETP. 1961. V. 13 (2). P. 451–454.
14. Friedrich R., Daitche A., Kamps O., Lülff J., Michel Voßkuhle M., Wilczek M. The Lundgren-Monin-Novikov hierarchy: Kinetic equations for turbulence // C. R. Physique. 2012. V. 13. P. 929–953.
15. Lychagin V.V. Contact geometry. Nonlinear PDEs, their geometry, and applications. Tutor. Sch. Workshop Math. Sci., 3–52 Burkhäuser/Springer, Cham. 2019.
16. Dubrovin B.A., Fomenko T.A., Novikov S.P. Modern Geometry—Methods and Applications. Pt. 1. B.: Springer-Verlag, 1984.
17. Меграбов А.Г. Групповое расслоение и представление Лакса // ДАН. 2003. Т. 390. № 3. С. 325–329.

A GAUGE-INVARIANT LAGRANGIAN DETERMINED BY THE n -POINT PROBABILITY DENSITY FUNCTION OF VORTICITY FIELD OF THE WAVE OPTICAL TURBULENCE

V. N. Grebenev^a and A. N. Grishkov^a

^aFederal Research Center for Information and Computational Technologies, Novosibirsk, Russia

^bInstitute of Mathematics and Statistics, The University of Sao Paulo, Sao Paulo, Brazil

Presented by Academician of the RAS M.P. Fedoruk

The geometry methods for Yang–Mills fields of the gauge transformations are applied to finding an invariant Lagrangian in fiber bundle of the configuration $2d$ space X of the turbulent flow defined by the n -point probability density function f_n (PDF). The two-dimensional wave optical turbulence is considered in the case of the inverse cascade of energy. The n -point PDF of the vorticity field satisfies the f_n -equation from the Lundgren–Monin–Novikov (LMN) hierarchy. The basic result reads: we construct the Lagrangian which is invariant under a subgroup $H \subset G$ — the group of the gauge transformations in fiber bundles of the space X and the conserved currents.

Keywords: optical turbulence, Lundgren–Monin–Novikov equations, gage transformation, Lagrangian, conserved currents

УДК 539.3

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

© 2023 г. М. Д. Коваленко^{1,*}, А. П. Кержаев², И. В. Меньшова^{2,3}, Ю. Н. Карнет¹

Представлено академиком РАН А.М. Липановым 12.04.2023 г.

Поступило 26.04.2023 г.

После доработки 26.04.2023 г.

Принято к публикации 27.07.2023 г.

Предложен метод построения точных решений краевых задач теории упругости в прямоугольнике с ребрами жесткости, расположенными внутри области (неоднородная задача). Решения представляются в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля, коэффициенты которых определяются в явном виде. Метод базируется на соотношении ортогональности Папковича и развитой авторами теории разложений по собственным функциям Папковича–Фадля в однородных краевых задачах теории упругости в прямоугольнике (бигармоническая проблема). Последовательность решения продемонстрирована на примере четно-симметричной задачи для прямоугольника, стороны которого свободны, а внешняя нагрузка действует вдоль ребра жесткости, расположенного на оси симметрии прямоугольника.

Ключевые слова: неоднородная задача, прямоугольник, собственные функции Папковича–Фадля, соотношение ортогональности Папковича, точные решения

DOI: 10.31857/S268674002306010X, EDN: HTMBLZ

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассмотрим прямоугольник $\{R : |x| \leq d, |y| \leq 1\}$ со свободными сторонами. Вдоль его вертикальной оси y прикреплено ребро жесткости, к которому приложена нагрузка, действующая вдоль ребра (плоское напряженное состояние). Последовательность решения задачи следующая. Сначала рассмотрим неоднородную четно-симметричную краевую задачу для бесконечной полосы со свободными сторонами, в которой внешняя нагрузка действует вдоль оси y . Решение этой задачи записывается в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля, коэффициенты которых определяются в замкнутом виде с помощью соотношения ортогональности Папковича [1–8]. Затем из условия равновесия элементарного участка ребра с помощью разложений в ряд Лагранжа по собственным функциям Папкови-

ча–Фадля [9] определим контактные напряжения между ребром жесткости и пластиной, которые подставим в решение неоднородной задачи для полосы. В результате найдем решение для полосы с ребром жесткости. Наконец, суперпозицией этого решения и решения однородной четно-симметричной задачи для прямоугольника со свободными горизонтальными сторонами и заданными на его торцах нормальными и касательными напряжениями [10] удовлетворим требуемым граничным условиям на торцах прямоугольника и тем самым получим решение рассматриваемой задачи. Таким образом, решения на каждом из трех этапов представляются рядами по собственным функциям Папковича–Фадля, коэффициенты которых определяются в явном виде. Благодаря этому удастся построить точное решение задачи.

РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ

Согласно [8] решение неоднородной задачи в полосе $\{|x| < \infty, |y| \leq 1\}$ можно представить в виде $(\operatorname{Re} \lambda_k < 0)$

$$\sigma_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}[A_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}],$$

¹Институт прикладной механики

Российской академии наук, Москва, Россия

²Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики

Российской академии наук, Москва, Россия

³Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*E-mail: kov08@inbox.ru

$$\begin{aligned}\sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}[A_k s_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}], \\ \tau_{xy}(x, y) &= \operatorname{sign} x \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}[A_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}], \\ U(x, y) &= \operatorname{sign} x \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}[A_k \xi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}], \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}[A_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}].\end{aligned}\quad (1)$$

В формулах (1) $U(x, y) = Gu(x, y)$, $V(x, y) = Gv(x, y)$, где G — модуль сдвига, а $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — продольное и поперечное перемещения соответственно; A_k — неизвестные коэффициенты разложений; λ_k — комплексные нули целой функции экспоненциального типа [11]

$$L(\lambda) = \lambda + \sin \lambda \cos \lambda. \quad (2)$$

Функция $L(\lambda)$ (кроме нулевого) имеет бесконечный набор четверок комплексных нулей $\pm \lambda_k, \pm \bar{\lambda}_k$ ($k = 1, 2, \dots$).

Функции

$$\begin{aligned}s_x(\lambda_k, y) &= (1 + \nu) \lambda_k \{(\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y - \\ &\quad - \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y\}, \\ s_y(\lambda_k, y) &= (1 + \nu) \lambda_k \{(\sin \lambda_k + \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y + \\ &\quad + \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y\}, \\ t_{xy}(\lambda_k, y) &= (1 + \nu) \lambda_k^2 (\cos \lambda_k \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y), \\ \xi(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1 - \nu}{2} \sin \lambda_k - \frac{1 + \nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k y - \\ &\quad - \frac{1 + \nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y, \\ \chi(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1 + \nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k + \sin \lambda_k \right) \sin \lambda_k y - \\ &\quad - \frac{1 + \nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y\end{aligned}\quad (3)$$

называются собственными функциями Папковича—Фадля, соответствующими краевой задаче в бесконечной полосе со свободными сторонами, ν — коэффициент Пуассона.

Коэффициенты A_k определяются с помощью соотношения ортогональности Папковича [8]:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 [s_x(\lambda_k, y) \xi(\lambda_m, y) - \chi(\lambda_k, y) t_{xy}(\lambda_m, y)] dy = \\ = \begin{cases} 2(1 + \nu) \lambda_m^3 & (\lambda_k = \lambda_m), \\ 0 & (\lambda_k \neq \lambda_m). \end{cases}\end{aligned}\quad (4)$$

В этой формуле числа λ_k и сопряженные с ними $\bar{\lambda}_k$ считаются различными. Поэтому при $\lambda_m = \bar{\lambda}_k$ интегралы в (4) будут равны нулю. Умно-

жим левую и правую части (4) последовательно на A_m и $\bar{A}_m$, затем сложим получившиеся выражения и просуммируем их по индексу $m = 1, 2, \dots$. Обозначив через

$$\begin{aligned}U(y) &= \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \xi(\lambda_m, y) + \bar{A}_m \xi(\bar{\lambda}_m, y)], \\ \tau(y) &= \sum_{m=1}^{\infty} [A_m t_{xy}(\lambda_m, y) + \bar{A}_m t_{xy}(\bar{\lambda}_m, y)],\end{aligned}\quad (5)$$

на основании соотношения ортогональности (4) найдем

$$A_k = \frac{1}{2(1 + \nu) \lambda_k^3} \int_{-1}^1 [s_x(\lambda_k, y) U(y) - \chi(\lambda_k, y) \tau(y)] dy \quad (k \geq 1).$$

Формулы для комплексно сопряженных чисел $\bar{A}_k$ получаются из (6) при замене λ_k на $\bar{\lambda}_k$. Из условия симметрии $U(y) = 0$. Поэтому получим

$$A_k = \frac{-1}{2(1 + \nu) \lambda_k^3} \int_{-1}^1 \chi(\lambda_k, y) \tau(y) dy. \quad (7)$$

Пусть $Y(y) \delta(x)$ — внешняя нагрузка, действующая вдоль оси y в плоскости пластины, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака [12]. Так как задача четно-симметрична, то $Y(y)$ нечетна. Можно показать, что

$$Y(y) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}[A_k t_{xy}(\lambda_k, y)] = -2\tau(y) \quad (8)$$

есть взятый с обратным знаком скачок касательных напряжений при $x = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ МЕЖДУ РЕБРОМ ЖЕСТКОСТИ И ПОЛОСОЙ

Рассмотрим уравнение равновесия элементарного участка ребра

$$fd\sigma(y) - 2r\tau(y)dy + q(y)dy = 0. \quad (9)$$

Здесь f — площадь поперечного сечения ребра, $\sigma(y)$ — напряжение в ребре, $\tau(y)$ — касательные напряжения на стыке ребра и пластины, ρ — толщина пластины, $q(y)$ — нагрузка, приложенная к ребру жесткости вдоль его оси (нечетная функция).

Обозначим через E_1 модуль упругости ребра. Воспользовавшись законом Гука для ребра и считая перемещения в ребре жесткости равными перемещениям в пластине при $x = 0$, а $\tau(y) = \tau_{xy}(0+, y)$, из (9) получим уравнение (штрихом обозначена производная по y)

$$DV''(0, y) - \tau_{xy}(0+, y) + \frac{q(y)}{2\rho} = 0, \quad D = \frac{E_1 f}{2G\rho}. \quad (10)$$

Между собственными функциями Папковича–Фадля имеется следующая связь, являющаяся следствием закона Гука и уравнений равновесия в напряжениях [13]:

$$s'_y(\lambda_k, y) = \frac{2}{1-\nu} [\chi''(\lambda_k, y) + \nu \lambda_k \xi'(\lambda_k, y)], \quad (11)$$

$$t_{xy}(\lambda_k, y) = -\frac{1}{\lambda_k} s'_y(\lambda_k, y). \quad (12)$$

Подставляя (11) в (12), приходим к формуле

$$t_{xy}(\lambda_k, y) = -\frac{2}{1-\nu} \left[\frac{\chi''(\lambda_k, y)}{\lambda_k} + \nu \xi'(\lambda_k, y) \right]. \quad (13)$$

Умножим (13) на некоторые коэффициенты a_k и просуммируем получившиеся ряды.

Из условия симметрии задачи

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(a_k \xi'(\lambda_k, y)) = 0,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(a_k t_{xy}(\lambda_k, y)) &= \\ &= -\frac{2}{1-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(a_k \frac{\chi''(\lambda_k, y)}{\lambda_k} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Подставив (14) в (10), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[a_k \left(D\lambda_k + \frac{2}{1-\nu} \right) \frac{\chi''(\lambda_k, y)}{\lambda_k} \right] = -\frac{2}{1-\nu} \frac{q(y)}{2\rho}, \quad (15)$$

или (в соответствии с (14))

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[a_k \left(D\lambda_k + \frac{2}{1-\nu} \right) t_{xy}(\lambda_k, y) \right] = \frac{2}{1-\nu} \frac{q(y)}{2\rho}. \quad (16)$$

Ряды (15), (16) называются рядами Лагранжа [9] по собственным функциям Папковича–Фадля $\chi''(\lambda_k, y)$ и $t_{xy}(\lambda_k, y)$ ($k = 1, 2, \dots$) соответственно.

Ряды Лагранжа можно рассматривать как обобщения тригонометрических рядов Фурье. Теория разложений в ряды Лагранжа по системам собственных функций Папковича–Фадля базируется на преобразовании Бореля [11] в классе квазицелых функций экспоненциального типа.

Следуя [9], из (16) для каждого номера k получим

$$\begin{aligned} a_k \left(D\lambda_k + \frac{2}{1-\nu} \right) \lambda_k M_k &= \frac{2}{1-\nu} \int_{-1}^1 \frac{q(y)}{2\rho} t_k(y) dy, \\ M_k &= \cos^2 \lambda_k, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$t_k(y) = -\frac{\sin \lambda_k y}{2(1+\nu) \sin \lambda_k} \quad (18)$$

суть финитные части функций, биортогональных к собственным функциям Папковича–Фадля $t_{xy}(\lambda_k, y)$ [9]. Формулу для коэффициентов a_k представим в виде

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{q_k}{2\rho(1-\nu^2) \lambda_k M_k \sin \lambda_k} \left(D\lambda_k + \frac{2}{1-\nu} \right)^{-1}, \\ q_k &= \int_{-1}^1 q(y) \sin \lambda_k y dy. \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь в формуле (7) надо принять

$$\tau(y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(a_k t_{xy}(\lambda_k, y)). \quad (20)$$

РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Согласно [10] решение однородной четно-симметричной задачи для прямоугольника R в том случае, когда его стороны $y = \pm 1$ свободны, на торцах $x = \pm d$ нормальные напряжения равны $S(y)$, а касательные равны нулю, имеет вид

$$\begin{aligned} U^s(x, y) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \lambda_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\}, \\ V^s(x, y) &= \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\}, \\ \sigma_x^s(x, y) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\}, \\ \sigma_y^s(x, y) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\}, \\ \tau_{xy}^s(x, y) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

где коэффициенты Лагранжа [9]

$$\sigma_k = \int_{-1}^1 S(y) x_k(y) dy, \quad x_k(y) = \frac{\cos \lambda_k y}{2(1+\nu) \lambda_k \sin \lambda_k}. \quad (22)$$

Из (21) видно, что при $x = \pm d$

$$\sigma_x^s(d, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \right), \quad \tau_{xy}^s(d, y) = 0. \quad (23)$$

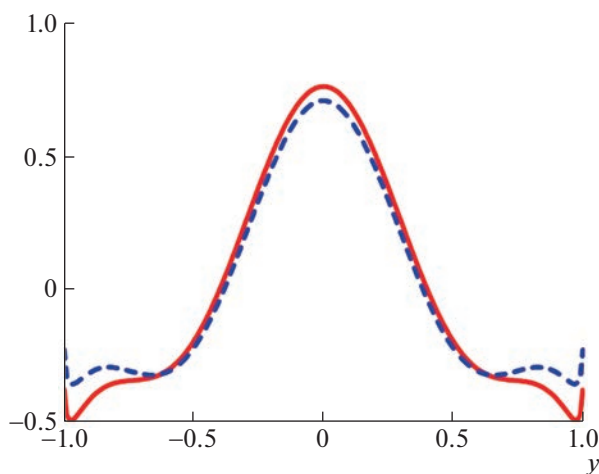


Рис. 1. Распределение нормальных напряжений вдоль оси y в прямоугольнике (сплошная кривая) и в полосе (штриховая).

Когда на торцах $x = \pm d$ заданы касательные напряжения $\pm T(y)$, а нормальные равны нулю, решение будет таким:

$$\begin{aligned}
 U^I(x, y) &= \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left(\tau_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\}, \\
 V^I(x, y) &= \\
 &= - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left(\tau_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\}, \\
 \sigma_x^I(x, y) &= \\
 &= - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left(\tau_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\}, \quad (24)
 \end{aligned}$$

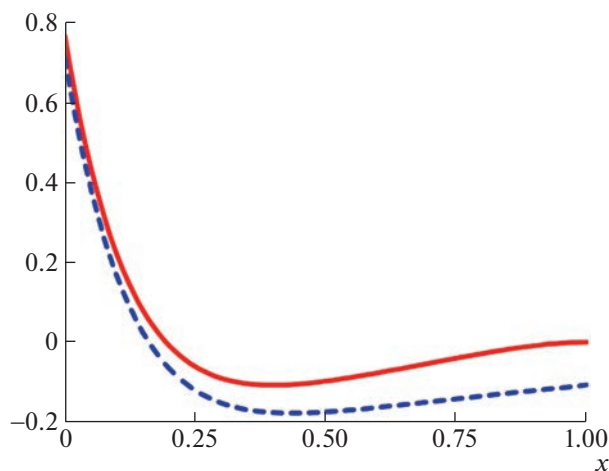


Рис. 2. Распределение нормальных напряжений вдоль оси x в прямоугольнике (сплошная кривая) и в полосе (штриховая).

$$\begin{aligned}
 \sigma_y^I(x, y) &= \\
 &= - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left(\tau_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k^2 \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{xy}^I(x, y) &= \\
 &= - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left(\tau_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\},
 \end{aligned}$$

где коэффициенты Лагранжа

$$\tau_k = \int_{-1}^1 T(y) t_k(y) dy. \quad (25)$$

Из (24) видно, что

$$\sigma_x^I(d, y) = 0, \quad \tau_{xy}^I(d, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(\tau_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right). \quad (26)$$

Примем в формулах (1) $x = d$ и будем считать, что при $x = d$

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^S(d, y) + \sigma_x^I(d, y) &= -\sigma_x(d, y), \\
 \tau_{xy}^S(d, y) + \tau_{xy}^I(d, y) &= -\tau_{xy}(d, y).
 \end{aligned} \quad (27)$$

Учитывая (23), (26), отсюда получим

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \right\} &= - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} [A_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k d}], \\
 \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right\} &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} [A_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k d}].
 \end{aligned} \quad (28)$$

Из равенства рядов Лагранжа (28) следует равенство их коэффициентов [9]:

$$\sigma_k = -A_k M_k e^{\lambda_k d}, \quad \tau_k = A_k M_k \lambda_k e^{\lambda_k d}. \quad (29)$$

Подставляя (29) в формулы (21), (24) и складывая их затем с соответствующими формулами (1),

получим решение рассматриваемой задачи для свободного прямоугольника с ребром жесткости.

Рассмотрим пример. Пусть $q(y) = \sin \pi y$. В этом случае

$$a_k = \frac{\pi}{\rho(1 - \nu^2)\lambda_k M_k(\lambda_k^2 - \pi^2)} \left(D\lambda_k + \frac{2}{1 - \nu} \right)^{-1}. \quad (30)$$

По формулам (30), (20), (7) найдем неизвестные коэффициенты A_k , входящие в решение задачи. Ниже для иллюстрации приведены два рисунка, на которых показаны распределения нормальных напряжений $\sigma_x(x, y)$ в прямоугольнике (сплошные кривые) и в полосе (штриховые). На рис. 1 напряжения действуют вдоль ребра жесткости $\{x = 0, |y| \leq 1\}$, на рис. 2 — вдоль горизонтальной оси $\{0 \leq x \leq d, y = 0\}$. При вычислениях считалось, что $\nu = 0.3$, $d = 1$, $D = 0.5$, $\rho = 1$. Когда $d \geq 2$, решения для прямоугольника и полосы практически совпадают.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В том случае, когда горизонтальные стороны прямоугольника жестко зашлемлены, достаточно в полученных формулах заменить собственные числа и собственные функции Папковича—Фадля на отвечающие краевой задаче для полосы с зашлемленными сторонами. К сожалению, для других типов однородных граничных условий (например, когда на сторонах полосы имеются ребра жесткости, работающие на растяжение-сжатие и/или изгиб) воспользоваться каким-либо из известных соотношений ортогональности Папковича невозможно. Это связано с тем, что метод их построения, независимо от системы координат (прямоугольная [3, 7], полярная [2], цилиндрическая [4–6]), всегда базируется на переходе к самосопряженной краевой задаче в пространстве вектор-функций [14]. Получить соотношение ортогональности, не зависящее от вида однородных граничных условий на сторонах полосы, можно, опираясь на теорию целых функций экспоненциального типа [11] и теорему Пэли—Винера [15]. Отметим, что задачи подобного рода, как правило, решаются приближенно-аналитически или численно [16–18].

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование М.Д. Коваленко и Ю.Н. Карнет выполнено в рамках государственного задания ИПРИМ РАН. Исследование А.П. Кержаева и И.В. Меньшовой выполнено в рамках государственного задания ИТПЗ РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Папкович П.Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы // ДАН СССР. 1940. Т. 27. № 4. С. 335–339.
2. Гринберг Г.А. О методе, предложенном П.Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях // ПММ. 1953. Т. 17. № 2. С. 211–228.
3. Прокопов В.К. О соотношении обобщенной ортогональности П.Ф. Папковича для прямоугольной пластинки // ПММ. 1964. Т. 28. № 2. С. 351–355.
4. Little R.W., Childs S.B. Elastostatic boundary region problem in solid cylinders // Quart. Appl. Math. 1967. V. 25. № 3. P. 261–274.
5. Flügge W., Kelkar V.S. The problem of an elastic circular cylinder // Int. J. Solids Struct. 1968. V. 4. № 4. P. 397–420.
6. Little R.W. Semi-infinite strip problem with built-in edges // J. Appl. Mech. 1969. V. 36. № 2. P. 320–323.
7. Костарев А.В., Прокопов В.К. Соотношение расширенной ортогональности для некоторых задач теории упругости // ПММ. 1970. Т. 34. № 5. С. 945–951.
8. Коваленко М.Д., Шуляковская Т.Д. Разложения по функциям Фадля—Папковича в полосе. Основы теории // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 5. С. 78–98.
9. Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Шуляковская Т.Д. Разложения по функциям Фадля—Папковича. Примеры решений в полуполосе // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 121–144.
10. Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Кержаев А.П., Шуляковская Т.Д. Некоторые решения теории упругости для прямоугольника // ПММ. 2021. Т. 85. № 3. С. 370–382.
11. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956. 632 с.
12. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 518 с.
13. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
14. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Физматлит, 2010. 528 с.
15. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964. 268 с.
16. Бабурченков М.Ф., Бородачев Н.М. Бесконечные системы в задачах для подкрепленной прямоугольной пластины // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 4. С. 77–93.
17. Саламатова В.Ю. Взаимодействие деформируемой накладки с напряженной полосой // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 1. С. 67–72.
18. Vaysfel'd N., Popov G., Reut V. The axisymmetric contact interaction of an infinite elastic plate with an absolutely rigid inclusion // Acta Mech. 2015. V. 226. P. 797–810.

EXACT SOLUTIONS TO INHOMOGENEOUS BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY IN A RECTANGLE

M. D. Kovalenko^a, A. P. Kerzhaev^b, I. V. Menshova^{b,c}, and Yu. N. Karnet^a

^a*Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^c*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.M. Lipanov

A method is proposed for constructing exact solutions to boundary value problems of the theory of elasticity in a rectangle with stiffeners located inside the region (an inhomogeneous problem). The solutions are represented by series in Papkovich–Fadle eigenfunctions, the coefficients of which are determined explicitly. The method is based on the Papkovich orthogonality relation and the theory of expansions in Papkovich–Fadle eigenfunctions developed by the authors in homogeneous boundary value problems of the theory of elasticity in a rectangle (the biharmonic problem). The solution sequence is demonstrated with the example of an even-symmetric problem for a rectangle the sides of which are free, and an external load acts along the stiffener located on the axis of symmetry of the rectangle.

Keywords: inhomogeneous problem, rectangle, Papkovich–Fadle eigenfunctions, Papkovich orthogonality relation, exact solutions

УДК 539.376

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОЛЗУЧЕСТИ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

© 2023 г. Член-корреспондент РАН Л. В. Ковтаниук^{1,2,*}

Поступило 02.06.2023 г.

После доработки 02.06.2023 г.

Принято к публикации 28.07.2023 г.

С использованием математической модели больших деформаций материалов с упругими, пластическими и вязкими свойствами получено аналитическое решение о деформировании в условиях ползучести пробки в круглой трубе при изменяющемся перепаде давления. Рассмотрены движение с учетом скольжения материала в окрестности жесткой стенки трубы и его деформирование при растущем, постоянном и уменьшающемся давлении. Вычислены перемещения, обратимые и необратимые деформации, напряжения на всех этапах деформирования, включая остаточные деформации и напряжения при полной разгрузке.

Ключевые слова: большие деформации, ползучесть, упругость, остаточные напряжения

DOI: 10.31857/S2686740023060111, **EDN:** XPANHR

Задачи определения напряженно-деформированного состояния элементов конструкций со сложными реологическими свойствами в условиях термомеханических воздействий являются актуальными задачами современной авиационной, аэрокосмической, энергетической промышленности. Анализ поведения материалов требует одновременного учета их упругих, пластических и вязких свойств. Технологии холодной формовки и обтяжки, которые по ряду параметров являются наиболее перспективными технологиями изготовления крупногабаритных элементов конструкций, используют свойство ползучести материалов [1, 2], а точность в геометрии и в уровне остаточных напряжений определяющим образом зависит от упругого отклика материала изделия в процессе снятия оснастки (в процессах разгрузки). При расчетах элементов конструкций на ползучесть выбор определяющих законов из множества существующих является непростой задачей. Множество таких соотношений для одномерных, плоских и пространственных задач содержится в обзорах [3–5]. Большинство задач, описывающих процессы ползучести, являются

геометрически и физически нелинейными. Поэтому проинтегрировать определяющие соотношения или предложить аналитические методы их решения удается только в исключительных частных случаях [6, 7]. Здесь получим решение краевой задачи о накоплении деформаций ползучести, используя закон Нортон, в рамках теории больших деформаций при учете упругих свойств материалов. Аналитические зависимости для перемещений в подобной задаче о пластическом течении материала пробки в круглой трубе с использованием модели больших деформаций [8–10] были ранее получены в [11].

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МОДЕЛИ

Воспользуемся математической моделью больших деформаций материалов с упругими, пластическими и вязкими свойствами [8–10]. Обратимая $\mathbf{e}$ и необратимая $\mathbf{p}$ составляющие тензора деформаций Альманси $\mathbf{d}$ в прямоугольной системе декартовых координат Эйлера $\mathbf{x}$ определяются дифференциальными уравнениями переноса:

$$\frac{D\mathbf{p}}{Dt} = \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{p},$$

$$\frac{D\mathbf{e}}{Dt} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} - \frac{1}{2}((\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{z})),$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{p} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}/2 - \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}, \quad (1)$$

$$\nabla \mathbf{v} = (\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v})/2 + (\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v})/2 = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{w},$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{y} = -\mathbf{y}^T = \mathbf{w} + \mathbf{z},$$

¹Институт автоматики и процессов управления
Дальневосточного отделения Российской академии наук,
Владивосток, Россия

²Институт машиноведения и металлургии
Дальневосточного отделения Российской академии наук,
Комсомольск-на-Амуре, Россия

*E-mail: lk@iacp.dvo.ru

где t — время, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ — векторы скоростей и перемещений; $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ — тензоры скоростей полных и необратимых деформаций; D/Dt — оператор используемой объективной производной по времени; $\mathbf{w}$ — кососимметричный тензор вихря скорости; $\mathbf{y}$ — тензор вращений, $\mathbf{z}$ — его нелинейная составляющая, выписанная в [8–10].

Тензор напряжений Эйлера–Коши $\boldsymbol{\sigma}$ для несжимаемой изотропной среды при наличии в ней необратимых деформаций определяется аналогом формулы Мурнагана:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{e}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{e}),$$

$$W = -2\mu I_1 - \mu I_2 + bI_1^2 + (b - \mu)I_1I_2 - \chi I_1^3 + \dots, \quad (2)$$

$$I_1 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{c}, \quad I_2 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{c}^2, \quad \mathbf{c} = \mathbf{e} - \mathbf{e}^2/2,$$

где p — добавочное гидростатическое давление; $\mathbf{I}$ — единичный тензор, W — упругий потенциал, μ , b , χ — упругие постоянные.

Накапливаемые в деформируемом материале необратимые деформации могут быть и деформациями ползучести, и пластичности [12]. Здесь рассмотрим случай, когда накопление необратимых деформаций связано только с ползучестью. Источник необратимых деформаций $\boldsymbol{\gamma}$ конкретизируется с помощью степенного закона ползучести Нортон:

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^c = \frac{\partial V(\boldsymbol{\Sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad V(\boldsymbol{\Sigma}) = B\boldsymbol{\Sigma}^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma} = \max|\sigma_i - \sigma_j|,$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}^c$ — тензор скоростей деформаций ползучести, $V(\boldsymbol{\Sigma})$ — термодинамический потенциал, B и n — параметры ползучести материала, σ_k — главные значения тензора напряжений.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Построим точное решение задачи о деформировании вязкоупругой пробки высоты l при ее движении в цилиндрической трубе радиуса R с недеформируемыми стенками в условиях переменного перепада давления. Решение этой краевой задачи накопления больших необратимых деформаций ползучести в цилиндрической системе координат r , φ , z будем искать в классе функций

$$u = u_z(r, t), \quad v = v_z(r, t), \quad P = P(r, z, t),$$

где u и v — отличные от нуля компоненты векторов перемещений и скорости, P — новая неизвестная функция добавочного гидростатического давления.

Деформирование начинается из свободного состояния материала, деформации ползучести накапливаются с начала процесса деформирования.

Далее пренебрегаем слагаемыми выше первого порядка по диагональным компонентам тензоров деформаций, которые принимают значения более высокого порядка малости по сравнению с недиагональными [11–13], и выше второго — по недиагональным. Такое ограничение не является принципиальным, но позволяет получить точное решение задачи. Из (2) следует:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu e_{rr} + 3\mu e_{rz}^2, & \sigma_{\varphi\varphi} &= -P, \\ \sigma_{rz} &= 2\mu e_{rz}, & \sigma_{zz} &= -P + 2\mu e_{zz} + 3\mu e_{rz}^2, \end{aligned} \quad (4)$$

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{zz})e_{rz} = (e_{rr} - e_{zz})\sigma_{rz}.$$

Уравнения равновесия в рамках квазистатического приближения имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rz,r} + \sigma_{zz,z} + \sigma_{rz}r^{-1} &= 0, \\ \sigma_{rr,r} + \sigma_{rz,z} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})r^{-1} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Движение пробки в трубе свяжем с изменением перепада давления $p(t)$ на ее граничных поверхностях $z = u(r, t)$ и $z = l + u(r, t)$. Зададим его в виде

$$\sigma_{zz}(0, u(0, t)) = -p(t), \quad \sigma_{zz}(0, l + u(0, t)) = 0, \quad (6)$$

где $r = 0$ — координата максимального перемещения граничных точек пробки.

В соответствии с (1), (3) кинематические соотношения в принятых ограничениях по компонентам деформаций записываются в форме

$$\begin{aligned} d_{rz} &= e_{rz} + p_{rz} = \frac{1}{2}u', & d_{rr} &= -\frac{1}{2}(u')^2, & u' &= \frac{\partial u}{\partial r}, \\ y_{zr} &= -y_{rz} = \frac{1}{2}v', & \frac{dd_{rz}}{dt} &= \frac{\partial d_{rz}}{\partial t} = \frac{1}{2}v', \end{aligned} \quad (7)$$

$$\varepsilon_{rz}^c = (-1)^n B n 2^{n-1} (c(t)r)^{n-1}, \quad \varepsilon_{rr}^c = -\varepsilon_{zz}^c = \frac{e_{rr} - e_{zz}}{e_{rz}} \frac{\varepsilon_{rz}^c}{2}.$$

Согласно (1) и (7), для диагональных компонент обратимых и необратимых деформаций получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{zz}}{\partial t} + \frac{\varepsilon_{rz}^c}{e_{rz}} e_{zz} &= e_{rz} \left(\frac{3}{2} \varepsilon_{rz}^c + \varepsilon_{rz}^e \right), & e_{rr} &= -e_{zz} - e_{rz}^2, \\ p_{zz} &= -e_{zz} + 2e_{rz}p_{rz} + \frac{e_{rz}^2}{2}, & p_{rr} &= -p_{zz} - 2p_{rz}^2. \end{aligned} \quad (8)$$

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Полагаем далее $p(t)$ линейной функцией времени $p(t) = \alpha t$ ($\alpha = \text{const}$), постоянную в законе ползучести Нортон (3) принимаем $n = 3$. Во всем процессе деформирования пластическое течение не возникает ($|\sigma_{rz}| < k$), k — предел текучести.

Будем считать теперь, что до тех пор, пока

$$|\sigma_{rz}|_{r=R} < \sigma_0, \quad (9)$$

где σ_0 — задаваемая постоянная сухого трения, на стенках трубы выполняются условия жесткого сцепления:

$$u(R, t) = 0, \quad v(R, t) = 0. \quad (10)$$

Для условий (6), (9) из определяющих уравнений (5) и (8) получаем, учитывая, что напряжение σ_{rz} должно быть конечным при $r = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= -\frac{f}{2}, \quad e_{rz} = -\frac{f}{4\mu}, \quad \varepsilon_{rz}^c = -\frac{3Bf^2}{2}, \\ p_{rz} &= \int_0^t \varepsilon_{rz}^c(\xi) d\xi = -\frac{Bf^2 t}{2}, \quad f = \frac{\alpha t r}{l}, \\ u &= g(r, t) = \frac{\alpha t}{4\mu l} (R^2 - r^2) + \frac{B\alpha^2 t^3}{3l^2} (R^3 - r^3), \\ v &= \dot{u} = \frac{\alpha}{4\mu l} (R^2 - r^2) + \frac{B\alpha^2 t^2}{l^2} (R^3 - r^3). \end{aligned} \quad (11)$$

Из дифференциального уравнения из (8) с учетом условия $e_{zz}(r, 0) = 0$ найдем

$$\begin{aligned} e_{zz} &= \frac{3f^2}{32\mu^2} - \frac{\alpha j}{48B\mu^3} (1 - e^{Fj t^2}), \\ F &= -3B\alpha\mu, \quad j = \frac{r}{l}. \end{aligned} \quad (12)$$

Компонента напряжений σ_{rr} определяется из второго уравнения равновесия с использованием граничных условий (6)

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p(t)a + \frac{f^2}{16\mu} - \frac{\alpha}{24B\mu^2} \left(j + \frac{1}{Ft^2} - \frac{e^{Fj t^2}}{Ft^2} \right), \\ a &= 1 - \frac{z}{l} + \frac{u(0, t)}{l}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} + 2\mu e_{zz} - \mu e_{rz}^2, \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{rr} + 4\mu e_{zz} + 2\mu e_{rz}^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Полученное решение (11)–(13) приемлемо до момента времени $t = t^* = \frac{2\sigma_0 l}{\alpha R}$, пока выполняется строгое неравенство (9). Начиная с момента времени $t = t^*$ на стенке $r = R$ начинается скольжение. Условие прилипания теперь не выполняется и заменяется краевым условием

$$(\sigma_{rz} + \sigma_0 + \xi v)|_{r=R} = 0,$$

где ξ — постоянная вязкого трения. Тогда с момента времени t^* перемещение и скорость вычисляются из зависимостей (11), если в выражение для скорости добавить слагаемое $q(t) = \frac{\alpha t R}{2\xi l} - \frac{\sigma_0}{\xi}$, для переме-

щений функцию $\frac{\alpha R t^2}{4\xi l} + q_1(t)$, $q_1(t) = \frac{\sigma_0^2 l}{\alpha \xi R} - \sigma_0 t / \xi$. Полагая с момента времени $t = t_1$ функцию $p(t)$

постоянной: $p(t) = \alpha t_1$, решение задачи найдем аналогично (11)–(13):

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= -\frac{f_1}{2}, \quad e_{rz} = -\frac{f_1}{4\mu}, \quad \varepsilon_{rz}^c = -\frac{3Bf_1^2}{2}, \\ p_{rz} &= Bf_1^2 \left(t_1 - \frac{3}{2}t \right), \quad f_1 = \frac{\alpha t_1 r}{l}, \\ u &= g(r, t) - \frac{\alpha R t_1^2}{4\xi l} + \frac{\alpha R t_1 t}{2\xi l} + q_1(t), \\ v &= \frac{B\alpha^2 t_1^2}{l^2} (R^3 - r^3) + q(t_1), \\ e_{zz} &= \frac{3f_1^2}{32\mu^2} - \frac{\alpha j}{48B\mu^3} (e^{h_1(t)j} - e^{h_2(t)j}), \\ h_1(t) &= 2Ft_1(t - t_1), \quad h_2(t) = Ft_1(2t - t_1), \\ \sigma_{rr} &= -p(t_1)a + \frac{f_1}{16\mu} + \frac{\alpha}{24B\mu^2} \left(\frac{1 - e^{h_1(t)j}}{h_1(t)} + \frac{e^{h_2(t)j} - 1}{h_2(t)} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

С уменьшением давления $p(t)$ с некоторого момента времени $t = t_2 > t_1$, по закону $p(t) = \alpha t_1 s(t)$, $s(t) = 1 - \beta(t - t_2)$, $\beta = \text{const}$, решение (14) переписывается в форме

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= -\frac{n}{2}, \quad e_{rz} = -\frac{n}{4\mu}, \\ p_{rz} &= Bf_1^2 \left(t_1 - \frac{3}{2}t_2 - \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2\beta} s^3(t) \right), \quad \varepsilon_{rz}^c = -\frac{3Bn^2}{2}, \\ u &= g_1(r, t) + q_1(t) + \frac{\alpha t_1 R}{2\xi l} \left(t_2 + \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2\beta} s^2(t) \right), \\ g_1(r, t) &= \frac{\alpha t_1}{l} \left(\frac{s(t)}{4\mu} (R^2 - r^2) + \frac{B\alpha t_1}{3l} (R^3 - r^3) \times \right. \\ &\quad \times \left(3t_2 - t_1 + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} s^3(t) \right) - \frac{R t_1}{4\xi} \Big), \\ v &= \frac{\alpha t_1}{l} \left(\frac{\beta}{4\mu} (R^2 - r^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s(t)R}{2\xi} + \frac{B\alpha t_1}{l} (R^3 - r^3) s^2(t) \right) - \frac{\sigma_0}{\xi}, \\ e_{zz} &= \frac{3n^2}{32\mu^2} - \frac{\alpha j}{48B\mu^3} (e^{b_1} - e^{b_2} - 2\beta t_1 b(t)), \\ h(t) &= \frac{3B\mu t_1}{\beta} (s^2(t) - 1), \quad b_1 = (h(t) + h_1(t_2))j, \\ b_2 &= (h(t) + h_2(t_2))j, \quad b(t) = 1 - e^{h(t)j}, \quad n = f_1 s(t), \\ \sigma_{rr} &= -p(t)a + \frac{n^2}{16\mu} + \\ &\quad + \frac{\alpha}{24B\mu^2} \left(\frac{1 - e^{b_1}}{h(t) + h_1(t_2)} + \frac{e^{b_2} - 1}{h(t) + h_2(t_2)} + \frac{2\beta t_1 b(t)}{h(t)} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

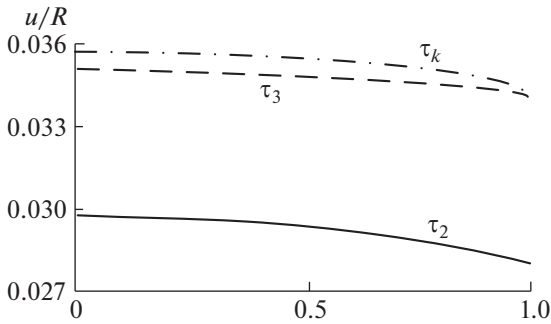


Рис. 1. Изменение перемещений.

Решение (15) справедливо до конечного момента разгрузки $t_k = \beta^{-1} + t_2$, кроме выражений для скорости и перемещения, поскольку скорость в (15) становится равной нулю на поверхности $r = R$ в момент времени $t_3 = t_k - \frac{2l\sigma_0}{\alpha\beta t_1 R} < t_k$. С этого момента времени до конечного момента разгрузки t_k при $r = R$ выполняется условие прилипания $v(R) = 0$. В промежутке времени $t_3 \leq t < t_k$ для скорости и перемещений выполняются зависимости

$$u = g_1(r, t) + q_1(t_3) + \frac{\alpha t_1 R}{2\xi l} \left(t_2 + \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2\beta} s^2(t_3) \right),$$

$$v = -\frac{\alpha t_1 \beta}{4\mu l} (R^2 - r^2) + \frac{B\alpha^2 t_1^2}{l^2} (R^3 - r^3) s^2(t).$$

В конечный момент разгрузки t_k $\epsilon_{rz}^c = 0$, $v = 0$, p_{rr} находится из (8), остаточные напряжения и остальные компоненты деформаций вычисляются по формулам

$$\sigma_{rr} = \frac{\alpha\beta t_1 b(t_k)}{12B\mu^2 h(t_k)} + \frac{\alpha}{24B\mu^2} \times$$

$$\times \left(\frac{1 - e^{b_1(t_k)}}{h(t_k) + h_1(t_2)} + \frac{e^{b_2(t_k)} - 1}{h(t_k) + h_2(t_2)} \right),$$

$$\sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} + 2\mu e_{zz}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rr} + 4\mu e_{zz},$$

$$p_{rz} = \frac{Br^2 \alpha^2 t_k^3}{l^2} \left(t_1 - \frac{3}{2} t_2 - \frac{1}{2\beta} \right), \quad e_{rz} = 0,$$

$$e_{zz} = -e_{rr} = -p_{zz} =$$

$$= -\frac{\alpha j}{48B\mu^3} (e^{b_1(t_k)} - e^{b_2(t_k)}) + \frac{\alpha\beta t_1 b(t_k) j}{24B\mu^3}.$$

На рис. 1 изображены перемещения u/R в моменты времени τ_2 , τ_3 , τ_k ($\tau = \frac{\alpha t}{\mu}$). На рис. 2 представлены компоненты остаточных напряжений

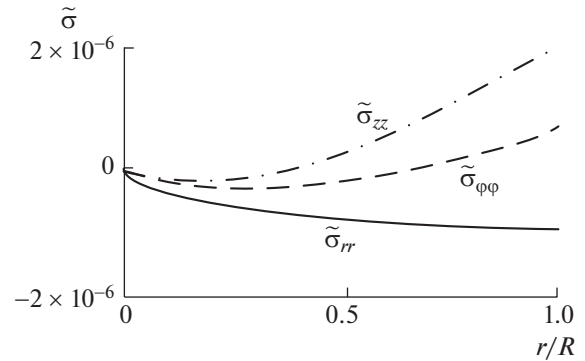


Рис. 2. Остаточные напряжения.

$\tilde{\sigma} = \sigma/\mu$. Постоянные принимают значения $R/l = 0.5$, $\frac{\sigma_0}{\mu} = 0.0009$, $\frac{B\mu^3}{\alpha} = 1200$, $\frac{\mu^2}{\alpha R \xi} = 600$, $\frac{\beta\mu}{\alpha} = 8$.

Использование модели больших деформаций с дифференциальными уравнениями изменения составляющих полных деформаций позволило получить точное решение задачи теории о деформировании в условиях ползучести вязкоупругого материала в круглой трубе с учетом проскальзывания в окрестности ее жесткой стенки.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00163).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 2014. 752 с.
2. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
3. *Локощенко А.М.* Применение кинетической теории при анализе длительного высокотемпературного разрушения металлов в условиях сложного напряженного состояния (обзор) // ПМТФ. 2012. Т. 53. № 4. С. 149–164.
4. *Локощенко А.М.* Длительная прочность металлов при сложном напряженном состоянии (обзор) // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 3. С. 116–136.
5. *Локощенко А.М.* Результаты исследований ползучести и длительной прочности металлов в Научно-исследовательском институте механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (к юбилею Ю.Н. Работнова) // ПМТФ. 2014. Т. 55. № 1. С. 144–165.
6. *Кузнецов Е.Б., Леонов С.С.* Об аналитическом решении одной задачи ползучести // Журнал СВМО. 2018. Т. 20. № 3. С. 282–294. <https://doi.org/10.15507/2079-6900.20.201803.282-294>
7. *Коваленко Л.В., Попов Н.Н., Радченко В.П.* Решение плоской стохастической задачи ползучести // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 6. С. 1009–1016.

8. Быковцев Г.И., Шитиков А.В. Конечные деформации упругопластических сред // ДАН СССР. 1990. Т. 311. № 1. С. 59–62.
9. Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанюк Л.В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // ДАН. 1996. Т. 347. № 2. С. 199–201.
10. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
11. Ковтанюк Л.В. О продавливании упруговязкопластического материала через жесткую круговую цилиндрическую матрицу // ДАН. 2005. Т. 40. № 6. С. 764–767.
12. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Об изменяющихся механизмах производства больших необратимых деформаций в условиях прямолинейного движения в цилиндрическом слое // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 2. С. 10–21.
<https://doi.org/10.31857/S0572329920020099>
13. Панченко Г.Л. О прямолинейном течении в упруговязкопластическом цилиндрическом слое в условиях одностороннего прилипания // Вычислительная механика сплошных сред. 2011. Т. 4. № 4. С. 86–96.

ANALYTICAL SOLUTION OF THE CREEP PROBLEM VISCOELASTIC MATERIAL IN A ROUND TUBE

Corresponding Member of the RAS L. V. Kovtanyuk^{a,b}

^a*Institute of Automation and Control Processes Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russia*

^b*Institute of Machinery and Metallurgy Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Komsomolsk-on-Amur, Russia*

Using a mathematical model of large deformations of materials with elastic, plastic and viscous properties, an analytical solution was obtained for deformation under creep conditions of a bung in a round tube with a varying pressure drop. The motion is considered taking into account the sliding of the material in the vicinity of the rigid wall of the pipe and its deformation under increasing, constant and decreasing pressure. Displacements, reversible and irreversible deformations, stresses at all stages of deformation, including residual deformations and stresses at full unloading are calculated.

Keywords: large deformations, creep, elasticity, residual stresses

УДК 532.525.2

ДИФФУЗИОННОЕ ГОРЕНИЕ ВОДОРОДА В МИКРОСТРУЕ, ИСТЕКАЮЩЕЙ ИЗ КРИВОЛИНЕЙНОГО КАНАЛА

© 2023 г. В. В. Козлов^{а,*}, А. В. Довгаль^а, М. В. Литвиненко^а, Ю. А. Литвиненко^а, А. Г. Шмаков^а

Представлено академиком РАН В.М. Фоминым 23.06.2022 г.

Поступило 23.06.2022 г.

После доработки 05.05.2023 г.

Принято к публикации 26.07.2023 г.

В представленной работе рассмотрено горение микроструи водорода, истекающей из криволинейного канала с круглым микросоплом. Струйные течения, которые генерируются с использованием прямолинейных и криволинейных каналов, различаются тем, что во втором случае заметный вклад в формирование струи и ее горение вносят вихри Дина. Взаимодействие последних с вихрями Кельвина—Гельмгольца, образование которых характерно для течений со сдвигом скорости, вызывает изменения характеристик горения. Они включают пространственные искажения зоны ламинарного пламени вблизи среза сопла, области турбулентного горения ниже по потоку, а также турбулентного пламени в условиях его отрыва от среза сопла и прекращение ламинарного горения на начальном участке течения. Результаты настоящих исследований дают возможность глубже понять особенности горения микроструй водорода в условиях их гидродинамической неустойчивости.

Ключевые слова: криволинейный канал, вихри Дина, микроструя водорода, диффузионное горение

DOI: 10.31857/S2686740023060123, **EDN:** HTFPRO

Динамика струйных течений различных газов — предмет многолетних экспериментальных и теоретических исследований. Структура течения и его эволюция определяются, помимо прочего, начальными условиями на срезе сопла, где происходит формирование струи. Как правило, рассматриваются осесимметричное (за круглым соплом) и однородное в трансверсальном потоку направление (за щелевым соплом) струйные течения. В эксперименте это обеспечивается использованием прямолинейных каналов, по которым газ поступает к срезу сопла.

Известно, что в криволинейных трубах под действием центробежной силы создается условие формирования вторичного течения, которое проявляется в виде двух противовращающихся вихрей, названных вихрями Дина [1, 2]. Зарождение вихрей внутри криволинейного канала можно использовать для увеличения тепломассопереноса струи с окружающим газом. В экспериментальной работе [3] показано, что теория, предложенная W.R. Dean [1], справедлива для труб различной кривизны. Автор показал, что ламинарное течение в криволинейных трубах реализуется при

бóльших числах Рейнольдса, чем для прямых труб, несмотря на то, что кривизна вызывает неустойчивость течения. Анализируя результаты по исследованию течений в криволинейных каналах и вихревые структуры в затопленных струях, можно сделать вывод, что, объединяя два случая — криволинейный канал и затопленную струю, можно предположить, что в такой струе на выходе из сопла будут наблюдаться вихри Дина, которые будут иметь свои особенности развития (см. [4]).

Следует ожидать, что вихревая структура струйного течения в значительной мере определяет режимы его диффузионного горения. В осесимметричных струях при истечении водорода при низких скоростях потока вблизи среза сопла формируется участок ламинарного горения (“область перетяжки пламени”, следуя определению [5]); ниже по потоку продолжается горение турбулентной струи. С ростом скорости течения область перетяжки пламени сокращается вплоть до ее исчезновения и происходит отрыв турбулентного пламени от среза сопла. При дальнейшем возрастании скорости струи ее горение полностью прекращается. В настоящей работе обозначенные выше стадии горения обсуждаются в условиях генерации вихрей Дина при истечении микроструи водорода из криволинейного канала.

^аИнститут теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

*E-mail: kozlov@itam.nsc.ru

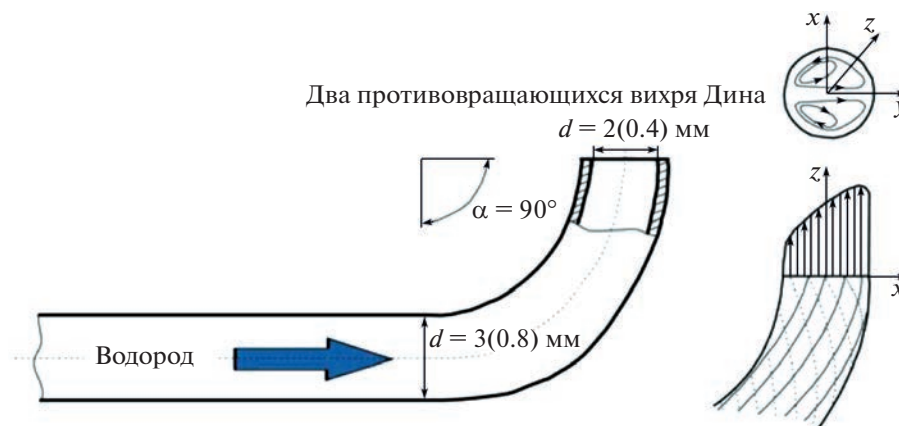


Рис. 1. Криволинейный канал с осесимметричным соплом для моделирования диффузионного горения микроструи водорода с вихрями Дина.

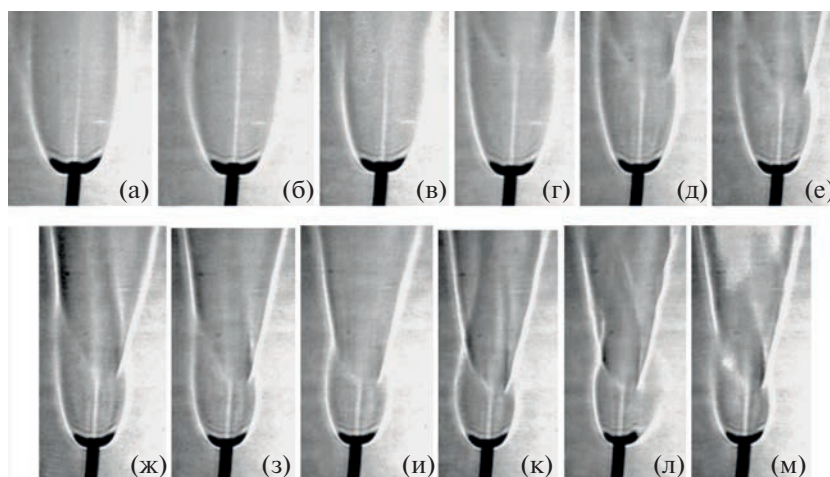


Рис. 2. Диффузионное горение струи водорода, истекающей из сопла диаметром $d = 2$ мм, при различной скорости течения (м/с): 25.5 (а); 40 (б); 52.5 (в); 58 (г); 70 (д); 78 (е); 86 (ж); 92 (з); 100 (и); 107 (к); 115 (л); 120 (м).

1. ДИФфуЗИОННОЕ ГОРЕНИЕ МИКРОСТРУИ ВОДОРОДА НА ВЫХОДЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО КАНАЛА

Схема канала с образованием вихрей Дина на его выходе приведена на рис. 1. Диффузионное горение водорода исследовано при диаметре сопла $d = 2.0$ и 0.4 мм. В этих условиях струйное течение и его горение подвержены влиянию кольцевых вихрей Кельвина–Гельмгольца, зарождающихся в слое сдвига скорости на периферии струи, вихрей Дина и их взаимодействия.

Теневые изображения, полученные методом Теплера в приведенной экспериментальной схеме с их регистрацией на цифровую видеокамеру, показаны на рис. 2. Как и в предшествующих исследованиях диффузионного горения круглых и плоских микроструй водорода, истекающих из прямолинейных каналов, в данном случае вблизи

среза сопла возникает область перетяжки пламени — зона горения в ламинарном режиме, за которой пламя переходит в турбулентное состояние. На рис. 2 указанная область течения отчетливо визуализирована при больших скоростях струи.

Формирование вихрей Дина в круглой микроструе водорода на выходе криволинейного канала приводит к заметному искажению течения на его начальном участке. Узкий слой градиента плотности газа, разделяющий область перетяжки пламени с ламинарным горением вблизи среза сопла и турбулентное пламя ниже по потоку, становятся несимметричными, рис. 2 и рис. 3а. Более того, под влиянием вихрей Дина происходит изменение области перетяжки пламени (рис. 3а), которая в отсутствие кривизны канала сохраняет сферическую форму и остается осесимметричной (рис. 3б).

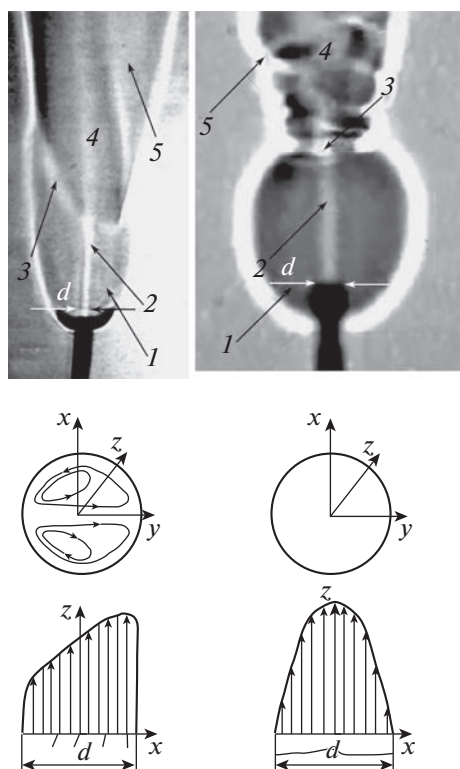


Рис. 3. Диффузионное горение водорода, истекающего из криволинейного (а) и прямолинейного (б) круглых микроканалов, $d = 2.0$ мм: 1 – область перетяжки пламени; 2 – ламинарная микроструя; 3 – слой градиента плотности газа; 4 – турбулентная микроструя; 5 – турбулентное пламя.

Более высокие скорости истечения микроструи водорода с вихрями Дина достигнуты при диаметре сопла $d = 0.4$ мм, рис. 4. В целом основные стадии горения, последовательно сменяю-

щие друг друга с возрастанием скорости потока, в этих условиях аналогичны обнаруженным в низкоскоростных струйных течениях. Вместе с тем при большой скорости микроструи происходит искажение турбулентного пламени, тогда как ламинарное горение в области перетяжки пламени сохраняется вблизи среза сопла, рис. 4ж. С дальнейшим ростом скорости истечения микроструи область перетяжки пламени исчезает, зона турбулентного горения отрывается от среза сопла при сохранении ее несимметрии, рис. 4з–4м. Наибольшая пространственная деформация турбулентного участка микроструи наблюдается в максимуме ее скорости на срезе сопла, что связано с генерацией кольцевых вихрей и вихрей Дина. Исчезновение области перетяжки пламени (рис. 4з–4н) является признаком перехода диффузионного горения микроструи водорода с вихрями Дина в сверхзвуковой режим истечения водородной струи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование горения круглых микроструи водорода, модулированных вихрями Дина, выявило аналогии и особенности данного явления сравнительно с горением водорода за срезом сопла прямолинейного осесимметричного канала. В условиях генерации вихрей сохраняется ранее обнаруженная особенность пространственной структуры струйного течения – область перетяжки пламени вблизи среза сопла, в которой наблюдается ламинарное горение. Вихри Дина приводят к деформации области перетяжки пламени и окружающего ее слоя градиента плотности газа, за которым происходит переход горения струи в турбулентное состояние. С возрастанием скорости микроструи, при сохранении области перетяжки пламени,

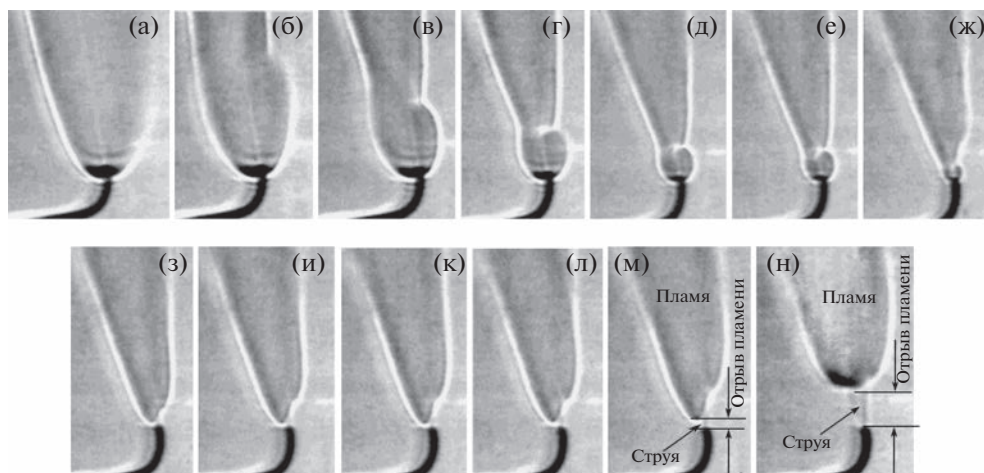


Рис. 4. Теневые картины диффузионного горения водорода, истекающего из сопла диаметром $d = 0.4$ мм, при различной скорости струи (м/с): а – 484; б – 548; в – 587; г – 635; д – 635; е – 873; ф – 921; г – 952; h – 1032; i – 1040; j – 1111; k – 1151; l – 1190; m – 1309.

турбулентное пламя теряет осевую симметрию. По мере исчезновения области перетяжки пламени с увеличением скорости струи зона турбулентного горения отрывается от среза сопла, оставаясь несимметричной. Отрыв турбулентного пламени от среза сопла — признак перехода дозвукового диффузионного горения микроструи водорода с вихрями Дина к горению в струе со сверхзвуковым истечением водорода.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 075-15-2020-806).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dean W.R.* Note on the Motion of Fluid in a Curved Pipe // *Phil. Mag.* 1927. V. 4. P. 208–223.
2. *Dean W.R.* The Stream-Line Motion of Fluid in a Curved Pipe // *Phil. Mag.* 1928. V. 5. P. 671–695.
3. *White C.M.* Streamline Flow through Curved Pipes // *Proc. Roy. Soc.* 1929. V. 123. P. 645–663.
4. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
5. *Kozlov V.V., Grek G.R., Korobeynikov O.P., Litvinenko Yu.A., and Shmakov A.G.* Features of diffusion combustion of hydrogen in the round and plane high-speed microjets. Pt II // *Int. J. Hydrogen Energy.* 2016. V. 41. Iss. 44. P. 20240–20249.

DIFFUSION COMBUSTION OF A HYDROGEN MICROJET, OUTFLOWING FROM A CURVILINEAR CHANNEL

V. V. Kozlov^a, A. V. Dovgal^a, M. V. Litvinenko^a, Yu. A. Litvinenko^a, and A. G. Shmakov^a

^a*Khrstianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.M. Fomin

The presented work examines the combustion of a hydrogen microjet flowing from a curved channel with a round micronozzle. Jet flows that are generated using rectilinear and curved channels differ in that in the second case, Dean vortices make a noticeable contribution to the formation of the jet and its combustion. The interaction of the latter with Kelvin–Helmholtz vortices, the formation of which is typical for flows with a velocity shift, causes changes in combustion characteristics. They include spatial distortions of the laminar flame zone near the nozzle exit, the area of turbulent combustion downstream, as well as the turbulent flame in the conditions of its separation from the nozzle exit and the cessation of laminar combustion in the initial section of the flow. The results of these studies provide an opportunity to better understand the combustion features of hydrogen microjets under conditions of their hydrodynamic instability.

Keywords: curvilinear channel, Dean vortices, hydrogen microjet, diffusion combustion

УДК 539.3, 539.4

МОЛЕКУЛЯРНО-ДИНАМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА КРАТЕРООБРАЗОВАНИЯ ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КЛАСТЕРОВ С ПОДЛОЖКОЙ

© 2023 г. А. В. Уткин^{1,*}, академик РАН В. М. Фомин^{1,2}

Поступило 26.06.2023 г.

После доработки 26.06.2023 г.

Принято к публикации 04.08.2023 г.

В представленной работе в рамках метода молекулярной динамики были проведены численные эксперименты по исследованию ударного взаимодействия металлических нанокластеров различного размера с металлической подложкой в широком диапазоне скоростей. Анализ полученных данных показал, что объем кратера остается пропорциональным энергии ударника и обратно пропорциональным динамической прочности материала, причем угловой коэффициент прямой не зависит от размера кластера и материала кластер-подложка.

Ключевые слова: метод молекулярной динамики, ударное взаимодействие, наноструктура, нанокластер

DOI: 10.31857/S2686740023060135, **EDN:** XPBKB5

Поведение материала под действием удара нанообъектов сложным образом зависит от физических свойств преграды и ударника. Описание явлений в материале при высокоскоростном ударном воздействии требует понимания физической картины упругопластических деформаций и разрушения. В силу сложности исследуемых явлений, разработка аналитических моделей процесса соударения деформируемых тел, учитывающих все характеристики разрушения, превращается в чрезвычайно сложную задачу.

Одним из возможных подходов является анализ явления методами теории подобия и размерности с последующими уточнениями на основе новых экспериментальных данных или результатов численного моделирования. В результате такого анализа можно выделить безразмерные независимые комплексы величин, связывающие основные характеристики материалов и параметры ударного воздействия с размером образовавшегося кратера [1–5].

Существует значительное количество исследований, где при помощи метода молекулярной динамики [6, 7] моделируются процессы высоко-

скоростного столкновения нанообъектов с преградой [8–10]. Как правило, в рамках такого подхода основное внимание уделяется физико-химическим явлениям, происходящим в ударнике и в преграде на микроуровне, исследуются зарождение и распространение различных дефектов в результате удара. При этом практически отсутствуют попытки обобщения полученных результатов с целью создания единой функциональной зависимости, связывающей безразмерные параметры ударника и преграды. Представленная работа посвящена построению такой функциональной зависимости на основе результатов численного моделирования в рамках метода молекулярной динамики.

ФИЗИЧЕСКАЯ СИСТЕМА И МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

В численном эксперименте металлические сферические нанокластеры под углом 90 градусов ударялись о металлическую подложку со скоростями от 0.8 до 15 км/с, а материал кластера и пластины совпадал. В качестве рабочего материала была выбрана медь (кристаллическая решетка ГЦК) и титан (кристаллическая решетка ГПУ). Металлические нанокластеры вырезались из идеального образца материала кубической формы, и их размер менялся в широком диапазоне значений: диаметр медного нанокластера изменялся от 3.9 до 10 нм, диаметр титанового нанокластера изменялся от 5.8 до 11.8 нм.

¹Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

*E-mail: utkin@itam.nsc.ru

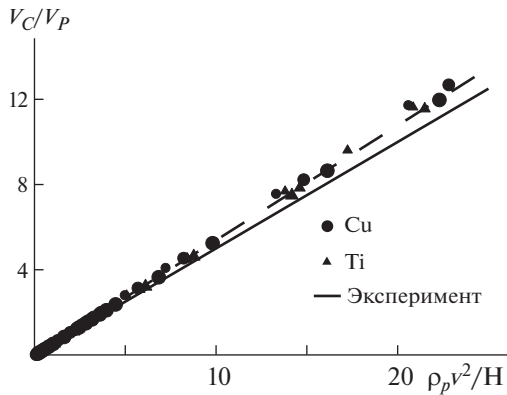


Рис. 1. Зависимость отношения объема кратера к объему нанокластера от безразмерного энергетического параметра. Аппроксимация результатов численного моделирования обозначена штриховой линией. Данные для медных нанокластеров различного диаметра обозначены кругами различного размера, данные для титановых нанокластеров различного диаметра обозначены треугольниками различного размера. Прямая сплошная линия соответствует аппроксимационной зависимости Н.А. Златина.

Размер металлической подложки выбирался достаточно большим, чтобы минимизировать влияние границ на характер исследуемых явлений. Также на все атомы, находящиеся в десяти крайних атомных плоскостях по бокам и снизу подложки, действовала искусственная вязкость, что позволило полностью поглотить ударные волны, инициируемые ударом кластера о подложку. Размеры медной и титановой подложки составляли $54 \times 54 \times 22$ нм и $70 \times 70 \times 25$ нм соответственно. Кристаллографическая ориентация медной подложки (001), а титановой подложки (1–2 0).

В результате удара кластера в подложке образовывался кратер с приподнятыми краями. При оценке объема и глубины кратера приподнятые края кратера отсекались по уровню невозмущенной верхней плоскости подложки. Для каждого значения скорости анализ данных позволил определить максимальный размер кратера.

Для моделирования межатомного взаимодействия в рассматриваемых металлах был использован метод внедренного атома (Embedded Atom Method — EAM) [11–13]. Выражение для потенциальной энергии имеет вид

$$U = \sum_i \sum_{j \neq i} \phi_{ij}(r_{ij}) + \sum_i F_i(\bar{\rho}_i), \quad (1)$$

где U — полная потенциальная энергия системы, ϕ_{ij} — парный потенциал взаимодействия, а r_{ij} — расстояние между атомами i и j .

Функция $F_i(\bar{\rho}_i)$ — это энергия внедрения атома i , а $\bar{\rho}_i$ — это электронная плотность в месте нахождения атома i , вызванная присутствием остальных

атомов в системе; $\bar{\rho}_i$ является монотонно убывающей функцией от межатомного расстояния r_{ij} и определяется как

$$\bar{\rho}_i = \sum_{j \neq i} \rho_j(r_{ij}). \quad (2)$$

Для атома i функции $\bar{\rho}_i$ и $\sum_i \sum_{j \neq i} \phi_{ij}(r_{ij})$ рассчитываются путем перебора всех ближайших соседей, а затем выполняется однократный расчет функции $F_i(\bar{\rho}_i)$. Нелинейность $F_i(\bar{\rho}_i)$ обеспечивает многоатомный вклад в выражение полной энергии межатомного взаимодействия. В настоящей работе были использованы таблично заданные функции ρ_j , ϕ_{ij} и F_i . Для аппроксимации этих функций при численном решении уравнений движения были использованы локальные В-сплайны [14–18].

Интегрирование уравнения движения проводилось с использованием скоростной модификации схемы Верле второго порядка точности по временному шагу, шаг по времени в численном расчете составлял 0.1 фс. Для численного моделирования был использован разработанный параллельный алгоритм, который позволяет осуществлять расчеты с использованием графических процессоров (ГПУ) общего назначения компании NVIDIA, поддерживающих технологию CUDA (Compute Unified Device Architecture) [19–21].

РЕЗУЛЬТАТЫ

Многочисленные экспериментальные данные по высокоскоростному ударному взаимодействию сферического ударника с преградой позволили сформулировать следующую фундаментальную концепцию (так называемый энергетический критерий): объем кратера остается пропорциональным энергии ударника и обратно пропорциональным динамической прочности материала [22–24].

На основе проведенных численных экспериментов были построены зависимости безразмерного объема кратера от безразмерного энергетического параметра. Результаты моделирования для всех размеров нанокластеров титана и меди расположены на единой прямой $V_C/V_P = K_V(\rho_P \cdot v^2/H)$, где константа $K_V = 0.55$, V_C — объем кратера, V_P , ρ_P , v — объем, плотность и скорость сферического ударника, H — динамическая твердость материала подложки (штриховая линия, рис. 1).

На основе данных, представленных в [1], была построена аппроксимационная зависимость Н.А. Златина для безразмерного объема (рис. 1), которая также является прямой, но с угловым коэффициентом $K_V = 0.5$. Расхождения в угловых коэффициентах прямых связаны с неточностью обра-

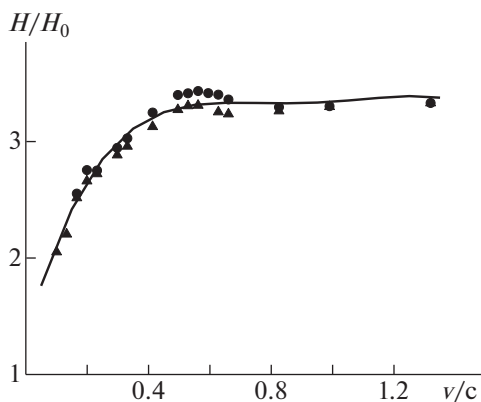


Рис. 2. Зависимость безразмерной динамической твердости титана от безразмерной скорости нанокластера. Круги соответствуют результатам расчетов для нанокластеров 9.8 нм, а треугольники — 11.8 нм. Сплошная линия — аппроксимационный полиномом четвертой степени с коэффициентами: $A_0 = 1.278$, $A_1 = 9.454$, $A_2 = -16.302$, $A_3 = 12.123$, $A_4 = -3.261$.

ботки экспериментальных данных и математической модели в расчетах ММД.

Динамическая твердость материала H определяется в соответствии с энергетическим определением, предложенным Д. Тейбором и соавт. [25–27]:

$$H = E_K / V_C, \quad (3)$$

где E_K — кинетическая энергия ударника.

В качестве примера, на рис. 2 представлены зависимости безразмерной динамической твердости от скорости, приведенной к скорости звука в титане. Динамическая твердость нормировалась на величину твердости H_0 , полученную в процессе наноиндентирования титана при статических условиях нагружения индентора [28]. В интервале рассматриваемых скоростей удара результаты численных экспериментов были аппроксимированы полиномом четвертой степени (сплошная линия на рис. 2). Из представленных зависимостей видно, что динамическая твердость зависит от скорости соударения нанокластера.

Первоначально увеличение скорости удара нанокластера с подложкой приводит к быстрому увеличению динамической твердости по сравнению со статической. В диапазоне скоростей соударения $0 < v/c < 0.5$ происходит переход материала от упругого взаимодействия к пластическому. Это наиболее интересный интервал нагружения, и он требует дальнейших исследований. При увеличении $v/c > 0.5$ происходит выход динамической твердости преграды на асимптотику, т.е. $H \approx 3.2H_0$.

Как правило, при решении задач соударения тел в континуальной механике динамическую твердость определяют на основе статической твердости или статического предела текучести материала, вводя специальные постоянные или зависящие от скорости соударения поправочные коэффициенты. В настоящей работе было пред-

ложено энергетическое определение динамической твердости материала, основанное лишь на точных измерениях объема кратера в численных экспериментах.

Таким образом, в математических моделях, описывающих поведение материала, необходимо учитывать зависимость динамической твердости H от скорости нагружения, т.е. $H = H_0 \cdot \phi(v/c)$, где функция $\phi(v/c)$ может быть рассчитана на основе модельной задачи о соударении нанокластера с преградой на основе ММД.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе в рамках метода молекулярной динамики были проведены численные эксперименты по исследованию ударного взаимодействия металлических нанокластеров различного размера с металлической подложкой в широком диапазоне скоростей (материал нанокластера и подложки совпадал).

Используя энергетическое определение динамической твердости H , предложенное Тейбором, и основываясь на точных измерениях объема кратера в численных экспериментах, были найдены зависимости H от скорости удара для различных размеров нанокластера.

Результаты численного моделирования для всех размеров нанокластеров исследуемых металлов находятся на единой общей прямой, обобщающей экспериментальные данные: $V_C/V_P = K_V(\rho_P \cdot v^2/H)$.

БЛАГОДАРНОСТИ

Часть работы выполнена с использованием оборудования ЦКП “Механика” (ИТПМ СО РАН). Для вы-

полнения части расчетов были использованы вычислительные ресурсы ЦКП “Центр данных ДВО РАН”.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-19-00733, <https://rscf.ru/project/21-19-00733/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Златин Н.А., Красильщиков А.П., Мишин Г.И. Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях. М.: Наука, 1974.
2. Bruce E.P. Review and analysis of high velocity impact data // Proc. 5th Symposium on Hypervelocity Impact. Denver, USA, 1961. P. 439–474.
3. Herrmann W., Jones A.H. Correlation of hypervelocity impact data // Proc. 5th Symposium on Hypervelocity Impact. Denver, USA, 1961. P. 389–439.
4. Holsapple K.A. The scaling of impact phenomena // Intern. J. Impact Engineering. 1987. V. 5. Iss. 1–4. P. 343–355.
5. Denardo B.P., Summers J.L., Nysmith C.R. Projectile size effects on hypervelocity impact craters in aluminum // NASA technical note D-4067. 1967.
6. Frenkel D., Smit B. Understanding Molecular Simulation: From Algorithms to Applications. Amsterdam: Elsevier Academic Press, 2001.
7. Allen M.P., Tildesley D.J. Computer Simulation of Liquids. Oxford: Oxford University Press, 1987.
8. Germann T.C. Large-scale molecular dynamics simulations of hyperthermal cluster impact // Intern. J. Impact Engineering. 2006. V. 33. Iss. 1–12. P. 285–293.
9. Ma Xn-Ling, Yang Wei. Supersonic wave propagation in Cu under high-speed cluster impact // Nanotechnology. 2004. V. 15. № 5.
10. Pogorelko V.V., Krasnikov V.S., Mayer A.E. High-speed collision of copper nanoparticles with aluminum surface: Inclined impact, interaction with roughness and multiple impact // Computational Materials Science. 2018. V. 142. P. 108–121.
11. Daw M.S., Baskes M.I. Embedded-atom method: Derivation and application to impurities, surfaces, and other defects in metals // Phys. Rev. B 29. 1984. 6443. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.29.6443>
12. Voter A.F. Embedded Atom Method Potentials for Seven FCC Metals: Ni, Pd, Pt, Cu, Ag, Au, and Al. // Los Alamos Unclassified Technical Report LA-UR-93-3901. 1993.
13. Zope R.R., Mishin Y. Interatomic potentials for atomistic simulations of the Ti-Al system // Phys. Rev. B 68 024102. 2003. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.68.024102>
14. Golovnev I.F., Golovneva E.I., Utkin A.V. Effect of the nanorod size on energy absorption at the microlevel under cyclic loading // Physical Mesomechanics. 2019. V. 22. № 5. P. 420–431. <https://doi.org/10.1134/S1029959919050084>
15. Golovnev I., Golovneva E., Utkin A. Molecular-dynamics investigation of the initial failure of the nanosized rod under uniaxial cyclic load // Engineering Failure Analysis. 2019. V. 105. P. 672–687. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2019.07.040>
16. Golovnev I.F., Golovneva E.I., Utkin A.V. A study into the temperature and size effects in nanostructures on their fracture under external mechanical loads // Physical Mesomechanics. 2018. V. 21. № 6. P. 523–528. <https://doi.org/10.1134/S1029959918060073>
17. Golovnev I.F., Golovneva E.I. A study of the radius dependence of thermodynamic parameters for metal nanospheres // Physical Mesomechanics. 2020. V. 23. № 3. P. 189–192. <https://doi.org/10.1134/S1029959920030017>
18. Golovnev I.F., Golovneva E.I. Calculation of the temperature dependence of the surface energy of metal nanoclusters in a wide range of their radii // Physical Mesomechanics. 2020. V. 23. № 4. P. 316–323. <https://doi.org/10.1134/S1029959920040050>
19. Utkin A.V., Fomin V.M., Golovneva E.I. Parallel molecular dynamics for silicon and silicon carbide: MPI, CUDA and CUDA-MPI implementation // AIP Conference Proceedings: High-Energy Processes in Condensed Matter. AIP Publishing, 2020. V. 2288. P. 030083(12). <https://doi.org/10.1063/5.0028297>
20. Utkin A.V. Analysis of parallel molecular dynamics for MPI, CUDA and CUDA-MPI implementation // Mathematica Montisnigri 2017. V. 39. P. 101–109. WoS: 000419276200008
21. Ozhgibesov M.S., Leu T.S., Cheng C.H., Utkin A.V. Studies on argon collisions with smooth and rough tungsten surfaces // J. Molecular Graphics and Modelling. 2013. V. 45. P. 45–49.
22. Herrmann W., Wilbeck J.S. Review of hypervelocity penetration theories // Intern. J. Impact Engineering. 1987. V. 5, Issues 1–4. P. 307–322.
23. Shanbing Yu, Gengchen Sun, Qingming Tan. Experimental laws of cratering for hypervelocity impacts of spherical projectiles into thick target // Intern. J. Impact Engineering. 1994. V. 15. Iss. 1. P. 67–77.
24. Baker J.R. Hypervelocity crater penetration depth and diameter – a linear function of impact velocity? // Intern. J. Impact Engineering. 1995. V. 17. Iss. 1–3. P. 25–35.
25. Tabor D. The Hardness of Metals. Oxford: Oxford University Press, 1951.
26. Tirupataiah Y., Sundararajan G. A dynamic indentation technique for the characterization of the high strain rate plastic flow behaviour of ductile metals and alloys // J. Mechanics and Physics of Solids. 1991. V. 39. Iss. 2. P. 243–271.
27. Koepfel B.J., Subhash G. Characteristics of residual plastic zone under static and dynamic Vickers Indentations // Wear. 1999. V. 224. P. 56–67.
28. Verkhovtsev A.V., Yakubovich A.V., Sushko G.B., Hanauske M., Solov'yov A.V. Molecular dynamics simulations of the nanoindentation process of titanium crystal // Computational Materials Science. 2013. V. 76. P. 20–26.

MOLECULAR DYNAMIC STUDY OF THE CRATERING PROCESS DURING HIGH-VELOCITY IMPACT OF METALLIC CLUSTERS WITH A SUBSTRATE

A. V. Utkin^a and Academician of the RAS V. M. Fomin^{a,b}

*^aKhristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
Novosibirsk, Russia*

^bNovosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

In the presented work, numerical experiments were carried out in the framework of the molecular dynamics method to study the impact interaction of metallic nanoclusters of different sizes with a metallic substrate in a wide range of velocities. Analysis of the obtained data showed that the crater volume remains proportional to the impact energy and inversely proportional to the dynamic strength of the material, with the direct angle coefficient being independent of the cluster size and the cluster-substrate material.

Keywords: molecular dynamics, impact, nanostructure, nanocluster

УДК 517.977

ОПТИМИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА С ВНУТРЕННЕЙ МАССОЙ
ПРИ КВАДРАТИЧНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ© 2023 г. Академик РАН Ф. Л. Черноушко^{1,*}

Поступило 06.06.2023 г.

После доработки 06.06.2023 г.

Принято к публикации 28.07.2023 г.

Рассматривается прямолинейное движение тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы, в среде с квадратичным сопротивлением. Получены условия, при которых осуществляется поступательное движение тела с периодически изменяющейся скоростью. Определена средняя скорость этого движения. Установлены условия, обеспечивающие наибольшую среднюю скорость.

Ключевые слова: динамика, оптимизация, мобильный робот

DOI: 10.31857/S2686740023060044, **EDN:** GLNGPB

В последнее время значительное внимание в мировой литературе уделяется мобильным роботам, перемещающимся за счет движения внутренних подвижных тел. Такие роботы часто называются капсульными роботами или вибророботами, так как внутренние тела (капсулы) совершают колебательные движения относительно корпуса робота. Эти роботы имеют ряд преимуществ: они просты конструктивно, легко поддаются миниатюризации, не имеют внешних подвижных элементов, их корпуса могут быть гладкими и герметичными. Поэтому капсульные роботы нашли применение в медицине для диагностики внутренних органов и доставки медикаментов. Такие роботы могут также использоваться для аппаратов, движущихся в различных средах, для технической диагностики трубопроводов.

Одной из первых работ по этой тематике была статья [1]. В работе [2] изучалось вибрационное перемещение в поле тяжести тела с внутренней массой при квадратичном внешнем сопротивлении. Оптимальные периодические движения виброробота в средах с сопротивлением исследованы в работе [3]. Оптимизации энергозатрат при движениях вибророботов в различных средах посвящены статьи [4–7]. В работах [8, 9] исследована динамика мобильных систем с внутренними массами в средах с сопротивлением. Анализу динамики капсульной системы и оптимизации ее движений в вязкой жидкости посвящены работы [10, 11]. Материал по рассматриваемой тематике и

обзор соответствующей литературы представлены в книге [12].

В данной работе рассматривается поступательное прямолинейное движение тела с внутренней подвижной массой, которая перемещается с кусочно-постоянной скоростью относительно тела. Сопротивление внешней среды предполагается пропорциональным квадрату скорости тела и зависящим от направления движения. Построены движения тела с периодически изменяющейся скоростью. Найдены условия, соответствующие наибольшей средней скорости перемещения системы.

МЕХАНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Рассматриваемая система состоит из двух твердых тел: корпуса массы M и внутреннего тела массы m , которые движутся поступательно и прямолинейно (рис. 1). На корпус действует сила сопротивления среды (жидкости) R , пропорциональная квадрату его скорости. Внутреннее тело снабжено актуатором и движется в полости внутри корпуса. Предполагается, что, помимо силы сопротивления R и сил взаимодействия тел, других сил на систему не действует.

Обозначим через x и v смещение корпуса и его скорость относительно неподвижной системы координат, а через ξ , u и w — смещение внутреннего тела, его скорость и ускорение относительно корпуса соответственно. Имеем кинематические соотношения:

$$\dot{x} = v, \quad \dot{\xi} = u, \quad \dot{u} = w. \quad (1)$$

¹Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: chern@ipmnet.ru

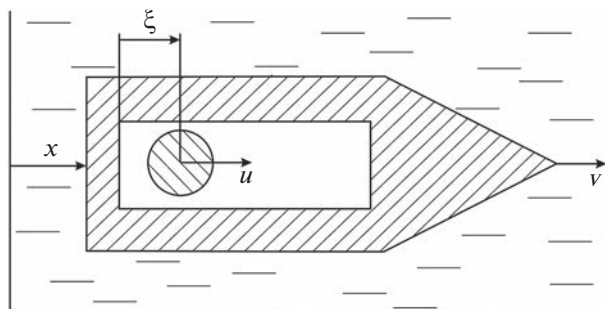


Рис. 1. Механическая система.

Обозначим через F силу, с которой корпус действует на внутреннюю массу, и запишем уравнения движения тел в виде

$$M\dot{v} = -F + R, \quad m(\dot{v} + w) = F. \quad (2)$$

Складывая уравнения (2) и вводя обозначения

$$r = \frac{R}{M + m}, \quad \mu = \frac{m}{M + m}, \quad (3)$$

получим уравнение

$$\dot{v} = -\mu w + r(v). \quad (4)$$

Нормированная сила сопротивления $r(v)$ определяется соотношениями

$$r(v) = \begin{cases} -c_+ v^2 & \text{при } v \geq 0, \\ c_- v^2 & \text{при } v < 0, \end{cases} \quad (5)$$

где c_+ и c_- — коэффициенты сопротивления при движении корпуса вперед и назад соответственно. Для пояснения смысла коэффициентов c_+ , c_- рассмотрим движение корпуса по инерции вперед при отсутствии внутреннего тела. Полагая $w = 0$ в (4) и учитывая соотношения (5) и первое уравнение (1), получим

$$\frac{dv}{dx} = -c_+ v.$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии $v = v^0$ при $x = 0$, найдем

$$v = v^0 \exp(-c_+ x). \quad (6)$$

Таким образом, коэффициенты c_+ и c_- имеют размерность, обратную длине, и могут быть представлены в виде

$$c_+ = L_+^{-1}, \quad c_- = L_-^{-1}, \quad (7)$$

где L_+ и L_- , согласно (6), есть длины, на которых скорость тела уменьшается в e раз при движении по инерции. При предпочтении движения “вперед” для тела обтекаемой формы имеем $c_+ < c_-$ и, следовательно, $L_+ > L_-$. Введем безразмерный параметр

$$\sigma = c_+/c_- = L_-/L_+ < 1. \quad (8)$$

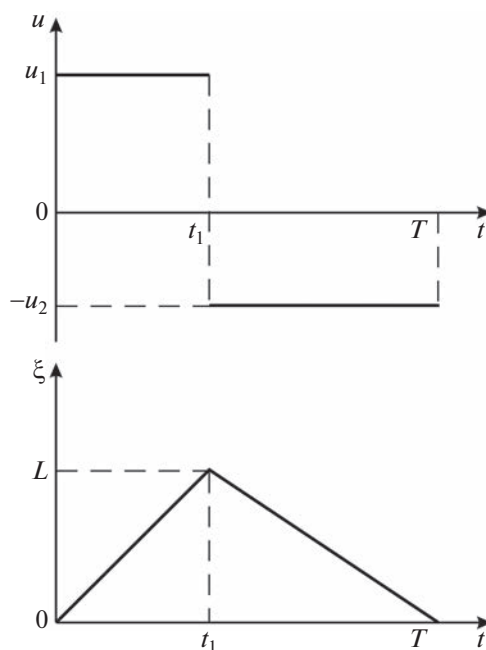


Рис. 2. Движение внутренней массы.

ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Рассмотрим следующую простейшую схему движения системы, при которой скорости изменяются периодически с периодом T . Для определенности рассматриваем движение между моментами времени непосредственно перед точками $t = 0$ и $t = T$. Скорость $u(t)$ внутреннего тела относительно корпуса считаем кусочно-постоянной и заданной в виде

$$u(t) = u_1 > 0, \quad t \in (0, t_1), \quad (9)$$

$$u(t) = -u_2 < 0, \quad t \in (t_1, t_1 + t_2),$$

где u_1 и u_2 — положительные постоянные, а t_1 и t_2 — длительности интервалов движения массы m вперед и назад, соответственно. Смещение $\xi(t)$ массы m относительно корпуса изменяется кусочно-линейно, причем в моменты $t = 0$ и $t = T$ эта масса находится на левом конце полости, а при $t = t_1$ — на ее правом конце. Обозначая через L длину полости, имеет соотношения

$$u_1 t_1 = u_2 t_2 = L, \quad t_1 + t_2 = T, \quad (10)$$

откуда следует равенство

$$L(u_1 + u_2) = T u_1 u_2. \quad (11)$$

Зависимости $u(t)$ и $\xi(t)$ изображены на рис. 2.

В моменты $t = 0$ и $t = t_1$ скорость $u(t)$ изменяется скачком, что, конечно, является упрощением возможной реальной ситуации, но позволяет получить замкнутые расчетные формулы.

Относительное ускорение $w(t)$ внутреннего тела, согласно уравнениям (9), представляется в виде суммы дельта-функций

$$w(t) = (u_1 + u_2)\delta(t) - (u_1 + u_2)\delta(t - t_1).$$

Тогда из уравнений (4) следует, что скорость корпуса $v(t)$ испытывает в моменты $t = 0$ и $t = t_1$ разнонаправленные скачки, равные по величине $\mu(u_1 + u_2)$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} v_0 &= v(-0), & v_1 &= v(+0), & v_2 &= v(t_1 - 0), \\ v_3 &= v(t_1 + 0), & v_4 &= v(T - 0) \end{aligned} \quad (12)$$

и запишем условия на скачках в виде

$$v_1 = v_0 - \mu(u_1 + u_2), \quad v_3 = v_2 + \mu(u_1 + u_2). \quad (13)$$

Ниже будет построено решение, при котором скорость $v(t)$, отвечающая заданной зависимости $u(t)$ из (9), изменяется согласно схеме, изображенной на рис. 3. В силу этого решения имеем условия

$$\begin{aligned} v(t) &< 0 & \text{при} & \quad t \in (0, t_1), \\ v(t) &> 0 & \text{при} & \quad t \in (t_1, T) \end{aligned} \quad (14)$$

и неравенства

$$\begin{aligned} 0 < v_0 < \mu(u_1 + u_2), & \quad v_1 < v_2 < 0, \\ v_3 > v_4 > 0. \end{aligned} \quad (15)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ

На интервале $t \in (0, t_1)$, согласно соотношениям (4), (5) и (14), имеем уравнение

$$\dot{v} = c_- v^2.$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии $v(+0) = v_1$ из (12), получим

$$v(t) = \frac{v_1}{1 - c_- v_1 t}, \quad t \in (0, t_1). \quad (16)$$

Подставляя $t = t_1$ в равенство (16), находим, в соответствии с (12),

$$v(t_1 - 0) = v_2 = \frac{v_1}{1 - c_- v_1 t_1}. \quad (17)$$

На интервале (t_1, T) , согласно соотношениям (4), (5) и (14), справедливо уравнение

$$\dot{v} = -c_+ v^2.$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии $v(t_1 + 0) = v_3$, вытекающем из (12), получим

$$v(t) = \frac{v_3}{1 + c_+ v_3 (t - t_1)}. \quad (18)$$

Подставим $t = t_1 + t_2$ в равенство (18) и найдем

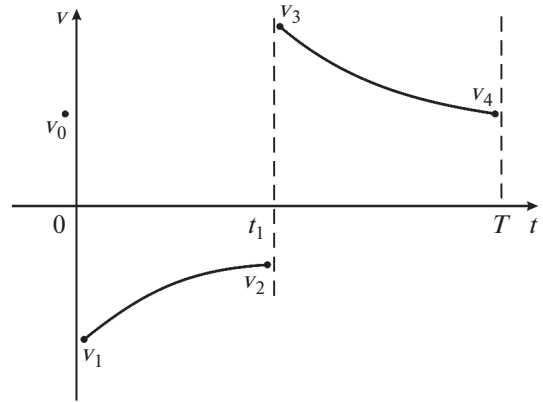


Рис. 3. Скорость корпуса.

$$v(T - 0) = v_4 = \frac{v_3}{1 + c_+ v_3 t_2}. \quad (19)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} a_1 &= c_- t_1, & a_2 &= c_+ t_2, \\ U &= \mu(u_1 + u_2), & V &= v_0 / U. \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда из соотношений (13), (17) и (19) получим:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 - U = U(V - 1), & v_2 &= \frac{v_1}{1 - a_1 v_1}, \\ v_3 &= v_2 + U, & v_4 &= \frac{v_3}{1 + a_2 v_3}. \end{aligned} \quad (21)$$

Условие периодичности скорости $v(t)$ можно представить в форме

$$v_4 = v_0. \quad (22)$$

Выразим последовательно все v_i , $i = 0, 1, 2, 3, 4$, через V при помощи формул (20), (21) и подставим их в условие периодичности (22). В результате получим квадратное уравнение для безразмерной начальной скорости V :

$$AV^2 + BV + C = 0, \quad (23)$$

коэффициенты которого выражаются формулами

$$A = a_1 - a_2 + a_1 a_2 U, \quad B = -2a_1 - a_1 a_2 U, \quad C = a_1. \quad (24)$$

Число параметров можно уменьшить, вводя безразмерные положительные величины

$$\alpha = a_2 / a_1, \quad \beta = a_2 U, \quad (25)$$

через которые выразим a_1 и a_2 при помощи формул

$$a_1 = \frac{\beta}{\alpha U}, \quad a_2 = \frac{\beta}{U}. \quad (26)$$

Разрешая квадратное уравнение (23), получим в терминах введенных параметров (25):

$$V_{\pm} = \frac{2 + \beta \pm \sqrt{4\alpha + \beta^2}}{2(1 - \alpha + \beta)}. \quad (27)$$

Согласно неравенствам (15), безразмерная скорость должна лежать в пределах

$$0 < V < 1. \quad (28)$$

Рассмотрим оба решения $V_{\pm}$, определяемые равенством (27).

Сначала рассмотрим решение V_{+} . Для выполнения условия $V_{+} > 0$ необходимо, чтобы $\beta > \alpha - 1$. Условие $V_{+} < 1$ приводит к неравенству

$$\sqrt{4\alpha + \beta^2} < \beta - 2\alpha, \quad (29)$$

которое не выполняется при $\beta \leq 2\alpha$. Если же $\beta > 2\alpha$, то из условия (29) вытекает неравенство $\beta < \alpha - 1$, которое противоречит наложенному выше условию $\beta > \alpha - 1$. Следовательно, решение V_{+} не удовлетворяет условиям (28).

Проверим выполнение условий (28) для решения

$$V = V_{-} = \frac{2 + \beta - \sqrt{4\alpha + \beta^2}}{2(1 - \alpha + \beta)}. \quad (30)$$

Пусть сначала $\beta > \alpha - 1$. Тогда знаменатель выражения (30) положителен, и для выполнения условия $V > 0$ числитель также должен быть положителен, т.е. должно быть

$$2 + \beta > \sqrt{4\alpha + \beta^2}. \quad (31)$$

Нетрудно проверить, что неравенство (31) выполняется при $\beta > \alpha - 1$. Условие $V < 1$ приводит к неравенству

$$2\alpha - \beta < \sqrt{4\alpha + \beta^2}. \quad (32)$$

При $\beta \geq 2\alpha$ неравенство (32) выполнено, а при $\beta < 2\alpha$ оно приводится к условию

$$4\alpha^2 - 4\alpha\beta < 4\alpha,$$

которое выполняется при $\beta > \alpha - 1$. Таким образом, при $\beta > \alpha - 1$ оба неравенства (28) выполнены.

Рассмотрим теперь случай $\beta < \alpha - 1$. Чтобы имело место неравенство $V > 0$, числитель выра-

жения (30) должен быть отрицателен, как и его знаменатель. Это условие приводит к неравенству, противоположному неравенству (31), и оно выполняется при $\beta < \alpha - 1$. Проверка условия $V < 1$ приводит к неравенству, противоположному неравенству (32), и выполняется в рассматриваемом случае $\beta < \alpha - 1$.

Итак, решение (30) удовлетворяет условиям (28) при любых α, β , если $\beta \neq \alpha - 1$.

Особый случай $\beta = \alpha - 1$ приводит в равенстве (30) к неопределенности вида 0/0. Для его разрешения положим $\alpha = \beta + 1 + \varepsilon$ в равенстве (30) и затем перейдем в нем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В результате получим

$$V = (\beta + 2)^{-1} < 1 \quad \text{при} \quad \beta = \alpha - 1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Подсчитаем полное перемещение $x(T)$ за период движения T . Сначала найдем перемещение $x(t_1)$ на интервале $(0, t_1)$. Интегрируя скорость $v(t)$, определяемую соотношением (16), получим

$$x(t_1) = \int_0^{t_1} \frac{v_1 dt}{1 - c_- v_1 t} = -\frac{1}{c_-} \ln(1 - c_- v_1 t_1). \quad (33)$$

Аналогично, используя равенство (18) для скорости $v(t)$ на интервале (t_1, T) , найдем перемещение на этом интервале:

$$x(T) - x(t_1) = \int_{t_1}^T \frac{v_3 dt}{1 + c_+ v_3(t - t_1)} = \frac{1}{c_+} \ln(1 + c_+ v_3 t_2). \quad (34)$$

Полное перемещение за период запишем, складывая равенства (33) и (34) и используя обозначения (7) и (20):

$$x(T) = -L_- \ln(1 - a_1 v_1) + L_+ \ln(1 + a_2 v_3). \quad (35)$$

В равенство (35) подставим соотношения для v_1 и v_3 из (21), выраженные через параметры U, V, a_1 и a_2 при помощи равенств (20). Затем преобразуем полученное выражение, используя соотношения (26) и формулу (30) для V . После преобразований получим

$$x(T) = -L_- \ln \frac{2\alpha(1 - \alpha) + \beta^2 + \beta\sqrt{4\alpha + \beta^2}}{2\alpha(1 - \alpha + \beta)} + L_+ \ln \frac{(2\alpha + \beta^2)(1 - \alpha) + \beta^3 + 2\alpha\beta + \beta(1 - \alpha + \beta)\sqrt{4\alpha + \beta^2}}{2\alpha(1 - \alpha) + \beta^2 + \beta\sqrt{4\alpha + \beta^2}}. \quad (36)$$

Выражению (36) можно придать более компактную форму, если заметить, что числитель во втором слагаемом можно разложить на множители и ввести функции

$$\begin{aligned}\Phi_1(\alpha, \beta) &= 1 - \alpha + \beta, \\ \Phi_2(\alpha, \beta) &= 2\alpha(1 - \alpha) + \beta^2 + \beta\sqrt{4\alpha + \beta^2}, \\ \Phi_3(\alpha, \beta) &= 2\alpha + \beta^2 + \beta\sqrt{4\alpha + \beta^2}.\end{aligned}\quad (37)$$

Учитывая еще обозначение (8), получим из (36):

$$x(T) = L_+ \left(-\sigma \ln \frac{\Phi_2}{2\alpha\Phi_1} + \ln \frac{\Phi_1\Phi_3}{\Phi_2} \right). \quad (38)$$

Преобразуем выражения (25) для α и β при помощи равенств (20), (7), (8), (10) и (11):

$$\alpha = \frac{\sigma u_1}{u_2}, \quad \beta = \frac{\mu u_1 T}{L_+}. \quad (39)$$

Естественно предполагать, что параметр μ , введенный в (3), является малым, и поэтому безразмерный параметр β из (39) также можно считать малым.

Задаваясь скоростями u_1 и u_2 , можно определить длительности интервалов t_1 и t_2 при помощи формул (10) и параметры α, β согласно (39). Тем самым все периодическое движение однозначно определено, и перемещение $x(T)$ за период дается формулами (37) и (38).

Средняя скорость движения системы определяется равенством

$$\bar{v} = x(T)/T. \quad (40)$$

ОПТИМИЗАЦИЯ СРЕДНЕЙ СКОРОСТИ

Предполагаем, что относительная скорость внутреннего тела ограничена заданной постоянной:

$$u_1 \leq u, \quad u_2 \leq u. \quad (41)$$

Заметим, что из соотношений (10) и (41) вытекает неравенство

$$T = \frac{L}{u_1} + \frac{L}{u_2} \geq \frac{2L}{u},$$

откуда следует ограничение на параметры системы:

$$k = \frac{uT}{L} \geq 2. \quad (42)$$

Будем рассматривать два варианта задачи оптимизации средней скорости (40) за счет выбора скоростей u_1 и u_2 при ограничениях (41). В первом варианте длительность интервала T предполагается фиксированной, а во втором варианте она произвольна.

Рассмотрим сначала частный случай $\alpha = 1$, когда формулы (37) значительно упрощаются. В этом случае из соотношений (37) получим

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \beta, \quad \Phi_2 = \beta^2 + \beta\sqrt{4 + \beta^2}, \\ \Phi_3 &= 2 + \beta^2 + \beta\sqrt{4 + \beta^2} = \Phi_2^2/(2\beta^2).\end{aligned}$$

Подставляя эти равенства в формулу (38) при $\alpha = 1$, найдем

$$x(T) = L_+(1 - \sigma) \ln \frac{\beta + \sqrt{4 + \beta^2}}{2}.$$

Считая β малым, получим отсюда

$$x(T) = \frac{\beta(1 - \sigma)L_+}{2}. \quad (43)$$

Из формул (39) при $\alpha = 1$ имеем

$$u_2 = \sigma u_1 \quad (\sigma < 1). \quad (44)$$

Подставляя равенство (44) в соотношение (11), определим

$$u_1 = \frac{L(1 + \sigma)}{\sigma T}. \quad (45)$$

Для выполнения ограничений (41) необходимо потребовать

$$L(1 + \sigma) \leq \sigma T u,$$

что приводит к условию

$$k \geq \frac{\sigma + 1}{\sigma}, \quad (46)$$

где k введено равенством (42). Равенство (43) с учетом второй из формул (44) принимает вид

$$x(T) = \frac{\mu(1 - \sigma^2)L}{2\sigma},$$

а средняя скорость (40) определяется равенством

$$\bar{v} = \frac{\mu(1 - \sigma^2)L}{2\sigma T}. \quad (47)$$

Итак, если $\alpha = 1$ и выполнено неравенство (46), то при фиксированном T скорости u_1 и u_2 определяются равенствами (44), (45), а средняя скорость $\bar{v}$ выражается формулой (47). Если же неравенство (46) не имеет места, то при $\alpha = 1$ движение с ограничениями невозможно.

Пусть теперь $\alpha = 1$ и период T не фиксирован. Подставим в формулу (47) величину T из соотношения (45) и получим

$$\bar{v} = \frac{\mu(1 - \sigma)u_1}{2}.$$

Следовательно, максимальная средняя скорость $\bar{v}$ при $\alpha = 1$ и нефиксированном T достигается при наибольшем допустимом u_1 , т.е. при $u_1 = u$ и, согласно (44), при $u_2 = \sigma u$, и равна

$$\bar{v} = \frac{\mu(1-\sigma)u}{2}. \quad (48)$$

Обратимся к общему случаю произвольного $\alpha \neq 1$, считая β малым. Разложим функции (37) в ряды по параметру β , ограничиваясь членами первого порядка малости. Получим

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= 1 - \alpha + \beta, \\ \Phi_2 &= 2\alpha(1 - \alpha) + 2\beta\sqrt{\alpha} + \dots, \\ \Phi_3 &= 2\alpha + 2\beta\sqrt{\alpha} + \dots\end{aligned}$$

Подставим эти разложения в формулу (38) и получим после упрощений

$$x(T) = \beta L_+ \varphi(z), \quad (49)$$

где введены обозначения

$$z = \sqrt{\alpha}, \quad \varphi(z) = \frac{z - \sigma}{z(z + 1)}. \quad (50)$$

Подставляя соотношение (39) для β в равенство (49), получим

$$x(T) = \mu u_1 T \varphi(z). \quad (51)$$

Из первого равенства (39), с учетом обозначений (50), имеет

$$u_2 = \sigma u_1 z^{-2}. \quad (52)$$

Пусть сначала период T фиксирован. Тогда на скорости u_1 и u_2 наложена связь, выражаемая равенством (11). Из этого равенства и соотношения (52) вытекает соотношение

$$u_1 = \frac{L(z^2 + \sigma)}{\sigma T}. \quad (53)$$

Подставляя равенство (53) в формулу (51), найдем среднюю скорость (40) в виде

$$\bar{v} = \frac{x(T)}{T} = \frac{\mu L \psi(z)}{\sigma T}, \quad \psi(z) = (z^2 + \sigma)\varphi(z), \quad (54)$$

где $\varphi(z)$ определено в соотношениях (50).

Дифференцируя функцию $\psi(z)$, получим

$$\psi'(z) = \frac{z^4 + 2z^2(z - \sigma) + 2\sigma^2 z + \sigma^2}{z^2(z + 1)^2} > 0.$$

Очевидно, что это неравенство справедливо при $z \geq \sigma$, поэтому функция $\psi(z)$ монотонно возрастает при $z \geq \sigma$. Следовательно, максимальная средняя скорость $\bar{v}$ из (54) реализуется при максимальном $z \geq \sigma$, совместимом с ограничениями (41). Полагая $u_1 = u$, определим z из равенства (53) в виде

$$z = \sqrt{\left(\frac{uT}{L} - 1\right)\sigma} = \sqrt{(k-1)\sigma}, \quad (55)$$

где k введено формулой (42). Заметим, что так как $k \geq 2$ согласно (42) и $\sigma < 1$, то значение z из (55)

лежит в области $z \geq \sigma$. Используя формулы (52) и (55), получим оптимальные значения скоростей u_1 и u_2 в виде

$$u_1 = u, \quad u_2 = u/(k-1) \leq u \quad (k \geq 2). \quad (56)$$

Подставляя оптимальное значение z из (55) в равенство (54) и учитывая равенство (42), получим максимальную величину средней скорости при фиксированном T :

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{\mu L k (\sqrt{k-1} - \sqrt{\sigma})}{T \sqrt{k-1} [\sqrt{\sigma(k-1)} + 1]} = \\ &= \frac{\mu u (\sqrt{k-1} - \sqrt{\sigma})}{\sqrt{k-1} [\sqrt{\sigma(k-1)} + 1]}.\end{aligned} \quad (57)$$

Обратимся к случаю нефиксированного T . Используя равенство (51), выразим среднюю скорость (40) в виде соотношения

$$\bar{v} = \frac{x(T)}{T} = \mu u_1 \varphi(z). \quad (58)$$

Дифференцируя функцию $\varphi(z)$ из (50), получим

$$\varphi'(z) = \frac{-z^2 + 2\sigma z + \sigma}{z^2(z+1)^2}.$$

Отсюда следует, что единственный максимум функции $\varphi(z)$ при $z > 0$ достигается при

$$z = z_* = \sqrt{\sigma(\sigma+1)} + \sigma = \sqrt{\sigma}(\sqrt{\sigma+1} + \sqrt{\sigma}). \quad (59)$$

Выбирая максимально возможную величину u_1 , получим из (52)

$$u_1 = u, \quad u_2 = \sigma u z_*^{-2} = u(\sqrt{\sigma+1} + \sqrt{\sigma})^{-2} < u. \quad (60)$$

Подставляя значения u_1 и u_2 из (60) в равенство (58), имеем:

$$\bar{v} = \frac{\mu u}{(\sqrt{\sigma+1} + \sqrt{\sigma})^2}. \quad (61)$$

Таким образом, максимальное значение средней скорости $\bar{v}$ определено равенствами (57) и (61) при фиксированном и нефиксированном значении периода T соответственно. Оптимальные значения скоростей внутреннего тела u_1 и u_2 заданы равенствами (56) и (60) для соответствующих случаев.

Отметим, что оптимальное значение периода T в случае нефиксированного T можно определить, подставляя значения u_1 и u_2 из (60) в равенство (11). Получим

$$T = 2Lu^{-1}\sqrt{\sigma+1}(\sqrt{\sigma+1} + \sqrt{\sigma}).$$

Можно проверить, что, как и следовало ожидать, найденные оптимальные значения $\bar{v}$ больше или равны соответствующих значений (47) и (48), полученных в частном случае $\alpha = 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены соотношения, определяющие поступательное периодическое движение тела с внутренней подвижной массой в среде с квадратичным сопротивлением. Вычислены параметры движения, определена его средняя скорость. Найдены условия, определяющие максимальную среднюю скорость поступательного движения при различных ограничениях. Полученные результаты могут представлять интерес для управления подвижными аппаратами.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00128, <https://rscf.ru/project/23-11-00128/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нагаев Р.Ф., Тамм Е.А. Вибрационное перемещение в среде с квадратичным сопротивлением движению // *Машиноведение*. 1980. № 4. С. 3–8.
2. Герасимов С.А. О вибрационном полете симметричной системы // *Известия вузов. Машиностроение*. 2005. № 8. С. 3–7.
3. Черноусько Ф.Л. Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // *Прикладная математика и механика*. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 202–215.
4. Егоров А.Г., Захарова О.С. Оптимальное по энергетическим затратам движение виброробота в среде с сопротивлением // *Прикладная математика и механика*. 2010. Т. 74. Вып. 4. С. 620–632.
5. Егоров А.Г., Захарова О.С. Оптимальное квазистационарное движение виброробота в вязкой среде // *Известия вузов. Математика*. 2012. № 2. С. 57–64.
6. Liu Y., Wiercigroch M., Pavlovskaya E., Yu. Y. Modeling of a vibro-impact capsule system // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2013. V. 66. P. 2–11.
7. Liu Y., Pavlovskaya E., Hendry D., Wiercigroch M. Optimization of the vibroimpact capsule system // *Journal of Mechanical Engineering*. 2016. V. 62. P. 430–439.
8. Fang H.B., Xu J. Dynamics of a mobile system with an internal acceleration-controlled mass in a resistive medium // *Journal of Sound and Vibration*. 2011. V. 330. P. 4002–4018.
9. Xu J., Fang H. Improving performance: recent progress on vibration-driven locomotion systems // *Nonlinear Dynamics*. 2019. V. 98. P. 2651–2669.
10. Tahmasian S., Jafaryzad A., Bulzoni N.L., Staples A.E. Dynamic analysis and design optimization of a drag-based vibratory swimmer // *Fluids*. 2020. V. 5. № 1. <https://doi.org/10.3390/fluids5010038>
11. Tahmasian S. Dynamic analysis and optimal control of a drag-based vibratory systems using averaging // *Nonlinear Dynamics*. 2021. V. 104. P. 2201–2217.
12. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н. Динамика мобильных систем с управляемой конфигурацией. М.: Физматлит, 2022. 464 с.

OPTIMIZATION OF THE MOTION OF A BODY WITH AN INTERNAL MASS UNDER QUADRATIC RESISTANCE

Academician of the RAS F. L. Chernousko^a

^aA.Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Rectilinear motion of a body controlled by a movable internal mass in a medium with a quadratic resistance is considered. Conditions are obtained that ensure translation of the body with a velocity changing periodically. The average speed of the motion is determined. Conditions that guarantee the maximum average speed are established.

Keywords: dynamics, optimization, mobile robot

УДК 621.3.029.6

МОНОЛИТНЫЙ ФИЛЬТР С ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЧАСТОТОЙ ПОЛОСЫ ПРОПУСКАНИЯ 10 ГГц НА ПОЛОСКОВЫХ РЕЗОНАТОРАХ С РАСЩЕПЛЕННЫМ ПРОВОДНИКОМ

© 2023 г. И. В. Говорун^{1,2}, Б. А. Беляев^{2,3,*}, Я. Б. Завьялов³, Т. Ю. Шумилов³,
А. О. Афонин¹, А. В. Угрюмов¹, Р. Г. Галеев²

Представлено академиком РАН В.Ф. Шабановым 21.04.2023 г.

Поступило 21.04.2023 г.

После доработки 21.04.2023 г.

Принято к публикации 26.07.2023 г.

Монолитная конструкция миниатюрного полосно-пропускающего фильтра, разработанная для сантиметрового диапазона длин волн, изготовлена по технологии многослойных печатных плат. Четвертьволновые полосковые резонаторы фильтра имеют по два проводника, разделенных склеивающим конструкцией слоем препрега, что нивелирует влияние его низких параметров на характеристики устройств, обеспечивая тем самым хорошую повторяемость фильтров в серийном производстве. Для увеличения ширины высокочастотной полосы заграждения один из проводников каждого резонатора разрезан пополам поперечной щелью. Измеренные характеристики опытного образца фильтра пятого порядка, конструктивные размеры которого получены параметрическим синтезом с использованием электродинамического анализа его 3D-модели, хорошо согласуются с расчетом. Центральная частота полосы пропускания устройства $f_0 \approx 10$ ГГц, ее относительная ширина $\Delta f/f_0 = 5.7\%$, габариты $18.0 \times 5.4 \times 2.1$ мм, а масса всего лишь 0.5 г. Важным достоинством разработанной конструкции является возможность ее установки на СВЧ-плате методом поверхностного монтажа.

Ключевые слова: полосно-пропускающий фильтр, амплитудно-частотная характеристика, потери на отражение, прямые потери, волновое сопротивление, слоистая структура

DOI: 10.31857/S268674002306007X, EDN: GLQEEN

Хорошо известно, что важнейшими устройствами современных радиотехнических систем передачи, приема и обработки сигналов являются полосно-пропускающие фильтры, от которых зависит не только качество радиоаппаратуры, но и ее габариты и даже цена. Поэтому разработка новых миниатюрных конструкций фильтров, обладающих высокими частотно-селективными свойствами, технологичностью и низкой стоимостью при массовом производстве, является важной и актуальной задачей. Для ее решения в настоящее время активно исследуются конструкции на полосковых многопроводниковых резонансных

структурах [1, 2], которые обладают не только рекордной миниатюрностью среди электродинамических резонаторов, но и сравнительно высокой собственной добротностью. Широкое распространение в настоящее время получило перспективное направление, связанное с применением гибридной технологии создания многослойных интегральных схем СВЧ на основе керамики с низкой температурой отжига (Low Temperature Cofired Ceramics – LTCC) [3–6], а также оригинальная технология интегрирования в подложку волноводов (Substrate Integrated Waveguide – SIW) [7–9]. При этом среди всех известных подходов, используемых для изготовления планарных СВЧ-фильтров, особо выделяется технология многослойных печатных плат (Printed Circuit Board – PCB) [10–13], обладающая возможностью организации массового производства монолитных конструкций [14].

В технологии PCB для соединения прессованным диэлектрических пластин с рисунками полосковых проводников на поверхностях используется специальный материал – препрег, диэлектриче-

¹Институт физики им. Л.В. Киренского
Сибирского отделения Российской академии наук,
Красноярск, Россия

²Сибирский государственный университет науки
и технологий им. академика М.Ф. Решетнева,
Красноярск, Россия

³Сибирский федеральный университет,
Красноярск, Россия

*E-mail: belyaev@iph.krasn.ru

ские потери которого выше диэлектрических потерь основных слоев. Это является недостатком технологии, так как снижает собственную добротность резонаторов, ухудшая тем самым характеристики фильтров. Вторым недостатком связан с тем, что в процессе прессования слоистой структуры толщина препрега неконтролируемо изменяется по площади в соответствии с рисунком и толщиной полосковых проводников, приводя к изменению не только резонансных частот, но и величины связей между резонаторами. В дециметровом и метровом диапазонах изменение толщины препрега практически не отражается на характеристиках фильтров [14, 15], однако на частотах выше 4 ГГц проводники резонаторов сильно укорачиваются, и влияние препрега становится критическим, недопустимо снижая повторяемость устройств в серии. В работе рассматривается новый подход конструирования монолитных полосковых фильтров, позволяющий в значительной степени нивелировать влияние препрега, даже в сантиметровом диапазоне длин волн.

КОНСТРУКЦИИ МОНОЛИТНЫХ ЧЕТВЕРТЬВОЛНОВЫХ ПОЛОСКОВЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Рассмотрим регулярный полосковый четвертьволновый резонатор **I** (рис. 1а), выполненный по технологии РСВ посредством прессования двух диэлектрических пластин (1 и 2), между которыми находится связующий слой препрега (3). Медный проводник резонатора (4) располагается между верхней пластиной (2) и слоем препрега (3). Роль корпуса-экрана выполняет наружная металлизация поверхностей диэлектрических пластин (5). Очевидно, что в такой конструкции параметры препрега (его толщина h_p и тангенс угла диэлектрических потерь $\operatorname{tg}\delta_p$) будут оказывать непосредственное влияние на характеристики резонатора, в частности, на его собственную добротность и резонансную частоту. Однако, как известно [16], влияние препрега существенно ослабляется, если проводник резонатора расщепить, разместив препрег между металлическими слоями 4 и 6 (конструкция **II** рис. 1а), соединенными с экраном смежными концами только с одной стороны.

В такой конструкции на частоте четвертьволнового резонанса разность потенциалов между противоположными точками на верхнем и нижнем проводнике равна нулю, поэтому влияние параметров препрега на характеристики резонатора сильно ослабляется. Но важно отметить, что вблизи основного резонанса конструкции **II** (рис. 1а), наблюдаемого на частоте f_1 , существует паразитный резонанс на более высокой частоте f_2 , соответствующий колебаниям в четвертьволновом резонаторе, образованном слоем препрега и двумя со-

направленными проводниками 4 и 6 на его поверхностях. Свободные концы этих проводников на частоте f_2 имеют противоположные потенциалы, а СВЧ-токи направлены навстречу друг другу [17]. В результате высокочастотная полоса заграждения фильтра, построенного на таких резонаторах, сужается, а для ее расширения, очевидно, необходимо значительно увеличить частоту f_2 без изменения частоты f_1 . Это удастся осуществить, сделав поперечную щель на верхнем проводнике двухпроводникового резонатора на расстоянии l_s от свободного конца (см. конструкцию **III** на рис. 1а).

Вышесказанное подтверждают результаты исследований (рис. 1б, в), проведенных с использованием электродинамического анализа 3D-моделей резонаторов в пакете программ CST Studio Suite. Для объективного сравнения, конструктивные параметры моделей резонаторов были одинаковыми, в частности, ширина полосковых проводников резонаторов $w = 2$ мм. При этом использовались характеристики реальных металлизированных диэлектрических пластин и препрега. Пластины резонаторов из материала RO4350B с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_R = 3.66$ и тангенсом угла диэлектрических потерь $\operatorname{tg}\delta_R = 0.0037$ имели толщину 0.762 мм и 1.44 мм. Препрег из материала RO4450F с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_p = 3.52$ и $\operatorname{tg}\delta_p = 0.0041$ имел толщину слоя $h_p = 0.122$ мм. Длинной полоскового проводника l_R резонаторы настраивались на одинаковую частоту первой (четвертьволновой) моды колебаний $f_1 = 10$ ГГц.

Как и следовало ожидать, при фиксированной толщине препрега $h_p = 0.122$ мм собственная добротность всех резонаторов с увеличением $\operatorname{tg}\delta_p$ в интервале 0.004–0.050 монотонно уменьшается (рис. 1б). Причем для первой конструкции наблюдается уменьшение в 2.4 раза, для второй в 1.7, а для третьей ровно в 2 раза в случае, когда щель величиной 0.1 мм делит верхний проводник пополам. На рис. 1в представлены зависимости поведения резонансной частоты исследуемых трех конструкций, построенные при изменении исходной толщины препрега $h_p = 0.122$ мм в пределах 0.01–0.24 мм, но при фиксированной величине $\operatorname{tg}\delta_p = 0.0041$. При этом самые большие изменения резонансной частоты наблюдаются только у первой конструкции: с уменьшением h_p вверх по частоте на $\sim 1.3\%$, а с увеличением h_p на $\sim 0.9\%$ вниз по частоте. Отметим, что собственная добротность Q_1 резонанса конструкции **II** (см. рис. 1а) во всем интервале изменения h_p остается практически постоянной, а у **I** и **III** конструкций с уменьшением h_p она увеличивается на $\sim 3\%$, а с увеличением h_p уменьшается на $\sim 0.5\%$.

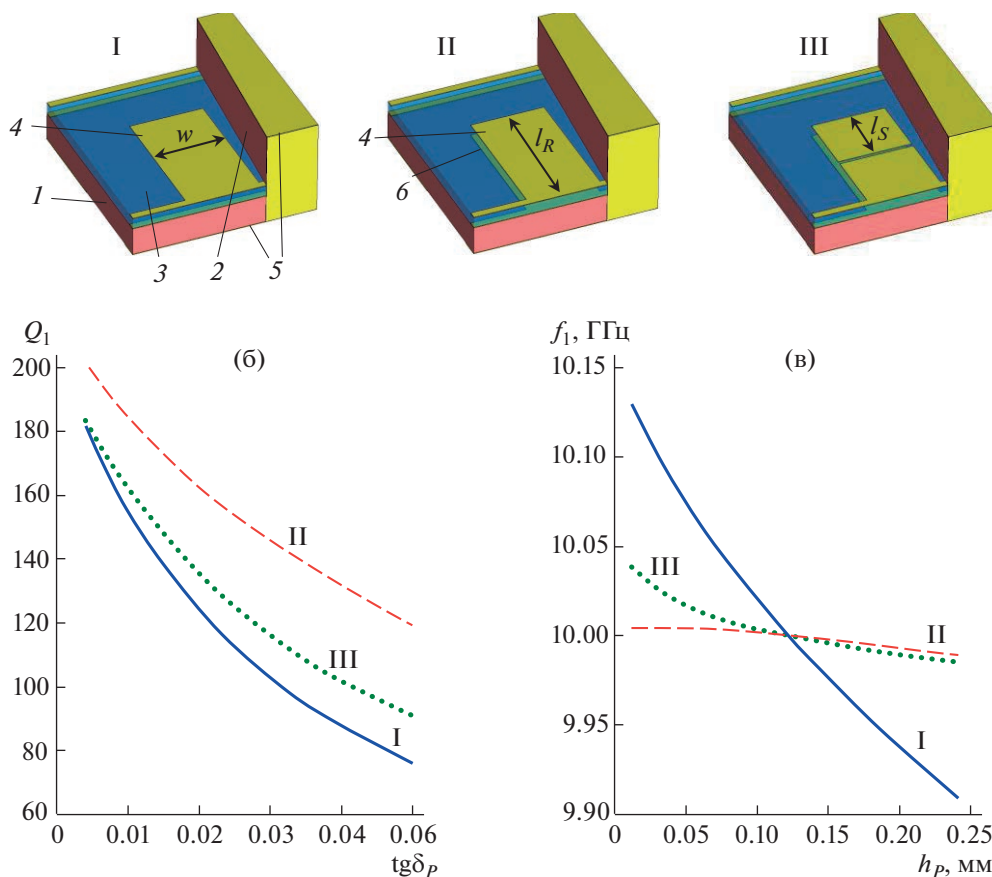


Рис. 1. Три конструкции монолитных четвертьволновых полосковых резонаторов (а), зависимости собственной добротности их резонансов от тангенса угла диэлектрических потерь препрега (б) и зависимости резонансных частот от толщины препрега (в).

ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУХЗВЕННЫХ ФИЛЬТРОВ НА МОНОЛИТНЫХ РЕЗОНАТОРАХ

Для сравнения характеристик полос заграждения фильтров, построенных на исследованных резонаторах, были сконструированы устройства второго порядка параметрическим синтезом 3D-моделей простейших двухзвенных структур в пакете программ CST Studio Suite. Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) фильтров, демонстрирующие частотные зависимости потерь на прохождение $S_{21}(f)$, представлены на рис. 2а. Синтезированные фильтры имеют одинаковую центральную частоту полосы пропускания $f_1 = 10$ ГГц и ее относительную ширину $\Delta f/f_1 = 5\%$, измеренную по уровню -3 дБ от уровня минимальных потерь. Вход и выход каждого устройства подключены кондуктивно к портам с волновым сопротивлением 50Ω . Настройка фильтров осуществлялась подбором длины полосковых проводников, зазоров между ними и величины кондуктивной связи резонаторов с портами так, чтобы максимум отра-

женной СВЧ-мощности в полосе пропускания находился на уровне -14 дБ.

На рис. 2а хорошо видно, что лучшими характеристиками в полосах заграждения обладает фильтр на резонаторах конструкции III (см. рис. 1а), в которых щель делит верхние полосковые проводники пополам, а худшими — на резонаторах конструкции II, из-за паразитного резонанса, расположенного вблизи полосы пропускания на частоте f_2 , природа которого была объяснена выше. На рис. 2б сплошной линией показана зависимость отношения частот паразитного f_2 и основного f_1 резонансов от относительного положения щели l_S/l_R на верхнем проводнике резонатора конструкции III (см. рис. 1а). Перемещение щели от свободного конца полоскового проводника к замкнутому на экран концу приводит к стремительному увеличению частоты паразитного резонанса f_2 , а частота основного резонанса f_1 при этом остается практически неизменной. В результате происходит значительное расширение высокочастотной полосы заграждения фильтра.

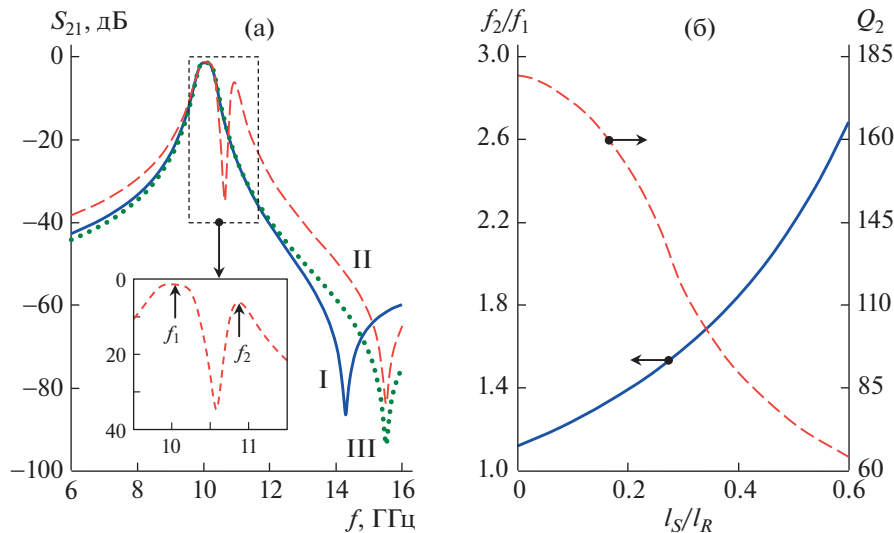


Рис. 2. АЧХ фильтров второго порядка, синтезированных на резонаторах различных конструкций (а). Зависимости добротности паразитного резонанса Q_2 и отношения частот паразитного f_2 и основного f_1 резонансов от относительного положения щели l_S/l_R на верхнем проводнике резонатора конструкции **III** (см. рис. 1а) (б).

Отметим, что с увеличением l_S/l_R наблюдается сильное падение собственной добротности паразитного резонанса Q_2 (штриховая линия на рис. 2б), что также улучшает характеристики полосы заграждения. В исследуемом интервале изменения l_S/l_R добротность Q_2 уменьшается в три раза, однако добротность Q_1 при этом почти не изменяется.

Факт уменьшения добротности Q_2 можно объяснить эффектом демпфирования колебаний в резонаторе при подключении к нему отрезка линии с потерями. Этот эффект подробно исследован в [18] на микрополосковых резонаторах, в которых демпфирующий отрезок линии создавался оголением тонкого адгезионного подслоя хрома путем удаления меди на небольшом участке по длине полоскового проводника, расположенного вблизи пучности электрического поля. Было показано, что с увеличением длины этого участка добротность резонанса уменьшается в несколько раз, причем установленный в [18] характер изменения добротности от длины демпфирующего отрезка линии хорошо согласуется с зависимостью $Q_2(l_S/l_R)$ (см. рис. 2б). В нашем исследовании отрезок демпфирующей линии в резонаторе конструкции **III** (см. рис. 1а), ограниченный полосковым проводником длиной l_S и его шириной w , связан с четвертьволновым резонатором емкостью поперечной щели, величина которой в рассматриваемой модели ~ 1.6 пФ. Очевидно, что с увеличением l_S пропорционально увеличивается длина демпфирующего отрезка и одновременно повышается его емкостная связь с резонатором, из-за быстрого роста резонансной частоты f_2 (см.

рис. 2б). В результате растет демпфирование колебаний в резонаторе, поэтому снижается его добротность.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЫТНОГО ОБРАЗЦА ФИЛЬТРА ПЯТОГО ПОРЯДКА

Для экспериментальной проверки работоспособности монолитного устройства выбрана конструкция фильтра пятого порядка, построенного на исследованном резонаторе **III**, электродинамическая 3D-модель которого представлена на рис. 3а. В качестве диэлектрических пластин и препрега в модели фильтра использовались те же материалы, характеристики которых и значения толщин слоев были приведены выше. Ширина проводников резонаторов одинакова $w = 2$ мм, как и ширина щелей 0.1 мм, а также их относительное расположение $l_S/l_R = 0.24$.

Параметрическим синтезом в пакете программ CST Studio Suite были определены конструктивные параметры модели, подключенной к портам с волновым сопротивлением 50Ω , по заданной центральной частоте полосы пропускания $f_0 = 10$ ГГц и ее ширине $\Delta f = 570$ МГц, измеренной по уровню -3 дБ. При этом максимумы отраженной СВЧ-мощности в полосе пропускания не должны были превышать уровень -20 дБ. В результате синтеза длина полосковых проводников наружных резонаторов составила 3.46 мм, следующих за ними 3.31 мм, а проводника центрального резонатора 3.29 мм. Величина зазоров между проводниками наружных пар резонаторов получилась 0.85 мм, а между проводниками остальных внутренних резонаторов 1.25 мм. По-

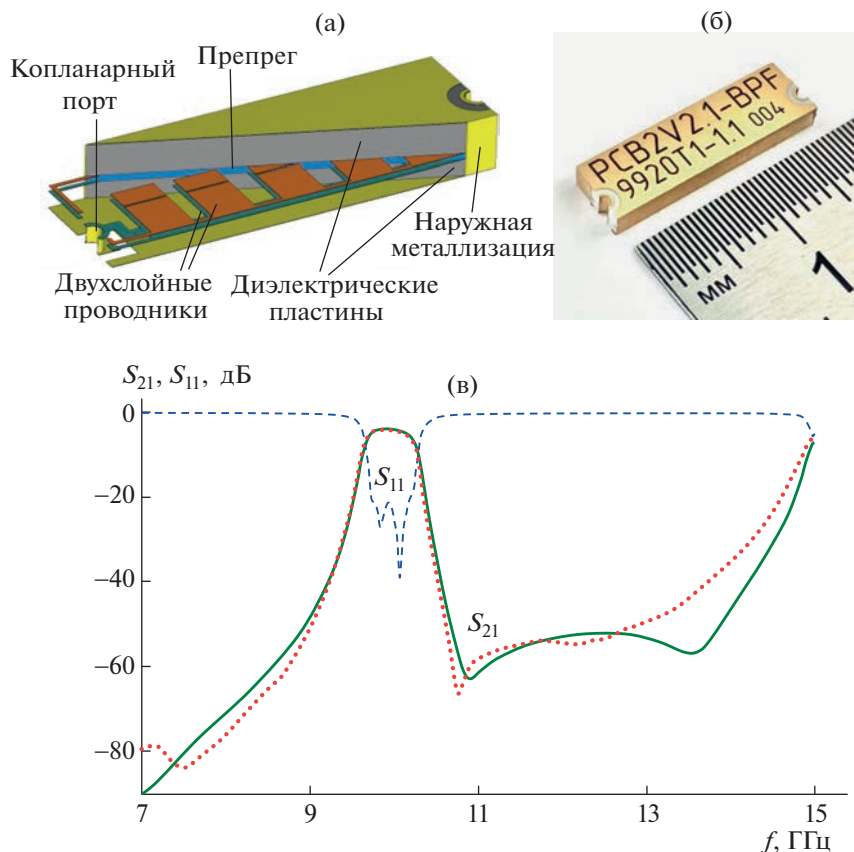


Рис. 3. 3D-модель монолитного фильтра пятого порядка (а), фотография опытного образца (б) и АЧХ устройства (в), линии — расчет, точки — эксперимент.

лученные конструктивные параметры использовались для изготовления серии опытных образцов монолитных фильтров по технологии многослойных печатных плат, фотография одного из них показана на рис. 3б. Размеры фильтра $18.0 \times 5.4 \times 2.1$ мм или $0.6\lambda_0 \times 0.18\lambda_0 \times 0.07\lambda_0$ (λ_0 — длина волны в вакууме на центральной частоте полосы пропускания), а масса устройства всего 0.5 г.

На рис. 3в приведены рассчитанные частотные зависимости прямых потерь $S_{21}(f)$ (сплошная линия) и потерь на отражение $S_{11}(f)$ (штриховая линия) исследуемого фильтра, точками показаны результаты измерений изготовленного опытного образца. Видно хорошее совпадение рассчитанных и измеренных характеристик. Измеренная центральная частота полосы пропускания составила $f_0 = 9.98$ ГГц, а относительная ширина полосы пропускания, измеренная по уровню -3 дБ, $\Delta f/f_0 = 5.7\%$. Ширина высокочастотной полосы заграждения по уровню -40 дБ простирается почти до 14 ГГц. Минимальное затухание СВЧ-мощности в полосе пропускания фильтра составило 4.2 дБ, а уровень отражений в полосе пропускания не превышает -20 дБ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, разработана монолитная конструкция миниатюрного полоскового полосно-пропускающего фильтра сантиметрового диапазона длин волн, предназначенная для серийного производства по технологии многослойных печатных плат. Особенностью конструкции являются четвертьволновые резонаторы с расщепленными препрегом двухслойными полосковыми проводниками, в которых один из проводников разрезан поперечной щелью. Показано, что собственная добротность четвертьволнового полоскового резонатора с двухслойным проводником существенно выше традиционного резонатора с однослойным проводником, а поперечная щель в одном из проводников значительно расширяет высокочастотную полосу заграждения устройства. На многослойной печатной плате площадью 460×610 мм разместилось 480 штук фильтров, из которых у 390 штук отклонение центральной частоты от 10 ГГц не превышало ± 25 МГц, ширина полосы пропускания не выходила из интервала 570 ± 5 МГц, а минимальные потери в полосе пропускания изменялись в пределах 4.2 ± 0.2 дБ. У остальных фильтров, расположенных преиму-

щественно по краям печатной платы, отклонения были примерно в два раза больше.

Низкая стоимость исследованных фильтров при массовом производстве, а также высокая повторяемость характеристик даже в сантиметровом диапазоне длин волн, подтвержденная хорошим совпадением теоретических и измеренных АЧХ, доказывают перспективность использования разработанной конструкции в радиотехнических системах.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках Соглашения № 470 от 30.08.2022 г. между ИФ СО РАН, Краевым фондом науки и “АО” НПП “Радиосвязь”, по конкурсу научно-технических и инновационных проектов в интересах первого климатического Научно-образовательного центра “Енисейская Сибирь”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Belyaev B.A., Serzhantov A.M., Leksikov A.A., Bal'va Y.F., Leksikov An.A. Novel High-Quality Compact Microstrip Resonator and its Application to Bandpass Filter // IEEE Microwave and Wireless Components Letters. 2015. № 9. P. 579–581.
2. Belyaev B.A., Serzhantov A.M., Leksikov A.A., Bal'va Y.F., Leksikov An.A. Multilayered multiconductor stripline resonator and its application to bandpass filter with wide stopband // Microwave and Optical Technology Letters. 2017. V. 59. P. 2212–2216.
3. Вендик И.Б., Холодник Д.В., Симин А.В. Многослойные интегральные схемы сверхвысоких частот на основе керамики с низкой температурой обжига // Компоненты и технологии. 2005. № 5. С. 190–196.
4. Kholodnyak D., Kolmakov Ya., Vendik I., Trabert J.F., Mueller J., Druce K.-H., Hein M.A. Bandpass Filters for Ka-Band Satellite Communication Applications Based on LTCC // Proc. 38th European Microwave Conf. (Amsterdam). 2008. P. 211–214.
5. Imanaka Y. Multilayered low temperature cofired ceramics (LTCC) technology. Springer Science+Business Media, Inc., 2005.
6. Wu C.-H., Lin Y.-S., Wang C.-H., Chen C.-H. A compact LTCC ultra-wideband bandpass filter using semi-lumped parallel-resonance circuits for spurious suppression // European Microwave Conference, Munich, 2007. P. 532–536.
7. Hao Z.-C., Ding W., Hong W. Developing Low-Cost W-Band SIW Bandpass Filters Using the Commercially Available Printed-Circuit-Board Technology // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2016. V. 64. № 6. P. 1775–1786.
8. Заргано Г.Ф., Земляков В.В., Крутиев С.В. Полосно-пропускающие фильтры на плоско-поперечных сдвигах Н-волноводов, выполненные по SIW-технологии // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2013. Т. 16. № 2. С. 87–93.
9. Bozzi M., Georgiadis A., Wu K. Review of substrate-integrated waveguide circuits and antennas // IET Microwave Antennas and Propagation. 2011. V. 5. № 8. P. 909–920.
10. Du C., Ma K., Feng T., Mou S. A self-packaged band-pass filter with controllable transmission zeros using Substrate Integrated Suspended Lines // IEEE International Conference on Microwave and Millimeter Wave Technology. 2016. P. 317–319.
11. Aliqab K., Hong J. UWB Balanced BPF Using a Low-Cost LCP Bonded Multilayer PCB Technology // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2019. V. 67. № 3. P. 1023–1029.
12. Cariou M., Potelon B., Quando C., Cadiou S., Schlaffer E., Pessl W., Fevre A.L. // IEEE Trans. Microwave Theory Techn. 2017. V. 65. № 2. P. 496–503.
13. Chu Y., Ma K., Wang Y., Meng F. A Self-Packaged Low-Loss and Compact SISL DBBPF with Multiple TZs // IEEE Microwave and Wireless Components Letters. 2019. V. 29. № 3. P. 192–194.
14. Беляев Б.А., Сержантов А.М., Лексиков Ан.А., Бальва Я.Ф., Галеев Р.Г. Монолитный миниатюрный полосно-пропускающий фильтр на многопроводниковых полосковых резонаторах. // Письма в ЖТФ. 2021. Т. 47. Вып. 13. С. 16–20.
15. Беляев Б.А., Сержантов А.М., Лексиков Ан.А., Бальва Я.Ф., Галеев Р.Г. Миниатюрный полосно-пропускающий фильтр на двойных спиральных полосковых резонаторах. // Ural Radio Engineering Journal. 2021. Т. 5. № 1. С. 21–31.
16. Лексиков А.А. Многослойные многопроводниковые полосковые резонаторы и устройства частотной селекции сигналов на их основе. Автореф. докт. дис. Ин-т физики им. Л.В. Киренского СО РАН, Красноярск, 2022.
17. Беляев Б.А., Сержантов А.М., Бальва Я.Ф. Исследование коэффициентов связи сонаправленных резонаторов в полосковых фильтрах на подвешенной подложке // Радиотехника и электроника. 2008. Т. 53. № 4. С. 432–440.
18. Беляев Б.А., Матвеев С.В., Тюрнев В.В., Шихов Ю.Г. Подавление добротности высших резонансов микрополоскового резонатора адгезионным подслоем // Электронная техника. Сер. СВЧ-Техника. 1994. Вып. 4. (464). С. 20–25.

10 GHz MONOLITHIC FILTER BASED ON STRIPLINE RESONATORS WITH SPLIT CONDUCTOR

I. V. Govorun^{a,b}, B. A. Belyaev^{b,c}, Ya. B. Zav'yalov^c, T. Y. Shumilov^c, A. O. Afonin^a,
A. V. Ugryumov^a, and R. G. Galeev^b

^a*Kirenskii Institute of Physics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Krasnoyarsk, Russia*

^b*Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia*

^c*Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.F. Shabanov

The monolithic design of the compact bandpass filter X-band is made on technology of multilayered printed circuit boards. A quarter-wave stripline resonators of the filter have two conductors divided by the layer prepreg having low parameters which is bonding together a design. This eliminates influence of prepreg on the characteristics of the devices, ensuring good repeatability of filters in mass production. For increase the high-frequency stopband of filter, one of the conductors of each resonator is cut in half by a transverse slit. The constructive sizes of the device were obtained by parametric synthesis using the electrodynamic analysis of its 3D model. The experimental data of five-order filter are in good agreement with the electromagnetic simulation of filters 3D model. An experimental device has a central frequency of the passband of 10 GHz and fractional bandwidth of 5.7%, its dimensions and weight are $18.0 \times 5.4 \times 2.1$ mm and 0.5 g. The important advantage of the developed design is the possibility of its installation on the board using the surface mounting method.

Keywords: bandpass filter, frequency response, return loss, insertion loss, impedance, layered structure

УДК 532.5

РАСЧЕТ ДВУМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЯХ СРЕДЫ

© 2023 г. Ю. Д. Чашечкин^{1,*}, А. А. Очиров^{1,**}

Представлено академиком РАН Д.М. Климовым 27.04.2023 г.

Поступило 02.05.2023 г.

После доработки 02.05.2023 г.

Принято к публикации 28.07.2023 г.

Методами теории сингулярных возмущений в линейном приближении впервые получены полные дисперсионные соотношения периодических движений плоской свободной поверхности с положительно определенной частотой и комплексным волновым числом, учитывающим пространственное затухание в вязкой стратифицированной, заряженной жидкости. Регулярные компоненты полного решения описывают плоские гравитационно-капиллярные волны, сингулярные характеризуют лигаменты — тонкие течения, отсутствующие в модели идеальной среды. Полученные дисперсионные соотношения в предельных случаях равномерно переходят в известные выражения для невязкой стратифицированной, вязкой однородной и идеальной жидкостей. Приведены рассчитанные зависимости длины волны и толщины лигамента, групповой и фазовой скорости компонентов от частоты при различных значениях параметров сред.

Ключевые слова: периодические поверхностные возмущения, вязкость, стратификация, поверхностный электрический заряд

DOI: 10.31857/S2686740023060032, **EDN:** HNVKND

Изучение волн на поверхности жидкости, наблюдаемых с доисторических времен и выраźnie-тельно описываемых с античных, действие которых остро ощущают жители прибрежных регионов и мореплаватели, вначале стали проводить экспериментально во Франции и в Англии, а с появлением систем уравнений движения жидкостей — и математически [1]. При выводе уравнений и Л. Эйлер и Дж. Г. Стокс отмечали необходимость учета “гетерогенности жидкости” — неоднородности распределения плотности, которая зависит от давления, температуры и концентрации растворенных веществ. Однако описание поверхностных волн, длина которых в земных условиях меняется в широких пределах, — от километров в инфранизкочастотных гравитационных волнах в океане до долей миллиметра в капиллярных волнах в течениях импакта капли, на практике ведется в приближении однородной жидкости, поскольку естественные вариации плотности малы по сравнению с ее базовым значением.

Начиная с середины XIX в. сформировались два направления изучения волн на поверхности жидкости. Аналитическая теория гравитационных и капиллярных линейных и нелинейных волн малой амплитуды развивалась на основе анализа системы фундаментальных уравнений методами теории возмущений [2]. Для описания волн конечной амплитуды привлекались конститутивные уравнения, среди которых широкое распространения получили модели Кортевега—де Фриза, Бюргерса, Шредингера и другие [1, 3, 4]. Оценки переноса вещества и затухания поверхностных волн с учетом идей теории пограничного слоя [5] проведены в [6, 7]. Влияние поверхностного электрического заряда на волновое движение в вязкой однородной жидкости оценивалось в [8].

По мере накопления данных о закономерностях реального распределения плотности в природных системах — в атмосфере и океане [9], все большее внимание стало уделяться изучению влияния стратификации на свойства внутренних волн в слоистых [10] и непрерывно стратифицированных средах [11]. Распространение поверхностных волн в невязкой экспоненциально стратифицированной среде проанализировано в [12].

Основания теории течений гетерогенных жидкостей рассмотрены в [13]. Полный учет вязкости расширил класс течений, допускаемых уравнени-

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: chakin@ipmnet.ru

**E-mail: otchirov@mail.ru

ями, в который, кроме волн, вошли лигаменты, характеризующие тонкие струйки, прослойки и волокна [14]. В данной работе в общей постановке впервые рассмотрена полная задача распространения двумерных инфинитезимальных периодических возмущений поверхности вязкой стратифицированной заряженной жидкости, проведена оценка влияния отдельных факторов.

Рассмотрение проводится в декартовой прямоугольной системе координат Oxz . Ось Ox совпадает с равновесным положением свободной поверхности жидкости $z = 0$, занимающей нижнее полупространство, а ось Oz направлена вертикально вверх против направления действия сил тяжести $\mathbf{g} = (0, -g)$. Свободная поверхность характеризуется коэффициентом поверхностного натяжения σ и его значением $\gamma = \sigma/\rho_{00}$, нормированным на плотность жидкости на равновесном уровне $\rho_{00} = \rho_0(0)$.

На поверхности идеально проводящей жидкости вертикальное электростатическое поле с напряженностью $\mathbf{E}_0$ наводит электрический заряд с поверхностной плотностью $\kappa_0 = E_0/4\pi$. Периодическое возмущение поверхности вызывает изменение электрического потенциала Φ , представленного в виде суммы составляющей $\Phi_0 = -E_0 z$ и волновой добавки $\tilde{\Phi}$.

Рассматривается несжимаемая экспоненциально стратифицированная жидкость с распределением плотности:

$$\rho = \rho_{00}(\exp(-z/\Lambda) + \tilde{\rho}(x, z, t)). \quad (1)$$

Исходная стратификация характеризуется масштабом плавучести $\Lambda = |\ln \rho / d z|^{-1}$, а функция $\tilde{\rho}(x, z, t)$ определяет возмущение плотности, которое считается малым по отношению к единице. Для упрощения выражений не выписываются уравнения состояния, определяющие зависимость плотности от температуры и концентрации растворенных веществ [9], а также дифференциальные уравнения их переноса. В принятых упрощениях двумерная система фундаментальных уравнений [2, 13] принимает вид

$$z < \zeta: \begin{cases} \rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \rho \nu \Delta \mathbf{u} - \nabla P + \rho \mathbf{g}, \\ \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$z > \zeta: \quad \Delta \Phi = 0. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{u} = (u, w)$ — скорость жидкости, $\zeta = \zeta(x, t)$ — положение смещенной поверхности жидкости. Давление жидкости P складывается из атмосферного P_0 , гидростатического, волнового $\tilde{P}$ и давления, создаваемого электростатическим полем с напряженностью $\mathbf{E}_0$:

$$P = P_0 + \frac{E_0^2}{8\pi} + \int_z^\zeta \rho(x, \xi, t) g d\xi + \tilde{P}(x, z, t). \quad (4)$$

Система дополняется стандартными граничными условиями: кинематическим, динамическим, на электрический потенциал на свободной поверхности жидкости, а также естественными условиями затухания возмущений с удалением от свободной поверхности [2]:

$$z = \zeta: \begin{cases} \partial_t(z - \zeta) + \mathbf{u} \cdot \nabla(z - \zeta) = 0, \\ \mathbf{\tau} \cdot ((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u}) + \mathbf{n} \cdot ((\mathbf{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = 0, \\ P - P_0 - \sigma \operatorname{div} \mathbf{n} - 2\rho \nu \mathbf{n} \cdot ((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = 0, \\ \Phi = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} z \rightarrow -\infty: \quad \mathbf{u} &\rightarrow 0, \\ z \rightarrow \infty: \quad \nabla \tilde{\Phi} &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla(z - \zeta)}{|\nabla(z - \zeta)|} = \frac{-\partial_x \zeta \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2}}, \quad \mathbf{\tau} = \frac{\mathbf{e}_x + \partial_x \zeta \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2}}.$$

Здесь $\mathbf{n}$ и $\mathbf{\tau}$ — векторы внешней нормали и касательной к свободной поверхности соответственно. Величина поверхностного электрического заряда характеризуется отношением плотностей энергии электростатического поля и свободной поверхностной энергии $W = E_0^2 / (4\pi \sqrt{\rho_{00} g \sigma})$ — параметром Тонкса—Френкеля [8].

Размерные физические величины, входящие в системы уравнений, начальные и граничные условия, определяют набор собственных временных и пространственных масштабов течений стратифицированной (сильно или слабо) и однородной (потенциально и актуально) жидкостей. Значение величин для жидкости с параметрами воды [9] приведены в табл. 1.

Использование приближения Буссинеска, в котором вариациями плотности $\tilde{\rho}(x, z, t)$ пренебрегается везде, за исключением члена с силой тяжести, и предположения о несжимаемости среды, позволяет при рассмотрении двумерных задач ввести функцию тока ψ , производные которой определяют компоненты скорости жидкости:

$$u = \partial_z \psi, \quad w = -\partial_x \psi. \quad (7)$$

Задача рассматривается в линейном приближении. При изучении инфинитезимальных отклонений свободной поверхности после проведения процедуры сноса граничных условий на равновесный уровень $z = \zeta = 0$ [15], математическая постановка задачи принимает вид:

Таблица 1. Характерные масштабы рассматриваемых сред

Параметр	Жидкость			
	Стратифицированная		Однородная	
	сильно	слабо	потен- циально	актуально
Частота плавучести $N, \text{с}^{-1}$	1	0.01	0.00001	0.0
Период плавучести T_b	10 с	10 мин	10 дней	∞
Капиллярно-вязкий временной масштаб $\tau_{vg}^\gamma = \gamma/\nu g, \text{с}$	7	7	7	7
Масштаб стратификации Λ	10 м	100 км	10^8 км	∞
Вязкий волновой масштаб $\delta_N^{gv} = (gv)^{1/3} N^{-1}, \text{см}$	2	200	2×10^5	∞
Микромасштаб Стокса $\delta_N^v = \sqrt{\nu/N}, \text{см}$	0.1	1	30	∞
Капиллярная постоянная $\delta_g^\gamma = \sqrt{\gamma/g}, \text{см}$	0.3	0.3	0.3	0.3
Вязкий масштаб $\delta_g^v = \sqrt[3]{\nu^2/g}, \text{см}$	0.005	0.005	0.005	0.005

$$\begin{cases}
z < 0: \begin{cases} \rho_{00}g\partial_x\zeta + \rho_{00}g\int_z^0 \partial_x\tilde{p}(x,\xi,t)d\xi + \\ + \rho_{00}\partial_{tz}\Psi - \rho_{00}\nu\partial_z\Delta\Psi + \partial_x\tilde{P} = 0, \\ -\rho_{00}\partial_{tx}\Psi + \rho_{00}\nu\partial_x\Delta\Psi + \partial_z\tilde{P} = 0, \\ \partial_t\tilde{p} + \frac{\exp(-z/\Lambda)}{\Lambda}\partial_x\Psi = 0, \end{cases} \\
z > 0: \Delta\tilde{\Phi} = 0,
\end{cases} \quad (8)$$

$$z = 0: \begin{cases} \tilde{P} + 2\rho_{00}\nu\partial_{zx}\Psi + \sigma\partial_{xx}\zeta - \frac{E_0}{4\pi}\partial_z\tilde{\Phi} = 0, \\ \partial_t\zeta + \partial_x\Psi = 0, \\ \partial_{zz}\Psi - \partial_{xx}\Psi = 0, \\ \tilde{\Phi} - E_0\zeta = 0; \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
z \rightarrow -\infty: \partial_z\Psi \rightarrow 0, \quad \partial_x\Psi \rightarrow 0, \\
z \rightarrow \infty: \nabla\tilde{\Phi} \rightarrow 0.
\end{aligned} \quad (10)$$

Отыскивается решение системы (8)–(10) для периодических возмущений всех величин вида $A = A_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega t)$ с положительно определенной частотой $\omega > 0$ и комплексным волновым вектором $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + i\mathbf{k}_2$:

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ \zeta \\ \tilde{\Phi} \\ \tilde{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_m \exp(k_z z) \\ A_m \\ F_m \exp(k_z \Phi z) \\ P_m \exp(k_z z) \end{pmatrix} \exp(ik_x x - i\omega t) + C.C., \quad (11)$$

где символ $C.C.$ обозначает комплексно сопряженное выражение.

Перекрестное дифференцирование уравнений позволяет привести систему (8) к уравнению, со-

держашему только одну неизвестную – функцию тока:

$$\partial_{tt}\Delta\Psi - \nu\partial_t\Delta\Delta\Psi + N^2 \exp(-z/\Lambda)\partial_{xx}\Psi = 0. \quad (12)$$

Подстановка решения (11) в уравнение Лапласа для добавки к электрическому потенциалу (8) и в уравнение (12) приводит к дисперсионным соотношениям, связывающим компоненты волнового вектора между собой и с частотой:

$$k_{z\Phi}^2 = k_x^2, \quad (13)$$

$$\omega(k_x^2 - k_z^2)(i\nu k_x^2 - i\nu k_z^2 + \omega) - N^2 k_x^2 \exp(-z/\Lambda) = 0. \quad (14)$$

Естественные ограничения (10) – затухание возмущений с удалением от свободной поверхности, приводят к следующим условиям физической реализации корней:

$$\text{Re}(k_z) > 0, \quad \text{Re}(k_{z\Phi}) < 0. \quad (15)$$

Дисперсионное соотношение (14) удобно анализировать в безразмерных переменных, если в качестве нормирующих множителей выбирать собственные масштабы среды: временной масштаб – обратная частота плавучести $\tau_b = N^{-1}$, пространственный – вязкий волновой масштаб $\delta_N^{gv} = (\nu g)^{1/3} N^{-1}$ [14]. Отношение собственных масштабов среды – вязкого δ_g^v и вязкого волнового δ_N^{gv} естественно определяет малый параметр задачи $\epsilon = \delta_g^v / \delta_N^{gv} = N\nu^{1/3} / g^{2/3}$. В безразмерном виде дисперсионное соотношение (14) перепишется в виде

$$i\varepsilon(k_{*x}^2 - k_{*z}^2)\omega_* + (k_{*x}^2 - k_{*z}^2)\omega_*^2 - k_{*x}^2 \exp(-z/\Lambda) = 0, \quad (16)$$

где ω_* — безразмерная частота, а $k_{*x,z}$ — безразмерные компоненты волнового вектора.

Решения уравнения (16) находятся методами теории сингулярных возмущений [15, 16] в виде разложений по малому параметру ε , который присутствует в качестве множителя при старшей степени k_{*z}^2 . Для различия вида корней для сингулярного решения введено обозначение — k_l :

$$k_{*z} = \pm \sqrt{k_{*x}^2 - \frac{i\omega_*}{2\varepsilon} + \frac{i\sqrt{4i\varepsilon k_{*x}^2 \exp(-z/\Lambda) + \omega_*^3}}{2\varepsilon\sqrt{\omega_*}}} \approx \pm k_{*x} \frac{\sqrt{\omega_*^2 - \exp(-z/\Lambda)}}{\omega_*}, \quad (17)$$

$$k_{*l} = \pm \sqrt{k_{*x}^2 - \frac{i\omega_*}{2\varepsilon} - \frac{i\sqrt{4i\varepsilon k_{*x}^2 \exp(-z/\Lambda) + \omega_*^3}}{2\varepsilon\sqrt{\omega_*}}} \approx \pm \frac{1-i}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{\omega_*}.$$

В приближенных решениях (17) при положительно определенной частоте периодического возмущения для регулярного компонента выполняется неравенство $|\text{Im}(k_z)| \ll |\text{Re}(k_z)|$, а для сингулярного компонента справедливо $|\text{Im}(k_l)| \sim |\text{Re}(k_l)|$.

Решение k_z описывает волновую часть периодического течения, а k_l — сопутствующий волне лигамент, характеризующий тонкую структуру течения. Выбор знаков корней в (17) определяется физическими условиями (15).

Из граничных условий (9) при подстановке решения (11) с учетом (17) следует дисперсионное уравнение, связывающее компоненты волнового вектора с частотой ω :

$$(k_x^2 + k_z^2)(k_l \omega^2 - gk_x^2 - \sqrt{g\gamma} k_x^2 k_{z\Phi} W - \gamma k_x^4 + i\omega v k_l (3k_x^2 - k_l^2)) - (k_x^2 + k_l^2)(k_z \omega^2 - gk_x^2 - \sqrt{g\gamma} k_x^2 k_{z\Phi} W - \gamma k_x^4 + i\omega v k_z (3k_x^2 - k_z^2)) = 0. \quad (18)$$

Проведение обезразмеривания (18) приводит к дисперсионному уравнению:

$$(k_{*l}^2 + k_{*x}^2)(\delta^2 \varepsilon k_{*x}^4 + i\varepsilon^2 \omega_* k_{*z}(k_{*z}^2 - 3k_{*x}^2) + k_{*x}^2(1 + \delta\sqrt{\varepsilon} k_{*z\Phi} W) - \varepsilon k_{*z} \omega_*^2) - (k_{*z}^2 + k_{*x}^2) \times (\delta^2 \varepsilon k_{*x}^4 + i\varepsilon^2 \omega_* k_{*l}(k_{*l}^2 - 3k_{*x}^2) + k_{*x}^2(1 + \delta\sqrt{\varepsilon} k_{*z\Phi} W) - \varepsilon k_{*l} \omega_*^2) = 0. \quad (19)$$

Здесь символом $\delta = \delta_g^\gamma / \delta_N^v = \sqrt{N\gamma/vg}$ обозначен безразмерный параметр, характеризующий отношение капиллярной постоянной и микромасштаба Стокса. Подстановка в (19) приближенных значений (17) с учетом (13) приводит к следующему выражению:

$$k_{*x} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{\omega_*} - k_{*x} \frac{\sqrt{\omega_*^2 - 1}}{\omega_*} \right) \left[\frac{1-i}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{\omega_*} k_{*x} + \left(\frac{\sqrt{\omega_*^2 - 1}}{\omega_*} - \frac{1-i}{\sqrt{2}} W \delta \sqrt{\omega_*} \right) k_{*x}^2 + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \delta^2 \sqrt{\omega_*} k_{*x}^3 - \frac{\sqrt{\omega_*^2 - 1}}{\omega_*} \delta W k_{*x}^3 - \frac{1-i}{\sqrt{2}} \omega_*^{3/2} \sqrt{\omega_*^2 - 1} \right) \sqrt{\varepsilon} + \left(k_{*x} (1 - \omega_*^2) + \frac{\delta^2 \sqrt{\omega_*^2 - 1}}{\omega_*} k_{*x}^4 \right) \varepsilon \right] = 0. \quad (20)$$

Уравнение (20) имеет 6 корней, что, с учетом выражений (13) и (17), согласуется с условием полноты решения системы (8)–(9). Нетривиальные решения (20) не приведены в силу своей громоздкости.

В приближении однородной жидкости описание течений упрощается. Однако при этом из основных уравнений фактически исключается такое важное свойство среды, как плотность, которая, как общий множитель, сокращается и не входит в дисперсионные соотношения. В анализе не участвуют и другие собственные параметры среды — частота (период) плавучести, вязкий волновой масштаб и микромасштаб Стокса. При этом дисперсионное соотношение (14) принимает вид [14]:

$$(k_x^2 - k_z^2)(ivk_x^2 - ivk_z^2 + \omega) = 0. \quad (21)$$

Уравнение (21) также имеет два вида решений, описывающих волновое движение k_z и присоединенный лигамент k_l :

$$k_z = \pm k_x, \quad k_l = \pm \sqrt{k_x^2 - i \frac{\omega}{v}}. \quad (22)$$

Вид решения (22) определяет еще одну форму микромасштаба Стокса $\delta_\omega^v = \sqrt{v/\omega}$, см, в дополнение к приведенным в табл. 1.

Дисперсионное соотношение (18) с учетом (22) также упрощается:

$$k_x [2k_x (k_l \omega^2 - gk_x^2 - \sqrt{g\gamma} k_x^2 k_{z\Phi} W - \gamma k_x^4 + i\omega \nu k_l (3k_x^2 - k_l^2)) - (k_x^2 + k_l^2)(\omega^2 - gk_x - \sqrt{g\gamma} k_x k_{z\Phi} W - \gamma k_x^3 + 2i\omega \nu k_x^2) = 0. \quad (23)$$

В модели однородной жидкости параметры обезразмеривания отличаются от введенных ранее в силу исключения части собственных параметров задачи, характеризующих стратификацию. Набор оставшихся физических переменных позволяет определить следующие характерные масштабы: времени — $\tau_v^y = \gamma / (\nu g)$ и длины — $\delta_g^v = \sqrt[3]{\nu^2 / g}$. При выбранных параметрах естественным образом возникает малый параметр $\varepsilon_h = \delta_g^v / \delta_g^y = \sqrt[6]{g \nu^4 / \gamma^3}$, определяющий отношение вязкого масштаба и капиллярной постоянной. Дисперсионное уравнение, связывающее безразмерные компоненты волнового вектора k_{*x} и частоту ω_* , принимает вид

$$k_{*x} [2k_{*x} (\varepsilon_h^6 k_{*l} \omega_*^2 - \varepsilon_h^2 k_{*x}^2 - \varepsilon_h k_{*x}^2 k_{*z\Phi} W - k_{*x}^4 + i\varepsilon_h^4 \omega_* k_{*l} (3k_{*x}^2 - k_{*l}^2)) - (k_{*x}^2 + k_{*l}^2) \times (\varepsilon_h^6 \omega_*^2 - \varepsilon_h^2 k_{*x}^2 - \varepsilon_h k_{*x}^2 k_{*z\Phi} W - k_{*x}^3 + 2i\varepsilon_h^4 \omega_* k_{*x}^2) = 0. \quad (24)$$

Выбор корней (22), (24) осуществляется с учетом условия (15).

Присутствие поверхностного электрического заряда в постановке задачи не добавляет качественно новых решений по сравнению с [14]. Анализ показывает, что поверхностный электрический заряд не оказывает заметного влияния на тонкую структуру поверхностных периодических течений. Его влияние на волновой компонент ограничено областью капиллярно-гравитационных волн: увеличение поверхностного электрического заряда приводит к уменьшению длины волны при фиксированной частоте периодических возмущений. Зависимости длины волны $\lambda = 2\pi / \sqrt{\text{Re}(k_x)^2 + \text{Im}(k_z)^2}$ от частоты периодического движения для жидкости с параметрами воды ($\sigma = 72$ эрг/см², $\rho_{00} = 1$ г/см³, $\nu = 0.01$ см²/с) при разных значениях поверхностного электрического заряда в области частот, в которой заметно влияние заряда, построены на рис. 1.

В модели незаряженной жидкости остаются справедливыми выражения (17) для стратифицированной жидкости. Дисперсионные соотношения, связывающие компоненты волнового вектора и частоту периодического возмущения в стратифицированной жидкости, нормированные на собственные параметры задачи: временной — $\tau_b = N^{-1}$, пространственный — вязкий волновой масштаб $\delta_N^{gv} = (\nu g)^{1/3} N^{-1}$, можно получить непосредственно из граничных условий или выполнив

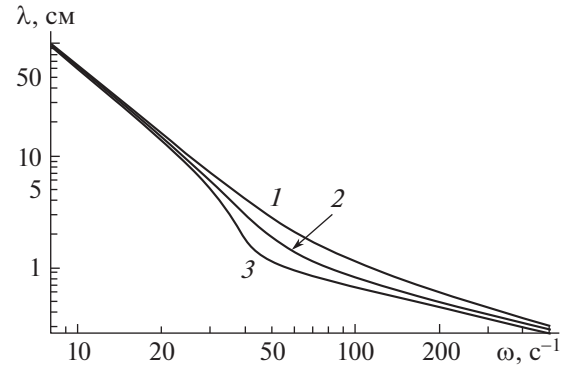


Рис. 1. Зависимость длины волны (регулярного компонента периодического течения) от частоты для сильно стратифицированной жидкости с параметрами воды, $N = 1$ с⁻¹, при разных значениях поверхностного заряда: кривые 1–3 — $W = 0, 1.0, 1.5$ соответственно.

предельный переход $W \rightarrow 0$ в (19) и в приближенном дисперсионном уравнении (20). При этом безразмерные параметры, характеризующие отношение собственных масштабов задачи $\varepsilon = \delta_g^v / \delta_N^{gv} = N \nu^{1/3} / g^{2/3}$ и $\delta = \delta_g^y / \delta_N^v = \sqrt{N \gamma / \nu g}$ остаются такими же, как и в модели заряженной жидкости.

С точностью до главных членов разложения дисперсионное уравнение в незаряженной вязкой стратифицированной жидкости принимает вид

$$k_{*x} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{\omega_*} - k_{*x} \frac{\sqrt{\omega_*^2 - 1}}{\omega_*} \right) \left[\frac{1-i}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{\omega_*} k_{*x} + \frac{\sqrt{\omega_*^2 - 1}}{\omega_*} k_{*x}^2 + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \delta^2 \sqrt{\omega_*} k_{*x}^3 - \frac{1-i}{\sqrt{2}} \omega_*^{3/2} \sqrt{\omega_*^2 - 1} \right) \sqrt{\varepsilon} + \left(k_{*x} (1 - \omega_*^2) + \frac{\delta^2 \sqrt{\omega_*^2 - 1}}{\omega_*} k_{*x} \right) \varepsilon \right] = 0. \quad (25)$$

В модели однородной жидкости с постоянной плотностью, в которой сохраняется сингулярный компонент течения, остаются справедливыми и соотношения между компонентами волнового вектора (22). В размерном виде дисперсионное уравнение в вязкой однородной жидкости согласуется с полученным в [17]:

$$k_x [2k_x (k_l \omega^2 - gk_x^2 - \gamma k_x^4 + i\omega \nu k_l (3k_x^2 - k_l^2)) - (k_x^2 + k_l^2)(\omega^2 - gk_x - \gamma k_x^3 + 2i\omega \nu k_x^2) = 0. \quad (26)$$

Используя параметры нормировки $\tau_v^y = \gamma / (\nu g)$ и длины $\delta_g^v = \sqrt[3]{\nu^2 / g}$ и малый параметр $\varepsilon_h =$

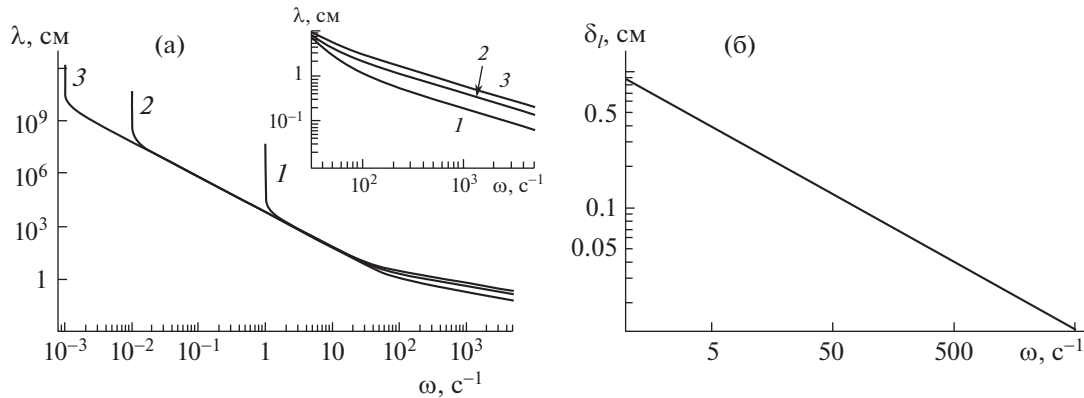


Рис. 2. Зависимость масштабов компонентов течения от частоты для стратифицированной жидкости с параметрами воды: а — длины волн, кривые 1–3: $N = 1, 0.01, 0.001 \text{ c}^{-1}$; б — толщины лигамента в сильно стратифицированной жидкости, $N = 1 \text{ c}^{-1}$.

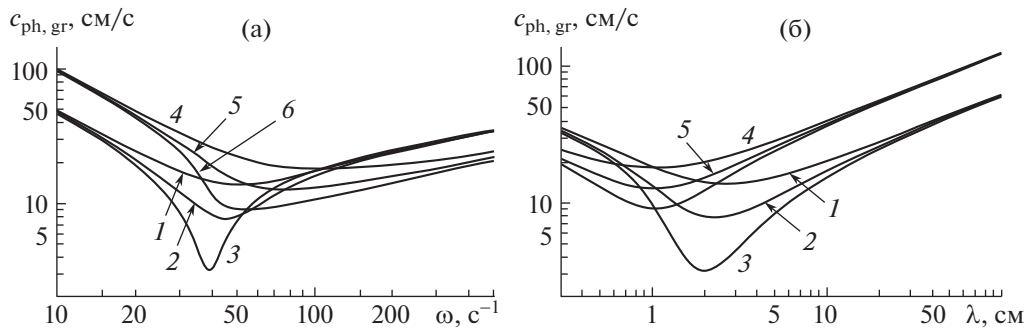


Рис. 3. Зависимости групповых (кривые 1–3) и фазовых скоростей (кривые 4–6) волнового компонента периодического течения в сильно стратифицированной жидкости с параметрами воды, $N = 1 \text{ c}^{-1}$: а — от частоты ω ; б — от длины волны λ , на линиях (1, 4) (2, 5) и (3, 6) $W = 0, 1.0, 1.5$ соответственно).

$= \delta_g^v / \delta_g^y = \sqrt[6]{g v^4 / \gamma^3}$, получим безразмерное дисперсионное уравнение:

$$k_{*x} [2k_{*x} (\epsilon_h^6 k_{*l} \omega_*^2 - \epsilon_h^2 k_{*x}^2 - k_{*x}^4 + i \epsilon_h^4 \omega_* k_{*l} (3k_{*x}^2 - k_{*l}^2)) - (k_{*x}^2 + k_{*l}^2) (\epsilon_h^6 \omega_*^2 - \epsilon_h^2 k_{*x}^2 - k_{*x}^3 + 2i \epsilon_h^4 \omega_* k_{*x}^2)] = 0. \quad (27)$$

В решении дисперсионных уравнений с учетом вязкости присутствуют регулярные компоненты, мнимая часть компонентов волнового вектора которых много меньше действительной части. Такие решения описывают волновое изменение положения свободной поверхности жидкости.

В рассматриваемых моделях полные решения также включают сингулярные компоненты, у которых мнимая и действительная части волнового вектора близки по своим абсолютным значениям. Такие решения описывают лигаменты — тонкие (в случае стратифицированной жидкости — высокоградиентные) компоненты течения, сопровож-

дающие поверхностные волны [14]. Анализ дисперсионных соотношений показывает, что степень выраженности стратификации оказывает влияние на масштаб регулярного компонента периодического течения (длину волны) и практически не меняет масштаб сингулярного компонента (лигамента $\delta_l = 2\pi / \sqrt{\text{Re}(k_x)^2 + \text{Im}(k_l)^2}$). На рис. 2 построены зависимости масштабов волны (рис. 2а) и сопровождающего лигамента (рис. 2б), в жидкости с параметрами воды в модели однородной жидкости и стратифицированной жидкости с различными значениями частоты плавучести.

Рассчитанные зависимости фазовых и групповых скоростей волн от частоты периодического возмущения ω и масштаба волнового компонента течения λ приведены на рис. 3.

Расчеты показали, что поверхностный электрический заряд не оказывает заметного влияния на характеристики скоростей переноса фазы и энергии лигаменами. На рис. 4 представлены зависимости фазовой и групповой скорости лига-

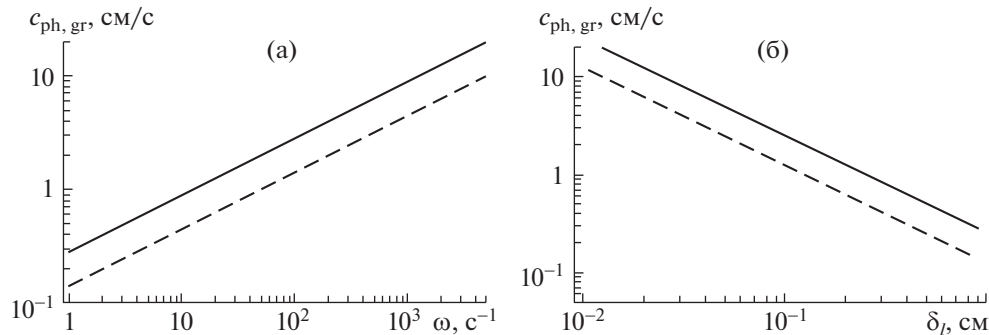


Рис. 4. Зависимости групповой (сплошная линия) и фазовой скоростей (штриховая линия) лигамента в сильно стратифицированной жидкости с параметрами воды, $N = 1 \text{ s}^{-1}$: от частоты (а) и от масштаба лигамента (б).

мента в сильно стратифицированной жидкости $N = 1 \text{ s}^{-1}$ с параметрами воды от частоты ω (рис. 4а) и масштаба лигамента δ_l (рис. 4б).

В модели идеальной жидкости основные уравнения движения предельно редуцируются и дисперсионные соотношения вырождаются — пропадает сингулярное решение и остается только волновой компонент. Связь между компонентами волнового вектора в среде с частотой плавучести N принимает вид [12]:

$$\omega^2(k_x^2 - k_z^2) - N^2 k_x^2 \exp(-z/\Lambda) = 0. \quad (28)$$

Дисперсионное соотношение между компонентами волнового вектора тоже получается достаточно простым:

$$k_z^2 = k_x^2(1 - N_\omega^2) \exp(-z/\Lambda), \quad N_\omega = N/\omega. \quad (29)$$

Зависимость компонента волнового вектора от частоты определяется редуцированным дисперсионным уравнением, которое с учетом (29) запишется:

$$\gamma k_x^3 + g k_x - \omega^2 \sqrt{1 - N_\omega^2} = 0. \quad (30)$$

Анализ показывает, что физически реализуем оказывается только один корень уравнения (30), который описывает волновой компонент периодического поверхностного течения в стратифицированной жидкости. Он также может быть получен при помощи предельных переходов в соответствующих решениях более полной задачи.

Решения дисперсионных уравнений (17) и (19), (22) и (24), (17) и (25), (22) и (27), (29) и (30) определяют требования к методике лабораторного эксперимента в части выбора размеров области наблюдения, длительности регистрации, временного и пространственного разрешения инструментов при изучении периодических течений на основе моделей распределения плотности гетерогенной, однородной или заряженной жидкости с учетом эффектов диссипации.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598-П “Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью”, <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Darrigol O.* Worlds of flow. A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl. Oxford. University Press. 2005. 356 p.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Курс теорет. физ. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
3. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 638 с.
4. *Kistovich A.V., Chashechkin Yu.D.* Propagating stationary surface potential waves in a deep ideal fluid // *Water Resources*. 2018. V. 45 № 5. P. 719–727. <https://doi.org/10.1134/S0097807818050111>
5. *Schlichting H.* Boundary Layer Theory. N.Y.: McGraw Hill Co, 1955. 812 p.
6. *Longuet-Higgins M.S.* Mass transport in the boundary layer at a free oscillating surface. // *J. Fluid Mech.* 1960. V. 8. № 2. P. 293–306. <https://doi.org/10.1017/S002211206000061X>
7. *Liu A., Davis S.* Viscous attenuation of mean drift in water waves. // *J. Fluid Mech.* 1977. V. 81. № 1. P. 63–84. <https://doi.org/10.1017/S0022112077001918>
8. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Нелинейные периодические волны на заряженной поверхности глубокой маловязкой электропроводной жидкости // *Журнал технической физики*. 2004. Т. 74. №. 3. С. 5–13.
9. *Федоров К.Н.* Тонкая термохалинная структура вод Мирового океана. Л.: Гидрометеиздат, 1976. 184 с.
10. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability, International Series of Monographs on Physics. Oxford: Clarendon Press, 1961. 654 p.
11. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
12. *Очиров А.А., Чашечкин Ю.Д.* Двумерные периодические волны в невязкой непрерывно стратифи-

- цированной жидкости // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2022. Т. 58. № 5. С. 524–533. <https://doi.org/10.31857/S000235152205008X>
13. Chashechkin Yu.D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms. 2021. V. 10. № 4. P. 286. <https://doi.org/10.3390/axioms10040286>
 14. Chashechkin Yu.D., Ochirov A.A. Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // Axioms. 2022. V. 11. No. 8. P. 402. <https://doi.org/10.3390/axioms11080402>
 15. Nayfeh A., Hassan S. The method of multiple scales and non-linear dispersive waves // J. Fluid Mechanics. 1971. V. 48. № 3. P. 463–475.
 16. Найфэ А. Введение в методы возмущений М.: Мир, 1984. 535 с.
 17. Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д. Отражение капиллярно-гравитационных волн от областей поверхностной конвекции // ДАН. 2005. Т. 404. № 2. С. 184–187.

FREE SURFACE TWO-DIMENSIONAL PERIODIC DISTURBANCES IN VARIOUS MODELS OF THE FLUID

Yu. D. Chashechkin^a and A. A. Ochirov^a

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS D.M. Klimov

The complete dispersion relations of a flat free surface periodic perturbations with a positive definite frequency and a complex wavenumber taking into account spatial attenuation in a viscous stratified charged liquid were obtained in a linear approximation for the first time by methods of the theory of singular perturbations. Regular components of the complete solution describe plane gravitational-capillary waves. Singular components characterize ligaments – thin flows that are absent in the model of an ideal medium. The obtained dispersion relations in extreme cases uniformly transform into known expressions for inviscid stratified, viscous homogeneous and ideal liquids. The calculated dependencies of the wavelength and thickness of the ligament, the group and phase velocity of the components on the frequency at different values of the media parameters are given.

Keywords: periodic surface disturbances, viscosity, stratification, surface electric charge