

Том 516

ISSN 2686-7400

Май–Июнь 2024



ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК.

ФИЗИКА,
ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ



НАУКА

— 1727 —

Российская академия наук

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Основан в 1933 г.

*Журнал издается под руководством
Президиума РАН*

Редакционный совет

Г.Я. Красников (председатель), Н.С. Бортников, А.Г. Габибов,
С.Н. Калмыков, В.В. Козлов, В.Я. Панченко, О.В. Руденко

ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Том 516 2024 Май—Июнь

Выходит 6 раз в год
ISSN 2686-7400

Главный редактор
С.В. Гарнов

Редакционная коллегия

А.А. Александров, А.В. Андрияш, М.Х. Ашуров, С.Г. Гаранин,
С.В. Демишев, В.И. Конов, В.А. Левин, А.Г. Литвак,
М.Л. Лямшев (зам. главного редактора), Н.Ф. Морозов,
К.А. Постнов, О.В. Руденко, Н.Н. Сысоев, В.Ю. Хомич,
А.М. Черепашук, Ф.Л. Черноусько, И.А. Щербаков

Заведующая редакцией А.А. Иванюта

Адрес редакции: 119991 Москва, Ленинский пр., 14

E-mail: doklady_physics@mail.ru

Москва

ФГБУ «Издательство «Наука»

СОДЕРЖАНИЕ

Том 516, 2024

ФИЗИКА

Изоэнтропическая сжимаемость сплава ВНМ-3-2 в области сверхвысоких давлений <i>Г. В. Борисков, А. И. Быков, Н. И. Егоров, А. С. Коршунов, И. В. Макаров, В. Н. Павлов, П. Б. Репин, В. Д. Селемир, И. С. Стрелков, О. М. Сурдин, Н. А. Беляева, С. И. Белов</i>	5
Моделирование твердотельного лазерного модуля с импульсной поперечной диодной накачкой активной среды Nd ³⁺ :YAG <i>С. В. Гарнов, К. А. Галюк, Б. Д. Овчаренко, А. А. Ушаков, В. В. Букин</i>	10
Теплофизические и газодинамические проблемы противометеоритной защиты современных космических аппаратов <i>В. В. Ким, С. И. Мартыненко, А. В. Острик, И. В. Ломоносов</i>	23
Синтез в СВЧ-плазме алмазных пленок со сниженной шероховатостью <i>А. К. Мартьянов, И. А. Тяжелов, С. С. Савин, А. Ф. Попович, В. С. Седов, В. И. Конов</i>	28
Исследование микроструктуры соединения стекло–металл при воздействии лазеров ультракоротких импульсов <i>М. А. Мурзаков, Н. Н. Евтихиев, Д. В. Мясников, Н. В. Грезев, Д. А. Антипов, Д. М. Катаев, Е. Д. Шевелкина</i>	32

МЕХАНИКА

Аэроупругая устойчивость трехслойной оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами и цилиндром <i>В. Н. Бакулин, А. Я. Недбай</i>	39
Тензорная линейность двумерных изотропных функций в плоской задаче нелинейной теории упругости <i>Д. В. Георгиевский</i>	47
О генерации частотных гребенок на основе механических колебаний низкоразмерных наносистем <i>А. В. Лукин, И. А. Попов, О. В. Привалова, Л. В. Штукин</i>	51
Модели пониженной размерности для пластины, закрепленной вдоль основания и части боковой поверхности <i>С. А. Назаров</i>	59
Об автомодельных решениях задачи донных деформаций <i>А. Г. Петров, И. И. Потапов, А. С. Епихин</i>	66

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Оптические полосно-пропускающие фильтры третьего порядка
на структурах из чередующихся слоев кварца и серебра

*Б. А. Беляев, В. В. Тюрнев, Г. В. Скоморохов, С. М. Жарков,
А. М. Сержантов, Д. А. Шабанов*

73

Применение радиальных базисных функций для расчета гидроупругих колебаний
осесимметричных ортотропных оболочек вращения

К. М. Нгуен, Д. Р. Шелевая, Д. А. Красноруцкий

81

О наиболее вероятном энерговыделении в структурированных средах

М. Ю. Романовский

93

CONTENTS

Volume 516, 2024

PHYSICS

Isentropic Compressibility of VNM-3-2 Alloy in Area of Ultra-High Pressures

*G. V. Boriskov, A. I. Bykov, N. I. Egorov, A. S. Korshunov, I. V. Makarov, V. N. Pavlov,
P. B. Repin, V. D. Selemir, I. S. Strelkov, O. M. Surdin, N. A. Belyaeva, S. I. Belov*

5

Modeling of a Solid-State Laser Module with Pulse Transverse Diode Pumping
of Nd³⁺:YAG Active Medium

S. V. Garnov, K. A. Galyuk, B. D. Ovcharenko, A. A. Ushakov, V. V. Bukin

10

Thermophysical and Gas Dynamics Problems of Anti-Meteorite Protection
for Modern Spacecrafts

V. V. Kim, S. I. Martynenko, A. V. Ostriuk, I. V. Lomonosov

23

Synthesis of Diamond Films with Reduced Roughness in Microwave Plasma

A. K. Martyanov, I. A. Tiazhelov, S. S. Savin, A. F. Popovich, V. S. Sedov, V. I. Konov

28

Research of the Microstructure Glass–Metal Boundary Obtained Under Influence
by Ultra-Short Pulse Lasers

*M. A. Murzakov, N. N. Evtikhiev, D. V. Myasnikov, N. V. Grezev,
D. A. Antipov, D. M. Kataev, E. D. Shevelkina*

32

MECHANICS

Aeroelastic Stability of a Sandwich Shell Supported by Annular Ribs and a Cylinder

V. N. Bakulin, A. Ya. Nedbai

39

Tensor Linearity of Two-Dimensional Isotropic Functions
in the Plane Problem of Nonlinear Theory of Elasticity

D. V. Georgievskii

47

On the Generation of Frequency Combs Based on Mechanical Vibrations
of 2D Material Nanosheets

A. V. Lukin, I. A. Popov, O. V. Privalova, L. V. Shtukin

51

Reduced Dimension Models for a Plate Fixed Along One Base and a Part of The Lateral Side

S. A. Nazarov

59

Self Similar Solutions of the Bed Deformation

A. G. Petrov, I. I. Potapov, A. S. Epikhin

66

TECHNICAL SCIENCES

Third-Order Optical Bandpass Filters Based on Structures
of Alternating Layers of Quartz and Silver

*B. A. Belyaev, V. V. Tyurnev, G. V. Skomorokhov, S. M. Zharkov,
A. M. Serzhantov, D. A. Shabanov*

73

Using RBF-FD for Calculation of Hydroelastic Vibrations
of Axisymmetric Orthotropic Shells of Rotation

C. M. Nguyen, D. R. Shelevaya, D. A. Krasnorutsky

81

On the Most Probable Energy Release in Structured Media

M. Yu. Romanovsky

93

УДК 536.71

ИЗОЭНТРОПИЧЕСКАЯ СЖИМАЕМОСТЬ СПЛАВА ВНМ-3-2 В ОБЛАСТИ СВЕРХВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ

© 2024 г. Г. В. Борисков^{1,*}, А. И. Быков¹, Н. И. Егоров¹, А. С. Коршунов¹,
И. В. Макаров¹, В. Н. Павлов¹, П. Б. Репин¹, член-корреспондент РАН В. Д. Селемир¹,
И. С. Стрелков¹, О. М. Сурдин¹, Н. А. Беляева¹, С. И. Белов¹

Поступило 19.01.2024 г.

После доработки 19.01.2024 г.

Принято к публикации 18.03.2024 г.

Изложены постановка и результаты серии экспериментов по изоэнтропическому сжатию до сверхвысоких давлений (> 1 Мбар) вольфрамового сплава марки ВНМ-3-2 в устройстве на основе магнитокумулятивного генератора МК-1. Полученные на диаграмме “сжатие–давление” точки сопоставляются с нормальной изоэнтропой, построенной с использованием данных ударно-волновых экспериментов.

Ключевые слова: сплав ВНМ-3-2, изоэнтропическое сжатие, магнитокумулятивный генератор, сверхвысокие давления, рентгенографирование, нормальная изоэнтропа, нулевая изотерма, уравнения состояния

DOI: 10.31857/S2686740024030018, EDN: KANWQE

Работа посвящена исследованию уравнения состояния широко применяемого в технике сплава марки ВНМ-3-2 (содержит 95% W, 3% Ni, 2% Cu) [1–4] в мегабарной области давлений в устройстве изоэнтропического сжатия на основе магнитокумулятивного генератора сверхсильных магнитных полей МК-1 [5].

Исследование поведения веществ, прежде всего их уравнений состояния, при низких температурах и сверхвысоких давлениях является одной из фундаментальных задач физики высоких плотностей энергии. Одной из важнейших характеристик уравнения состояния вещества является его нулевая изотерма (т.н. кривая “холодного” сжатия), либо близко примыкающая к ней нормальная изоэнтропа, определяющие, в частности, сжимаемость вещества в конденсированной фазе. В настоящее время лишь метод изоэнтропического сжатия позволяет

эффективно определять характеристики вещества в области низких температур и сверхвысоких (мультимегабарных) давлений.

Способ изоэнтропического сжатия давлением сверхсильного магнитного поля реализован в виде экспериментальной установки, содержащей устройство сжатия, рентгенографическую установку (бетатрон), регистратор рентгеновского излучения, элементы электроизмерительных схем, устройства синхронизации и подрыва заряда взрывчатого вещества (ВВ), а также источник питания (мощная конденсаторная батарея или спиральный взрывомагнитный генератор [6]).

Основными элементами устройства сжатия являются двухкаскадный магнитокумулятивный генератор сверхсильных магнитных полей МК-1 и располагающаяся по оси генератора в области однородности магнитного поля (~ 120 мм вдоль оси генератора) цилиндрическая камера сжатия (рис. 1).

Двухкаскадный генератор МК-1 сверхсильного магнитного поля служит источником сверхвысокого давления и включает в себя соленоид начального магнитного поля (он же — первый

¹Российский федеральный ядерный центр —
Всероссийский научно-исследовательский институт
экспериментальной физики,
Саров, Нижегородская обл., Россия
*E-mail: boriskov@ntc.vniief.ru

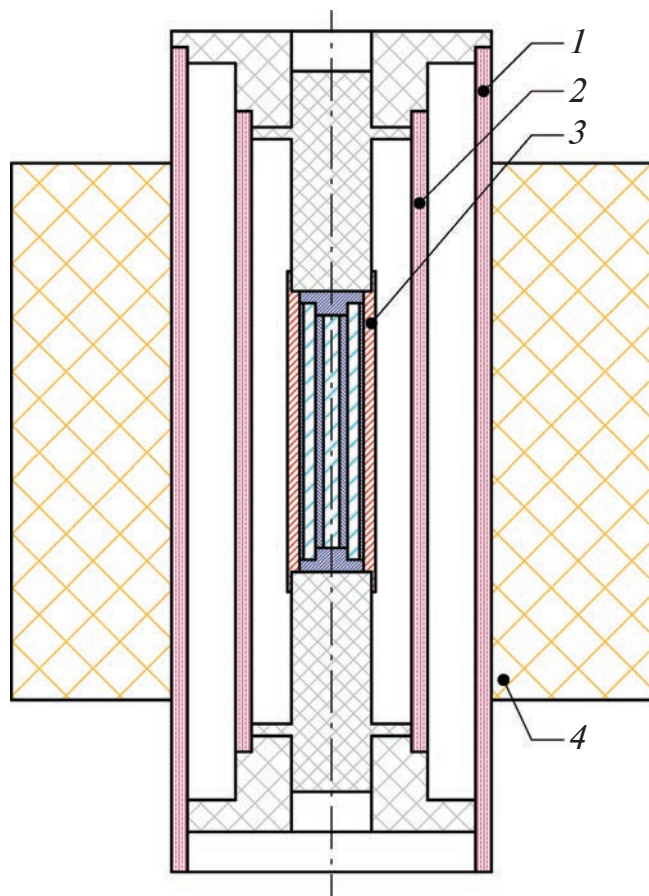


Рис. 1. 1 – соленоид начального магнитного поля (первый каскад), 2 – второй каскад, 3 – камера сжатия, 4 – заряд ВВ.

каскад генератора), дополнительную токоне-сущую, после соударения с первым каскадом, оболочку (второй каскад) и кольцевой заряд взрывчатого вещества (ВВ) в качестве основного источника энергии.

Камера сжатия (рис. 2) образована толсто-стенной медной обжимающей трубкой и мас-сивными торцевыми заглушками (габаритные размеры камеры сжатия: длина – 150 мм, ди-аметр – 21.8 мм). Под обжимающей трубкой коаксиально располагаются датчики давления (эталон) и исследуемый образец, отделен-ные от обжимающей трубки тонкой (~0.15 мм) контрастирующей оболочкой, изготовленной на основе сплава вольфрама.

Во время разряда мощной конденсаторной батареи или спирального взрывомагнитного ге-нератора (ток разряда $I_0 \approx 1.6\text{--}2.3$ МА) на соле-ноид генератора в его полости, в зазоре между соленоидом и обжимающей трубкой, создается

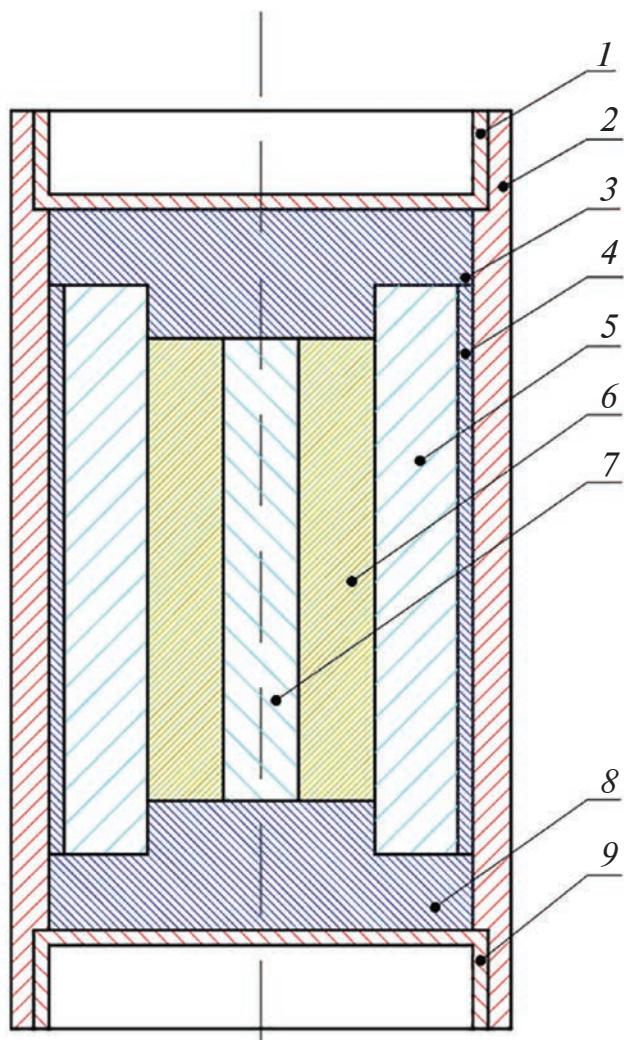


Рис. 2. Схема камеры сжатия: 1 и 9 – медные герме-тичные заглушки, 2 – обжимающая трубка, 3 и 8 – торцевые заглушки, 4 – контрастирующая оболочка, 5 – периферийный эталон давления, 6 – исследуе-мый образец, 7 – центральный эталон давления.

начальное магнитное поле $H_0 \approx 120\text{--}170$ кГс. В процессе работы генератора МК-1 магнит-ное поле в зазоре усиливается до мегагауссных значений (~10 МГс), оказывая на внешнюю по-верхность камеры сжатия однородное магнит-ное давление $H^2/8\pi$. В результате трубка камеры схлопывается без образования ударных волн и сжимает (в течение ≈ 17 мкс) расположенные внутри нее вещества до мегабарных давлений.

При проведении эксперимента произво-дится рентгенографирование камеры сжатия импульсом тормозного излучения бетатрона БИМ-234 [7] с регистрацией изображения на фотохромные пластины или рентгеновские пленки. Рентгенографирование производится

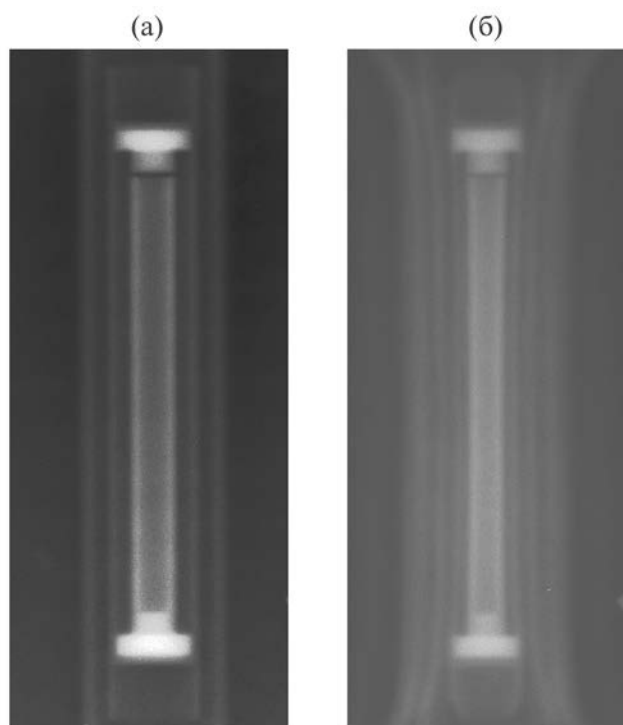


Рис. 3. Экспериментальные рентгенограммы: а — предварительный снимок (образцы в начальном состоянии), б — основной снимок (момент сжатия).

перед проведением эксперимента (предварительный снимок) и в моменты времени, когда в камере сжатия достигается сверхвысокое давление (основной снимок). Как правило, в эксперименте использовалось от 7 до 10 фотохромных пластин по каждому каналу рентгенографирования камеры сжатия. По результатам обработки полученных в эксперименте изображений на рентгеновских снимках определяются размеры, а следовательно, и сжатие как исследуемого, так и эталонных образцов. Зная сжатие и начальную плотность ρ_0 образца, легко определить его плотность в момент рентгенографирования. По плотности эталонов, с помощью их известной изоэнтропы, можно определить давление в эталонах и, после учета небольших расчетных поправок, в исследуемом веществе. В качестве эталона лучше всего подходит алюминий, для которого накоплен и обработан наиболее обширный и представительный статистический материал, охватывающий требуемый интервал давлений [8–11].

Таким образом, изменяя от эксперимента к эксперименту время рентгенографирования, на плоскости $P - \sigma$ получаем для исследуемого

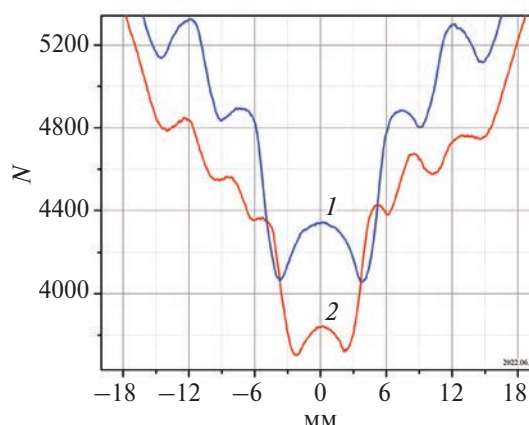


Рис. 4. Характерная денситограмма: 1 — предварительный снимок, 2 — основной снимок.

вещества набор точек, соответствующий его “холодной” изоэнтропе.

На рис. 3 приведены в качестве примера рентгенограммы камеры сжатия сплава ВНМ-3-2 одного из экспериментов, в котором между образцами и верхней торцевой заглушкой камеры сжатия был специально оставлен небольшой (≈ 1 мм) зазор.

Сохранение в процессе сжатия зазора говорит об отсутствии сколь-нибудь значимого перемещения сжимаемых веществ в осевом направлении.

Полученные рентгеновские изображения сканировались, после чего подвергались математической обработке с использованием нелинейной фильтрации. Для каждого из снимков строилась денситограмма (рис. 4) — зависимость плотности почернения от радиального расстояния. По расположению ее минимумов определяются значения внешнего радиуса эталонов, а по расположению точек перегиба — значение внешнего радиуса исследуемого образца.

Точность определения сжатия и давления определяется, прежде всего, точностью измерения внешних радиусов эталонных образцов при нормальных условиях и в сжатом состоянии. Погрешности измерения радиусов сжатых оболочек на порядок превышают погрешность измерения начальных размеров, поэтому последней мы пренебрегаем. Погрешность измерения давления и сжатия вычислялась в соответствии с правилом

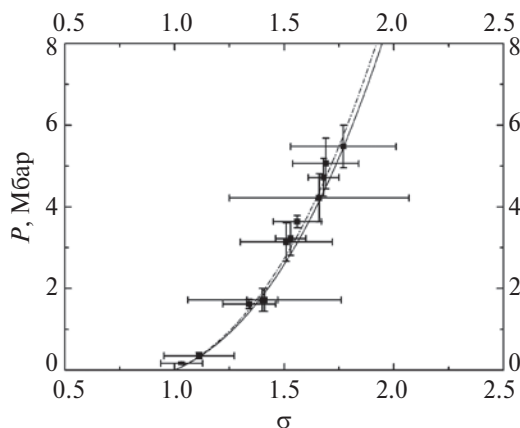


Рис. 5. Расчетная нормальная изоэнтропа сплава ВМ-3-2 в сопоставлении с экспериментальными результатами.

вычисления погрешности функции от нескольких переменных по изложенной в [1, 2] процедуре. В данном случае такими переменными являются измеряемые в опыте радиусы.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

После обработки экспериментальных данных на фазовой диаграмме сплава ВМ-3-2 в координатах “сжатие-давление” построена изоэнтропа, соответствующая начальной температуре исследуемого образца, близкой к комнатной, и начальному давлению, близкому к атмосферному (рис. 5). Вследствие малости тепловой составляющей давления полученные точки дают также представление и о поведении нулевой изотермы исследуемого сплава. Результаты всех проведенных со сплавом ВМ-3-2 опытов приведены в табл. 1. Начальная плотность ρ_0 всех исследуемых образцов сплава ВМ-3-2 определялась с точностью ± 0.05 г/см³.

Точки показаны также на рис. 5 в сопоставлении с нормальной изоэнтропой, построенной нами для сплава ВМ-3-2 методом Альтшулера–Брусникина–Кузьменкова [12] с использованием данных ударно-волновых экспериментов [13]. Эта изоэнтропа применяется при моделировании работы устройства сжатия и задается формулой:

$$P^{(\text{ВМ})}(\sigma) = 3\rho_n a_0 (q - 2)^{-1} \sigma^{2/3} \times \left\{ \exp \left[q(1 - \sigma^{-1/3}) \right] - \sigma^{2/3} \right\}.$$

Таблица 1. Результаты опытов со сплавом ВМ-3-2

ρ_0 , г/см ³	σ , отн. ед.	P , Мбар
17.29	1.032 ± 0.096	0.169 ± 0.031
17.29	1.112 ± 0.160	0.353 ± 0.073
18.17	1.34 ± 0.12	1.62 ± 0.12
18.17	1.40 ± 0.07	1.71 ± 0.27
17.29	1.41 ± 0.35	1.72 ± 0.28
18.17	1.51 ± 0.21	3.14 ± 0.47
18.17	1.53 ± 0.07	3.14 ± 0.40
18.17	1.56 ± 0.11	3.64 ± 0.15
17.29	1.66 ± 0.41	4.22 ± 0.59
18.17	1.68 ± 0.07	4.66 ± 0.48
18.17	1.69 ± 0.15	5.06 ± 0.62
17.29	1.77 ± 0.24	5.48 ± 0.52

Здесь $a_0 = 3.383$ км/с, $q = 10.103$. Наблюдается достаточно хорошая согласованность экспериментальных результатов с расчетными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена соответствующая нормальным условиям фазовая диаграмма “давление-сжатие” сплава ВМ-3-2 вплоть до давлений ~ 6 Мбар, которая хорошо согласуется с ранее построенной полуфеноменологической изоэнтропой. Полученная по результатам проведенных опытов информация позволяет достаточно надежно строить уравнение состояния твердотельной фазы в широком диапазоне температур и давлений не только для исследуемого сплава, но и для любых веществ с большим атомным номером.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают особую благодарность Ю.В. Вилкову, А.В. Бочкареву, А.А. Тютяеву, Я.А. Мельнику, С.И. Шлёпкину, М.М. Саиткулову, А.В. Рыжкову, С.Ю. Согрину, С.Е. Елфимову, Е.П. Волкову, Р.В. Тилькунову.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке госкорпорации “Росатом”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисков Г.В., Быков А.И., Егоров Н.И. и др. Результаты экспериментов по изоэнтропическому

- сжатию вещества с большим атомным номером / В кн.: Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны. Мощная импульсная электрофизика. XVII Харитоновские чтения // Сборник докладов. Саров. ФГУП “РФЯЦ-ВНИИЭФ”, 2016. С. 201–212.
2. Борисков Г.В., Быков А.И., Егоров Н.И. и др. Экспериментальное исследование сжимаемости сплава ВНМ-3-2 в области мегабарного давления // ФГВ. 2018. Т. 54. № 5. С. 18–26.
<https://doi.org/10.15372/FGV20180503>
 3. Борисков Г.В., Быков А.И., Егоров Н.И. и др. Результаты экспериментов по изоэнтропическому сжатию сплава ВНМ-3-2 до сверхвысоких давлений / В кн.: Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны. Т. 1. XXI Харитоновские тематические научные чтения // Сб. докладов. Саров. ФГУП “РФЯЦ-ВНИИЭФ”, 2020. С. 315–321.
 4. Зеликман А.Н., Никитина Л.С. Вольфрам. М.: Металлургия, 1978. 272 с.
 5. Борисков Г.В., Быков А.И., Долотенко М.И. и др. Физические исследования в сверхсильных магнитных полях // УФН. 2011. Т. 181. № 4. С. 37–43.
<https://doi.org/10.3367/UFNr.0181.201104n.0441>
 6. Гриневич Б.Е., Демидов В.А., Ивановский А.В., Селемир В.Д. Взрывомagnetные генераторы энергии и их применение в научных экспериментах // УФН. 2011. Т. 181. № 4. С. 422–427.
<https://doi.org/10.3367/UFNr.0181.201104k.0422>
 7. Kuropatkin Y.P., Mironenko V.D., Suvorov V.N., and Volkov A.A. Characteristics of the installation for flash radiography based on the uncured betatron BIM – M / In: 11th IEEE Pulsed Power Conference. Digest of technical papers. Eds. G. Cooperstein and I. Vitkovitsky. Piscataway NJ USA, IEEE, 1998. P. 1663–1668.
 8. Альтшуллер Л.В., Кормер С.Б., Баканова А.А., Трунин Р.Ф. Уравнения состояния алюминия, меди и свинца для области высоких давлений // ЖЭТФ. 1960. Т. 38. № 3. С. 790–798.
 9. Симоненко В.А., Волошин Н.П., Владимиров А.С. и др. Абсолютные измерения ударной сжимаемости алюминия при давлениях $P \leq 1$ ТПа // ЖЭТФ. 1985. Т. 88. № 4. С. 1452–1459.
 10. Nellis W.J., Moriarty J.A., Mitchell A.C. et al. Metals physics at high pressure: aluminum, copper and lead as prototypes // Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60. No 14. P. 1414–1417.
 11. Greene R. G., Lue H., and Ruoff A. L. Al as a simple solid: high pressure study to 220 GPa (2.2 Mbar) // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 73. No 15. P. 2075–2078.
 12. Альтшуллер Л.В., Брусникин С. Е., Кузьменков Е. А. Изотермы и функции Грюнейзена 25 металлов // ЖПМТФ. 1987. № 1. С. 134–146.
 13. Трунин Р.Ф., Гударенко Л.Ф., Жерноклетов М.В., Симаков Г.В. Экспериментальные данные по ударно-волновому сжатию и адиабатическому расширению конденсированных веществ. Саров: ФГУП “РФЯЦ-ВНИИЭФ”, 2006. 530 с.

ISENTROPIC COMPRESSIBILITY OF VNM-3-2 ALLOY IN AREA OF ULTRA-HIGH PRESSURES

G. V. Boriskov^a, A. I. Bykov^a, N. I. Egorov^a, A. S. Korshunov^a, I. V. Makarov^a, V. N. Pavlov^a, P. B. Repin^a, Corresponding Member of the RAS V. D. Selemir^a, I. S. Strelkov^a, O. M. Surdin^a, N. A. Belyaeva^a, S. I. Belov^a

^aRussian Federal Nuclear Center – All-Russian Scientific Research Institute of Experimental Physics, Sarov, Nizhny Novgorod Region, Russia

The authors provide the performance and experiment results of the isentropic compression of the tungsten VNM-3-2 alloy up to ultra-high (>1 Mbar) pressures in a device based on the magneto-cumulative generator. The points obtained on the diagram “compression-pressure” are compared with a normal isentrope constructed based on the data of shock-wave experiments.

Keywords: VNM-3-2 alloy, isentropic compression, magneto-cumulative generator, ultra-high pressures, X-ray radiography, normal isentrope, zero isotherm, equation of state

УДК 621.373.826

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ЛАЗЕРНОГО МОДУЛЯ С ИМПУЛЬСНОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ ДИОДНОЙ НАКАЧКОЙ АКТИВНОЙ СРЕДЫ Nd³⁺:YAG

© 2024 г. Член-корреспондент РАН С. В. Гарнов¹,
К. А. Галюк^{1,2,*}, Б. Д. Овчаренко¹, А. А. Ушаков¹, В. В. Букин¹

Поступило 26.02.2024 г.

После доработки 26.02.2024 г.

Принято к публикации 04.03.2024 г.

Проведено моделирование лазерного модуля (квантрона) с поперечной импульсной диодной накачкой цилиндрического активного элемента Nd³⁺:YAG методом непоследовательной трассировки лучей в программной среде Zemax. Численно получены распределения мощности поглощенного излучения накачки по поперечному сечению активного элемента и рассчитана эффективность накачки квантрона. Предложена методика оптимизации конструкции квантрона, результатом которой является повышение эффективности накачки активного элемента.

Ключевые слова: квантрон, лазерная диодная решетка, активный элемент, эффективность накачки

DOI: 10.31857/S2686740024030028, **EDN:** KALOBV

Твердотельные квантроны с оптической накачкой активно применяются для решений задач во многих областях техники и фундаментальных исследований. Твердотельные лазерные модули обладают рядом возможностей [1], которых нет у лазерных систем с другими типами активного элемента и возбуждения (накачки), например: использование низких напряжений, малые габариты (по сравнению с газовыми средами); достижение высоких энергий в импульсе (по сравнению с активной средой в виде оптоволокна). Изначально в качестве оптической накачки использовали лампы-вспышку [2], испускающую широкий спектр излучения. Однако для получения высокой эффективности работы квантрона и уменьшения тепловой нагрузки необходим более узкий спектральный диапазон излучения

накачки, для этого хорошо подходят лазерные полупроводниковые диоды. Диодная накачка классифицируется по типу направления излучения в объем активного элемента: поперечная (боковая), направленная перпендикулярно оси активного элемента [3–7], и продольная (торцевая), направленная параллельно оптической оси активного элемента [8]. Продольный ввод излучения в среду позволяет согласовать моды, но в ряде случаев ограничивает размеры области ввода излучения, что приводит к малым мощностям генерируемого и усиленного излучений. В поперечной накачке для большей однородности возбуждения активной среды необходимо равномерно облучать среду несколькими источниками излучения накачки, расположенными вокруг боковой поверхности и вдоль всей длины активного элемента. Поперечный тип накачки часто используется в высокомоощных лазерных усилителях и генераторах с активными элементами в виде стержня или слэба. Однако квантроны со слэб-активным элементом имеют несколько недостатков: достаточно сложная конструкция, формирование

¹Институт общей физики им. А.М. Прохорова
Российской академии наук, Москва, Россия

²Национальный исследовательский ядерный
университет МИФИ, Москва, Россия

*E-mail: karina272001@yandex.ru

лазерного излучения прямоугольной формы поперечного сечения, различие между температурными градиентами в перпендикулярных плоскостях приводит к формированию асимметричного и астигматичного выходного лазерного излучения, ограниченное значение плотности мощности накачки. Таким образом, наиболее доступным для решения большого числа различных задач и с возможностью получения высоких выходных характеристик (мощность, эффективность) является квантрон с активным элементом в форме стержня.

Квантрон может выполнять два вида функций: усиливать проходящие через него оптические сигналы и в комбинации с резонатором (системой, например, двух зеркал: глухого и полупрозрачного) генерировать лазерное излучение. Из-за многофункциональности данного лазерного модуля должны также различаться подходы в разработке и оптимизации его конструкции. Так, для получения высокого усиления излучения необходимо достижение высокой однородности распределения мощности поглощенного излучения в поперечном сечении активного элемента. Для квантрона-лазера важным параметром является высокая эффективность накачки активного элемента. Например, в Научно-исследовательском институте электрофизической аппаратуры им. Д.В. Ефремова (НИИЭФА) проводятся работы по разработке Nd:YAG-лазера и оптимизации конструкции с целью улучшения качества генерируемого излучения [9]. В данной работе проводится анализ предложенных подходов [9–14] и применение их в целях повышения эффективности накачки активного элемента. Разработка высокоэффективного твердотельного квантрона с диодной накачкой позволит увеличить выходные параметры твердотельного лазера, уменьшить затрачиваемые ресурсы и решить более широкий спектр технических и фундаментальных задач. Моделирование и оптимизация конструкции и динамики работы лазерного модуля может позволить провести точный расчет параметров физических процессов и выходных характеристик лазерного модуля, а также значительно ускорить процесс внедрения в эксплуатацию разрабатываемого квантрона.

На данный момент существует много работ [15–21], направленных на исследование и разработку квантронов для решений большого числа задач. Основной акцент в них направлен на описание методов оптимизации геометрии квантрона для решения поставленной задачи (формирование максимально однородного распределения поглощенного излучения накачки по поперечному сечению активного элемента, повышение эффективности работы и мощности выходного сигнала квантрона, реализация работы лазера в широком температурном диапазоне), не затрагивая способы создания математической и численной моделей диодной накачки активного элемента. Однако в работах [22–29] приводятся аналитические модели квантрона с поперечной диодной накачкой. В данной работе подробно проводится математическое моделирование оптической накачки активного элемента с учетом численной модели излучения лазерной диодной решетки (ЛДР). Для моделирования ЛДР требуется экспериментальное измерение пространственных и спектральных характеристик и разработка численной модели определения угловых параметров излучения конкретного диодного источника излучения. Важными параметрами, которые необходимо учитывать в процессе моделирования, особенно для оптимизации эффективности работы квантрона, являются спектры излучения накачки и поглощения активного элемента.

В данной работе рассматривается математическое моделирование лазерного модуля с поперечной диодной накачкой цилиндрического активного элемента на основе кристалла $\text{Nd}^{3+}:\text{YAG}$. Динамический процесс оптической накачки в расчетной модели проводится методом непоследовательной трассировки лучей в программном пакете моделирования Zemax. Создание расчетной модели квантрона включает в себя выбор основной конструкции квантрона и построение 3D-моделей каждого составляющего оптического элемента с его конкретными характеристиками материала и геометрическими размерами. С помощью готовой математической модели проводятся численные эксперименты по измерению пространственного распределения мощности поглощенного излучения в поперечном сечении активного элемента, которое, в свою очередь, участвует

в дальнейших расчетах эффективности накачки активного элемента. Повышение эффективности накачки квантрона выполняется путем оптимизации его конструкции: изменения числа источников оптической накачки, расстояния от излучающей области источника накачки до центра активного элемента и применения различных систем отражателей непоглощенного излучения в активном элементе [30–33].

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАЗЕРНОЙ ДИОДНОЙ РЕШЕТКИ

Первым этапом создания реалистичной динамической модели оптической накачки активного элемента является моделирование лазерной диодной решетки (ЛДР) — источника излучения. В качестве ЛДР используется излучатель производства НПП “Инжест” (модель SLM30-807-2100-QCW-298), имеющий квазинепрерывный режим работы и конструкцию типа “Rack and Stack” [34, 35]. В процессе моделирования источника излучения необходимо задание его геометрических, электрических и спектральных характеристик, а также угловых параметров излучения. В программе Zemax в библиотеке источников излучения в качестве диодного излучателя представлен одиночный диод (Source Diode). Из моделей точечного диода в плоскости xu составлен двумерный массив 25×5 мм. Построенный прямоугольный источник характеризуется следующими геометрическими параметрами: размером массива элементов (диодов) $n_y * n_x$ (n_x и n_y — количество источников, расположенных вдоль осей x и y соответственно), Δx и Δy — расстояниями между соседними диодами, расположенными по направлениям осей x и y соответственно. Необходимое положение массива диодов в пространстве задается значениями координат и углов поворота относительно осей в системе координат xuz . В качестве спектра излучения источников используется экспериментально измеренный спектр излучения ЛДР НПП “Инжест” (центральная длина волны излучения 806 ± 3 нм). Каждый диод имеет угловое распределение интенсивности:

$$I(\theta_x, \theta_y) = I_0 e^{-2 \left(\left(\frac{\theta_x}{\alpha} \right)^{2G_x} + \left(\frac{\theta_y}{\beta} \right)^{2G_y} \right)}, \quad (1)$$

Таблица 1. Значения параметров модели ЛДР

$\alpha, ^\circ$	$\beta, ^\circ$	n_x	n_y	$\Delta x, \text{мм}$	$\Delta y, \text{мм}$	G_x	G_y	$P, \text{кВт}$
40	10	11	101	2.5	0.05	1	1	2

где α и β — углы расходимости (в градусах) в плоскостях xz и yz соответственно, G_x и G_y — коэффициенты “супергауссовости” для направления x и y соответственно. В качестве электрического параметра массива диодов задается значение средней суммарной мощности P излучения. Созданная модель ЛДР (массив диодов) имеет параметры, указанные в табл. 1.

В паспорте ЛДР чаще указываются значения θ_{fwhm} — угла расходимости излучения в дальней зоне, как полной ширины углового распределения между точками половинной интенсивности, при которых

$$I(\theta_x, \theta_y) = \frac{1}{2} I \left(\frac{1}{2} \theta_{fwhm}(x), 0 \right) = I \left(0, \frac{1}{2} \theta_{fwhm}(y) \right) = \frac{1}{2} I_0.$$

Зависимости паспортных углов расходимости излучения $\theta_{fwhm}(x)$ и $\theta_{fwhm}(y)$ от аналогичных, задаваемых в моделировании, α и β по быстрой и медленной осям, соответственно, имеет вид:

$$\alpha = \frac{\theta_{fwhm}(x)}{\sqrt{2 \ln 2}}, \quad \beta = \frac{\theta_{fwhm}(y)}{\sqrt{2 \ln 2}}. \quad (2)$$

Таким образом, для моделирования источника необходимо найти соответствия между угловыми параметрами математической и физической моделей лазерных диодных решеток. Для этого разработана численная модель определения углового распределения интенсивности излучения источника и углов расходимости α и β .

В ходе численного эксперимента (рис. 1) излучение от источника попадало на плоский экран (прямоугольный детектор с заданным количеством пикселей вдоль направлений x и y), расположенный на расстоянии $m = 800$ мм от излучающей плоскости источника.

Экран фиксировал $I(x, y)$ — пространственное распределение интенсивности пятна излучения от источника. В результате измерения пространственного распределения интенсивности пятна излучения доказано, что функция

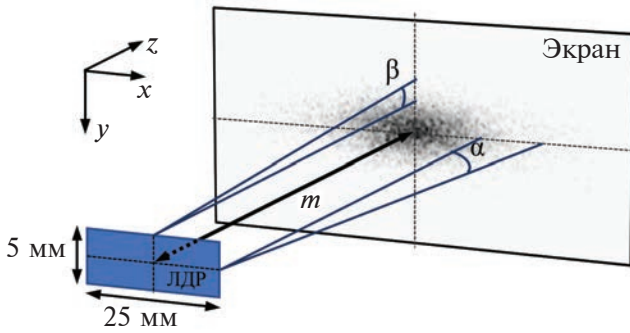


Рис. 1. Оптическая схема численного эксперимента по измерению пространственного распределения интенсивности пятна излучения массива диодов (Zemax).

интенсивности $I(x, y)$, зависящая от координат, однозначно связана с функцией интенсивности $I(\theta_x, \theta_y)$, зависящей от углов. Рассчитана связь между распределениями интенсивности излучения $I(x, y)$ и $I(\theta_x, \theta_y)$ с учетом закономерности построения хода лучей в пространстве (зависимость угла наклона луча от координат точки пересечения луча с экраном) в программе Zemax:

$$I(x, y) = A \frac{\cos(\theta[x]) \cos(\theta[y])}{\sqrt{x^2 + m^2} \sqrt{y^2 + m^2}} e^{-2 \left(\frac{\theta[x]^2}{\alpha_0^2} + \frac{\theta[y]^2}{\beta_0^2} \right)}, \quad (3)$$

$$\theta[x] = \operatorname{tg}^{-1} \frac{x}{m}, \quad \theta[y] = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{m},$$

где m — расстояние от источника до экрана, α_0 и β_0 — углы расходимости излучения по быстрой и медленной осям в модельной функции (3) для оценки расходимости излучения методом наименьших квадратов (МНК). Сопоставляя распределение $I(x, y)$, полученное в моделировании, с выражением (3), с помощью МНК рассчитаны параметры направленности излучения $I(\theta_x, \theta_y)$, а именно углы расходимости α_0 и β_0 (аппроксимация данных): $\alpha_0 = 39.9^\circ$ и $\beta_0 = 9.9^\circ$, которые близки к значениям $\alpha_0 = 40^\circ$ и $\beta_0 = 10^\circ$, задаваемым в программе Zemax в качестве исходных параметров модели массива диодов. Для сравнения модельной функции (3) и параметров, полученных на основе МНК, с данными численного эксперимента проведено сопоставление срединных горизонтальных (рис. 2а) и вертикальных (рис. 2б) сечений пространственных распределений интенсивности пятна излучения:

полученное в численном эксперименте (Zemax) и рассчитанное модельной функцией (3) и МНК.

Срединные горизонтальные и вертикальные сечения двух распределений интенсивности пятна излучения прямоугольного массива диодов приближены друг к другу по значениям интенсивности и форме. С помощью разработанной модели получены угловые параметры и пространственное распределение интенсивности пятна излучения массива диодов с незначительными отклонениями от полученных значений в численном эксперименте. Следовательно, данная численная модель может применяться для определения угловых и пространственных характеристик диодного источника.

Для верификации методики определения угловых параметров источника проведен физический эксперимент по измерению пространственного распределения интенсивности пятна излучения ЛДР, в результате которого экспериментально определялись углы расходимости лазерной диодной решетки производства НПП “Инжект”, используемой в составе разрабатываемых модулей накачки в Федеральном исследовательском центре “Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН” (ФИЦ ИОФ РАН). Данный источник излучения имеет следующие основные параметры: центральная длина волны излучения 806 ± 3 нм, излучающая область 25×5 мм, напряжение на излучателе 110 В при рабочей амплитуде импульса тока накачки 45 А, средняя оптическая мощность излучения 2 кВт с длительностью импульса 250 мкс и частотой повторения 2 Гц. По указанным в паспорте данного источника значениям углов расходимости $\theta_{fwhm} \leq 45^\circ, 15^\circ$ и по формуле (2) вычислены предельные паспортные значения углов расходимости излучения $\alpha_n, \beta_n \leq 38.2^\circ, 12.7^\circ$. Оптическая схема эксперимента представлена на рис. 3.

В эксперименте изображение пространственного распределения интенсивности пятна излучения от ЛДР, полученное на рассеивающем экране, отображалось с помощью собирающей линзы на матрицу КМОП-камеры Basler acA2040, подключенной к ПК и синхронизированной с блоком питания источника излучения. Для исключения выхода в режим насыщения матрицы камеры использовался набор нейтральных фильтров (ND2.0 и ND3.0). Далее были определены углы расходимости

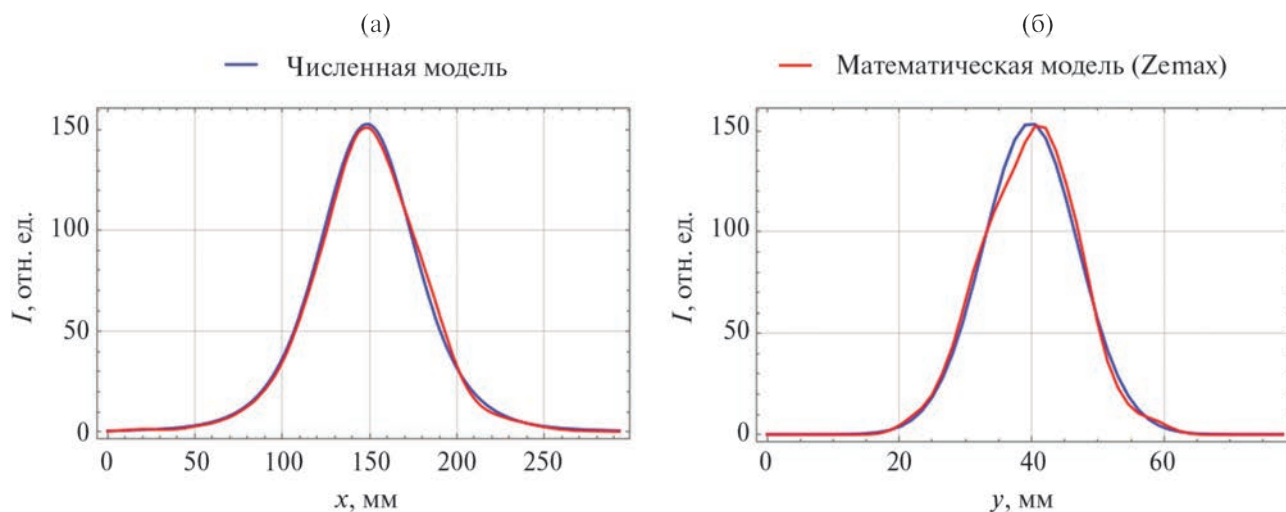


Рис. 2. Пространственные распределения интенсивности пятна излучения массива диодов, полученные в численном эксперименте (Zemax) (красный график) и рассчитанные с помощью модельной функции и метода наименьших квадратов (синий график); а – срединное горизонтальное сечение; б – срединное вертикальное сечение.

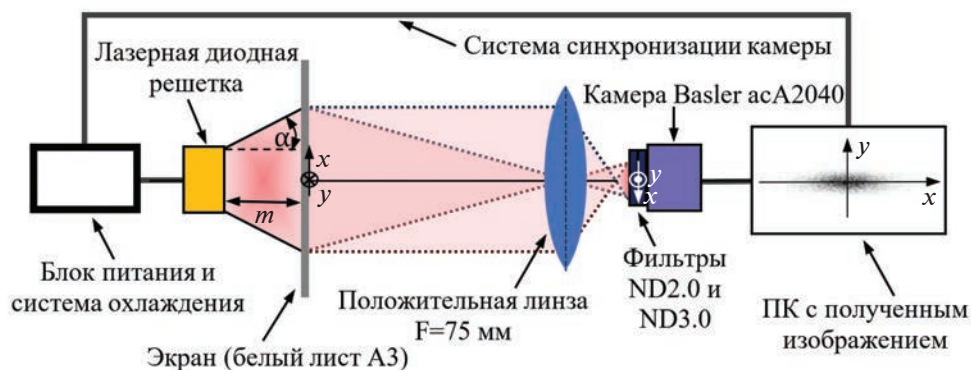


Рис. 3. Оптическая схема экспериментальной установки измерения пространственного распределения интенсивности пятна излучения лазерной диодной решетки.

излучения источника $\alpha_{\text{экс}} = 40.4^\circ$ и $\beta_{\text{экс}} = 9.9^\circ$ методом, который был предложен для математической модели источника. Найденные углы хорошо соотносятся с паспортными значениями углов расходимости данной лазерной диодной решетки. Следовательно, разработанная численная модель также применима для определения углов расходимости α и β излучения лазерной диодной решетки производства НПП “Инжект”, значения которых в дальнейшем будут использованы для моделирования оптической накачки активного элемента.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАНТРОНА

Моделирование квантрона основывается на конструкции, которая подробно описывается в [36]. Данная конструкция широко используется

в составе лазерных установок в ФИЦ ИОФ РАН. Схемы построенной модели исходной (с пятисторонней накачкой) и возможной (с трехсторонней накачкой) конструкций показаны на рис. 4.

Смоделированы лазерные модули с пятисторонней (суммарная средняя оптическая мощность 10 кВт импульсов излучения при рабочей амплитуде импульса тока накачки 225А) и трехсторонней (суммарная средняя оптическая мощность 6 кВт импульсов излучения при рабочей амплитуде импульса тока накачки 135А) поперечной импульсной диодной накачкой (длительности импульсов 250 мкс) активного элемента. В центре квантрона расположена кварцевая трубка (внешним диаметром $\varnothing 12$ мм и длиной $l = 120$ мм) с активным элементом в форме цилиндра (диаметром $\varnothing 5$ мм

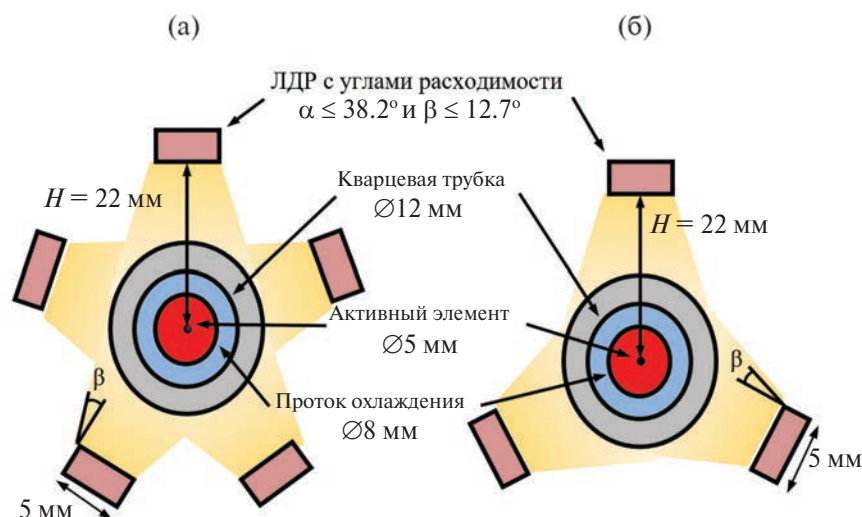


Рис. 4. Оптическая схема поперечного сечения модели квантрона с пятисторонней (а) и трехсторонней (б) диодной накачкой.

и длиной $l = 120$ мм), изготовленным из кристалла $\text{Nd}^{3+}:\text{YAG}$ — алюмоиттриевого граната с однопроцентной концентрацией примесных ионов неодима. Для создания модели активного элемента учитывается спектр поглощения $\text{Nd}^{3+}:\text{YAG}$ (зависимость коэффициента поглощения среды от длины волны излучения) [37]. Математическая модель учитывает зависимость поглощения от концентрации примесных ионов.

Вокруг боковой поверхности кварцевой трубки и на расстоянии $H = 22$ мм от центра активного элемента расположены пять (три) источников излучения, у которых быстрая ось параллельна образующей цилиндрического активного элемента, а медленная ось ей перпендикулярна. Для охлаждения и поддержания рабочей температуры 25°C активного элемента и ЛДР предусмотрена жидкостная система термостабилизации в виде одного замкнутого контура. В модели квантрона система охлаждения активного элемента выполнена в виде трубки (внешним диаметром 8 мм и длиной $l = 120$ мм) с ламинарным потоком хладагента, расположенной между кварцевой трубкой и активным элементом. Модель в программе Zemax не позволяет напрямую учитывать влияние температуры на работу квантрона, однако данный температурный параметр можно учитывать косвенно в виде конкретных спектров излучения массива диодов и поглощения активного элемента, которые должны достигаться

при температуре 25°C . На рис. 5 представлены спектр поглощения $\text{Nd}^{3+}:\text{YAG}$ (синий график), спектр излучения ЛДР с центральной длиной волны 806 нм (фиолетовый график) и показана область длин волн (ограниченная пунктиром), в которой возможен сдвиг спектра излучения ЛДР в пределах партии при 25°C .

Даже при незначительном изменении температуры лазерной диодной решетки происходит сдвиг рабочей длины волны излучения (0.28 нм/ $^\circ\text{C}$ [38]), что, в свою очередь, приводит к изменениям коэффициента поглощения (глубины поглощения в активном элементе) и выходных характеристик всей лазерной системы. Так, при изменении температуры ЛДР на 3.5°C происходит смещение центральной длины на 1 нм, следовательно, изменяются показатели коэффициента и глубины поглощения активного элемента. Длина поглощения $l_{1/e}$ — расстояние от поверхности активного элемента, на котором интенсивность излучения накачки в активном элементе уменьшается в e раз. На рис. 6 представлен график зависимости глубины поглощения в $\text{Nd}^{3+}:\text{YAG}$ 1% ат. от длины волны излучения накачки.

С изменением температуры ЛДР сдвиг центральной длины волны в диапазоне от 804 нм до 807 нм приводит к значениям длин поглощения, приближенным к радиусу активного элемента 2.5 мм. Значит, изменение температуры (до 11°C), приводящее к изменению центральной длины

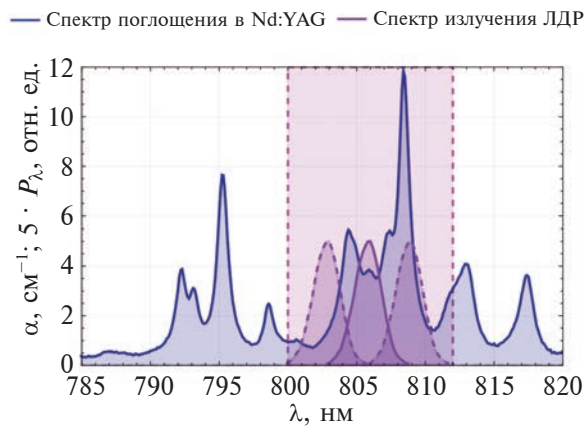


Рис. 5. Спектры поглощения $\text{Nd}^{3+}:\text{YAG}$ 1% ат. (синий график), излучения ЛДР с центральной длиной волны 806 ± 3 нм (фиолетовый график). Три гауссовых кривых показывают центральное положение спектра излучения ЛДР (сплошная линия) и предельные случаи смещения положения спектра излучения ЛДР в пределах партии при фиксированной температуре 25°C (пунктирные кривые).

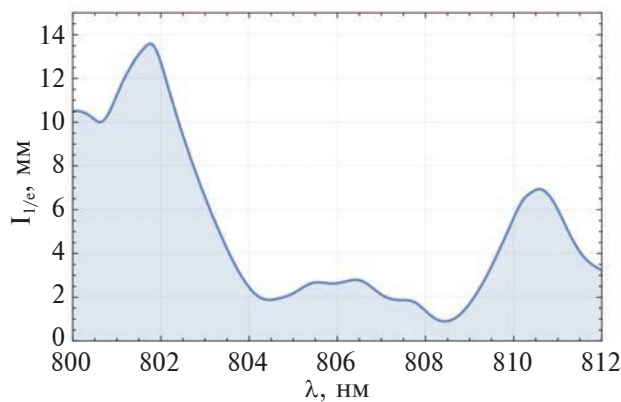


Рис. 6. Длина поглощения в $\text{Nd}^{3+}:\text{YAG}$ 1% ат. в диапазоне длин волн излучения ЛДР в пределах партии.

волны в пределах $804 \leq \lambda \leq 807$ нм, не влияет на поглощение излучения ЛДР в активном элементе. Однако при $807 < \lambda \leq 809$ нм глубина поглощения меньше радиуса активного элемента 2.5 мм, что приводит к поглощению излучения вблизи поверхности активного элемента. Сдвиг крайнего левого (803 нм) и крайнего правого (809 нм) значений центральной длины волны в пределах партии ЛДР на $\Delta T > 0^\circ\text{C}$ в меньшую и на $3.5 \leq \Delta T \leq 7^\circ\text{C}$ в большую стороны соответственно приводит к значениям глубины поглощения, превышающим диаметр активного элемента, и неполному поглощению излучения

накачки. Таким образом, для учета разброса центральной длины волны в спектре излучения источника в пределах партии или влияния температуры в модели возможен динамический подбор центральной длины волны и ширины спектра излучения под определенные условия работы квантрона.

Измерение пространственного распределения мощности поглощенного излучения проводится с помощью объемного детектора в виде прямоугольного параллелепипеда с заданным количеством вокселей по направлениям осей системы координат XYZ , внутри которого расположен активный элемент. С помощью построенной модели квантрона возможно проводить численные эксперименты по измерению пространственного распределения мощности излучения, поглощенного в активном элементе (рис. 7), и расчеты эффективности накачки активного элемента.

По данным распределения можно оценивать однородность поглощения излучения накачки в активном элементе, например, в виде пространственного распределения мощности в срединном горизонтальном разрезе поперечного сечения активного элемента (рис. 8).

Высокие эффективности накачки достигаются при максимальном поглощении излучения накачки в центре активного элемента. Однако при этом однородность распределения мощности поглощенного излучения накачки в поперечном сечении активного элемента снижается.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ НАКАЧКИ АКТИВНОГО ЭЛЕМЕНТА

Одним из основных и важных параметров квантрона является эффективность накачки активного элемента — отношение P_{Π} мощности поглощенного излучения в активном элементе к P_{H} мощности излучения источников накачки:

$$\eta_{\text{нак}} = \frac{P_{\Pi}}{P_{\text{H}}} = \eta_i \eta_f \eta_a, \quad (4)$$

где учитываются три основных потери: η_i , η_f и η_a , которые происходят в процессе накачки активного элемента; η_i — потери, связанные с не попаданием излучения в активный элемент (отношение мощности излучения, входящего в активный элемент, к мощности излучения

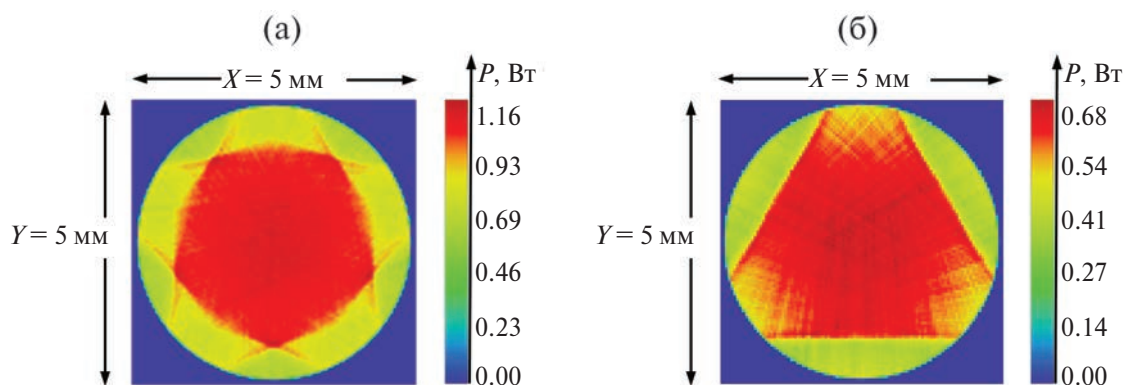


Рис. 7. Распределение поглощенной мощности излучения по поперечному сечению $\text{Nd}^{3+}:\text{YAG}$ в математической модели Zemax с пятисторонней (а) и трехсторонней (б) накачками.

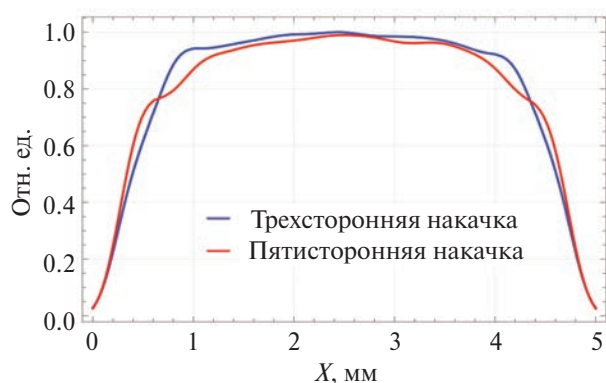


Рис. 8. Пространственное распределение поглощенной мощности излучения в срединном горизонтальном разрезе поперечного сечения активного элемента с пятисторонней (красный график) и трехсторонней (синий график) накачками.

накачки); η_f — потери, связанные с наличием френелевского отражения и рассеяния на поверхности активного элемента и кварцевой трубки (отношение мощности излучения, которое не отразилось от поверхности и прошло внутрь активного элемента, к мощности излучения накачки); η_a — эффективность поглощения активного элемента (отношение мощности поглощенного излучения в активном элементе к мощности излучения накачки). В процессе разработки высокоэффективных квантронов необходимо понизить потери на отражение и частичное поглощение излучения накачки, учитывая материалы, из которых изготовлены оптические элементы, и наличие просветляющих внешних и высокоотражающих внутренних покрытий трубок. Однако при решении задачи

повышения эффективности уже разработанного квантрона с определенными оптическими элементами важную роль играет понижение потерь при неполном попадании излучения накачки в активный элемент путем изменения геометрии конструктивных параметров модели квантрона.

ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИИ КВАНТРОНА

С помощью изменения положения оптических элементов в системе координат XYZ квантрона уменьшены потери η_r , что приводит к повышению эффективности накачки (от $\eta_{\text{нак}} = 67\%$) активного элемента исходной конструкции квантрона с тремя и пятью ЛДР. Рассмотрено влияние следующих параметров конструкции: количество источников излучения, расположенных вокруг боковой поверхности активного элемента; расстояние между поверхностями источников излучения и центром активного элемента; толщина кварцевой трубки и жидкостного протока между кварцевой трубкой и активным элементом; наличие системы отражателей излучения, непоглощенного в активном элементе — на эффективность накачки активного элемента.

Серией вычисленных экспериментов на примере модели с пятью ЛДР доказано, что толщина (от 1 до 6 мм) кварцевой трубки и толщина протока воды (от 0.5 до 5.5 мм) между кварцевой трубкой и активным элементом не влияют на эффективность накачки активного элемента (рис. 9а). В моделях с трех- и пятисторонней накачками по мере приближения лазерных диодных решеток к центру активного

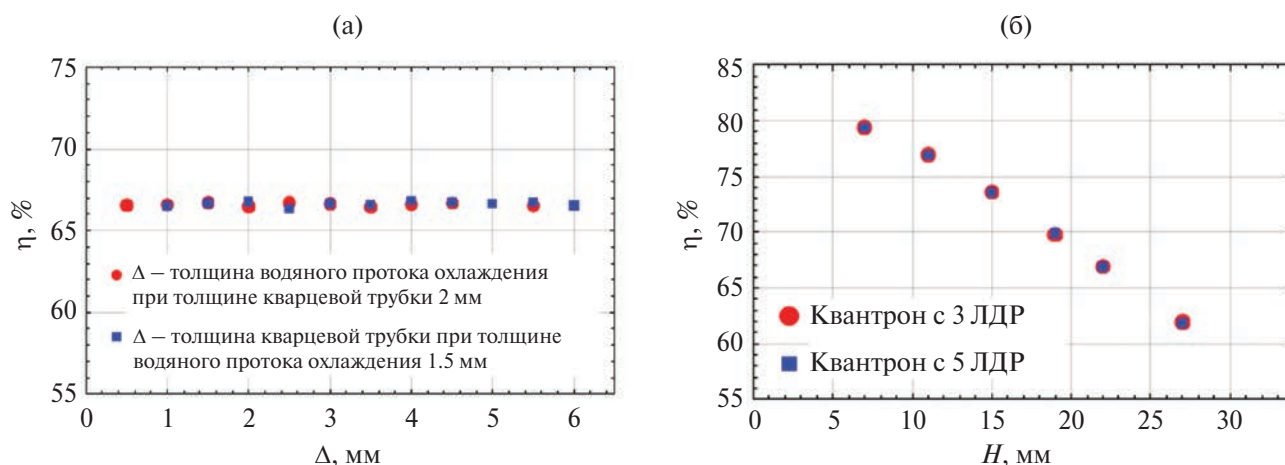


Рис. 9. Значения эффективности накачки активного элемента при различных значениях Δ – толщин жидкостного протока и кварцевой трубки (а); H – расстояния между лазерными диодными решетками (б).

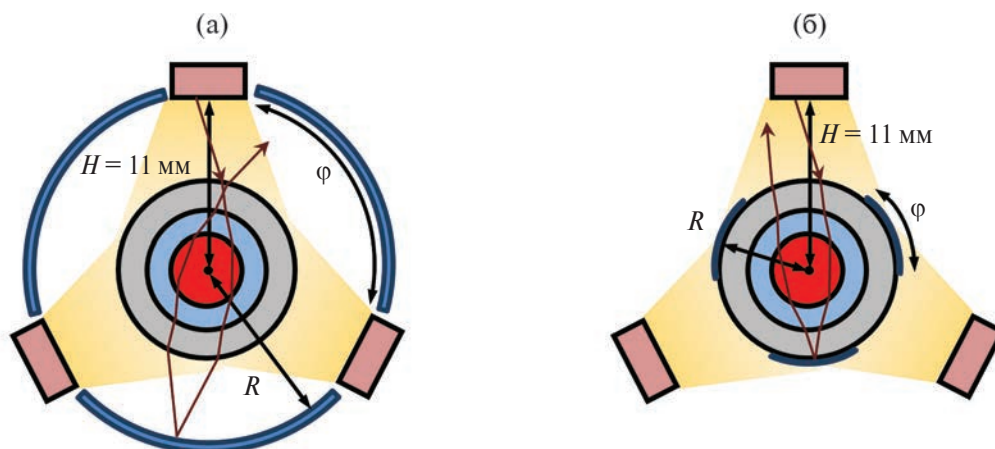


Рис. 10. Оптическая схема поперечного сечения модели квантрона с металлическими отражателями, а – расположенными на некоем расстоянии от внешней поверхности кварцевой трубки, б – напыленными на внешней поверхности кварцевой трубки.

элемента эффективность накачки увеличивается (рис. 9б).

Также выявлено, что для модели с трех- и пятисторонним расположением источников излучения эффективности накачки не отличаются друг от друга. Однако пятисторонняя накачка имеет выигрыш в значении поглощенной мощности примерно в 1.7 раза, это связано с тем, что суммарная мощность пяти и трех ЛДР равны 10 кВт и 6 кВт соответственно. В процессе подбора расстояния от источника до активного элемента в модели необходимо учитывать ограничивающие факторы в виде конструктивных особенностей квантрона (наличие определенных толщин протока охлаждения и кварцевой трубки между активным элементом

и излучателем, а также размеры ЛДР, превышающие размеры излучающей области). Таким образом, в моделях с тремя и пятью источниками излучения, уменьшая расстояние между излучающей плоскостью и центром активного элемента от $H = 22$ мм до допустимого минимального значения $H = 11$ мм, эффективность накачки увеличится на 10%. Для дальнейшей оптимизации конструкции квантрона используется модель с трехлучевой накачкой с наиболее оптимальным значением расстояния $H = 11$ мм между излучающей областью источника и центром активного элемента.

Наличие в квантроне системы сегментных отражателей приводит к отражению излучения, непоглощенного в активном элементе,

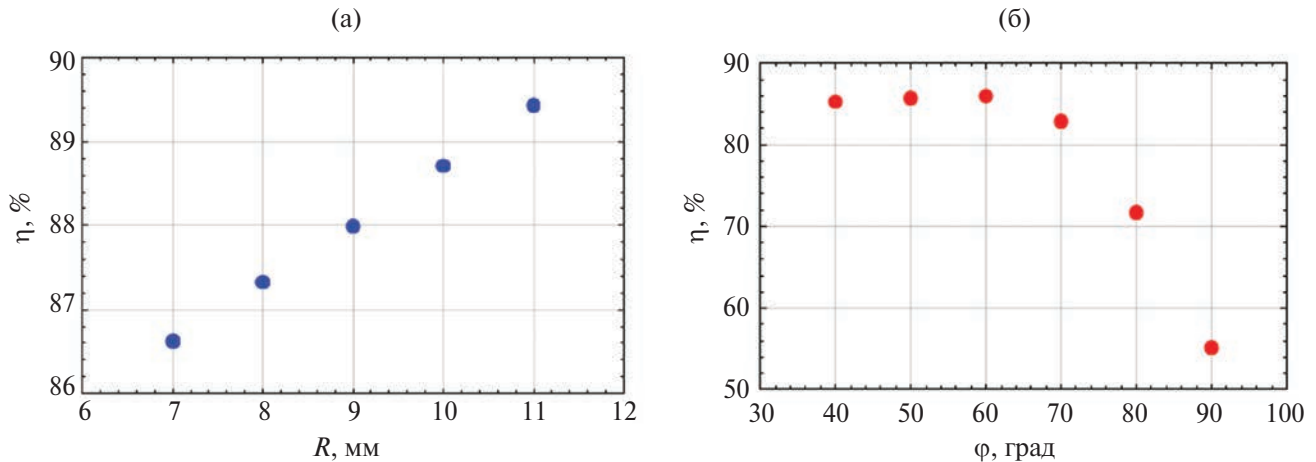


Рис. 11. Значения эффективности накачки активного элемента при различных значениях радиуса R металлического отражателя (а), угла ϕ дуги сегмента металлического напыления на кварцевой трубке (б).

прошедшего мимо активного элемента или отраженного с поверхностей оптических сред, а следовательно, к понижению соответствующих потерь и повышению эффективности накачки активного элемента. Используются два типа сегментных отражателей: отражающее металлическое напыление на внешней стороне кварцевой трубки и металлический с отражающим покрытием. Сегмент отражателя характеризуется параметрами: ϕ – угол дуги сегмента, R – радиус дуги сегмента. Для расчета эффективности накачки активного элемента в квантрон с системами отражателей используется модель квантрона с трехсторонней оптической накачкой общей мощностью 6 кВт и расстоянием $H = 11$ мм между источником излучения и центром активного элемента и с эффективностью накачки $\eta_{\text{нак}} = 77\%$. Проведена серия численных экспериментов, в которых изменялся радиус R металлического отражателя с максимальным углом ϕ , при котором отражатели не перекрывают излучение накачки, а также угол ϕ металлического напыления с фиксированным радиусом $R = 6$ мм, равным внешнему радиусу кварцевой трубки. На рис. 10 показаны схемы поперечного сечения модели квантрона с системой отражателей и схематически изображен ход одного из лучей ЛДР.

Результаты расчетов эффективности накачки активного элемента при разных параметрах отражателей представлены на рис. 11.

В модели квантрона с металлическим отражателем по мере увеличения радиуса R до

$R = H = 11$ мм эффективность растет. Таким образом, наличие металлических отражателей с радиусом $R = 11$ мм увеличивает эффективность от 77% (без отражателей) до 89%. С увеличением угла кривизны от 60° металлического напыления эффективность резко падает, это связано с тем, что отражающее напыление перекрывает значительную часть излучения от лазерных диодных решеток. Максимальное значение эффективности накачки 86% имеет модель с углом $50 \leq \phi \leq 60^\circ$ дуги сегмента напыленного отражателя.

В результате изменения расстояния между источником излучения и центром активного элемента от $H = 22$ мм до $H = 11$ мм, добавления металлического отражателя радиусом $R = 11$ мм или отражающего металлического напыления на внешнюю поверхность кварцевой трубки с углом $50 \leq \phi \leq 60^\circ$ эффективность накачки повысилась на $\sim 20\%$.

В процессе сборки конструкции квантрона возможно допущение неточной установки активного элемента и кварцевой трубки (смещения и поворот). С целью выявления степени влияния погрешности в установке элементов на эффективность накачки проведен ряд численных экспериментов с разработанной моделью с эффективностью $\eta_{\text{max}} = 77\%$. Произведены смещения на значения Δu активного элемента и кварцевой трубки вдоль u – одной из осей перпендикулярных оси активного элемента; поворот тех же элементов на угол γ относительно их центров вокруг оси u . Расчетные

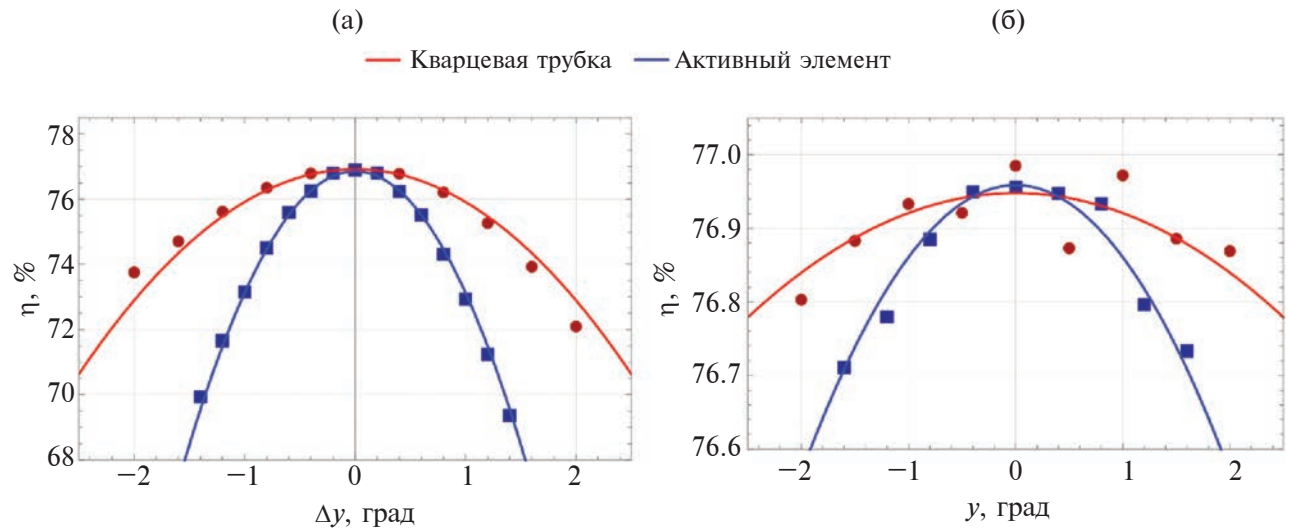


Рис. 12. Значения эффективности накачки активного элемента при допустимой погрешности в установке активного элемента и кварцевой трубки: (а) Δy — смещение элементов вдоль оси y ; (б) γ — угол поворота относительно центра активного элемента вокруг оси y .

значения эффективности накачки при различных значениях смещения и угла поворота активного элемента и кварцевой трубки и их аппроксимирующие параболические функции представлены на рис. 12.

Проведена аппроксимация расчетных значений и рассчитан вид параболической аппроксимирующей функции зависимости эффективности накачки активного элемента при смещении или повороте активного элемента или кварцевой трубки:

$$\eta_{\text{нак}} = \eta[\Delta] = \eta_{\text{max}} \left(1 - \frac{1}{\eta_{\text{max}}} \left(\frac{\Delta}{\Delta_0} \right)^2 \right), \quad (5)$$

где Δ — смещение вдоль оси y ($\Delta = \Delta y$) или угол поворота относительно центра активного элемента вокруг оси y ($\Delta = \gamma$), η_{max} — значение эффективности накачки при отсутствии смещения и поворота активного элемента или кварцевой трубки ($\Delta = \Delta y = \gamma = 0$), Δ_0 — значения смещения по оси y ($\Delta_0 = \Delta y_0$) или угла поворота относительно центра активного элемента вокруг оси y ($\Delta_0 = \gamma_0$), при котором эффективность накачки активного элемента уменьшается на $\Delta\eta_{\text{нак}} = 1\%$. Данная функция подходит для расчета эффективности накачки как при смещении, так и при повороте активного элемента

и кварцевой трубки с учетом соответствующих параметров, значения которых представлены в табл. 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате работы построена модель квантрона с импульсной поперечной диодной накачкой на основе системы лазерных диодных решеток и цилиндрического активного элемента $\text{Nd}^{3+}:\text{YAG}$. Разработана методика определения конструктивных параметров квантрона. В результате оптимизации лазерного модуля выявлена возможность повышения эффективности квантрона примерно на 20%, достигая 89%. Установлены диапазоны погрешностей установки активного элемента и кварцевой трубки.

Таблица 2. Значения параметров для расчета эффективности с учетом погрешности в установке активного элемента и кварцевой трубки

Δ	Δ_0 при $\Delta\eta = 1\%$	Активный элемент	Кварцевая трубка
Смещение, Δy	Δy_0	0.52 мм	0.99 мм
Угол поворота, γ	γ_0	3°	6°

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят А.А. Сироткина и Т.В. Долматова за плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ross I.N., Csatári M., Hutchins S. High-performance diode-pumped Nd:YLF amplifier // *Appl. Opt.* 2003. V. 42. № 6. P. 1040–1047. <https://doi.org/10.1364/AO.42.001040>
2. Koechner W. Solid-State Laser Engineering // *Solid-State Laser Engineering*. N.Y. (NY): Springer New York, 2006. V. 1. 750 p.
3. Barnes N.P. Solid-State Lasers From an Efficiency Perspective // *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.* 2007. V. 13. № 3. P. 435–447. <https://doi.org/10.1109/JSTQE.2007.895280>
4. Glukhikh I.V., Dimakov S.A., Kurunov R.F., Polikarpov S.S., Frolov S.V. Powerful Solid-State Transversely Diode-Pumped YAG: Nd Lasers With Improved Radiation Quality // *Tech. Phys.* 2011. V. 56. № 8. P. 1129–1134. <https://doi.org/10.1134/S1063784211080111>
5. Tulloch W.M., Rutherford T.S., Gustafson E.K., Byer R.L. A CW, high-power, conduction-cooled, edge-pumped slab laser // *Solid State Lasers VIII* / Ed. Scheps R. 1999. V. 3613. № May. P. 2–7. <https://doi.org/10.1117/12.347664>
6. Lapucci A., Ciofini M., Pucci M., D’Uva M. High efficiency, Diode Pumped 170 W Nd:YAG ceramic slab laser // *J. Eur. Opt. Soc. Rapid Publ.* 2011. V. 6. P. 11047. DOI: 1990-2573
7. Kravtsov N.V. Basic trends in the development of diode-pumped solid-state lasers // *Quantum Electron.* 2001. V. 31. № 8. P. 661–677. <https://doi.org/10.1070/QE2001v031n08ABEH002025>
8. Clarkson W.A., Hardman P.J., Hanna D.C. High-power diode-bar end-pumped Nd:YLF laser at 1.053 μm // *Opt. Lett.* 1998. V. 23. № 17. P. 1363–1365. <https://doi.org/10.1364/OL.23.001363>
9. Глухих И.В. и др. Мощные твердотельные лазеры на Nd:YAG с поперечной диодной накачкой и улучшенным качеством излучения // *Журнал технической физики*. 2011. Т. 81. №. 8. С. 70–75. <https://doi.org/10.1134/s1063784211080111>
10. Takada A. et al. Diode laser-pumped cw Nd:YAG lasers with more than 1-kW output power // *Advanced Solid State Lasers*. Washington, D.C.: OSA, 1999. P. 21–23.
11. Brand T. Compact 170-W continuous-wave diode-pumped Nd:YAG rod laser with a cusp-shaped reflector // *Opt. Lett.* 1995. V. 20. № 17. P. 1776–1778.
12. Sun Z. et al. Experimental study of high-power pulse side-pumped Nd:YAG laser // *Opt. Laser Technol.* 2005. V. 37. № 2. P. 163–166. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2004.03.004>
13. Kashef T., Ghoniemy S., Mokhtar A. Robust modeling and performance analysis of high-power diode side-pumped solid-state laser systems // *Appl. Opt.* 2015. V. 54. № 36. P. 10666–10677. <https://doi.org/10.1364/AO.54.010666>
14. Гречин С.Г., Николаев П.П. Квантроны твердотельных лазеров с поперечной полупроводниковой накачкой // *Квантовая электроника*. 2009. Т. 39. № 1. С. 1–17. <https://doi.org/10.1070/QE2009v039n01ABEH013787>
15. Yu D., Tang D. Experimental study of a high-power CW side-pumped Nd:YAG laser // *Opt. Laser Technol.* 2003. V. 35. № 1. P. 37–42. [https://doi.org/10.1016/S0030-3992\(02\)00121-4](https://doi.org/10.1016/S0030-3992(02)00121-4)
16. Xiong Z. et al. Detailed investigation of thermal effects in longitudinally diode-pumped Nd:YVO₄ lasers // *IEEE J. Quantum Electron.* 2003. V. 39. № 8. P. 979–986. <https://doi.org/10.1109/JQE.2003.814371>
17. Kojima T., Yasui K. Efficient diode side-pumping configuration of a Nd:YAG rod laser with a diffusive cavity // *Appl. Opt.* 1997. V. 36. № 21. P. 4981–4984. <https://doi.org/10.1364/AO.36.004981>
18. Koshel R.J., Walmsley I.A. Optimal design of optically side-pumped lasers // *IEEE J. Quantum Electron.* 1997. V. 33. № 1. P. 94–102. <https://doi.org/10.1109/3.554900>
19. Zendzian W., Jabczynski J.K., Kwiatkowski J. High peak power Nd:YAG laser pumped by 600-W diode laser stack // *Opt. Laser Technol.* 2008. V. 40. № 3. P. 441–444. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2007.07.007>
20. Sabaghzadeh J., Rahimzadeh F., Mashayekhe I. 468-W CW operation of a diode-pumped Nd:YAG rod laser with high beam quality and highly efficient concentrator of pump light // *Opt. Laser Technol.* 2008. V. 40. № 5. P. 748–755. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2007.10.006>
21. Moon H.-J. et al. Efficient diffusive reflector-type diode side-pumped Nd:YAG rod laser with an optical slope efficiency of 55% // *Appl. Opt.* 1999. V. 38. № 9. P. 1772–1776. <https://doi.org/10.1364/AO.38.001772>
22. Wang Y., Kan H. Design of a triangular reflector for diode-pumped solid-state lasers with both high absorption efficiency and homogeneous absorption distribution // *J. Opt. A Pure Appl. Opt.* 2006. V. 8. № 9. P. 720–727. <https://doi.org/10.1088/1464-4258/8/9/002>
23. Kiyko V.V. et al. Optimisation of the parameters of a pump chamber for solid-state lasers with diode pumping by the optical boiler method // *Quantum Electron.* 2015. V. 45. № 6. P. 511–514. <https://doi.org/10.1070/QE2015v045n06ABEH015287>
24. Sutton S.B., Albrecht G.F. Simple analytical method to calculate the radial energy deposition profile in an

- isotropic diode-pumped solid-state laser rod // *Appl. Opt.* 1996. V. 35. № 30. P. 5937–5948.
<https://doi.org/10.1364/AO.35.005937>
25. *Meng J. et al.* Comparison of different side-pumping configurations for high power laser diode pumped solid-state laser // *Chinese Opt. Lett.* 2003. V. 1. № 9. P. 538–540.
<https://doi.org/10.3788/COL20030109.0538>
 26. *Wang Y., Kan H.* Optimization algorithm for the pump structure of diode side-pumped solid-state lasers // *Opt. Lasers Eng.* 2007. V. 45. № 1. P. 93–105.
<https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2006.06.005>
 27. *Walker D.R. et al.* Efficient continuous-wave TEM₀₀ operation of a transversely diode-pumped Nd:YAG laser // *Opt. Lett.* 1994. V. 19. № 14. P. 1055–1057.
<https://doi.org/10.1364/OL.19.001055>
 28. *Marshall L.R., Kaz A., Burnham R.L.* Highly efficient TEM₀₀ operation of transversely diode-pumped Nd:YAG lasers // *Opt. Lett.* 1992. V. 17. № 3. P. 186–188.
<https://doi.org/10.1364/OL.17.000186>
 29. *Qin H. et al.* Extraordinary variation of pump light intensity inside a four-level solid-state laser medium // *Opt. Lasers Eng.* 2008. V. 46. № 8. P. 628–634.
<https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2008.03.015>
 30. *Haiyong Z. et al.* Diode-side-pumped 131 W, 1319 nm single-wavelength cw Nd:YAG laser // *Appl. Opt.* 2007. V. 46. № 3. P. 384–388.
<https://doi.org/10.1364/AO.46.000384>
 31. *Kandasamy R., Raghavachari S., Misra P., Nathan. T.P.S.* Highly efficient continuous-wave operation of a Nd:YAG rod laser that is side pumped by p-polarized diode laser bars // *Appl. Opt.* 2004. V. 43. № 31. P. 5855–5859.
<https://doi.org/10.1364/AO.43.005855>
 32. *Phua P.B., Lai K.S., Wu R.F.* Linearly polarised 100-W output from a diode-pumped Nd: YALO laser // *Advanced Solid State Lasers*. Washington, D.C.: Optica Publishing Group, 2000. V. 39. № 3. P. 431–434.
<https://doi.org/10.1364/ASSL.2000.WC7>
 33. *Du K. et al.* Neodymium:YAG 30-W cw laser side pumped by three diode laser bars // *Appl. Opt.* 1998. V. 37. № 12. P. 2361–2364.
<https://doi.org/10.1364/AO.37.002361>
 34. *Liu X., Zhao W., Xiong L., Liu H.* Packaging of High Power Semiconductor Lasers // *Packaging of High Power Semiconductor Lasers*. N.Y. (NY): Springer New York, 2015. 402 p.
 35. *Amzajerdian F. et al.* Improving reliability of high power quasi-CW laser diode arrays for pumping solid state lasers // *Lidar Remote Sensing for Environmental Monitoring VI* / ed. Singh U.N. 2005. V. 5887. № February 2015. P. 58870E1–58870E7.
<https://doi.org/10.1117/12.620102>
 36. Пат. RU 184832 U1. Оптическая усилительная головка с диодной накачкой / Багдасаров В.Х., Бельков С.А., Букин В.В., Гаранин С.Г., Гарнов С.В., Кудашева Н.А., Овчаренко Б.Д., Цветков В.Б.; заявитель и патентообладатель ФГБУН Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук (ИОФ РАН); опубл. 12.11.2018.
 37. URL: <https://omlc.org/spectra/lasermedia/html/052.html> (дата обращения: 15.12.2023).
 38. *Schiling B.W. et al.* End-pumped 1,5 μm monoblock laser for broad temperature operation // *Appl. Opt.* 2006. V. 45. № 25. P. 6607–6615.
<https://doi.org/10.1364/AO.45.00660>

MODELING OF A SOLID-STATE LASER MODULE WITH PULSE TRANSVERSE DIODE PUMPING OF Nd³⁺:YAG ACTIVE MEDIUM

Corresponding Member of the RAS S. V. Garnov^a, K. A. Galyuk^{a, b},
 B. D. Ovcharenko^a, A. A. Ushakov^a, V. V. Bukin^a

^a*Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, Russia*

In this work, a laser module (quantron) with transverse pulse diode pumping of a cylindrical Nd³⁺:YAG active element by the method of non-sequential ray tracing in the Zemax software environment is modeled. Numerically obtained distributions of the absorbed pump radiation power over the cross section of the active element and calculated the pumping efficiency of the quantron. A methodology for optimizing the quantron design is proposed, which results in an increase in the pumping efficiency of the active element.

Keywords: quantron, laser diode array, active element, pump efficiency

УДК 523.6

ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ И ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ПРОТИВОМЕТЕОРИТНОЙ ЗАЩИТЫ СОВРЕМЕННЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

© 2024 г. В. В. Ким^{1,*}, С. И. Мартыненко¹, А. В. Острик¹,
член-корреспондент РАН И. В. Ломоносов¹

Поступило 14.12.2023 г.

После доработки 14.12.2023 г.

Принято к публикации 25.12.2023 г.

Описана физическая модель и приведены результаты численных расчетов разрушения защитных экранов космического аппарата под действием удара микрометеорита. Проведено газодинамическое численное моделирование процесса высокоскоростного пробивания микрометеоритом разнесенного защитного экрана космического аппарата, с учетом фрагментации и образования облака фрагментов после прохождения защитного экрана. В трехмерной постановке получены расчетные конфигурации облака осколков ударника и мишени для начальных скоростей ударника до 10 км/с. Показана высокая эффективность используемой конструкции защитного экрана из разнонаправленных гофрированных сеток как средства фрагментации и рассеяния кинетической энергии удара некрупных высокоскоростных частиц, снижающего средний импульс давления на защищаемый аппарат на два-три порядка.

Ключевые слова: высокоскоростной удар, численное моделирование, разнесенные экраны

DOI: 10.31857/S2686740024030032, EDN: KALDPX

В связи с прогрессом в области космических исследований и технологий проблема взаимодействия тел с космическими скоростями становится все более актуальной [1, 2]. В настоящее время в ближнем космосе присутствует множество неисправных спутников и их фрагментов, которые представляют опасность для функционирующих космических аппаратов, особенно пилотируемых. По расчетам Европейского космического агентства, в околоземном пространстве более 29 000 частиц размером 10 см и более. Каждая из них при столкновении гарантированно уничтожит любой космический аппарат или орбитальную станцию. В данный момент эффективных мер защиты от частиц космического мусора размером более 1 см на низких и средних орбитах практически не существует.

Комплексное изучение физических процессов, происходящих при высокоскоростном ударе, в перспективе позволит усовершенствовать имеющиеся и создать новые конструктивные средства защиты космических аппаратов [3].

Начиная с середины прошлого века [4] для защиты летательных аппаратов от ударов высокоскоростных конденсированных объектов широкое применение получил метод построения многослойной системы из пространственно-разнесенных защитных экранов, которые обеспечивают поглощение большей части энергии удара вне контура защищаемой конструкции в результате разрушения, дефрагментации, плавления и зачастую испарения высокоскоростного конденсированного ударника. Эта удаленная от охраняемого объекта защита состоит из достаточно тонких чередующихся экранов, жестких (плотных) и мягких. Основная задача жесткого экрана — фрагментация ударника на осколки и их рассеяние и отвод от генеральной оси удара. Мягкие экраны служат

¹Федеральный исследовательский центр проблем химической физики и медицинской химии
Российской академии наук,
Черноголовка, Московская обл., Россия
*E-mail: kim@fcr.ac.ru

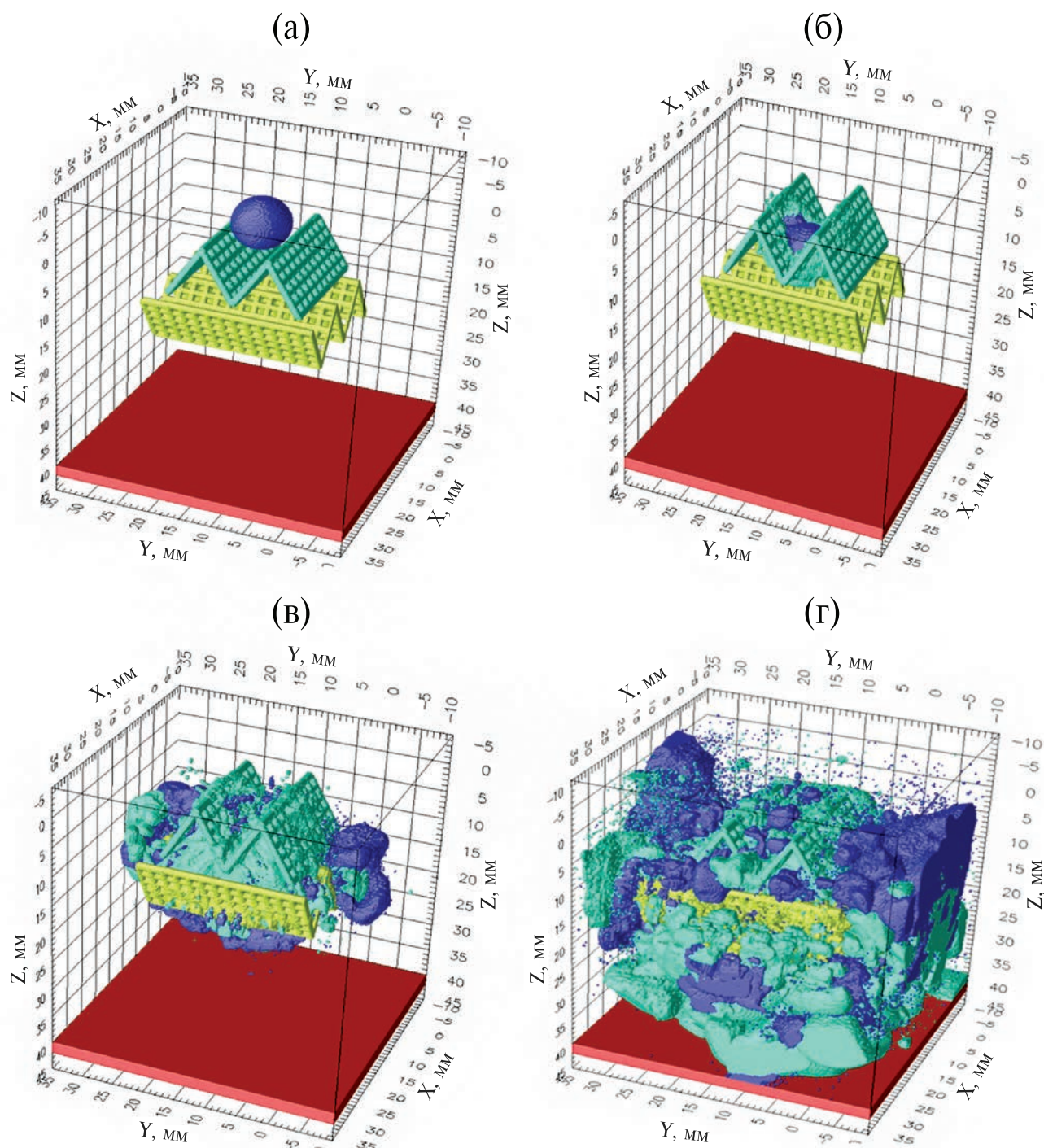


Рис. 1. Конфигурация тел для $v_0 = 10$ км/с в моменты времени $t = 0$ (а), 10 (б), 20 (в) и 30 (г) мкс.

для увеличения площади миделевого сечения облака отклоненных осколков и постепенное поглощение их импульса (вплоть до полной остановки) в ходе процессов схлопывания пор, деформации, разрушения и т.п. При этом

возникает задача поиска оптимальных характеристик экранов: материалов, толщин, расстояний между ними.

Наибольшие успехи в обеспечении начальной фрагментации ударника были достигнуты

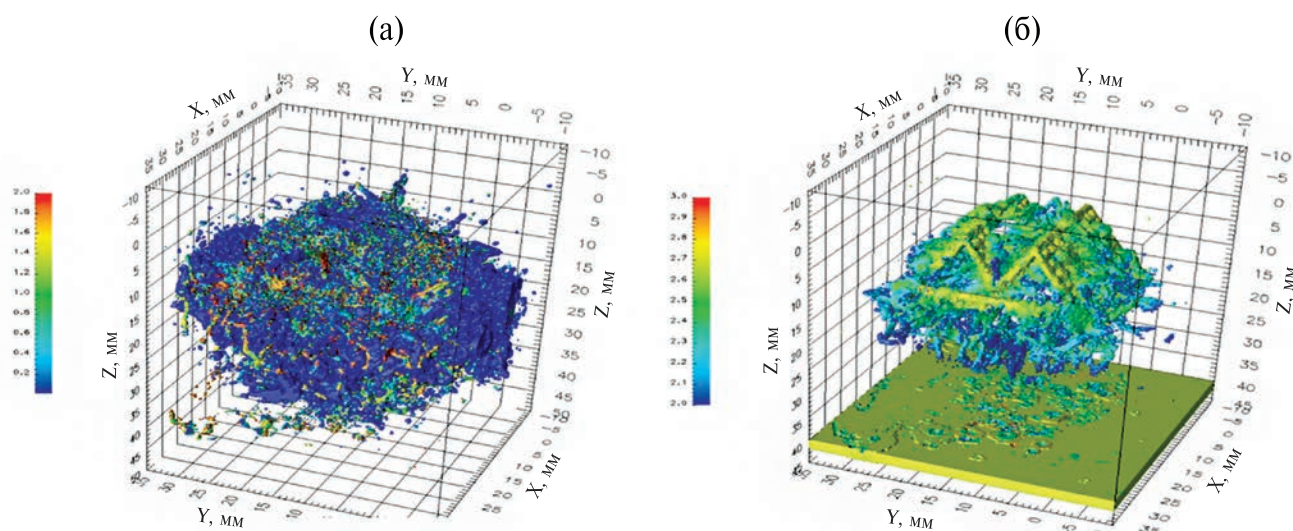


Рис. 2. Две фракции плотности облака фрагментов: в диапазоне значений плотности $\rho = 0.01\text{--}2\text{ г/см}^3$ (а) и $\rho = 2\text{--}3\text{ г/см}^3$ (б).

при использовании во внешних экранах металлических сеток. Современные варианты сеточных экранов опираются на тот известный факт, что наклонная по отношению к направлению удара сетка более эффективно фрагментирует (работает как “терка”) частицу-ударник [5]. Основная идея состоит в применении двух гофрированных сеток, расположенных взаимно перпендикулярно друг к другу (рис. 1). Также были определены оптимальные параметры сеток [5, 6]: ширина складок $(4\text{--}6)d$, высота $(3\text{--}5)d$, что соответствует углу при вершине гофры около 60° .

В настоящей работе для моделирования течения многокомпонентной многофазной сжимаемой среды используется авторский численный метод конечно-размерных частиц в ячейках [7]. Метод относится к смешанным лагранжево-эйлеровым методам и успешно использовался для решения задач физики экстремальных состояний, моделирования высокоскоростного пробивания металлических преград [7], космических импактных экспериментов DeepImpact, LCROSS, 99942 APOPHIS, задач по генерации экстремальных состояний в металлах интенсивными ионными и протонными пучками [8]. Для описания поведения материалов метеорита и защитных экранов используются широкодиапазонные уравнения состояния [9, 10].

В трехмерной постановке моделируется высокоскоростной удар пористого хондритного

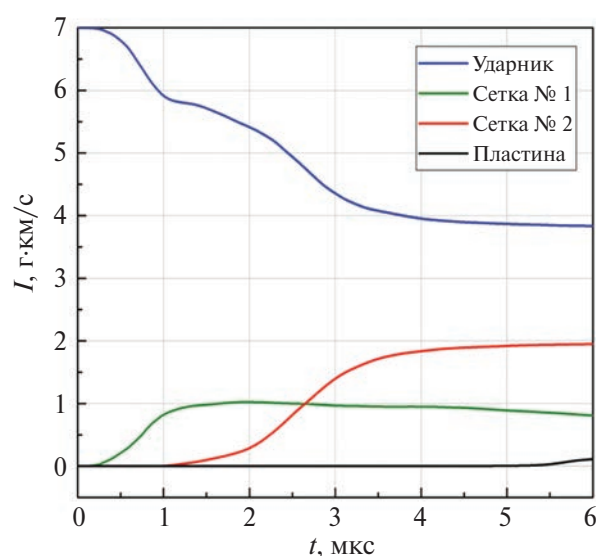


Рис. 3. Динамика передачи перпендикулярной составляющей импульса от ударника к элементам экрана для $V = 7\text{ км/с}$.

микрометеорита ($\rho_0 = 2.7\text{ г/см}^3$) по защитному разнесенному экрану. Сферический ударник массой 1 г (соответствует диаметру шара $d = 8.85\text{ мм}$) нормально соударяется с начальной скоростью $V_0 = 7\text{ км/с}$ и 10 км/с с двухслойной проволочной гофрированной сеткой из алюминия, толщина проволоки 1 мм, угол у вершины гофры $\alpha = 60^\circ$. Гофры слоев сеток взаимно перпендикулярны друг другу. На расстоянии 2 см от второго слоя сетки расположена

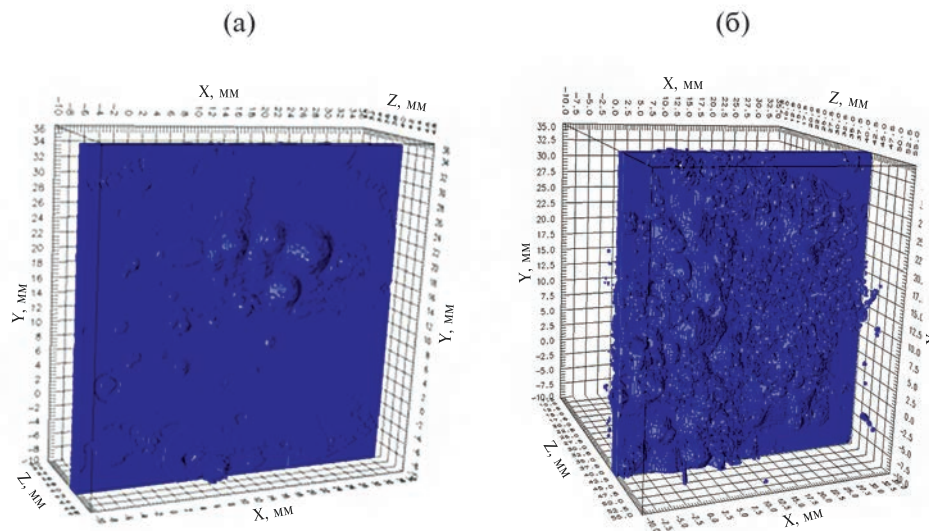


Рис. 4. Тыльные стороны пластин-детекторов для $V = 7$ км/с (а) и 10 км/с (б).

алюминиевая пластина-детектор толщиной 2 мм. На рис. 1а показана начальная постановка численного 3D-эксперимента с цветовым выделением областей разных тел.

На рис. 1 показаны расчетные конфигурации взаимодействующих тел при начальной скорости ударника 10 км/с в моменты времени $t = 0, 10, 20$ и 30 мкс. Из анализа результатов расчета видно, что начиная с момента времени $t = 28$ мкс начинается взаимодействие частиц осколков ударника и защитной сетки с алюминиевой пластиной-детектором. В ходе процесса сеточная конструкция фрагментирует ударник (на рис. 1 показан синим цветом) на отдельные конгломераты осколков, которые продолжают дробиться и рассеиваться далее. Анализ расчетного поля плотности показал, что головная часть облака осколков состоит преимущественно из низкоплотных частиц алюминия и хондрита с $\rho < 2$ г/см³. Так, на рис. 2 представлено расчетное 3D-поле плотности в момент времени $t = 40$ мкс: отдельно для облака низкоплотных осколков с $\rho = 0.01\text{--}2$ г/см³ (рис. 2а) и для диапазона плотностей $\rho = 2\text{--}3$ г/см³ (рис. 2б). Такое распределение плотности в облаке способствует более сглаженной по времени передаче нагрузки на защищаемый объект, чем в случае прямого удара без защитного сеточного экрана.

В качестве интегральной характеристики процесса взаимодействия ударника и элементов экрана рассчитаны нормальные компоненты полного импульса каждого из тел, временные

профили которых приведены на рис. 3 для начальной скорости удара 7 км/с. Как видно из рис. 3, взаимодействие (передача импульса) ударника с первой сеткой в основном завершается к моменту $t = 1$ мкс, при этом ударник фрагментируется и образует облако осколков. Вследствие большей площади взаимодействия эффективность передачи импульса от ударника ко второй сетке более чем в 2 раза выше, чем к первой. Завершается взаимодействие со второй сеткой к моменту времени $t = 4$ мкс. Заметная передача импульса к пластине-детектору начинается с момента времени после $t = 5$ мкс. К этому времени облако осколков уже имеет увеличенные размеры и соответственно меньшую плотность, что снижает возможность пробития преграды.

Заметная передача импульса мишени от ударника и сеток (от них незначительная часть) к пластине-детектору начинается с момента времени $t = 4$ мкс (для начальной скорости $V = 10$ км/с; для варианта с $V = 7$ км/с начало взаимодействия пластины с облаком соответствует более позднему моменту времени). К этому времени облако уже имеет увеличенные размеры и соответственно меньшую плотность, что снижает возможность пробития преграды.

На рис. 4 показаны конфигурации тыльной стороны пластины-детектора на момент времени $t = 6$ мкс. Диаметры пятен повреждения пластин-детекторов осколками составляют $D = 16$ см и $D = 42$ см соответственно. При этом

значения параметра эффективности защиты для $V_0 = 7$ и 10 км/с составляют $K_{eff} = 330$ и 2060 соответственно.

Таким образом, использование гофрированных сеточных экранов позволяет снизить средний воздействующий импульс давления, передаваемый защищаемому объекту на два-три порядка.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 21-72-20023).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Щербаков И.А. Некоторые приоритетные результаты, полученные в области физики в 2019 году (из отчетного доклада академика-секретаря ОФН РАН) // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2020. Т. 492. № 1. С. 4–53.
2. Смирнов И.В., Петров Ю.В. О временных характеристиках разрушения при высокоскоростных испытаниях // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2020. Т. 493. № 1. С. 62–65.
3. Агурейкин В.А., Анисимов С.И., Бушман А.В., Канель Г.И., Карягин В.П., Константинов А.Б., Крюков Б.П., Минин В.Ф., Разоренов С.В., Сагдеев Р.З., Сугак С.Г., Фортон В.Е. Теплофизические и газодинамические проблемы противометеоритной защиты космического аппарата “ВЕГА” // ТВТ. 1984. Т. 22. № 5. С. 964–982.
4. Whipple F.L. Meteorites and space travel // Astronomical Journal. 1947. No. 1161. P. 131.
5. Герасимов А.В., Добрица Д.Б., Пашков С.В., Христенко Ю.Ф. Экран для защиты космического аппарата от высокоскоростного ударного воздействия частиц космической среды // Патент РФ RU 2623782 C1. 2016.
6. Добрица Д.Б., Пашков С.В., Христенко Ю.Ф. Моделирование процесса взаимодействия высокоскоростного ударника с трехслойной разнесенной комбинированной преградой // Космические исследования. 2020. Т. 58. № 2. С. 131–137.
7. Fortov V.E., Kim V.V., Lomonosov I.V., Matveichev A.V., Ostriak A.V. Numerical modeling of hypervelocity impacts // Int. J. Impact Eng. 2006. V. 33(1–12). P. 244.
8. Mintsev V., et.al. Non-Ideal Plasma and Early Experiments at FAIR: HIHEX – Heavy Ion Heating and Expansion // Contrib. Plasma Phys. 2016. V. 56(3–4). P. 281–285.
<https://doi.org/10.1002/ctpp.201500105>
9. Lomonosov I.V. Multi-phase equation of state for aluminum // Laser and Particle Beams. 2007. V. 25. P. 567–584.
10. Ломоносов И.В. Уравнения состояния сапфира, кремнезема, периклаза и рутила // ТВТ. 2023. Т. 61. № 3. С. 473–476.
<https://doi.org/10.31857/S004036442303016X>

THERMOPHYSICAL AND GAS DYNAMICS PROBLEMS OF ANTI-METEORITE PROTECTION FOR MODERN SPACECRAFTS

V. V. Kim^a, S. I. Martynenko^a, A. V. Ostriak^a, Corresponding Member of the RAS I. V. Lomonosov^a

^aFederal Research Center of Problems of Chemical Physics and Medicinal Chemistry, Russian Academy of Sciences, Chernogolovka, Moscow Region, Russia

The results of numerical calculations of the destruction of the protective shields of the spacecraft under the action of a micrometeorite impact are presented. A gas-dynamic numerical simulation of the process of high-speed penetration by micrometeorite of a spaced protective shield of a spacecraft has been carried out, taking into account fragmentation and the formation of a cloud of fragments after passing through the protective shield. In a three-dimensional formulation, the calculated configurations of the cloud of fragments of the impactor and the target for the initial velocities of the impactor up to 10 km/s are obtained. The high efficiency of the used design of a protective screen made of multidirectional corrugated grids as a means of fragmentation and dispersion of the kinetic energy of impact of small high-speed particles, reducing the average pressure pulse on the protected device by two to three orders of magnitude, is shown.

Keywords: hypervelocity impact, numerical modeling, mesh double-bumper shield

УДК 679.826, 621.793.162

СИНТЕЗ В СВЧ-ПЛАЗМЕ АЛМАЗНЫХ ПЛЕНОК СО СНИЖЕННОЙ ШЕРОХОВАТОСТЬЮ

© 2024 г. А. К. Мартьянов^{1,*}, И. А. Тяжелов¹, С. С. Савин², А. Ф. Попович¹,
В. С. Седов¹, академик РАН В. И. Конов¹

Поступило 14.12.2023 г.

После доработки 14.12.2023 г.

Принято к публикации 25.12.2023 г.

Изучается влияние добавок азота на вторичное зародышеобразование (нуклеацию) алмаза при его синтезе методом химического осаждения из газовой фазы (CVD). Серия поликристаллических алмазных пленок толщиной 2 мкм была выращена на кремниевых подложках в газовых смесях метан–водород–азот с различной концентрацией азота (0–1%). Структура и шероховатость выращенных пленок были исследованы с помощью сканирующей электронной микроскопии и оптической профилометрии. Показано, что малые добавки азота играют ключевую роль в процессах вторичной нуклеации алмаза, оказывая значительное влияние на морфологию пленок. Сравнение характеристик выращенных поликристаллических алмазных пленок позволило найти оптимальную концентрацию азота $[N_2] \approx 0.2\%$ для формирования нанокристаллических алмазных пленок с низкой шероховатостью поверхности и повышенной скоростью роста. Полученные результаты предполагается использовать для оптимизации параметров CVD-синтеза поликристаллических алмазных пленок для применения в качестве защитных или снижающих трение слоев, а также для изготовления сверхтвердых режущих инструментов.

Ключевые слова: поликристаллический алмаз, тонкая пленка, химическое осаждение из газовой фазы, СВЧ-плазма, спектроскопия КР, шероховатость, скорость роста

DOI: 10.31857/S2686740024030046, **EDN:** KANZCC

Поликристаллический алмаз обладает исключительной твердостью, теплопроводностью и химической инертностью и широко используется в качестве покрытия режущих инструментов [1] и теплоотводящих систем [2]. Метод синтеза алмаза при высоких давлениях и температурах (НРНТ) позволяет формировать монокристаллы высокого качества [3], однако этот метод не подходит для формирования алмазных пленок на неалмазных подложках. Химическое осаждение из газовой фазы (CVD) – универсальный метод синтеза кристаллов и пленок алмаза с точным контролем их свойств

[4]. При использовании неалмазных подложек алмазные нано- или микрочастицы должны быть предварительно нанесены на подложки, чтобы инициировать CVD-рост [5]. В процессе CVD-роста атомы углерода из газообразного источника (обычно метана CH_4) достраивают поверхность затравочного кристалла [6]. Синтез поликристаллических алмазных (ПКА) пленок осуществляется по механизму конкурентного роста Ван-дер-Дрифта [7]: случайно ориентированные кристаллиты разрастаются с различной скоростью, и медленно растущие кристаллиты блокируются более быстрыми. Данный процесс приводит к увеличению среднего размера зерен с увеличением толщины пленки, что увеличивает шероховатость ее поверхности [8] и считается отрицательным фактором для применений ПКА пленок для покрытий режущих инструментов [9]. Однако можно ограничить увеличение размера

¹Институт общей физики им. А.М. Прохорова
Российской академии наук, Москва, Россия

²Наноцентр МИРЭА – Российский технологический
университет, Москва, Россия

*E-mail: martyanov@nsc.gpi.ru

зерен за счет стимулирования вторичного зародышеобразования (нуклеации) — образования новых зародышей алмаза на существующих кристаллических поверхностях [10]. Использование данного механизма позволяет получать микрокристаллические (МКА, размер зерна >100 нм), нанокристаллические (НКА, размер зерна $10\text{--}100$ нм) и ультрананокристаллические (УНКА, размер зерна <10 нм) алмазные пленки [11]. Одним из основных методов стимуляции вторичной нуклеации алмаза для получения нанокристаллических алмазных пленок является использование небольших добавок азота [12–14]. Однако физические и химические причины процессов вторичной нуклеации алмаза до сих пор неясны. Также не приводились данные по шероховатости ПКА пленок, выращенных при добавках различных концентраций азота.

В данной работе исследовано влияние небольших добавок азота (N_2) в газовую смесь при CVD-росте на структуру и шероховатость выращенных ПКА пленок. В частности, целью являлось определение пороговых концентраций азота для перехода структуры пленок из МКА в НКА.

ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

В качестве подложек использовались пластины полированного монокристаллического кремния (100) размерами $10 \times 10 \times 0.35$ мм. Для нанесения центров зародышеобразования алмаза использовали суспензию наноалмазных частиц в воде (размеры частиц $3\text{--}7$ нм, дзета-потенциал $>+50$ мВ, Кардиффский университет). Подложки помещали в суспензию на 1 мин, затем каждую подложку сушили отдельно центрифугированием при 3000 об/мин в течение 30 с. Синтез алмазных пленок осуществлялся на установке плазмохимического осаждения алмаза из газовой фазы (MPCVD) (2.45 ГГц, 5 кВт, ООО “Оптосистемы”). В качестве прекурсоров использовались особо чистые газы: водород 99.9999%, метан 99.9995%, азот 99.999%. Концентрации газов в данной работе определяются как объемные концентрации или как отношение соответствующего индивидуального расхода газа (sccm) к общему расходу. Концентрация метана на протяжении всех экспериментов составляла 4%. Концентрация азота определяется как $v_N = [N_2]/([H_2] + [CH_4] + [N_2])$.

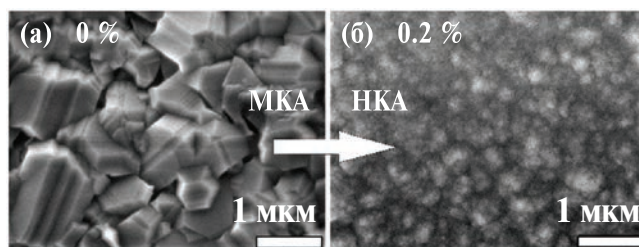


Рис. 1. Изображения РЭМ ПКА пленок, синтезированных при температуре подложки $T_s = 850$ °С и различных концентрациях азота v_N .

Температуру подложек в процессе измеряли двухлучевым пирометром METIS M322 (SensorTherm GmbH, Германия) с точностью ± 10 °С. При температуре подложки 850 °С, давлении 73 Торр и мощности СВЧ 4.4 кВт были выращены ПКА пленки в газовой смеси метан–водород с добавкой азота в концентрации 0–1%. Толщина поликристаллических алмазных пленок контролировалась непосредственно в процессе роста с помощью лазерной интерферометрии [15] и составила 2 мкм для всех образцов. При этом время роста варьировалось от 26 мин до 2 ч 3 мин в зависимости от скорости роста. Морфологию поверхности синтезированных образцов изучали с помощью сканирующего электронного микроскопа Tescan MIRA3 (SEM, Чехия). Значения шероховатости поверхности пленок (среднеквадратичной высоты поверхности (RMS), S_q по стандарту ISO 25178) измеряли на площади 140×140 мкм с использованием оптического профилометра ZYGO NewView 5000 с объективом $\times 100$ с латеральным разрешением 0.45 мкм и вертикальным разрешением 3 нм.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ ПЛЕНОК

На рис. 1 представлена морфология поверхности алмазных пленок, осажденных при различных концентрациях азота v_N . Образец, полученный без добавления N_2 , имеет типичную структуру МКА пленки с хорошо ограниченными хаотически ориентированными кристаллитами микронного размера (рис. 1а). Увеличение концентрации азота до 0.2% приводит к уменьшению среднего размера зерна и к переходу к НКА структуре пленки при $v_N \approx 0.2\%$ (рис. 1б).

При увеличении концентрации азота до значения 0.2% наблюдается резкое увеличение скорости роста ПКА пленок от 1 до 3 мкм/ч

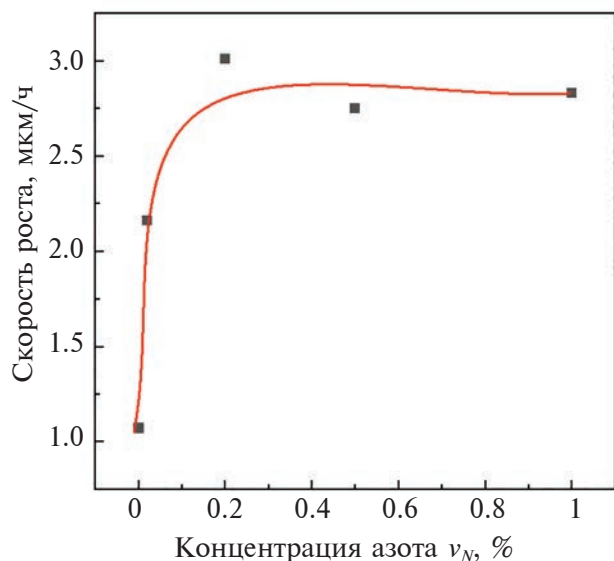


Рис. 2. Скорость роста ПКА пленок, синтезированных при различных концентрациях азота v_N .

(рис. 2). Однако дальнейшее увеличение концентрации азота в процессе синтеза (когда переход от МКА к НКА структуре алмазной пленки уже произошел) не стимулирует скорость роста, а, наоборот, приводит к ее плавному снижению до 2.5 мкм/ч при повышении концентрации азота до 1%.

Измеренные значения шероховатости поверхности выращенных пленок представлены на рис. 3. Постепенное увеличение концентрации азота приводит к резкому (более чем в 2 раза) снижению шероховатости поверхности при $[N_2] \approx 0.2\%$. Дальнейшее увеличение концентрации азота не приводит к существенному снижению шероховатости поверхности.

ВЫВОДЫ

Исследовано влияние концентрации азота при синтезе ПКА пленок в СВЧ-плазме на скорость роста, а также структуру и шероховатость полученных покрытий. В диапазоне концентраций азота 0.1–0.2% находится пороговое значение для перехода структуры алмазных пленок из МКА в НКА. Использование пороговой концентрации азота позволяет снизить более чем в 2 раза шероховатость алмазной пленки с одновременным трехкратным повышением скорости роста.

Полученные результаты дают ценную информацию для контролируемого синтеза ПКА

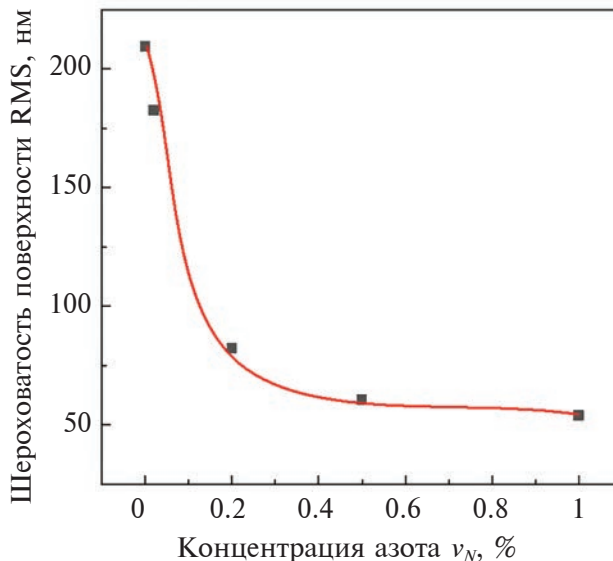


Рис. 3. Значения “среднеквадратичной высоты поверхности” (RMS) алмазных пленок, выращенных при различных концентрациях азота v_N .

пленок с заданными структурными свойствами для применения в качестве защитных или снижающих трение слоев, а также для сверхтвердых режущих инструментов.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-72-00082, <https://rscf.ru/project/22-72-00082/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lucca D.A., Klopstein M.J., Riemer O. Ultra-precision machining: cutting with diamond tools // J. Manufacturing Science and Engineering. 2020. V. 142. № 11. P. 110817.
2. Abdullah M.F., Hussin M.R.M., Ismail M.A., et al. Chip-level thermal management in GaN HEMT: Critical review on recent patents and inventions // Microelectronic Engineering. 2023. P. 111958.
3. Dobrinets I.A., Vins Victor.G., Zaitsev A.M. HPHT-Treated Diamonds: Diamonds Forever. 2013accessed. V. 181.
4. Sedov V.S., Martyanov A.K., Khomich A.A., et al. Deposition of diamond films on Si by microwave plasma CVD in varied CH_4 - H_2 mixtures: Reverse nanocrystalline-to-microcrystalline structure transition at very high methane concentrations // Diamond and Related Materials. 2020. V. 109. P. 108072.
5. Mandal S. Nucleation of diamond films on heterogeneous substrates: a review // RSC Adv. 2021. V. 11. № 17. P. 10159–10182.

6. Butler J.E., Cheesman A., Ashfold M.N.R. Recent progress in the understanding of CVD growth of diamond // *CVD Diamond for Electronic Devices and Sensors*. 2009. P. 103–124.
7. Drift A. Van der. Evolutionary selection, a principle governing growth orientation in vapour-deposited layers // *Philips Res. Rep.* 1967. V. 22. № 3. P. 267.
8. Ralchenko V.G., Pleuler E., Lu F.X., et al. Fracture strength of optical quality and black polycrystalline CVD diamonds // *Diamond and Related Materials*. 2012. V. 23. P. 172–177.
9. Aslantas K., Hopa H.E., Percin M., et al. Cutting performance of nano-crystalline diamond (NCD) coating in micro-milling of Ti6Al4V alloy // *Precision Engineering*. 2016. V. 45. P. 55–66.
10. Kulisch W., Popov C. On the growth mechanisms of nanocrystalline diamond films // *physica status solidi (a)*. 2006. V. 203. № 2. P. 203–219.
11. Fuentes-Fernandez E.M.A., Alcantar-Peña J.J., Lee G., et al. Synthesis and characterization of microcrystalline diamond to ultrananocrystalline diamond films via Hot Filament Chemical Vapor Deposition for scaling to large area applications // *Thin Solid Films*. 2016. V. 603. P. 62–68.
12. Bénédict F., Belmahi M., Elmazria O., et al. Investigations on nitrogen addition in the CH₄–H₂ gas mixture used for diamond deposition for a better understanding and the optimisation of the synthesis process // *Surface and Coatings Technology*. 2003. V. 176. № 1. P. 37–49.
13. Asmussen J., Mossbrucker J., Khatami S., et al. The effect of nitrogen on the growth, morphology, and crystalline quality of MPACVD diamond films // *Diamond and Related Materials*. 1999. V. 8. № 2. P. 220–225.
14. Мартыанов А.К., Седов В.С., Заведеев Е.В. и др. Синтез мультислойных алмазных пленок в СВЧ плазме в режимах с периодической инъекцией азота // *Доклады РАН. Физика, технические науки*. 2021. Т. 496. С. 44–47.
15. Sedov V., Martyanov A., Altakhov A., et al. Effect of Substrate Holder Design on Stress and Uniformity of Large-Area Polycrystalline Diamond Films Grown by Microwave Plasma-Assisted CVD // *Coatings*. 2020. V. 10. № 10. P. 939.

SYNTHESIS OF DIAMOND FILMS WITH REDUCED ROUGHNESS IN MICROWAVE PLASMA

A. K. Martyanov^a, I. A. Tiazhelov^a, S. S. Savin^b, A. F. Popovich^a,
V. S. Sedov^a, Academician of the RAS V. I. Konov^a

^a*Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia*

The work studies the effect of nitrogen additions on the secondary nucleation (nucleation) of diamond during its synthesis by chemical vapor deposition (CVD). A series of polycrystalline diamond (PCD) films 2 μm thick were grown on silicon substrates in methane-hydrogen-nitrogen gas mixtures with different nitrogen concentrations (0–1%). The structure and roughness of the grown films were studied using scanning electron microscopy (SEM) and optical profilometry. It has been shown that small additions of nitrogen play a key role in the processes of secondary nucleation of diamond, having a significant impact on the morphology of films. The comparison of the characteristics of grown PCD allowed us to find the optimal nitrogen concentration [N₂] ≈ 0.2% for the formation of nanocrystalline diamond (NCD) films with low surface roughness and increased growth rate. The results obtained are expected to be used to optimize the parameters of CVD synthesis of PCD films for use as protective or friction-reducing layers, as well as for the manufacture of superhard cutting tools.

Keywords: polycrystalline diamond, thin film, chemical vapor deposition, microwave plasma, Raman spectroscopy, roughness, growth rate

УДК 535.8

ИССЛЕДОВАНИЕ МИКРОСТРУКТУРЫ СОЕДИНЕНИЯ СТЕКЛО–МЕТАЛЛ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ЛАЗЕРОВ УЛЬТРАКОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ

© 2024 г. М. А. Мурзаков^{1,*}, Н. Н. Евтихий^{1,2}, Д. В. Мясников¹, Н. В. Грезев¹,
Д. А. Антипов^{1,3}, Д. М. Катаев¹, Е. Д. Шевелкина¹

Представлено академиком РАН Ю.Н. Кульчиным 25.03.2024 г.

Поступило 28.03.2024 г.

После доработки 28.03.2024 г.

Принято к публикации 02.04.2024 г.

Исследуется микроструктура сварного слоя, получаемого при воздействии лазерного ультракороткого импульса на соединение стекло–металл. Исследование сварного шва позволило выявить эффект термодиффузии химических элементов стекла и металла в зону соединения в соотношении 50:50% от каждого материала. Величина переходного слоя сварного соединения между стеклом и металлом составила значения 2–3 мкм. Результаты работы также показывают, что при соединениях хромоникелевой нержавеющей стали с боросиликатным стеклом образуются связи типа Fe–O–Si, а соединение алюминиевого сплава серии 6000 с боросиликатным стеклом приводит к образованию оксидов алюминия Al_2O_3 .

Ключевые слова: пикосекундный волоконный лазер, лазерная сварка стекло–металл, ультракороткий импульс (УКИ), микроструктура

DOI: 10.31857/S2686740024030057, EDN: KAHNGW

В современных устройствах широко используют такие материалы, как металл и стекло в различных конструктивах, например, в полупроводниках, автомобилестроении, медицине и МЭМС [1–4]. Для получения высокоточных и прочных соединений все большую популярность приобретает новая технология – лазерная микросварка [5–7]. В отличие от традиционных способов соединения стекла с металлом, таких как клеевые композиции, диффузионная сварка и механическое соединение, лазерная микросварка лишена основных недостатков данных способов – долговременная деградация клея, высокотемпературное воздействие и т.д. Однако при лазерной микросварке соединения

стекло–металл из-за значительных различий в физических свойствах этих материалов, таких как коэффициенты термического расширения, температуры плавления и теплопроводности, возникает ряд проблем. Эти проблемы могут включать в себя образование трещин в стекле, возникновение больших напряжений и создание непрочного соединения двух материалов. Для решения данных проблем проводятся исследования в различных лабораториях Европы, Азии и США [2–9]. Лазерную микросварку соединений стекло–металл можно разделить на два вида:

1. Лазерная сварка с использованием наносекундных лазеров.
2. Лазерная сварка с использованием лазеров ультракоротких импульсов (УКИ).

В первом случае лазерный импульс, следуя линейному закону, нагревает металл, в результате чего образуется соединение стекло–металл. При воздействии УКИ высокой частоты

¹ООО НТО “ИРЭ-Полус”,

Фрязино, Московская обл., Россия

²Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия

³Институт общей физики им. А.М. Прохорова
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: clericfull@gmail.com

Таблица 1. Химический состав материалов

Материал	O	Na	Al	Si	Cr	Mn	Fe	Ni	Всего
Боросиликатное стекло	60.34	3.19	1.49	34.98	—	—	—	—	100
Алюминиевый сплав серии 6000	7.67	—	92.33	—	—	—	—	—	100
Хромоникелевая нержавеющая сталь AISI 321	—	—	—	—	19.07	0.79	71.86	8.29	100

происходит многофотонное поглощение лазерного излучения в стекле и линейное (однофотонное) — в металле. В результате оба материала подвергаются плавлению и происходит формирование соединения двух разнородных материалов. Многочисленные исследования, посвященные лазерной микросварке стекла и металла, сосредоточены на выявлении оптимальных технологических параметров данного процесса [2–6]. Однако существует недостаток информации относительно микроструктуры и химического состава, возникающей в зоне перехода двух разнородных материалов. В работе [7] проведен микроструктурный анализ микросварки соединения алюминий–стекло. В результате исследований было показано, что при воздействии УКИ лазеров образуются оксиды алюминия Al_2O_3 в двух фазах — β и γ . Дальнейших исследований микроструктуры соединений при воздействии УКИ на другие типы металлов со стеклом не проводилось. Проведение таких исследований об образовании различных фаз и структур в зоне перехода стекло–металл требуется для расширения понимания процесса сварки двух разнородных материалов. Это позволит улучшить эффективность данного технологического процесса и повысить качество сварных соединений.

Учитывая вышесказанное, целью данной работы является исследование микроструктуры сварных соединений боросиликатного стекла

с хромоникелевой нержавеющей сталью AISI 321 и алюминиевым сплавом серии 6000 при воздействии УКИ.

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

1.1. Оборудование и материалы

В исследовании использовался пикосекундный волоконный лазер YLPP-100-3-50-R (производства компании НТО “ИРЭ-Полус”) с пиковой мощностью 30 МВт, длительность импульса 1–3 пс, параметр $M^2 = 1.22$, энергия в импульсе 100 мкДж, дискретная частота — 100, 200 и 500 кГц.

Для фокусирования лазерного излучения в работе использовался сканер плоского поля с фокусирующей линзой $F = 100$ мм. Расчетный размер пятна обработки составил значение 16 мкм в фокальной плоскости объектива.

Исходным материалом для проведения экспериментов были выбраны боросиликатное стекло, хромоникелевая нержавеющая сталь AISI 321, алюминиевый сплав серии 6000. Химические составы данных материалов представлены в табл. 1.

На рис. 1 показан эскиз образца после проведения лазерной сварки и указаны области, которые вырезались для дальнейших исследований.

Образцы для проведения исследований на сканирующем электронном микроскопе подготавливались следующим образом: сначала осуществлялась резка дисковой пилой на низкой

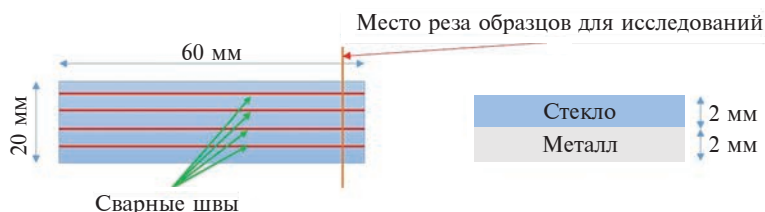


Рис. 1. Эскизы образцов с указанием размеров и мест для исследований: а — вид сверху на образец, б — вид с торца.

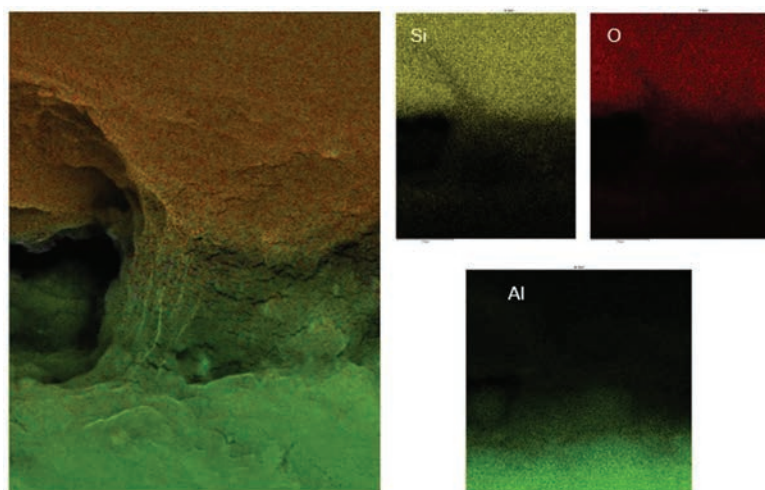


Рис. 2. Изображение поверхности сварки с наложением EDS-карты распределения элементов.

скорости с целью уменьшения растрескивания стекла, затем выполнялась шлифовка образца до получения зеркальной поверхности.

1.2. Исследование сварных соединений

Элементный анализ твердых веществ выполняли с помощью электронного микроскопа, в котором используется энергодисперсионный рентгеновский детектор (EDS-детектор). Аналитический метод, лежащий в основе принципа работы детектора, базируется на анализе возбуждаемого электронным пучком рентгеновского излучения, характерного для каждого химического элемента. Исследуя энергетический спектр такого излучения, можно сделать вывод как о качественном, так и о количественном составе образца. Глубина выхода рассеянного рентгеновского излучения, регистрируемого EDS-детектором, составляет от 1 до 3 мкм. Минимальное регистрируемое содержание химических элементов составляет 0.1 вес. %. Поэтому в случае исследования образцов содержание и присутствие некоторых элементов будет зависеть от энергии электронов. Изображения поверхности образца получены с помощью детектора обратно отраженных электронов (BSE-детектор) при ускоряющем напряжении 15 кВ.

Таблица 2. Элементный состав сварного шва образца алюминий–стекло

Область анализа	O	Na	Al	Si	Всего
Боросиликатное стекло	60.34	3.19	1.49	34.98	100
Алюминий серии 6000	7.67	—	92.33	—	100
Сварной шов (центральная область)	43.09	1.81	25.11	22.90	100

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

2.1. Технологические результаты сварки соединения стекло–металл

Проведена серия экспериментов по подбору технологических режимов сварки соединения стекло–металл. В ходе эксперимента варьировались следующие параметры: скорость сварки и энергия в импульсе. Скорость сварки изменялась в диапазонах от 10–30, 120 и 500 мм/с. Энергия в импульсе изменялась в пределах от 20 до 60 мкДж. Стоит отметить, что при энергиях выше 40 мкДж наблюдались дефекты в виде трещин, вызванные высокими напряжениями в стекле после лазерного воздействия.

Сварные соединения нержавеющая сталь – стекло выполнялись на следующих технологических параметрах: скорость сварки 120 мм/с, энергия в импульсе от 30 до 40 мкДж; для соединения алюминий–стекло: скорость сварки составила 500 мм/с, энергия от 30 до 40 мкДж. Были подготовлены 2 образца для дальнейших исследований на электронном микроскопе.

2.2. Исследование сварных соединений алюминий–стекло

На рис. 2 представлено изображение участка поверхности соединения алюминий–стекло.

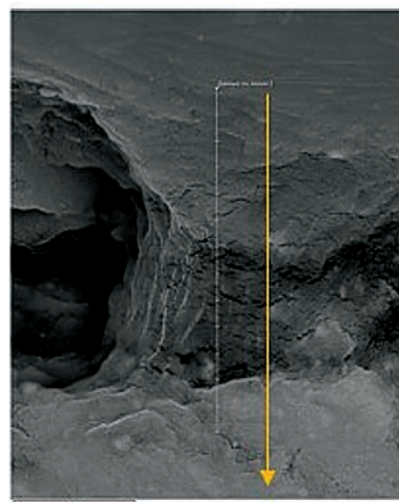
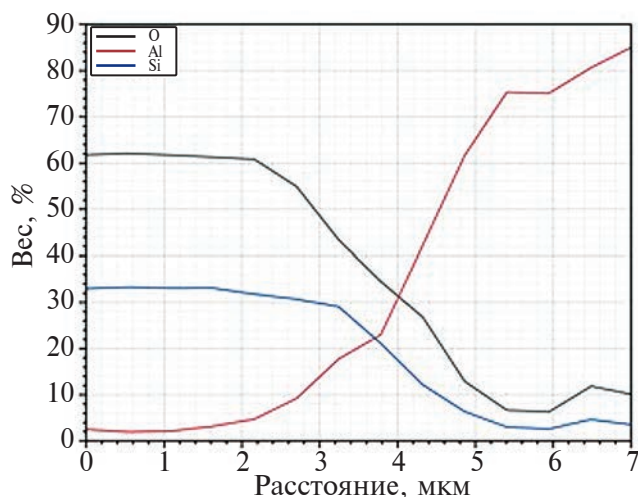


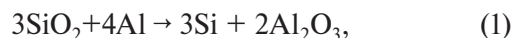
Рис. 3. Профиль сканирования элементного состава сварного шва алюминий–стекло и график изменения концентрации химических элементов.

Результаты элементного анализа исследуемой области образца алюминий–стекло приведены в табл. 2 и на рис. 2, 3. На рис. 3 представлено электронное изображение сварного шва с схематично отображенным профилем сканирования элементного состава, а также график изменения концентрации химических элементов. Профиль состоит из 14 точек с шагом сканирования 0.5 мкм. Полученные данные свидетельствуют о различии сварного шва от состава материала стеклянной пластины (SiO_2) и металлической пластины (Al). В табл. 2 приведен элементный состав сварного шва алюминий–стекло.

Из рис. 3 видно, что переходная зона сварного шва составляет 3 мкм. Анализ данных из табл. 3 показывают, что в зоне перехода алюминий–стекло присутствуют элементы как из стеклянной пластины, так и алюминия, пропорция которых составляет 50:50% от каждого материала. Учитывая, что процесс лазерной сварки УКИ-лазерами происходит за короткие временные интервалы, стабильные формы соединения между элементами стекла и алюминия внутри зоны перехода не возникают. При традиционной импульсной лазерной сварке значения времени жизни сварочной ванны, при которых формируются прочные металлические связи, составляют значения ≈ 100 мс.

Известно, что алюминий и кремний способны образовывать металлические соединения, известные как силумины. Однако авторы [7]

утверждают, что в зоне перехода алюминий–стекло образуются наноразмерные частицы алюминия и кремния, а также образуются оксиды алюминия Al_2O_3 в γ - и β -фазах. Согласно исследованиям [10, 11], в ходе равновесия алюминий способен освобождать кремний через реакцию (1):



где Al_2O_3 — оксид алюминия в α -фазе. Согласно авторам статьи [7], при воздействии УКИ

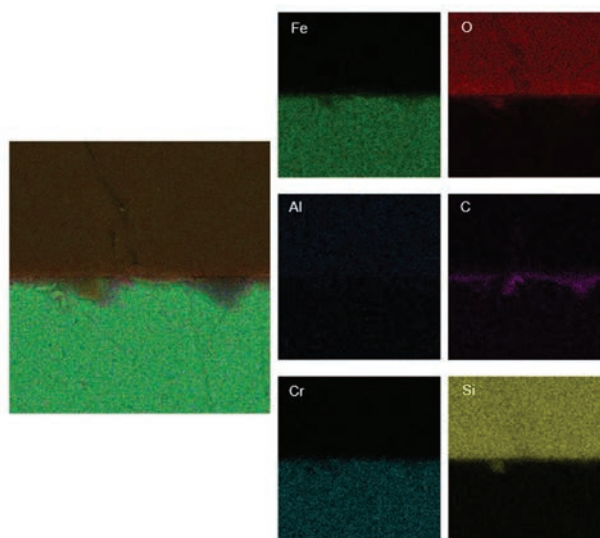


Рис. 4. Изображение поверхности сварки образца нержавеющей стали — стекло в контрасте BSE-электронов при ширине поля обзора 20 мкм, изображение поверхности сварки с наложением EDS-карт распределения элементов.

Таблица 3. Элементный состав сварного шва образца нержавеющая сталь – стекло

Область анализа	O	Na	Al	Si	Cr	Mn	Fe	Ni	Всего
Боросиликатное стекло	55.60	2.71	1.34	40.35	—	—	—	—	100
Хромоникелевая нержавеющая сталь AISI 321	—	—	—	—	19.07	0.79	71.86	8.29	100
Сварной шов (центральная область)	24.24	2.22	0.82	20.55	10.17	0.46	37.29	4.25	100

возникают аморфные γ - и β -фазы. Учитывая, что α -фаза является стабильной формой оксида алюминия, а γ - и β -фазы являются метастабильными формами, которые образуются при быстром охлаждении плазмы, содержащей соединения Al–O [12, 13]. Если рассматривать процесс сварки УКИ-лазерами, то плазма локализована в малом объеме и из-за большого градиента температур возможно образование γ - и β -фазы Al_2O_3 .

2.3. Исследование сварных соединений
нержавеющая сталь – стекло

На рис. 4 представлено изображение участков поверхностей сварного шва хромоникелевой нержавеющей стали и стекла.

Результаты элементного анализа исследуемой области хромоникелевой нержавеющей стали и стекла приведены в табл. 3 и на рис. 4, 5. На рис. 5 представлено электронное изображение сварного шва со схематично отображенным профилем

сканирования элементного состава, а также график изменения концентрации химических элементов. Профиль включает 24 точки с шагом сканирования 0.5 мкм. Согласно полученным данным, в составе стеклянной пластины входят оксиды Si, Al; Na. Состав металлической пластины представляет из себя сплав различных металлов: Fe, Cr, Ni и Mn. В месте сварного шва сторонних включений не обнаружено. В табл. 3 приведен элементный состав сварного шва нержавеющей стали и стекла.

Величина зоны перехода между нержавеющей сталью – стекло составляет значения 3 мкм. Результаты элементного состава сварного соединения показали наличие диффузии элементов на границе раздела стекла и нержавеющей стали при лазерной сварке, где Fe, Cr и Si были основными элементами при формировании сварных швов. Предположительно,

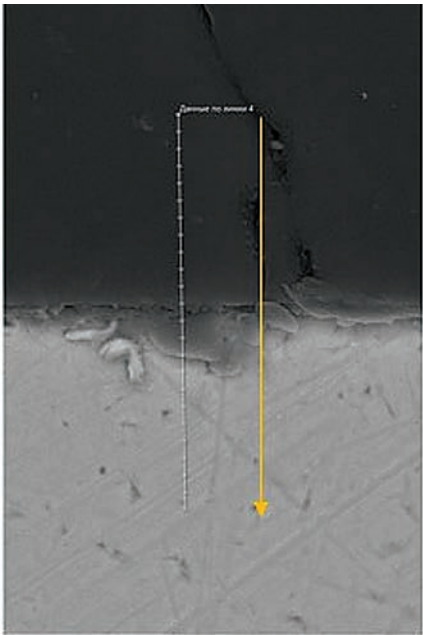
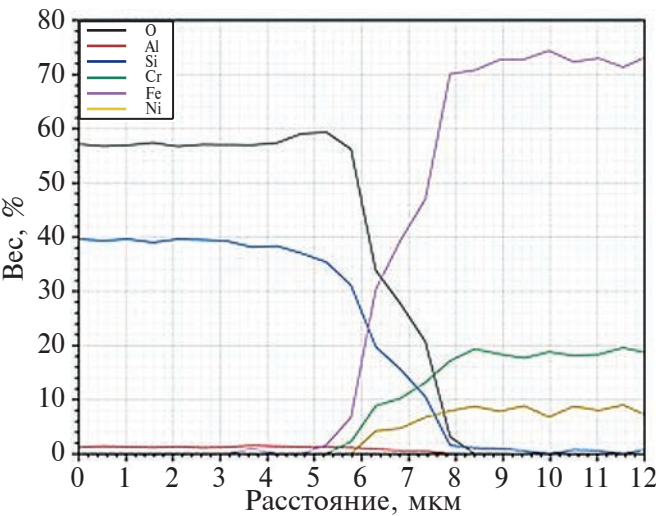


Рис. 5. Профиль сканирования элементного состава сварного шва нержавеющая сталь – стекло и график изменения концентрации химических элементов.

в результате сварки на границе раздела образуются связи Fe–O–Si.

ВЫВОДЫ

1. Проведенные исследования зоны перехода сварного шва стекло–металл при воздействии УКИ-лазера позволили получить ценные данные о процессе формирования сварного шва.
2. Исследование на сканирующем микроскопе показало, что величина зоны перехода стекло–металл составляет 3 мкм.
3. При анализе элементного состава зоны перехода алюминий–стекло и нержавеющей сталь – стекло выявлено, что вклад каждого материала в зону перехода составляет 50:50%.
4. В результате воздействия УКИ-лазера на соединение алюминий–стекло образуются γ - и β -фазы Al_2O_3 , которые представляют собой аморфные фазы, возникающие при большом градиенте температур.
5. В зоне сварного шва нержавеющей стали – стекло были обнаружены связи Fe–O–Si.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят вице-президента РАН академика РАН Ю.Н. Кульчина за положительную оценку данной работы.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhang J., Chen S., Lu H., et al. The effect of gap on the quality of glass-to-glass welding using a picosecond laser. *Optics and Lasers in Engineering*. 2020. V. 134.
2. Yi R., Chen C., Li Y., et al. The bonding between glass and metal // *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 2020. <https://doi.org/10.1007/s00170-020-06018-x>
3. Utsumi A., Ooie T., Yano T., et al. Direct bonding of glass and metal using short pulsed laser. *JLMN-Journal of Laser Micro/Nanoengineering*. 2007. V. 2. No. 2.
4. Matsuyoshi S., Mizuguchi Y., Muratsugu A., et al. Welding of glass and copper with a rough surface using femtosecond fiber laser pulses // *J. Laser Micro Nanoeng.* 2018. V. 13. No. 1. <https://doi.org/10.2961/jlmn.2018.01.0005>
5. Lipat'eva T.O., Fedotov S.S., Lipat'ev A.S., Lotarev S.V., Shakhgil'dyan G.Yu., Ryabov K.V., Sigaev V.N. Precision Laser Welding of Silica Glass with Iron-Nickel Alloy // *Glass and Ceramics*. 2021. № 11.
6. Carter R.M., Chen J., Shephard J.D., Thomson R.R., Hand D.P. Picosecond laser welding of similar and dissimilar materials // *Applied Optics*. 2014. V. 53. No. 19.
7. Ciuca O.P., Carter R.M., Prangnell P.B., Hand D.P. Characterisation of weld zone reactions in dissimilar glass-to-aluminium pulsed picosecond laser welds // *Materials Characterization*. 2016. V. 120.
8. Carter R.M., Troughton M., Chen J., Elder I., Thomson R.R., D. Esser M.J., Lamb R.A., Hand D.P. Towards industrial ultrafast laser microwelding: SiO₂ and BK7 to aluminum alloy // *Appl. Opt.* 2017. V. 56.
9. Ozeki Y., Inoue T., Tamaki T., Yamaguchi H., Onda S., Watanabe W., Sano T., Nishiuchi S., Hirose A., Itoh K. Direct welding between copper and glass substrates with femtosecond laser pulses // *Appl. Phys. Express*. 2008. V. 1.
10. Liu W., Köster U. Microstructures and properties of interpenetrating alumina/aluminium composites made by reaction of SiO₂ glass preforms with molten aluminium // *Mater. Sci. Eng. A*. 1996. 210. 1–7. [http://dx.doi.org/10.1016/0921-5093\(95\)10078-4](http://dx.doi.org/10.1016/0921-5093(95)10078-4)
11. Jackson R.W. III. The Effect of Reaction and Infiltration on the Degradation of Refractory Ceramics by Molten Metals. PhD thesis. University of Pittsburgh, 2010.
12. Guilemany J.M., Nutting J., Dougan M.J. A transmission electron microscopy study of the microstructures present in alumina coatings produced by plasma spraying // *J. Therm. Spray Technol.* 1997. V. 6. P. 425–429. <http://dx.doi.org/10.1007/s11666-997-0025-5>
13. Kumar B., Thareja R.K. Synthesis of aluminum oxide nanoparticles using laser ablation in liquid // *Phys. Status Solidi C*. 2010. V. 7. P. 1409–1412. <http://dx.doi.org/10.1002/pssc.200983356>

RESEARCH OF THE MICROSTRUCTURE GLASS–METAL BOUNDARY OBTAINED UNDER INFLUENCE BY ULTRASHORT PULSE LASERS

M. A. Murzakov^a, N. N. Evtikhiev^{a, b}, D. V. Myasnikov^a, N. V. Grezev^a, D. A. Antipov^{a, c},
D. M. Kataev^a, E. D. Shevelkina^a

^a*LLC “IRE-POLUS” LTD, Fryazino, Moscow Region, Russia*

^b*National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, Russia*

^c*Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS Yu. N. Kulchin

The article research the microstructure of the welded layer obtained by exposure to an ultrashort laser pulse on a glass-metal joint. The study of the weld made it possible to identify the effect of thermal diffusion of the chemical elements of glass and metal into the joint zone in a ratio of 50 : 50% of each material. The size of the transition layer of the welded joint between glass and metal was 2–3 microns. The results of the work also show that when combining chromium-nickel stainless steel with borosilicate glass, bonds of the Fe–O–Si type are formed, and the connection of a 6000 series aluminum alloy with borosilicate glass leads to the formation of aluminum oxides Al_2O_3 .

Keywords: picosecond fiber laser, glass-to-metal laser welding, ultrashort pulse (USP), microstructure

УДК 629.76.023:533.6.013.42

АЭРОУПРУГАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ КОЛЬЦЕВЫМИ РЕБРАМИ И ЦИЛИНДРОМ

© 2024 г. В. Н. Бакулин^{1,*}, А. Я. Недбай²

Представлено академиком РАН А.М. Липановым 25.06.2023 г.

Поступило 25.06.2023 г.

После доработки 28.11.2023 г.

Принято к публикации 29.11.2023 г.

В связи с перспективностью применения трехслойных оболочек в конструкциях современной техники, и в первую очередь в летательных аппаратах, рассматривается методология построения моделей для исследования аэроупругой устойчивости трехслойных оболочек, подкреплённых кольцевыми ребрами и внутренним пустотелым цилиндром. Получены уравнения и рассмотрены основные этапы решения задачи с помощью предложенной совокупности методов. Построены зависимости, с помощью которых исследовано влияние на критическую скорость обтекания потоком толщины свода подкрепляющего цилиндра, числа кольцевых ребер и длины оболочки. Рассмотренная методология позволяет построить модель первого приближения для исследования аэроупругой устойчивости трехслойных подкреплённых оболочек.

Ключевые слова: трехслойная цилиндрическая оболочка, аэроупругая устойчивость, подкрепляющие кольцевые ребра, внутренний пустотелый цилиндр

DOI: 10.31857/S2686740024030068, **EDN:** KAATVI

Перспективность применения трехслойных оболочек в конструкциях современной техники, и в первую очередь в летательных аппаратах, обусловлена высокими показателями весовой эффективности, изгибной жесткости, тепловой защиты, звукоизоляции, вибропоглощения, а также возможностью регулирования этих и других важных характеристик [1, 2]. У трехслойных оболочек можно расположить между несущими слоями в слое заполнителя различные конструктивные элементы, в том числе подкрепления в виде ребер, и добиться высокого качества внешней и внутренней поверхностей, что очень важно с точки зрения обтекания и актуально для современных высокоскоростных летательных аппаратов и особенно

твердотопливных двигателей [3]. Эффективным является использование высокопрочных термостойких композиционных материалов (КМ) при создании твердотопливных двигателей [4, 5].

Одним из наиболее дорогостоящих и наиболее нагруженных элементов твердотопливного двигателя является корпус. Во время полета помимо аэродинамических и инерционных нагрузок на него действуют осевые силы и изгибающие моменты от соединительных отсеков. Так как одной из основных функций корпуса является предотвращение попадания внутрь внешнего тепла, то его оптимальной конструкцией является трехслойная оболочка.

Наружный слой такой оболочки, часто более прочный, служит для защиты двигателя от внешних механических и частично тепловых факторов. Внутренний слой более толстый, удерживает внутреннее давление при работе двигателя. Заполнитель между слоями обычно имеет низкие коэффициент теплопроводности

¹Институт прикладной механики
Российской академии наук, Москва, Россия

²АО "Корпорация "Московский институт
теплотехники", Москва, Россия

*E-mail: vbak@yandex.ru

и модуль упругости и защищает внутренний слой от воздействия тепла.

Для повышения устойчивости корпуса от действия внешнего давления стенки оболочки усиливают кольцевыми ребрами (шпангоутами).

К настоящему времени имеется ряд работ, посвященных аэроупругой устойчивости (флаттеру) однослойных цилиндрических и подкрепленных оболочек [6–8]. Обзор публикаций [9 и др.] показал, что класс трехслойных оболочек, подкрепленных шпангоутами и внутренним пустотелым цилиндром, оказался практически неизученным. Этот факт оказывает сдерживающее влияние на применение трехслойных оболочек в качестве перспективных элементов конструкций современной техники, и в первую очередь летательных аппаратов. Поэтому разработка методологии построения таких моделей является остроактуальной.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим шарнирно опертую трехслойную цилиндрическую оболочку с несимметричными ортотропными слоями и легким заполнителем, подкрепленную шпангоутами и внутренним пустотелым цилиндром, обтекаемую по внешней поверхности сверхзвуковым потоком газа. Шпангоуты могут быть расположены между несущими слоями в слое заполнителя. Учет в расчетной схеме пустотелого цилиндра в зависимости от толщины свода и модуля упругости материала может как повысить, так и понизить критическую скорость обтекания.

В качестве аэродинамической модели внешнего воздействия на исследуемую конструкцию используется простейшая модель “поршневой” теории, разработанная и впервые опубликованная в статье [10] и широко используемая в работах [11, 12 и др.], в том числе в настоящее время [9 и др.].

Будем считать, что ребра связывают оба несущих слоя в окружном и радиальном направлениях и расположены сравнительно редко. При этом взаимным влиянием тангенциальных контактных усилий и радиальных инерционных сил можно пренебречь. Цилиндр представляется упругим основанием Винклера, коэффициент постели которого определяется из уравнений трехмерной теории упругости.

Инерционные свойства учитываются путем приведения массы цилиндра к массе корпуса [13]. По торцам оболочка нагружена осевыми сжимающими силами.

Введем безразмерную систему цилиндрических координат, в которой за координатную поверхность принята срединная поверхность заполнителя. Тогда уравнения движения оболочки можно представить в виде

$$L_{i1}u_\alpha + L_{i2}v_\alpha + L_{i3}w + L_{i4}u_\beta + L_{i5}v_\beta + \\ + (\delta_{i2} + \delta_{i3} + \delta_{i5}) \sum_{j=1}^N \left[l_{i2}^{(j)} v_{\alpha j} + l_{i3}^{(j)} w_j + l_{i5}^{(j)} v_{\beta j} \right] \delta(\alpha - \alpha_j) = 0, \\ (i = 1, 2, \dots, 5), \quad (1)$$

где L_{ij} , l_{ij} – дифференциальные операторы, имеющие вид

$$L_{11} = B_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{33} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}; \\ L_{12} = L_{21} = (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}; \\ L_{13} = L_{31} = B_{12} \frac{\partial}{\partial \alpha}; \\ L_{14} = L_{41} = B_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{33} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}; \\ L_{15} = L_{51} = (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{33}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}; \\ L_{22} = B_{33} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}; \\ L_{23} = L_{32} = B_{22} \frac{\partial}{\partial \beta}; \\ L_{24} = L_{42} = (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{33}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}; \\ L_{25} = L_{52} = \bar{B}_{33} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \bar{B}_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}; \\ L_{33} = \frac{D_{11}}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \frac{2(D_{12} + D_{33})}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{D_{22}}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - \\ - \frac{h_0^2}{h} \left(G_{13} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + G_{23} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + \mp p_0 M R \frac{\partial}{\partial \alpha} + T_\alpha \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \\ + \Pi^2 + B_{22} + \frac{\mp p_0 R^2}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} + F_0 R^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2};$$

$$\begin{aligned}
L_{34} &= L_{43} = \left(\bar{B}_{12} - 2 \frac{Rh_0}{h} G_{13} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha}; \\
L_{35} &= L_{53} = \left(\bar{B}_{22} - 2 \frac{Rh_0}{h} G_{23} \right) \frac{\partial}{\partial \beta}; \\
L_{44} &= B_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{33} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 4 \frac{R^2}{h} G_{13}; \\
L_{45} &= L_{54} = (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}; \\
L_{55} &= B_{33} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 4 \frac{R^2}{h} G_{23}; \\
I_{22}^{(j)} &= \frac{E_j F_j}{R} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}; \\
I_{23}^{(j)} &= I_{32}^{(j)} = \frac{E_j F_j}{R} \frac{\partial}{\partial \beta}; \\
I_{25}^{(j)} &= I_{52}^{(j)} = -2 \frac{\varepsilon_j E_j F_j}{Rh_0} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}; \\
I_{33}^{(j)} &= \frac{1}{R} \left(E_j F_j - a_j \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + \rho_j F_j R \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \\
I_{35}^{(j)} &= I_{53}^{(j)} = -\frac{2}{Rh_0} (\varepsilon_j E_j F_j + R a_j) \frac{\partial}{\partial \beta}; \\
I_{55}^{(j)} &= -\frac{4}{Rh_0^2} \left[a_j R^2 - E_j (\varepsilon_j^2 F_j + I_j) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right]; \\
F_0 &= \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + h \rho_0 + \rho_3 R (1 - z_0^2) / 6; \\
B_{ss} &= B_s^B + B_s^H; \quad \bar{B}_{ss} = B_s^B - B_s^H; \\
B_{12} &= B_1^B v_2^B + B_1^H v_2^H; \\
\bar{B}_{12} &= B_1^B v_2^B - B_1^H v_2^H; \\
B_1^B &= E_1^B h_1 / \eta^B; \quad B_2^B = E_2^B h_1 / \eta^B; \quad B_3^B = G_{12}^B h_1; \\
D_{12} &= D_1^B v_2^B + D_1^H v_2^H; \quad D_1^B = E_1^B h_1^3 / 12 \eta^B; \\
D_2^B &= E_2^B h_1^3 / 12 \eta^B; \quad D_3^B = G_{12}^B h_1^3 / 6; \\
z_0 &= R_0 / R; \quad T_\alpha = T / 2\pi R; \\
\eta^B &= 1 - v_1^B v_2^B; \quad h_0 = h + (h_1 + h_2) / 2; \\
2\varepsilon_i &= r_i^B + r_i^H; \quad a_i = 5G_i F_i / 6,
\end{aligned}$$

α, β — безразмерные координаты вдоль обрабатывающей и в окружном направлении срединной поверхности заполнителя, принятой за координатную поверхность; $w, u_\alpha, u_\beta, v_\alpha, v_\beta$ —

нормальное и приведенные осевые и тангенциальные перемещения соответственно верхнего и нижнего несущих слоев; R, R_0 — радиусы срединной поверхности заполнителя и канала цилиндра соответственно; h_1, h_2, h — соответственно толщины верхнего, нижнего и среднего слоев; $E_1^B, E_2^B, G_{12}^B, v_1^B, v_2^B$ — соответственно осевой и окружной модули упругости, модуль сдвига и коэффициенты Пуассона верхнего слоя (обозначения для нижнего слоя с индексом “H” имеют аналогичный смысл); G_{13}, G_{23} — модули поперечного сдвига заполнителя; $\rho_1, \rho_2, \rho_0, \rho_3$ — плотности материалов верхнего, нижнего и среднего слоев и материала цилиндра; E_j, G_j, ρ_j — модуль упругости, модуль сдвига и плотность материала j -го ребра; F_j, I_j — площадь и момент инерции ребра; N — количество ребер; Π — коэффициент постели; $\wp, p_0, c_0$ — показатель политропы, давление и скорость звука невозмущенного потока; M — число Маха; T — начальная осевая сила; $\delta(\alpha)$ — дельта-функция; δ_{kj} — символ Кронекера; r_j^B, r_j^H — соответственно расстояния от оси ребра до срединной поверхности верхнего и нижнего слоев, причем эта величина считается положительной, если ось ребра лежит ниже срединной поверхности несущего слоя.

Решение уравнений (1) будем искать в виде

$$\begin{aligned}
\{u_\alpha, u_\beta\} &= \cos n\beta \sum_{m=0}^{\infty} \{A_{1m}, A_{4m}\} \cos \gamma_m \alpha e^{\omega t}, \\
\{v_\alpha, v_\beta\} &= \sin n\beta \sum_{m=1}^{\infty} \{A_{2m}, A_{5m}\} \sin \gamma_m \alpha e^{\omega t}, \\
w &= \cos n\beta \sum_{m=1}^{\infty} A_{3m} \sin \gamma_m \alpha e^{\omega t},
\end{aligned} \quad (2)$$

где $\gamma_m = m\pi/\alpha_0$; $\alpha_0 = L/R$; L — длина оболочки; ω — комплексная частота; $A_{1m}, \dots, A_{5m}$ — постоянные коэффициенты; m — количество полуволн в осевом направлении; n — количество волн в окружном направлении.

Раскладывая дельта-функцию в тригонометрический ряд, подставим (2) в (1) и, используя метод Бубнова–Галёркина, получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно постоянной A_{3m} :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\delta_{km} (\xi_{1k} - \lambda) + \sum_{j=1}^N H_{km}^{(j)} + b_1 Q_{km} \right] A_{3m} = 0$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots), \quad (3)$$

где

$$\xi_{1k} = \Delta_k / D_{33}^{(k)};$$

$$\xi_{2k} = D_{23}^{(k)} / D_{33}^{(k)};$$

$$\xi_{3k} = D_{53}^{(k)} / D_{33}^{(k)};$$

$$H_{km}^{(j)} = \frac{2}{R\alpha_0} \left\{ E_j F_j \left[1 + n \left(\frac{2\xi_{3k} \varepsilon_j}{h_0} - \xi_{2k} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + a_j n \left(n + 2\xi_{3k} \frac{R}{h_0} \right) \right\} \sin \gamma_k \alpha_j \sin \gamma_m \alpha_j;$$

$$-\lambda = b_2 \omega^2 + b_3 \omega;$$

$$b_1 = \kappa p_0 R M; \quad b_2 = F_0 R^2 + \frac{2R}{\alpha_0} \sum_{j=1}^N F_j \rho_j \sin^2 \frac{\pi \alpha_j}{\alpha_0};$$

$$b_3 = \kappa p_0 R^2 / c_0;$$

$$Q_{km} = \begin{cases} \frac{4}{\alpha_0} \frac{mk}{k^2 - m^2}, & (k \pm m) - \text{нечетное число,} \\ 0, & (k \pm m) - \text{четное число,} \end{cases}$$

$D_{23}^{(k)}, D_{33}^{(k)}, D_{53}^{(k)}, \Delta_k$ – алгебраические дополнения и определитель матрицы, элементы которой имеют вид

$$a_{11} = -B_{11} \gamma_k^2 - B_{33} n^2; \quad a_{12} = a_{21} = (B_{12} + B_{33}) \gamma_k n;$$

$$a_{13} = -a_{31} = B_{12} \gamma_k;$$

$$a_{14} = a_{41} = -\bar{B}_{11} \gamma_k^2 - \bar{B}_{33} n^2;$$

$$a_{15} = a_{51} = (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{33}) \gamma_k n;$$

$$a_{22} = -B_{33} \gamma_k^2 - B_{22} n^2 - \frac{2n^2}{R\alpha_0} \sum_{j=1}^N E_j F_j \sin^2 \gamma_k \alpha_j;$$

$$a_{23} = -B_{22} n; \quad a_{24} = a_{42} = (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{33}) \gamma_k n;$$

$$a_{25} = a_{52} = -\bar{B}_{33} \gamma_k^2 - \bar{B}_{22} n^2 +$$

$$+ \frac{4n^2}{Rh_0 \alpha_0} \sum_{j=1}^N \varepsilon_j E_j F_j \sin^2 \gamma_k \alpha_j;$$

$$a_{32} = B_{22} n + \frac{2n}{R\alpha_0} \sum_{j=1}^N E_j F_j \sin^2 \gamma_k \alpha_j;$$

$$a_{33} = \frac{D_{11}}{R^2} \gamma_k^4 + \frac{2(D_{12} + D_{33})}{R^2} \gamma_k^2 n^2 +$$

$$+ \frac{D_{22}}{R^2} n^4 + \frac{h_0^2}{h} (G_{13} \gamma_k^2 + G_{33} n^2) -$$

$$- T_\alpha \gamma_k^2 + B_{22} + R^2 \Pi;$$

$$a_{34} = -a_{43} = -\left(\bar{B}_{12} - \frac{2Rh_0}{h} G_{13} \right) \gamma_k;$$

$$a_{35} = \left(\bar{B}_{22} - \frac{2Rh_0}{h} G_{23} \right) n -$$

$$- \frac{4n}{Rh_0 \alpha_0} \sum_{j=1}^N (\varepsilon_j E_j F_j + R a_j) \sin^2 \gamma_k \alpha_j;$$

$$a_{44} = -B_{11} \gamma_k^2 - B_{33} n^2 - \frac{4R^2}{h} G_{13};$$

$$a_{45} = a_{54} = (B_{12} + B_{33}) \gamma_k n;$$

$$a_{53} = -\left(\bar{B}_{22} - \frac{2Rh_0}{h} G_{23} \right) n;$$

$$a_{55} = -B_{33} \gamma_k^2 - B_{22} n^2 - \frac{4R^2}{h} G_{23} -$$

$$- \frac{8}{Rh_0^2 \alpha_0} \sum_{j=1}^N \left[a_j R^2 + E_j (\varepsilon_j^2 F_j + I_j) n^2 \right] \sin^2 \gamma_k \alpha_j.$$

Коэффициент постели Π будет иметь вид

$$\Pi = \frac{2\mu}{R} \frac{\Delta}{\Psi}; \quad \Psi = \sum_{j=1}^6 \Phi_j D_{6j}; \quad \xi = \gamma_k; \quad x = z_0 \gamma_k;$$

$$\Phi_1 = -\frac{n^2}{\xi} I_n(\xi); \quad \Phi_3 = -\frac{(\lambda + \mu)}{2(\lambda + 2\mu)} \xi \left(\frac{n^2}{\xi^2} + 1 \right) I_n(\xi);$$

$$\Phi_5 = -I'_n(\xi);$$

D_{6j}, Δ – соответственно дополнение и определитель матрицы, элементы которой имеют вид

$$C_{11} = \frac{n^2}{x} I_n(x);$$

$$C_{13} = -I'_n(x) - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{n^2}{x^2} + 1 \right) x I_n(x);$$

$$C_{15} = 2I'_n(x);$$

$$C_{21} = \left(\frac{n^2}{x^2} + \frac{1}{2} \right) I_n(x) - \frac{1}{x} I'_n(x);$$

$$C_{23} = \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \left[\frac{1}{x} I'_n(x) - \left(\frac{n^2}{x^2} + 1 \right) I_n(x) \right];$$

$$C_{25} = \frac{1}{x} \left[I'_n(x) - \frac{1}{x} I_n(x) \right];$$

$$C_{31} = \frac{n^2}{x} \left[\frac{1}{x} I_n(x) - I'_n(x) \right];$$

$$C_{33} = \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \left[\left(\frac{n^2}{x^2} + 1 \right) x I'_n(x) - \left(\frac{n^2}{x^2} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right) I_n(x) \right];$$

$$C_{35} = \frac{1}{x} I'_n(x) - \left(\frac{n^2}{x^2} + 1 \right) I_n(x); \quad C_{41} = \frac{n^2}{\xi} I_n(\xi);$$

$$C_{43} = -I'_n(\xi) - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{n^2}{x^2} + 1 \right) \xi I_n(\xi);$$

$$C_{45} = 2I'_n(\xi);$$

$$C_{51} = \left(\frac{n^2}{\xi^2} + \frac{1}{2} \right) I_n(\xi) - \frac{1}{\xi} I'_n(\xi);$$

$$C_{53} = \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \left[\frac{1}{\xi} I'_n(\xi) - \left(\frac{n^2}{\xi^2} + 1 \right) I_n(\xi) \right];$$

$$C_{55} = \frac{1}{\xi} \left[I'_n(\xi) - \frac{1}{\xi} I_n(\xi) \right];$$

$$C_{61} = n^2 \left[\frac{1}{\xi} I_n(\xi) - I'_n(\xi) \right];$$

$$C_{63} = \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \xi \left[\left(\frac{n^2}{\xi^2} + 1 \right) \xi I'_n(\xi) - \left(\frac{n^2}{\xi^2} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right) I_n(\xi) \right];$$

$$C_{65} = \xi \left[\frac{1}{\xi} I'_n(\xi) - \left(\frac{n^2}{\xi^2} + 1 \right) I_n(\xi) \right];$$

$$\mu = \frac{E_3}{2(1 + \nu_3)}; \quad \lambda = \frac{E_3 \nu_3}{(1 + \nu_3)(1 - 2\nu_3)},$$

где E_3 , ν_3 – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала цилиндра; штрихом обозначена производная по соответствующему аргументу.

Для получения четных столбцов матрицы C_{ij} и Φ_j необходимо в предыдущих элементах заменить функцию $I_n(x)$ на модифицированную функцию Бесселя $K_n(x)$ с тем же аргументом.

Редуцируя систему уравнений (3) с помощью метода Данилевского [14], приведем исходную

матрицу к матрице Фробениуса. В результате получим характеристическое уравнение в следующем виде:

$$\lambda^q - A_{q-1}\lambda^{q-1} + A_{q-2}\lambda^{q-2} - \dots - A_1\lambda + A_0 = 0, \quad (4)$$

где A_q – известные вещественные коэффициенты.

Полагая $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ в виде комплексного числа и отделяя в (4) действительную часть комплексных собственных значений от мнимой, получим систему уравнений относительно λ_1 и λ_2 . Понижая порядок уравнения для λ_1 с помощью алгебраических операций и используя уравнение параболы устойчивости [12]

$$\theta\lambda_1 = \lambda_2^2, \quad \theta = b_3^2/b_2,$$

получим систему двух уравнений. Для $n = 8$ она имеет вид

$$C_0\lambda_1^7 + C_1\lambda_1^6 + C_2\lambda_1^5 + C_3\lambda_1^4 + C_4\lambda_1^3 + C_5\lambda_1^2 + C_6\lambda_1 + C_7 = 0, \quad (5)$$

$$S_0\lambda_1^7 + S_1\lambda_1^6 + S_2\lambda_1^5 + S_3\lambda_1^4 + S_4\lambda_1^3 + S_5\lambda_1^2 + S_6\lambda_1 + S_7 = 0,$$

где $C_0 = 8$; $C_1 = 7A_7 - 56\theta$; $C_2 = 6A_6 - 35A_7\theta + 56\theta^2$;

$$C_3 = 5A_5 - 20A_6\theta + 21A_7\theta^2 - 8\theta^3;$$

$$C_4 = 4A_4 - 10A_5\theta + 6A_6\theta^2 - A_7\theta^3;$$

$$C_5 = 3A_3 - 4A_4\theta + A_5\theta^2; \quad C_6 = 2A_2 - A_3\theta; \quad C_7 = A_1;$$

$$S_0 = A_7 - 168\theta;$$

$$S_1 = 2A_6 - 133A_7\theta + 504\theta^2;$$

$$S_2 = 3A_5 - 100A_6\theta + 259A_7\theta^2 - 216\theta^3;$$

$$S_3 = 4A_4 - 70A_5\theta + 114A_6\theta^2 - 55A_7\theta^3 + 8\theta^4;$$

$$S_4 = 5A_3 - 44A_4\theta + 39A_5\theta^2 - 8A_6\theta^3;$$

$$S_5 = 6A_2 - 23A_3\theta + 8A_4\theta^2;$$

$$S_6 = 7A_1 - 8A_2\theta; \quad S_7 = 8A_0.$$

Используя критерий Рауса—Гурвица [15], приравняем нулю результат уравнений (5)

$$\begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_0 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_0 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 \\ S_0 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_0 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_0 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Выражение (6) позволяет определить критическую скорость потока в зависимости от конструктивных параметров оболочки.

ПРИМЕР

Рассмотрим трехслойную оболочку, подкрепленную одинаковыми прямоугольными шпангоутами и пустотелым цилиндром, имеющую параметры:

$$L/R = 9; \quad h_1/R = 0.002; \quad h_2/R = 0.006; \\ h/R = 0.01;$$

$$(E_1^B, E_1^H)/E_3 = 3000; \quad (E_2^B, E_2^H)/E_3 = 4800;$$

$$E/E_3 = 4800;$$

$$(G_{12}^B, G_{12}^H)/E_3 = 480; \quad G/E_3 = 480;$$

$$G_{i3} = (G_{13}, G_{23})/E_3 = 7;$$

$$v_1^B = v_1^H = 0.15; \quad v_2^B = v_2^H = 0.24; \quad v_3 = 0.49;$$

$$(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho)/\rho_0 = 5;$$

$$F/R^2 = 2 \cdot 10^{-4}; \quad I/FR^2 = 8 \cdot 10^{-6}; \quad z_0 = 0.5;$$

$$\kappa = 1.4; \quad \rho_0/E_3 = 10^{-2}; \quad c_0^2 \rho_0/E_3 = 0.36;$$

$$T_\alpha/(RE_3) = 0.1.$$

На рис. 1 представлены зависимости критической скорости обтекания потоком в числах Маха от безразмерной толщины свода цилиндра $\bar{z} = 10(1 - z_0)$ при однореберном и

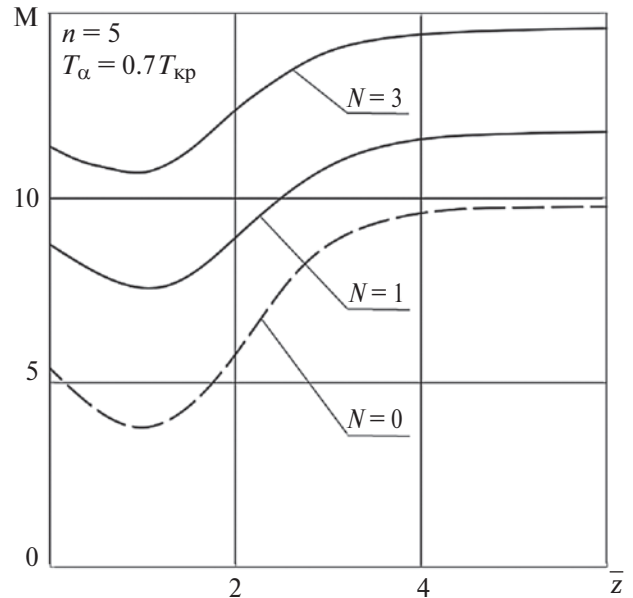


Рис. 1. Зависимость критического числа Маха (M) от толщины свода цилиндра ($\bar{z}$).

трехреберном подкреплении, где N — число шпангоутов. Для сравнения штриховой линией представлена зависимость критической скорости оболочки при отсутствии шпангоутов. Оболочки нагружены осевой сжимающей силой, величина которой составляет 70% от критической ($T_{кр}$ — критическая сила потери устойчивости неподкрепленной оболочки).

На рис. 2 показаны зависимости критической скорости обтекания от длины оболочки, подкрепленной шпангоутами и цилиндром и нагруженной осевой сжимающей силой. Для сравнения штриховой линией представлена аналогичная зависимость для оболочки с удвоенной толщиной ребер.

Из проведенного анализа полученных результатов расчетов следует, что:

при толщине свода цилиндра, равной $\bar{z} = 1.0$, оболочки имеют самую низкую критическую скорость;

увеличение толщины свода цилиндра $\bar{z} > 5.0$ не приводит к увеличению критической скорости обтекания;

наличие цилиндра увеличивает критическую скорость на 4М;

наличие одного шпангоута увеличивает критическую скорость на $\approx 2M$, а наличие трех шпангоутов увеличивает скорость на $\approx 4M$;

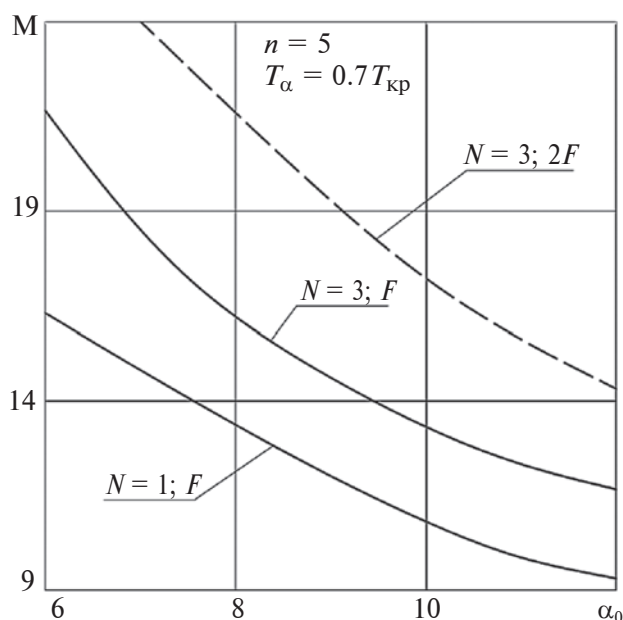


Рис. 2. Зависимость критического числа Маха от длины оболочки.

увеличение длины оболочки в 2 раза снижает критическую скорость в ≈ 1.8 раза;

увеличение площади шпангоутов в 2 раза увеличивает критическую скорость на $\approx 4M$ во всем диапазоне изменения длины оболочки.

Разработанная методология расчета позволяет на этапе проектирования трехслойных корпусов летательных аппаратов определить влияние параметров конструкции на величину критической скорости полета, при которой возникает панельный флаттер, и принять меры по его устранению.

ВЫВОДЫ

Представлена математическая модель по исследованию аэроупругой устойчивости перспективных для применения в конструкциях современной техники, и в первую очередь в летательных аппаратах, трехслойных оболочек, подкрепленных шпангоутами и внутренним пустотелым цилиндром. Приведены уравнения и рассмотрены основные этапы решения задачи с помощью представленной комбинации методов. С помощью построенных зависимостей исследовано влияние безразмерной толщины свода цилиндра, числа шпангоутов и длины оболочки на критическую скорость обтекания потоком, при которой возникает панельный

флаттер. Разработанная математическая модель позволяет провести исследования одновременного влияния шпангоутов и внутреннего цилиндра на аэроупругую устойчивость трехслойных цилиндрических оболочек.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института прикладной механики РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bakulin V.N.* Layer-by-Layer Study of the Stress and Strain State of Sandwich Conical Aircraft Compartments with Rectangular Cutouts // *Russian Aeronautics*. 2022. V. 65. No. 4. P. 668–676.
2. *Паймушин В.Н.* Теория среднего изгиба подкрепленных на контуре трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем // *Механика композитных материалов*. 2017. Т. 53. № 1. С. 3–26.
3. *Бакулин В.Н.* Трехмерная оболочечная модель для послойного исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных нерегулярных конических оболочек // *Доклады РАН. Физика, технические науки*. 2023. Т. 512. № 1. С. 51–57.
4. *Бакулин В.Н.* Влияние размеров прямоугольных в плане вырезов и модуля упругости подкрепляющих закладных элементов на напряженно-деформированное состояние трехслойных отсеков // *Известия вузов. Авиационная техника*. 2023. № 2. С. 11–21.
5. *Бакулин В.Н.* Блочная конечно-элементная модель для послойного анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек с нерегулярной структурой // *Изв. РАН. МТТ*. 2018. № 4. С. 66–73.
6. *Корбут Б.А., Нагорный Ю.И.* Об устойчивости в потоке газа цилиндрической оболочки, содержащей упругий наполнитель // *Динамика и прочность машин. Респ. межвед. темат. научн.-техн. сб.*, 1972. Вып. 15. С. 70–75.
7. *Bakulin V.N., Konopel'chev M.A. and Nedbai A.Ya.* Panel flutter of a variable-thickness composite shell // *Mechanics of Composite Materials*. 2020. V. 56. No. 5. P. 1–14.
8. *Bakulin V.N., Konopelchev M.A. and Nedbai A.Ya.* Flutter of a Laminated Cantilever Cylindrical Shell with a Ring-Stiffened Edge // *Russian Aeronautics*. 2018. V. 61. № 4. P. 517–523.
9. *Алтазин С.Д., Куйко И.А.* Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247 с.

10. *Ильюшин А.А.* Закон плоских сечений в аэродинамике больших скоростей // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
11. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматлит, 1961. 339 с.
12. *Огибалов П.М., Колтунов М.А.* Оболочки и пластины. М.: Изд-во МГУ, 1971.
13. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967.
14. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966.
15. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Физматлит, 1965. 208 с.

AEROELASTIC STABILITY OF A SANDWICH SHELL SUPPORTED BY ANNULAR RIBS AND A CYLINDER

V. N. Bakulin^a, A. Ya. Nedbai^b

^a*Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*Corporation "Moscow Institute of Thermal Engineering", Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.M. Lipanov

In connection with the promising use of sandwich shells in the designs of modern technology and primarily in aircraft, the methodology of building models for studying the aeroelastic stability of sandwich shells reinforced with annular ribs and an internal hollow cylinder is considered. Equations are obtained and the main stages of solving the problem using the proposed set of methods are considered. Dependencies were constructed with the help of which the influence of the thickness of the reinforcing cylinder, the number of annular ribs and the length of the shell on the critical speed of flow was studied. The considered methodology makes it possible to construct an initial approximation model for studying the aeroelastic stability of reinforced sandwich shells.

Keywords: cylindrical sandwich shell, aeroelastic stability, reinforcing annular ribs, internal hollow cylinder

УДК 539.3

ТЕНЗОРНАЯ ЛИНЕЙНОСТЬ ДВУМЕРНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ФУНКЦИЙ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

© 2024 г. Д. В. Георгиевский^{1,2,3,*}

Представлено академиком РАН В.В.Козловым 28.09.2023 г.

Поступило 29.09.2023 г.

После доработки 28.11.2023 г.

Принято к публикации 29.11.2023 г.

Показывается, что нелинейная изотропная тензор-функция второго ранга в двумерном пространстве, являющаяся степенным рядом по своему тензорному аргументу, представима конечным двучленным тензорно линейным соотношением. Приводятся выражения двух коэффициентов этого соотношения через бесконечный набор коэффициентов исходного ряда и два независимых инварианта тензорного аргумента. Применительно к механике сплошной среды устанавливается сводимость определяющих соотношений в плоской задаче тензорно нелинейной теории упругости к тензорно линейной связи соответствующих миноров второго порядка напряжений и деформаций.

Ключевые слова: тензор-функция, изотропия, нелинейность, инвариант, напряжение, деформация, определяющее соотношение, упругость, плоская задача

DOI: 10.31857/S2686740024030072, EDN: JZWZCE

1. Рассмотрим в двумерном пространстве нелинейную изотропную тензор-функцию $\mathbf{b}(\mathbf{a})$, представленную в виде степенного ряда по своему единственному аргументу

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \tilde{A}_0 \mathbf{I}^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n \mathbf{a}^n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^2, \quad (1)$$

где $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ — симметричные тензорные поля второго ранга, $\mathbf{I}^{(2)}$ — двумерный единичный тензор второго ранга, $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \dots$ — скалярные функции двух независимых инвариантов [1] тензора $\mathbf{a}$. В их качестве выберем I_{a1} и I_{a2} :

$$I_{an} = \sqrt[n]{\text{tr} \mathbf{a}^n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Инварианты I_{an} , $n \geq 3$, алгебраически выражаются через I_{a1} и I_{a2} . Например, для $n = 3, 4$ имеем

$$I_{a3}^3 = \frac{1}{2} I_{a1} (3I_{a2}^2 - I_{a1}^2), \quad I_{a4}^4 = \frac{1}{2} (I_{a2}^4 + 2I_{a1} I_{a2} - I_{a1}^4). \quad (3)$$

Выражения (3) следуют из формулы Гамильтона–Кели

$$\mathbf{a}^2 = \frac{1}{2} (I_{a2}^2 - I_{a1}^2) \mathbf{I}^{(2)} + I_{a1} \mathbf{a}, \quad (4)$$

записанной для случая двумерного пространства.

Обозначим через $K_{a0}^{(n)}$ и $K_{a1}^{(n)}$ коэффициенты в двучленном разложении

$$\mathbf{a}^n = K_{a0}^{(n)} \mathbf{I}^{(2)} + K_{a1}^{(n)} \mathbf{a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Согласно (4) запишем

$$\mathbf{a}^{n+1} = K_{a0}^{(n)} \mathbf{a} + K_{a1}^{(n)} \left[\frac{1}{2} (I_{a2}^2 - I_{a1}^2) \mathbf{I}^{(2)} + I_{a1} \mathbf{a} \right].$$

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

²Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия

³Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*E-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Это приводит к рекуррентной связи

$$K_{a0}^{(n+1)} = \frac{1}{2}(I_{a2}^2 - I_{a1}^2)K_{a1}^{(n)}, \quad K_{a1}^{(n+1)} = K_{a0}^{(n)} + I_{a1}K_{a1}^{(n)},$$

представимой в матричной форме

$$\begin{pmatrix} K_{a0}^{(n+1)} \\ K_{a1}^{(n+1)} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_a \cdot \begin{pmatrix} K_{a0}^{(n)} \\ K_{a1}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_a = \begin{pmatrix} 0 & (I_{a2}^2 - I_{a1}^2)/2 \\ 1 & I_{a1} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} K_{a0}^{(n)} \\ K_{a1}^{(n)} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_a^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

т.е. пара коэффициентов $(K_{a0}^{(n)}, K_{a1}^{(n)})$ является первым столбцом матрицы $\mathbf{Q}_a^n$ (5).

Таким образом, степенной тензорный ряд (1) в двумерном пространстве всегда можно представить в виде тензорно линейной связи

$$\mathbf{b} = \tilde{C}_0 \mathbf{I}^{\{2\}} + \tilde{C}_1 \mathbf{a} \quad (6)$$

с двумя скалярными функциями инвариантов I_{a1} и I_{a2} :

$$\tilde{C}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_n K_{a0}^{(n)}, \quad \tilde{C}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n K_{a1}^{(n)}.$$

2. Пусть ряд (1) обратим:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \tilde{B}_0 \mathbf{I}^{\{2\}} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n \mathbf{b}^n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^2, \quad (7)$$

где $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1, \dots$ — скалярные функции инвариантов I_{b1} и I_{b2} тензора $\mathbf{b}$, определенных аналогично (2). Прodelывая изложенную ранее процедуру для тензорного ряда (7), получим, что он эквивалентен тензорно линейному соотношению

$$\mathbf{a} = \tilde{D}_0 \mathbf{I}^{\{2\}} + \tilde{D}_1 \mathbf{b}, \quad (8)$$

где

$$\tilde{D}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_n K_{b0}^{(n)}, \quad \tilde{D}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n K_{b1}^{(n)},$$

$$\begin{pmatrix} K_{b0}^{(n)} \\ K_{b1}^{(n)} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_b^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\mathbf{Q}_b = \begin{pmatrix} 0 & (I_{b2}^2 - I_{b1}^2)/2 \\ 1 & I_{b1} \end{pmatrix}.$$

Пары инвариантов (I_{a1}, I_{a2}) и (I_{b1}, I_{b2}) связаны между собой следующим образом:

$$I_{b1} = 2\tilde{C}_0 + I_{a1}\tilde{C}_1, \quad I_{b2}^2 = 2\tilde{C}_0^2 + 2I_{a1}\tilde{C}_0\tilde{C}_1 + I_{a2}^2\tilde{C}_1^2,$$

а функции $\tilde{C}_0(I_{a1}, I_{a2})$, $\tilde{C}_1(I_{a1}, I_{a2})$ выражаются через $\tilde{D}_0(I_{b1}, I_{b2})$, $\tilde{D}_1(I_{b1}, I_{b2})$:

$$\tilde{D}_0 = -\frac{\tilde{C}_0}{\tilde{C}_1}, \quad \tilde{D}_1 = \frac{1}{\tilde{C}_1}.$$

Тензор-функции (6) и (8) обладают скалярными потенциалами $W(I_{a1}, I_{a2})$ и $w(I_{b1}, I_{b2})$ такими, что

$$\mathbf{b} = \frac{\partial W}{\partial I_{a1}} \frac{\partial I_{a1}}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial W}{\partial I_{a2}} \frac{\partial I_{a2}}{\partial \mathbf{a}}, \quad \mathbf{a} = \frac{\partial w}{\partial I_{b1}} \frac{\partial I_{b1}}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial w}{\partial I_{b2}} \frac{\partial I_{b2}}{\partial \mathbf{b}},$$

если выполняются по одному условию потенциальности для каждой из пар $(\tilde{C}_0, \tilde{C}_1)$ и $(\tilde{D}_0, \tilde{D}_1)$:

$$\frac{\partial \tilde{C}_0}{\partial I_{a2}} = I_{a2} \frac{\partial \tilde{C}_1}{\partial I_{a1}}, \quad \frac{\partial \tilde{D}_0}{\partial I_{b2}} = I_{b2} \frac{\partial \tilde{D}_1}{\partial I_{b1}}.$$

3. Рассмотрим теперь нелинейную изотропную тензор-функцию $\sigma(\epsilon)$ в трехмерном пространстве:

$$\sigma(\mathbf{x}) = A_0 \mathbf{I}^{\{3\}} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \epsilon^n(\mathbf{x}) \equiv C_0 \mathbf{I}^{\{3\}} + C_1 \epsilon(\mathbf{x}) + C_2 \epsilon^2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^3, \quad (9)$$

где $\sigma(\mathbf{x})$ и $\epsilon(\mathbf{x})$ — симметричные тензорные поля второго ранга, $\mathbf{I}^{\{3\}}$ — трехмерный единичный тензор второго ранга, $C_0, C_1, C_2, A_0, A_1, \dots$ — скалярные функции трех независимых инвариантов $I_{\epsilon 1}, I_{\epsilon 2}$ и $I_{\epsilon 3}$ тензора ϵ , определенных аналогично (2). Выражения, связывающие тройку функций (C_0, C_1, C_2) с бесконечным набором $A_0, A_1, \dots$, приведены в [2]. Тензор-функция (9) моделирует определяющие соотношения между напряжениями и деформациями в трехмерной тензорно нелинейной теории упругости при малых деформациях [3–6].

Остановимся подробнее на плоском деформированном состоянии нелинейно упругой среды, когда в R^3 существует такая декартова система координат с осями $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$, в которой

$$\epsilon = a_{IJ} \mathbf{e}_I \otimes \mathbf{e}_J, \quad \text{или} \quad \epsilon_{IJ} = a_{IJ}, \quad \epsilon_{i3} \equiv 0. \quad (10)$$

Большие латинские индексы здесь и далее пробегают значения 1 и 2, а малые латинские — 1, 2 и 3.

Исходя из формул (3) и (4) для тензоров вида (10) справедливы соотношения

$$I_{\varepsilon 3}^3 = \frac{1}{2} I_{\varepsilon 1} (3I_{\varepsilon 2}^2 - I_{\varepsilon 1}^2), \quad \boldsymbol{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2} (I_{\varepsilon 2}^2 - I_{\varepsilon 1}^2) \mathbf{I}^{(2)} + I_{\varepsilon 1} \boldsymbol{\varepsilon},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^n = (\mathbf{a}^n)_{IJ} \mathbf{e}_I \otimes \mathbf{e}_J. \quad (11)$$

Поскольку инвариант $I_{\varepsilon 3}$ автоматически выражается через $I_{\varepsilon 1}$ и $I_{\varepsilon 2}$, все функции трех инвариантов в (9) становятся функциями только $I_{\varepsilon 1}$ и $I_{\varepsilon 2}$, например,

$$C_0(I_{\varepsilon 1}, I_{\varepsilon 2}, \sqrt[3]{I_{\varepsilon 1}(3I_{\varepsilon 2}^2 - I_{\varepsilon 1}^2)/2}) \equiv C'_0(I_{\varepsilon 1}, I_{\varepsilon 2}). \quad (12)$$

Аналогичные обозначения со штрихом введем и для других функций $C_1, C_2, A_0, A_1, \dots$

С учетом (11) и (12) связь $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$ (9) переписывается в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = C'_0 \mathbf{I}^{(3)} + \frac{1}{2} C'_2 (I_{\varepsilon 2}^2 - I_{\varepsilon 1}^2) \mathbf{I}^{(2)} + (C'_1 + I_{\varepsilon 1} C'_2) \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (13)$$

Девиаторы напряжений $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - I_{\sigma 1} \mathbf{I}^{(3)}/3$ и деформаций $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - I_{\varepsilon 1} \mathbf{I}^{(3)}/3$ связаны между собой следующим образом:

$$\mathbf{s} = (C'_1 + I_{\varepsilon 1} C'_2) \mathbf{e} + C'_2 (I_{\varepsilon 2}^2 - I_{\varepsilon 1}^2) \left(\frac{1}{2} \mathbf{I}^{(2)} - \frac{1}{3} \mathbf{I}^{(3)} \right).$$

Видно, что если только C'_2 тождественно не равно нулю, девиаторы непропорциональны, что эквивалентно [7, 8] тензорной нелинейности функции (13) в общем случае.

Однако для плоского деформированного состояния (10) напряжения, связанные с деформациями посредством (9), можно представить как

$$\boldsymbol{\sigma} = b_{IJ} \mathbf{e}_I \otimes \mathbf{e}_J + A'_0 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3,$$

или $\sigma_{IJ} = b_{IJ}, \quad \sigma_{i3} = A'_0 \delta_{i3}.$

При этом компонента $\sigma_{33} = A'_0(I_{\varepsilon 1}, I_{\varepsilon 2})$ выражается через два инварианта I_{b1} и I_{b2} левого верхнего минора $\mathbf{b}$ тензора напряжений. Так, в классической плоской задаче теории

упругости при плоской деформации, как известно, $\sigma_{33} = \nu I_{b1}$, где ν — коэффициент Пуассона.

Таким образом, несмотря на тензорную нелинейность общей функции (13) связь миноров $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ представима тензорно линейной функцией (6). Сравнивая соотношения (6) и (13), установим связь пары функций $\tilde{C}_0, \tilde{C}_1$ с тройкой C'_0, C'_1, C'_2 :

$$\tilde{C}_0 = C'_0 + \frac{1}{2} C'_2 (I_{\varepsilon 2}^2 - I_{\varepsilon 1}^2), \quad \tilde{C}_1 = C'_1 + I_{\varepsilon 1} C'_2.$$

Аналогичные рассуждения и выкладки можно провести для (обобщенного) плоского напряженного состояния и говорить о сводимости плоской задачи тензорно нелинейной теории упругости к тензорно линейной связи соответствующих миноров второго порядка напряжений и деформаций.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана Российским научным фондом (грант 24-21-20008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спенсер Э. Теория инвариантов. М.: Мир, 1974. 156 с.
2. Георгиевский Д.В. Трехчленные представления степенных тензорных рядов в теории определяющих соотношений // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2023. Т. 508. С. 27–29.
3. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: ЛЕНАНД, 2014. 320 с.
4. Победра Б.Е. Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 264 с.
5. Димитриенко Ю.И. Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит, 2009. 624 с.
6. Бровко Г.Л. Определяющие соотношения механики сплошной среды. М.: Наука, 2017. 432 с.
7. Георгиевский Д.В. Тензорно нелинейные эффекты при изотермическом деформировании сплошных сред // Успехи механики. 2002. Т. 1. № 2. С. 150–176.
8. Георгиевский Д.В. Порядок малости эффекта Пойнтинга с позиций аппарата тензорно нелинейных функций // Известия РАН. МТТ. 2018. № 4. С. 29–33.

TENSOR LINEARITY OF TWO-DIMENSIONAL ISOTROPIC FUNCTIONS IN THE PLANE PROBLEM OF NONLINEAR THEORY OF ELASTICITY

D. V. Georgievskii^{a, b, c}

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

^b*Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics, Moscow, Russia*

^c*Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

It is shown that a nonlinear isotropic tensor function of the second rank in two-dimensional space, which is a power series in its tensor argument, is representable by a finite binomial tensor linear relation. Expressions of two coefficients of this relation are given in terms of an infinite set of coefficients of the original series and two independent invariants of the tensor argument. In relation to continuum mechanics, the reducibility of the constitutive relations in the plane problem of tensor nonlinear elasticity theory to the tensor linear connection of the corresponding second-order minors of stresses and strains is established.

Keywords: tensor function, isotropy, nonlinearity, invariant, stress, strain, constitutive relation, elasticity, plane problem

УДК 534.1

О ГЕНЕРАЦИИ ЧАСТОТНЫХ ГРЕБЕНОК НА ОСНОВЕ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ НИЗКОРАЗМЕРНЫХ НАНОСИСТЕМ

© 2024 г. А. В. Лукин^{1,*}, И. А. Попов¹, О. В. Привалова¹, Л. В. Штукин¹

Представлено академиком РАН Н.Ф. Морозовым 20.01.2024 г.

Поступило 31.01.2024 г.

После доработки 31.01.2024 г.

Принято к публикации 18.03.2024 г.

Исследуется нелинейная динамика прямоугольной атомарно-тонкой нанополосы в условиях внутреннего комбинационного резонанса между двумя поперечными и одной продольной формами механических колебаний. Аналитически найдены условия на величину деформации начального натяжения слоя, требуемую для реализации резонанса между формами с заданными индексами изменяемости по длине. Показано, что в условиях внутреннего резонанса в системе возбуждается нелинейный режим свободных колебаний, спектр которого имеет вид частотной гребенки. Выделены два качественно различных типа колебаний такого рода, вызванных начальным возбуждением по рабочей продольной форме колебаний и двум поперечным формам. Показана существенная зависимость спектрального состава генерируемых частотных гребенок от соотношений между амплитудами начального возмущения по трем взаимодействующим модальным координатам и величины параметра внутренней частотной расстройки системы.

Ключевые слова: наноэлектромеханические системы, НЭМС, нелинейная динамика, двумерные материалы, нанослой, лазерное термо-оптическое воздействие, фононные частотные гребенки

DOI: 10.31857/S2686740024030086, EDN: JZQXJT

Теоретические и прикладные задачи нелинейной динамики наномеханических систем в настоящее время привлекают растущее внимание научного и инженерного сообщества. Данная область исследований имеет непосредственное отношение к развитию таких направлений современной индустрии наносистем, как датчики высокоточного измерения различных физических величин (высотометры, датчики давления и влажности, газовые сенсоры, детекторы масс осаждаемых частиц, датчики инерциальной информации) [1, 2], системы преобразования и обработки сигналов (ультразвуковые преобразователи, радиочастотные переключатели, генераторы частоты, элементы акустоэлектроники) [3], системы

идентификации физических характеристик материалов на наномасштабе [4].

Проблемы упругих колебаний наносистем (в особенности атомарно тонких наноструктур из т.н. двумерных материалов: графен, дисульфид молибдена и др. [5]) представляют значительный научный интерес и практическую важность по ряду причин. Во-первых, уникальные физико-механические свойства двумерных материалов [6, 7] обеспечивают возможность эффективной генерации и управления параметрическими и вынужденными колебаниями, в т.ч. по многоузловым собственным формам резонаторов [8, 9]. В частности, открываются возможности фазовой корректировки теплошумовой характеристики резонатора и гигантского параметрического усиления вынужденных колебаний [10–12]. Во-вторых, в связи с малой изгибной жесткостью тонких наноструктур подобные системы являются существенно

¹Санкт-Петербургский политехнический университет, Санкт-Петербург, Россия
*E-mail: lukin_av@spbstu.ru

нелинейными с точки зрения их динамического отклика, что позволяет экспериментально исследовать и использовать в приложениях такие динамические эффекты, как сильное межмодальное взаимодействие в условиях внутренних резонансов [13, 14], направленный перенос и локализация механической энергии на отдельных формах колебаний резонатора [15, 16], нелинейная диссипация [17, 18] и др.

Перспективным направлением разработки наносистем из двумерных материалов является использование уникальных особенностей динамических режимов, действующих нелинейное резонансное взаимодействие различных мод собственных колебаний резонатора. Известны работы, в которых рассматриваются случаи нелинейного модального взаимодействия между несколькими поперечными формами круглых наномембран [4, 6]. Нелинейная динамика нанополос изучена в значительно меньшей степени. В то же время свойства спектра свободных колебаний прямоугольных натянутых мембран могут приводить к существенно новым эффектам в динамическом поведении таких систем. К примеру, в близкой с механической точки зрения задаче о связанных плоско-изгибных колебаниях микромеханической прямоугольной пластинки был обнаружен режим пульсаций, частотный спектр которого представляет собой т.н. частотную гребенку — серию эквидистантно расположенных спектральных линий [19]. Так был экспериментально продемонстрирован акустомеханический аналог оптических частотных гребенок, формируемых фемтосекундными лазерами с синхронизированными модами [20].

Оптические гребенки как источники стабильного электромагнитного излучения оптического диапазона находят многообразные применения в сложных метрологических и спектроскопических задачах, таких как создание сверхточных часов и спутниковых систем позиционирования, лазерная спектроскопия высокого разрешения, анализ состояния холодных атомов и др. [21, 22] После появления первых экспериментальных реализаций акустомеханических частотных гребенок, называемых также фононными, эта область исследований начала активно развиваться [23]. Ключевым потенциальным преимуществом фононных

частотных гребенок на базе наносистем перед их оптическими аналогами является уникальный диапазон возможностей по управлению параметрами генерируемого высокочастотного сигнала за счет существенной нелинейности возбуждаемых режимов колебаний и контролируемой изменяемости в широких пределах динамических характеристик нанорезонаторов, изготовленных из двумерных материалов [24]. Кроме того, принцип генерации фононных частотных гребенок находит оригинальные применения в задачах повышения точности и стабильности работы резонансных нано- и микроэлектромеханических сенсоров [25], а также разработки автономных микромасштабных систем аккумуляции энергии окружающей среды [26]. Несомненный научный и практический интерес представляют и специальные вопросы математического моделирования нелинейной динамики наносистем в режимах генерации частотных гребенок [27].

В настоящей работе исследуется нелинейная динамика прямоугольной атомарно-тонкой нанополосы в условиях внутреннего комбинационного резонанса между двумя поперечными и одной продольной формами колебаний. Рассматривается механизм генерации частотных гребенок на основе предложенной конструкции нанорезонатора в контексте развития неразрушающих методов лазерного термо-оптического возбуждения колебаний упруго-деформируемых наноструктур.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим задачу о связанных продольно-поперечных колебаниях предварительно натянутой наномасштабной прямоугольной полосы (слоя), изготовленной из двумерного материала. В силу атомарной тонкости слоя, изгибной жесткостью системы можно пренебречь, поэтому в качестве механической модели будем использовать модель мембраны, поле перемещений в которой зависит лишь от одной (продольной) координаты. Графическая схема задачи показана на рис. 1.

На рис. 1 введены следующие обозначения: $S = bh$ — площадь поперечного сечения слоя; b, h — ширина и высота сечения; ρ, E — объемная плотность и модуль Юнга материала; L_0 и

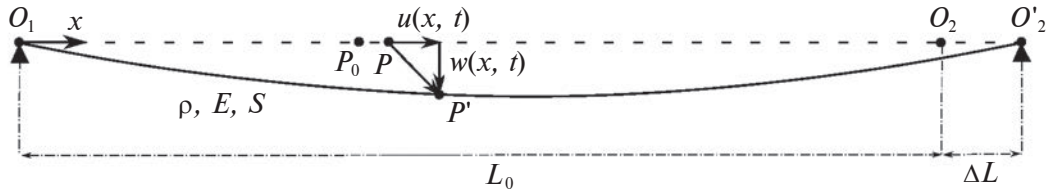


Рис. 1. Модель предварительно натянутого нанослоя.

ΔL — длина слоя в ненапрянутом начальном состоянии и заданное удлинение соответственно; x — продольная координата, определяемая по отношению к натянутому состоянию слоя; $u(x, t)$, $w(x, t)$ — продольная и поперечная компоненты вектора перемещений сечения слоя с координатой x в момент времени t .

Для выведения геометрически нелинейных связанных уравнений продольно-поперечных колебаний нанополосы применим вариационный принцип Гамильтона—Остроградского:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0, \quad (1)$$

где T и V — кинетическая и потенциальная энергии системы, $[t_1, t_2]$ — произвольный отрезок времени, δ — оператор варьирования.

Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \rho S \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dx, \quad (2)$$

где интегрирование выполняется по длине слоя $L = L_0 + \Delta L$ в его натянутом состоянии.

В предположении малости продольных смещений слоя по отношению к поперечным $u = O(w^2)$ продольная компонента тензора упругих деформаций может быть представлена следующим образом:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2.$$

Упругая энергия предварительно натянутой полосы с начальной деформацией $\epsilon_0 = \Delta L / L_0$ имеет вид

$$V = \frac{1}{2} ES \epsilon_0 \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} ES \int_0^L \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^2 dx. \quad (3)$$

Подстановка (2), (3) в (1) и последующее интегрирование полученных выражений по частям позволяет, с учетом произвольности вариаций δu и δw , вывести следующие дифференциальные уравнения движения упругой полосы, приведенные к безразмерному виду:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= \ddot{u}'' + \beta \tilde{w}' \tilde{w}''', \\ \ddot{w} &= \left[\epsilon_0 + \beta \ddot{u}' + \frac{\beta^2}{2} (\tilde{w}')^2 \right] \tilde{w}'' + \beta \ddot{u} \tilde{w}', \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\tilde{u} = \frac{u}{h}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{h}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad t_0 = \frac{L}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

а также введен безразмерный геометрический параметр $\beta = \frac{h}{L}$.

Здесь и далее за символами $(\dot{})$ и $()'$ сохранены обозначения производных по безразмерному времени τ и безразмерной продольной координате $\tilde{x}$. В дальнейшем знак $\sim$ над безразмерными величинами будем опускать.

В случае шарнирного опирания слоя граничные условия имеют вид

$$u(0, \tau) = u(1, \tau) = 0, \quad w(0, \tau) = w(1, \tau) = 0. \quad (5)$$

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНЫХ РЕЗОНАНСНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Исследуем вопрос о характере свободных колебаний нанополосы при нелинейном модальном взаимодействии между продольными и поперечными формами колебаний. Следуя методу Галёркина, представим решение задачи (4)–(5) в виде

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \phi_n(x) U_n(\tau), \\ w(x, \tau) &= \psi_l(x) W_l(\tau) + \psi_m(x) W_m(\tau), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\phi_n(x)$, $\psi_l(x)$, $\psi_m(x)$ — формы свободных продольных и поперечных колебаний слоя соответственно; $U_n(\tau)$, $W_l(\tau)$, $W_m(\tau)$ — отвечающие им модальные координаты. Отметим, что для принятых граничных условий спектр частот свободных продольных колебаний $\{\hat{\omega}_n\}$ равен $\hat{\omega}_n = \pi n$; спектр поперечных колебаний $\omega_l = \sqrt{\varepsilon_0} \pi l$.

Предположим, что для некоторого набора индексов (l, m, n) выполняется условие внутреннего комбинационного резонанса: $\omega_l + \omega_m \approx \hat{\omega}_n$, или, с учетом явных выражений для спектров собственных частот полосы, $\sqrt{\varepsilon_0} (l + m) \approx n$. Подчеркнем, что это условие может быть выполнено путем задания соответствующей величины деформации предварительного натяжения слоя ε_0 .

Следует отметить, что учет двух мод колебаний в представлении поля поперечных перемещений слоя (6) вызван тем обстоятельством, что, как будет показано далее, нелинейное модальное взаимодействие какой-либо одной формы поперечных колебаний с какой-либо продольной формой для выбранного вида граничных условий не реализуется: соответствующие коэффициенты уравнений в модальных координатах тождественно обнуляются.

Подстановка (6) в (4) и запись проекционных условий позволяет прийти к следующей системе дифференциальных уравнений в модальных координатах:

$$\begin{aligned} \ddot{U}_n + \hat{\omega}_n^2 U_n &= \beta G_1 W_l W_m, \\ \ddot{W}_l + \omega_l^2 W_l &= \beta G_2 U_n W_m + \\ &+ \beta^2 (G_3 W_l^3 + G_4 W_l W_m^2) + \beta G_5 \ddot{U}_n W_m, \\ \ddot{W}_m + \omega_m^2 W_m &= \beta G_6 U_n W_l + \\ &+ \beta^2 (G_7 W_m^3 + G_8 W_m W_l^2) + \beta G_9 \ddot{U}_n W_l, \end{aligned} \quad (7)$$

где G_i — проекционные коэффициенты, общий вид которых для краткости не приводится.

Отметим, что связь между продольной и поперечными формами колебаний определяется числовыми значениями коэффициентов G_i для $i = 1, 2, 5, 6, 9$. Вычисление этих коэффициентов в зависимости от значений индексов (l, m, n) для случая шарнирного опирания

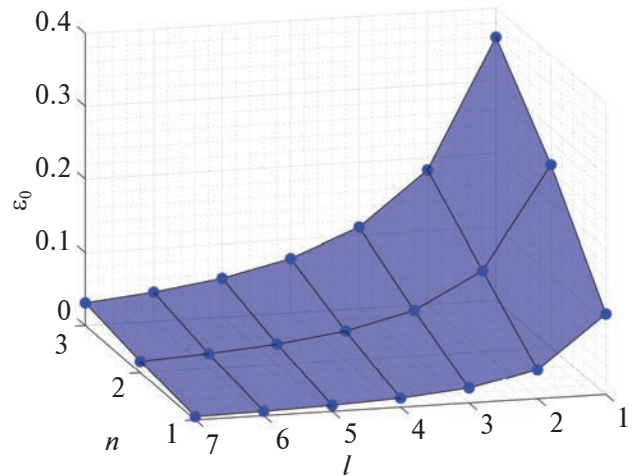


Рис. 2. Натяжение слоя, необходимое для реализации внутреннего комбинационного резонанса.

полосы показывает, что они принимают ненулевые значения лишь для некоторых комбинаций номеров вовлекаемых во взаимодействие форм колебаний, а именно при выполнении равенства

$$m = l + n. \quad (8)$$

Иными словами, для любого наперед заданного номера продольной формы колебаний n нелинейное взаимодействие данной формы будет наблюдаться с любыми двумя формами поперечных колебаний, номера которых l и m связаны указанным соотношением.

Условие (8) позволяет определить величину деформации предварительного натяжения слоя ε_0 , которую необходимо обеспечить для реализации внутреннего резонансного взаимодействия рассматриваемой тройки собственных форм с заданными индексами (l, n) (индекс второй поперечной формы m при этом однозначно определяется согласно упомянутому условию). А именно точной настройке на внутренний резонанс соответствует равенство

$$\varepsilon_0 = \frac{n^2}{(2l + n)^2}.$$

График функции $\varepsilon_0(n, l)$ показан на рис. 2. Из рисунка видно, что требуемая деформация преднатяжения уменьшается с ростом индекса первой рабочей формы поперечных колебаний и увеличивается с увеличением индекса рабочей формы продольных колебаний. Порядок

величины ε_0 находится в области достижимых значений для большинства двумерных материалов, используемых при изготовлении наномеханических систем.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

Для качественного анализа свойств нелинейных колебаний системы (7) выполняется построение асимптотического разложения с помощью метода многих масштабов.

Условие нахождения в области комбинационного резонанса представляется в виде

$$\omega_l + \omega_m = \tilde{\omega}_n + \sigma,$$

где $\sigma(\varepsilon_0)$ — параметр внутренней частотной расстройки.

Применение метода многих масштабов позволяет прийти к системе автономных эволюционных уравнений в медленных (амплитудных) переменных, явный вид которой в сообщении не приводится. С учетом наличия в динамике системы процессов с существенно различными характерными временами, анализ эволюционных уравнений является значительно более эффективным с вычислительной точки зрения.

Выполним численное интегрирование начальных задач Коши для исходной системы и системы в медленных амплитудных переменных при задании различных начальных условий. Везде далее будем рассматривать комбинацию индексов рабочих форм колебаний $n=1, l=3, m=4$. Представленные в настоящем разделе результаты в размерных переменных получены для прямоугольной полосы, изготовленной из однослойного графена. Геометрические и физико-механические характеристики наносистемы приняты следующими:

$$L = 3 \text{ мкм}, h = 5 \text{ нм}, \rho = 720 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, E = 1000 \text{ ГПа}.$$

На рис. 3 показаны осциллограммы колебаний по трем взаимодействующим собственным формам при сообщении системе начального отклонения (деформации) в продольном направлении: $U_n(0) = 0.6, W_l(0) = W_m(0) = 10^{-5}$. Рассматривается случай точной настройки на резонанс ($\sigma=0$).

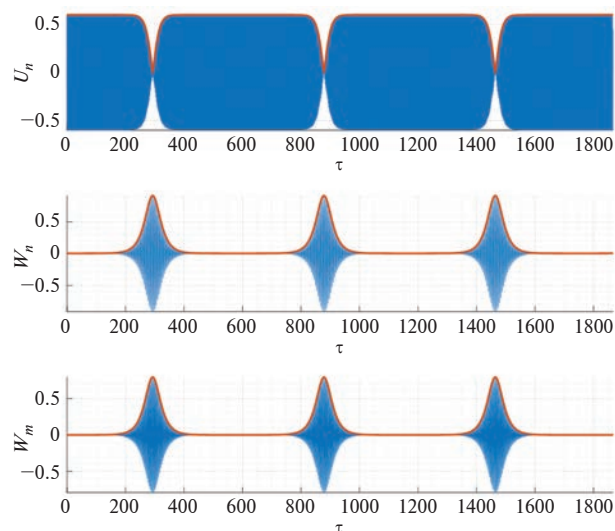


Рис. 3. Режим пульсаций при начальном возбуждении по продольной форме колебаний.

Колебания на рис. 3 имеют вид пульсаций — глубоко модулированных биений релаксационного типа, вызванных периодическим обменом энергией между продольными и поперечными формами движений. Наблюдается замечательное совпадение результатов интегрирования систем в “быстрых” и “медленных” переменных. Как показывает более подробный анализ, режим пульсаций возникает лишь при величинах начального возмущения, превышающих некоторое пороговое значение. Период пульсаций при этом уменьшается с ростом амплитуды начального возмущения, что объясняется механической нелинейностью резонатора — эффектом увеличения поперечной жесткости слоя с ростом амплитуды его поперечных смещений.

Исследуем спектральный состав наблюдаемых динамических режимов. Анализ выполняется с применением дискретного преобразования Фурье к осциллограммам колебаний, вычисленным на базе нелинейных эволюционных уравнений. На рис. 4 показаны спектрограммы колебаний нанослоя при варьировании параметра внутренней частотной расстройки $\sigma(\varepsilon_0)$. Как видно из рис. 4, спектр Фурье исследуемого процесса имеет вид т.н. частотной гребенки — набора эквидистантно расположенных спектральных линий с шагом, равным частоте наблюдаемых во временной области пульсаций. Наблюдается явно выраженный диапазон значений параметра частотной расстройки, внутри которого реализуется вибрационный режим со

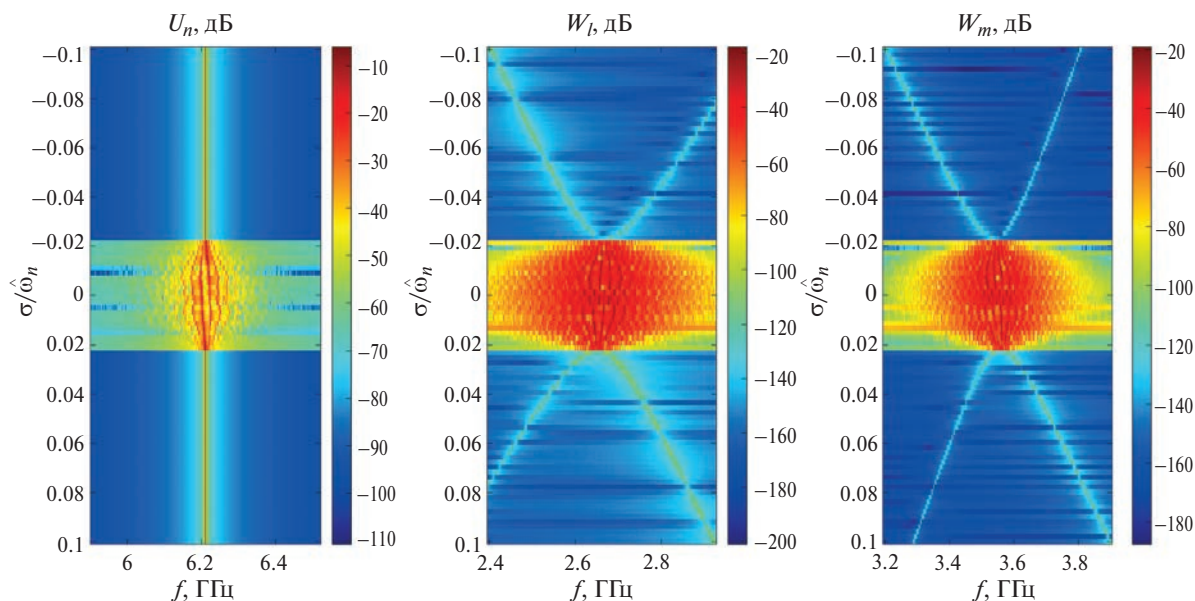


Рис. 4. Спектрограмма колебаний при изменении натяжения слоя.

спектром типа частотной гребенки. Вне этого диапазона колебания по продольной форме колебаний являются одночастотными, а по двум поперечным формам колебаний — двухчастотными с двумя доминирующими гармониками, близкими к соответствующим частотам свободных малых колебаний по данным формам. Ширина указанного диапазона значений параметра σ зависит от амплитуды начального продольного возмущения.

Следует подчеркнуть, что исследуемые динамические режимы являются существенно нелинейными и поэтому чувствительными к изменению ключевых параметров системы. При этом механическая природа колебаний, приводящих в рассмотренной постановке к генерации частотных гребенок, обеспечивает широкие возможности по управлению этими параметрами и, как следствие, управлению спектральным составом возбуждаемого режима движения. Как показано выше, индексы вовлекаемых в нелинейное взаимодействие форм колебаний системы (l, m, n), а также значение параметра частотной расстройки σ определяется начальным натяжением нанослоя ϵ_0 , величина которого для двумерных материалов может контролируемым образом варьироваться в очень широких пределах. Столь же широки и возможности управления параметрами возбуждения колебаний: наряду с распространенным электростатическим принципом возбуждения,

в рассматриваемом случае перспективным является механизм лазерного термо-оптического воздействия на нанополосу [27]. Простота изменения пространственной конфигурации светового пятна лазера и закона излучения во временной области (импульсный, периодический) позволяет эффективно возбуждать как продольные, так и поперечные формы колебаний слоя с различной изменяемостью по его длине.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе была предложена и исследована математическая модель связанных нелинейных продольно-поперечных колебаний прямоугольной нанополосы, изготовленной из двумерного материала, в условиях внутреннего комбинационного резонанса между двумя поперечными и одной продольной формами колебаний. Аналитически найдены условия на величину деформации начального натяжения слоя, требуемую для реализации резонанса между формами с заданными индексами изменяемости по длине. Показано, что в условиях внутреннего резонанса в системе возбуждается нелинейный режим свободных колебаний, спектр которого имеет вид частотной гребенки. Исследована зависимость спектрального состава генерируемых частотных гребенок от соотношений между амплитудами начального возмущения по трем взаимодействующим

модальным координатам и от величины параметра внутренней частотной расстройки системы. Обнаружено существование определенного диапазона значений преднатяжения слоя в области настройки на комбинационный резонанс, которому соответствует режим частотной гребенки при продольном механизме возбуждения колебаний. Отмечены широкие возможности по управлению характеристиками генерируемой частотной гребенки на основе механических колебаний нанослоя путем изменения величины его начального натяжения и пространственной конфигурации светового пятна лазерного термо-оптического источника возбуждения.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование частично финансируется Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках программы Исследовательского центра мирового уровня: “Передовые цифровые технологии” (соглашение №075-15-2020-311 от 20.04.2022).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Xiao X., Li C., Fan S.-C., Liu Y.-J., Liu Y. Optical-thermally actuated graphene mechanical resonator for humidity sensing. *Sensors and Actuators B: Chemical*, 2023. 374, 132851. <https://doi.org/10.1016/j.snb.2022.132851>
2. Roslon I., Steeneken P.G., Alijani F., Roslon I.E., Japaridze A., Naarden L., Smeets L., Dekker C., van Belkum A., Alijani F. Prospects and Challenges for Graphene Drums as Sensors of Individual Bacteria. 2023. <https://doi.org/10.1101/2023.11.20.567863>
3. Xu B., Zhang P., Zhu J., Liu Z., Eichler A., Zheng X.Q., Lee J., Dash A., More S., Wu S., Wang Y., Jia H., Naik A., Bachtold A., Yang R., Feng P. X. L., Wang Z. Nanomechanical Resonators: Toward Atomic Scale // *ACS Nano*. 2022. V. 16, Iss. 10. P. 15545–15585. American Chemical Society. <https://doi.org/10.1021/acsnano.2c01673>
4. Sajadi B., van Hemert S., Arash B., Belardinelli P., Steeneken P.G., Alijani F. Size- and temperature-dependent bending rigidity of graphene using modal analysis // *Carbon*. 2018. V. 139. P. 334–341. <https://doi.org/10.1016/j.carbon.2018.06.066>
5. Ferrari P.F., Kim S.P., van der Zande A.M. Nanoelectromechanical systems from two-dimensional materials // *Appl. Physics Reviews*. 2023. V. 10. Iss. 3. American Institute of Physics Inc. <https://doi.org/10.1063/5.0106731>
6. Steeneken P.G., Dolleman R.J., Davidovikj D., Alijani F., van der Zant H.S.J. Dynamics of 2D material membranes // *2D Materials*. 2021. V. 8. Iss. 4. IOP Publishing Ltd. <https://doi.org/10.1088/2053-1583/ac152c>
7. Cupertino A., Shin D., Guo L., Steeneken P.G., Bessa M.A., Norte R.A. Centimeter-scale nanomechanical resonators with low dissipation. 2023. <http://arxiv.org/abs/2308.00611>
8. Dolleman R.J., Houri S., Chandrashekar A., Alijani F., van der Zant H.S.J., Steeneken P.G. Opto-thermally excited multimode parametric resonance in graphene membranes // *Scientific Reports*, 2018. 8(1). <https://doi.org/10.1038/s41598-018-27561-4>
9. Yang F., Rochau F., Huber J.S., Briussel A., Rastelli G., Weig E.M., Scheer E. Spatial Modulation of Nonlinear Flexural Vibrations of Membrane Resonators // *Physical Review Letters*. 2019. V. 122(15). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.154301>
10. Zega V., Nitzan S., Li M., Ahn C.H., Ng E., Hong V., Yang Y., Kenny T., Corigliano A., Horsley D.A. Predicting the closed-loop stability and oscillation amplitude of nonlinear parametrically amplified oscillators // *Appl. Physics Letters*. 2015. V. 106(23). <https://doi.org/10.1063/1.4922533>
11. Keşkekler A., Shoshani O., Lee M., van der Zant H.S.J., Steeneken P.G., Alijani F. Tuning nonlinear damping in graphene nanoresonators by parametric—direct internal resonance // *Nature Communications*. 2021. V. 12(1). <https://doi.org/10.1038/s41467-021-21334-w>
12. Lee J., Shaw S.W., Feng P.X.L. Giant parametric amplification and spectral narrowing in atomically thin MoS₂ nanomechanical resonators // *Appl. Physics Reviews*. 2022. V. 9(1). <https://doi.org/10.1063/5.0045106>
13. Liu C.H., Kim I.S., Lauhon L.J. Optical Control of Mechanical Mode-Coupling within a MoS₂ Resonator in the Strong-Coupling Regime // *Nano Letters*. 2015. V. 15(10). P. 6727–6731. <https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.5b02586>
14. Keskekler A., Bos V., Aragón A.M., Steeneken P.G., Alijani F. Characterizing multi-mode nonlinear dynamics of nanomechanical resonators. 2023. <http://arxiv.org/abs/2304.01419>
15. Wang M., Perez-Moreno D.J., Lopez D., Aksyuk V.A. Persistent Nonlinear Phase-Locking and Nonmonotonic Energy Dissipation in Micromechanical Resonators // *Physical Review X*. 2022. V. 12(4). <https://doi.org/10.1103/PhysRevX.12.041025>
16. de Jong M.H.J., Cupertino A., Shin D., Gröblacher S., Alijani F., Steeneken P.G., Norte R.A. Beating

- Ringdowns of Near-Degenerate Mechanical Resonances // *Physical Review Applied*. 2023. V. 20(2), 024053.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.20.024053>
17. Wei X., Zhang T., Jiang Z., Ren J., Huan R. Frequency latching in nonlinear micromechanical resonators // *Appl. Physics Letters*. 2017. 110(14).
<https://doi.org/10.1063/1.4979829>
 18. Gajo K., Rastelli G., Weig E.M. Tuning the nonlinear dispersive coupling of nanomechanical string resonators // *Phys. Review B*, 2020. V. 101(7).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.101.075420>
 19. Ganesan A., Do C., Seshia A. Phononic Frequency Comb via Intrinsic Three-Wave Mixing. *Physical Review Letters*, (2017). 118(3).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.033903>
 20. Udem T., Holzwarth R., Hansch T.W. Optical frequency metrology // *Nature*. 2002. 416(6877).
<https://doi.org/10.1038/416233a>. PMID: 11894107
 21. Kolachevsky N.N., Khabarova K.Yu., Zalivako I.V., Semerikov I.A., Borisenko A.S., Sherstov I.V., Bagayev S.N., Lugovoy A.A., Prudnikov O.N., Taichenachev A.V., Chepurov S.V. Prospective Quantum-Optical Technologies for Satellite Navigation Challenges // *Rocket-Space Device Engineering and Information Systems*. 2018. V. 5(1). P. 13–27.
<https://doi.org/10.30894/issn2409-0239.2018.5.1.13.27>
 22. Mantsevich S.N., Kostyleva E.I., Danilin A.N., Khorokin V.S. Generation of dual and quad-optical frequency combs in the injected radiation free mode-locked frequency-shifted feedback laser // *Frontiers of Optoelectronics*. 2023. 16(1).
<https://doi.org/10.1007/s12200-023-00079-y>
 23. Lee J., Shaw S.W., Feng P.X.L. Phononic Frequency Comb Generation via 1:1 Mode Coupling in MoS₂ 2D Nanoelectromechanical Resonators // *Proc. IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS)*. 2022. January. P. 503–506.
<https://doi.org/10.1109/MEMS51670.2022.9699651>
 24. Sun J., Yu S., Zhang H., Chen D., Zhou X., Zhao C., Gerrard D.D., Kwon R., Vukasin G., Xiao D., Kenny T.W., Wu X., Seshia A. Generation and Evolution of Phononic Frequency Combs via Coherent Energy Transfer between Mechanical Modes // *Phys. Review Applied*. 2023. 19(1).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.19.014031>
 25. Ganesan A., Seshia A. Resonance tracking in a micro-mechanical device using phononic frequency combs // *Scientific Reports*. 2019. 9(1).
<https://doi.org/10.1038/s41598-019-46003-3>
 26. Zhang T., Seshia A. AA MEMS Frequency Comb Energy Harvester // *J. Microelectromechanical Systems*. 2023.
<https://doi.org/10.1109/JMEMS.2023.3316436>
 27. Morozov N.F., Indeitsev D.A., Lukin A.V., Popov I.A., Shtukin L.V. Nonlinear interaction of longitudinal and transverse vibrations of a rod at an internal combinational resonance in view of opto-thermal excitation of N/MEMS // *J. Sound and Vibration*. 2021. 509.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116247>

ON THE GENERATION OF FREQUENCY COMBS BASED ON MECHANICAL VIBRATIONS OF 2D MATERIAL NANOSHEETS

A. V. Lukin^a, I. A. Popov^a, O. V. Privalova^a, L. V. Shtukin^a

Presented by Academician of the RAS N.F. Morozov

^a*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russia*

We study the nonlinear dynamics of a rectangular atomically thin nanostrip under conditions of internal combinational resonance between two transverse and one longitudinal modes of mechanical vibrations. Conditions have been analytically found for the initial pretension of the layer required to realize resonance between eigenforms with given indices of variability along the length. It is shown that under conditions of internal resonance, a nonlinear mode of free oscillations is excited in the system, the spectrum of which has the form of a frequency comb. Two qualitatively different types of oscillations of this kind are identified – those caused by the initial excitation in the working longitudinal form of oscillations and in two transverse forms. A significant dependence of the spectral composition of the generated frequency combs on the relationships between the amplitudes of the initial disturbance for the three interacting modes and on the value of the internal frequency detuning parameter of the system is shown.

Keywords: nanoelectromechanical systems, NEMS, nonlinear dynamics, two-dimensional materials, nanolayer, laser opto-thermal excitation, phononic frequency combs

УДК 517.956.237:539.3(5)

МОДЕЛИ ПОНИЖЕННОЙ РАЗМЕРНОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ, ЗАКРЕПЛЕННОЙ ВДОЛЬ ОСНОВАНИЯ И ЧАСТИ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

© 2024 г. С. А. Назаров^{1,*}

Представлено академиком РАН Н.Ф. Морозовым 22.11.2022 г.

Поступило 31.01.2024 г.

После доработки 31.01.2024 г.

Принято к публикации 18.03.2024 г.

У тонкой однородной изотропной пластины зафиксированы нижнее основание и часть боковой поверхности. Построена асимптотика частот собственных колебаний пластины. При большой зоне защемления боковой поверхности моделью служит двумерная задача теории упругости на сечении, но при уменьшении этой зоны обнаружен эффект локализации мод собственных колебаний около боковой поверхности. Асимптотический анализ основан на исследовании спектра вспомогательной плоской задачи в полубесконечной полосе, описывающей явление пограничного слоя.

Ключевые слова: тонкая пластина, защемленное основание, двумерная модель, локализация мод собственных колебаний, волны, захваченные упругой полуполосой

DOI: 10.31857/S2686740024030093, EDN: JZQBIV

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОПИСАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В сообщении приводится асимптотический анализ частот и мод собственных колебаний однородной изотропной цилиндрической пластины

$$\Omega^h = \{x = (y, z) : y = (y_1, y_2) \in \omega, z \in (0, h)\}, \quad (1)$$

которая вставлена в выемку той же формы и глубины $h\ell$ при $\ell \in [0, 1]$ (рис. 1) в абсолютно жестком полупространстве и полностью прикреплена к поверхности выемки. Здесь $z = x_3$ — аппликата, $y_1 = x_1$ и $y_2 = x_2$ — абсцисса и ордината, ω — область на плоскости, ограниченная простым замкнутым гладким контуром $\partial\omega$. Масштабированием сведем характерный размер сечения ω к единице, т.е. сделаем декартову систему координат $x = (x_1, x_2, x_3)$ и все

геометрические параметры, в частности, малую относительную толщину h безразмерными.

Собственные колебания пластины Ω^h с частотой $\gamma_h > 0$ описываются системой дифференциальных уравнений

$$-\mu \Delta_x u^h(x) - (\lambda + \mu) \nabla_x \nabla_x \cdot u^h(x) = \Lambda^h u^h(x), \quad (2)$$

$$x \in \Omega^h,$$

с краевыми условиями

$$u^h(x) = 0, \quad x \in \Gamma_D^h = \partial\Omega^h \setminus \Gamma_N^h, \quad (3)$$

$$\sigma^{(n)}(u^h; x) = 0, \quad x \in \Gamma_N^h. \quad (4)$$

При этом $\nabla_x = \text{grad}$, $\nabla_x \cdot = \text{div}$, $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ — оператор Лапласа, $\lambda \geq 0$ и $\mu > 0$ — постоянные Ламе, $\Lambda^h = \rho \gamma_h^2$ — спектральный параметр, $\rho > 0$ — постоянная плотность упругого материала. Кроме того, $u^h = (u_1^h, u_2^h, u_3^h)$ — вектор смещений, зафиксированный нулевым на неподвижной поверхности

¹Институт проблем машиноведения
Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия
*E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

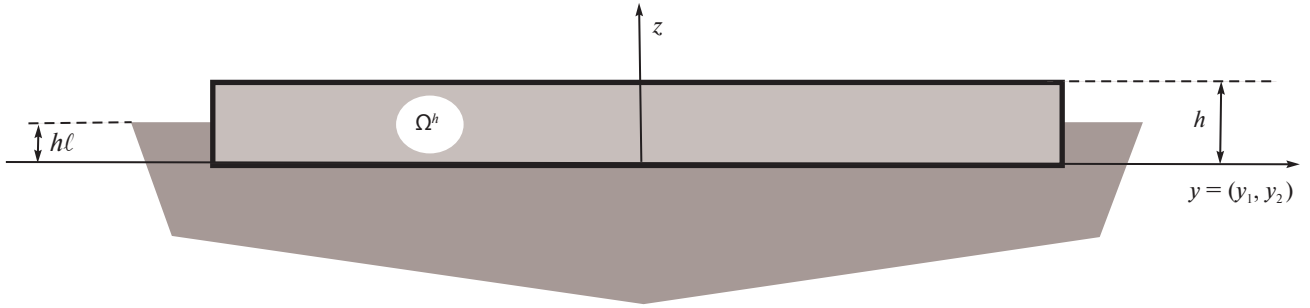


Рис. 1. Плоское изображение пластины толщиной h , вставленной в паз глубины $h\ell \leq h$.

$\Gamma_D^h = \{x \in \partial\Omega^h: z \leq h\ell\}$, $\Gamma_N^h = \{x \in \partial\Omega^h: z > h\ell\}$ — другая часть поверхности, свободная от внешних воздействий, и $\sigma^{(n)}(u^h)$ — вектор нормальных напряжений с декартовыми компонентами

$$\sigma_k^{(n)}(u^h; x) = \sum_{j=1}^3 n_j(x) \sigma_{jk}(u^h; x), \quad k = 1, 2, 3,$$

где $n = (n_1, n_2, n_3)$ — единичный вектор внешней нормали, причем $n_3 = 1$ на верхнем основании пластины и $n_3 = 0$ на ее боковой поверхности — кромке. Наконец, обозначив $\delta_{j,k}$ символ Кронекера, находим компоненты тензора напряжений по обычным формулам

$$\sigma_{jk}(u^h) = \mu \left(\frac{\partial u_j^h}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^h}{\partial x_j} \right) + \lambda \delta_{j,k} \nabla_x \cdot u^h, \quad (5)$$

$j, k = 1, 2, 3.$

Собственные числа задачи (2)–(4) образуют неограниченную монотонную положительную последовательность

$$0 < \Lambda_1^h \leq \Lambda_2^h \leq \Lambda_3^h \leq \dots \leq \Lambda_m^h \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (6)$$

и основная цель сообщения — описать их поведение при $h \rightarrow +0$, которое, что достаточно неожиданно, существенно зависит от относительной глубины ℓ выемки. Именно, будет установлено наличие такой величины $\ell_* \in (0, 1)$, что при $\ell > \ell_*$ (достаточно глубокая выемка) собственные числа приобретают вид:

$$\Lambda_m^h = \frac{\mu\pi^2}{4h^2} + M_m + O(h), \quad (7)$$

где в качестве поправочных слагаемых выступают собственные числа плоской задачи теории упругости на сечении

$$-\mu\Delta_y v(y) - (\lambda_* + \mu)\nabla_y \nabla_y \cdot v(y) = Mv(y), \quad y \in \omega, \quad (8)$$

$$v(y) = (v_1(y), v_2(y)) = 0, \quad y \in \partial\omega, \quad (9)$$

с новым коэффициентом Ламе λ_* (разд. 2). В случае $\ell = \ell_*$ условия жесткого защемления (9) в двумерной модели заменяются (разд. 4) смешанными краевыми условиями

$$v_s(y) = 0, \tau_{nn}(v; y) = 0, \quad y \in \omega, \quad (10)$$

причем $\tau_{nn}(v) = n_1^2 \tau_{11}(v) + 2n_1 n_2 \tau_{12}(v) + n_2^2 \tau_{22}(v)$ и $\tau_{jk}(v)$ — декартовы компоненты двумерного тензора напряжений, рассчитанные по обычным формулам и постоянным Ламе λ_* и μ (ср. соотношения (5)). В обеих ситуациях пространственное поле смещений в теле $\Omega^h \subset \mathbb{R}^3$ восстанавливается по формулам

$$u_j^h(x) = \sin\left(\frac{\pi z}{2h}\right) v_j(y) + \dots, \quad j = 1, 2, \quad u_3^h(x) = \dots, \quad (11)$$

где $v = (v_1, v_2)$ — собственная вектор-функция системы (8) с краевыми условиями (9) или (10), а многоточие заменяет младшие асимптотические члены. Иными словами, в пластине реализуется модифицированное (из-за множителя $\sin(\pi z/2h)$ в формулах (11)) плоское напряженное состояние.

Наконец, для достаточно мелкой выемки, т.е. при $\ell < \ell_*$, обнаружен эффект концентрации мод собственных колебаний около кромки пластины и экспоненциального их затухания при удалении от боковой поверхности, причем в качестве модели пониженной размерности выступает то или иное обыкновенное дифференциальное уравнение (разд. 5). Более того, нормированные собственные числа $h^2 \Lambda_m^h$ приобретают общий предел $B_1(\ell) \in (0, \mu\pi^2/4)$

при $h \rightarrow +0$, являющийся собственным числом вспомогательной двумерной задачи теории упругости в полубесконечной полосе (разд. 3)

$$\Pi = \{\xi = (\eta, \zeta) : \eta < 0, \zeta \in (0, 1)\}, \quad (12)$$

использующей систему растянутых координат (17) в окрестности кромки $\partial\omega \times (0, h)$. Соответствующая собственная вектор-функция $w = (w_n, w_z)$ экспоненциально затухает на бесконечности в Π и описывает плоское деформированное состояние пластины в плоскостях, перпендикулярных кромке пластины Ω^h .

Подчеркнем, что в ситуации $\ell \geq \ell_*$ медленная изменяемость упругих полей наблюдается во всех продольных направлениях в пластине, а в ситуации $\ell < \ell_*$ — только вдоль ее кромки. Изучение перехода от одного состояния пластины в другое при изменении знака множителя ℓ' в представлении

$$\ell = \ell_* + h\ell' + O(h^2) \quad (13)$$

требует детализированного исследования явления порогового резонанса в упругой полуполосе (12) (см. конец разд. 3).

Разработано множество подходов к изучению деформации тонких упругих пластин (ср. [1, 30], [2], [3, гл. 4], [4] и др.). Асимптотический анализ статических и спектральных задач (см., например, [5, гл. 16] и [6, гл. 5 и 7]) состоит в решении рекуррентной последовательности граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке $(0, 1)$ $\exists \zeta = h^{-1}z$, а условия их разрешимости и формируют модель пониженной размерности. Так, в случае оснований пластины, находящихся под действием нормальной нагрузки, обоснованно возникают гипотезы Кирхгофа и бигармоническое уравнение Софи Жермен (см. [1, 3, 6]). Общие асимптотические процедуры [5, гл. 16] подразумевают изучение феномена пограничного слоя, который в теории Кирхгофа отходит на второй план, но проявляется в значительной мере в рассматриваемой задаче (2)–(4) при $\ell < \ell_*$. Так, при $\ell = 0$ двумерная модель накладки Ω^h , прикрепленной только за нижнее основание $\Gamma_D^h = \{x: y \in \omega, z = 0\}$ к абсолютно жесткому полупространству, никоим образом не дает правильной информации о строении частот и мод собственных колебаний при малом размере h .

Локализация собственных колебаний приводит к концентрации напряжений, которая,

в свою очередь, провоцирует процессы разрушения. Как показывает проведенный далее асимптотический анализ, для уменьшения рисков отслоения пластины требуется достаточная глубина выемки и полное соединения контактирующих поверхностей.

2. ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ

Примем асимптотический анзац (7) для частот и уточним анзац (11) для мод собственных колебаний следующим образом:

$$u_j^h(x) = \sin\left(\frac{\pi z}{2h}\right) v_j(y) + h^2 V_j\left(y, \frac{z}{h}\right) + \dots, \quad j = 1, 2, \quad (14)$$

$$u_3^h(x) = h V_3\left(\frac{z}{h}\right) \nabla_y \cdot v_j(y) + \dots, \quad (15)$$

Подставим эти анзацы в систему (2) и в крайние условия (3) и (4) соответственно на нижнем и верхнем основаниях пластины. Собрав коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получим следующую задачу для множителя V_3 в формуле (15):

$$-(\lambda + 2\mu) \frac{d^2 V_3}{d\zeta^2}(\zeta) - \mu \frac{\pi^2}{4} V_3(\zeta) = (\lambda + \mu) \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \zeta\right), \quad \zeta \in (0, 1),$$

$$V_3(0) = 0, \quad (\lambda + 2\mu) \frac{dV_3}{d\zeta}(1) = -\frac{\pi}{2} \lambda.$$

Таким образом,

$$V_3(\zeta) = \frac{2}{\pi} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} \zeta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} \alpha \zeta\right) + \beta \sin\left(\frac{\pi}{2} \alpha \zeta\right) \right),$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right],$$

$$\beta = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} \alpha\right) \right)^{-1} \left(2\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2} \alpha\right) \right) > 0.$$

Условия разрешимости очередной задачи для вектора $V = (V_1, V_2)$ с компонентами из формул (14) и числа M из анзаца (7) превращается в систему дифференциальных уравнений (8) с коэффициентом

$$\begin{aligned} \lambda_* &= (\lambda + 2\mu) \frac{4}{\pi} \alpha \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} \alpha\right) \right)^{-1} \times \\ &\times \left(4\alpha - (1 + 4\alpha^2) \sin\left(\frac{\pi}{2} \alpha\right) \right) - \mu. \end{aligned} \quad (16)$$

Сумма $\lambda_* + \mu$ положительна при всех $\alpha > 0$, но сам коэффициент (16) становится отрицательным при малых α .

Подчеркнем, что сама система (8) выводится вне зависимости от того, какие краевые условия поставлены на кромке $\partial\omega \times (0, h)$ пластины (1). Вместе с тем общие алгоритмы [5] построения асимптотики решений эллиптических краевых задач в тонких областях требуют исследования явления пограничного слоя, не позволяя заранее предугадать краевые условия, замыкающие систему, и вообще могут исключить систему из списка предельных задач, описывающих асимптотику спектра (6) исходной задачи.

3. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

В окрестности $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ контура $\partial\omega$ введем естественную систему (n, s) локальных координат, где теперь n — ориентированное расстояние до контура $\partial\omega$, $n < 0$ в $\omega \cap \mathcal{V}$, а s — длина дуги, измеренная вдоль контура против часовой стрелки. Определим “быстрые” переменные

$$\eta = h^{-1}n, \quad \zeta = h^{-1}z, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) = (\eta, \zeta) \quad (17)$$

и в задаче (2)–(4), переписанной в координатах ξ и s , перейдем формально к $h=0$. Область (1) трансформируется в прямое произведение $\Pi \times \partial\omega$, а для вектора $w = (w_1, w_2) := (w_n, w_z)$, составленного из образов смещений u_n^h и u_z^h , получим плоскую задачу теории упругости в полуполосе (12)

$$-\mu \Delta_\xi w(s) - (\lambda + \mu) \nabla_\xi \nabla_\xi \cdot w(\xi) = Bw(\xi), \quad \xi \in \Pi,$$

$$w(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Pi, \quad \zeta \leq \ell, \quad (18)$$

$$\sigma^{(n)}(w; \xi) = 0, \quad \xi \in \Pi, \quad \zeta \geq \ell,$$

где B — новое обозначение для спектрального параметра, а напряжения вычисляются по обычным двумерным формулам. Компонента $w_3 = w_s$ удовлетворяет скалярной антиплоской задаче, которая легко изучается посредством метода Фурье и не приводит к каким-либо неожиданным эффектам.

Изучим спектр задачи (18), непрерывная часть которого — луч $[B^\dagger, +\infty)$ с точкой отсечки $B^\dagger = \pi^2\mu/4$. В крайних случаях $\ell = 1$ или $\ell = 0$, когда боковая поверхность пластины

Ω^h целиком заняты краевыми условиями (3) или (4) соответственно, результаты получены в работах [7] и [8]. Именно, согласно [9, 8] при $\ell = 1$ отсутствуют как дискретный спектр, так и пороговый резонанс [10, 11], но при $\ell = 0$, как установлено в [7, 8], дискретный спектр содержит хотя бы одну точку $B_1(0)$ (наименьшее изолированное собственное число, которому отвечает собственная вектор-функция w^ℓ , исчезающая на бесконечности с экспоненциальной скоростью), однако полной информации о спектре, в частности, о пороговом резонансе нет. Результаты [8] также устанавливают, что дискретный спектр пуст и пороговый резонанс отсутствует при параметре ℓ , близком к единице. Кроме того, принцип сравнения [12] (простое следствие минимального принципа [13, теорема 10.2.1]) показывает, что при росте ℓ собственное число сдвигается вверх по вещественной оси, а значит, в конце концов попадает на точку отсечки $B^\dagger$ и тем самым порождает пороговый резонанс. Иными словами, у задачи (18) при $B = B^\dagger$ и некотором $\ell = \ell_* \in (0, 1)$ появляется ограниченное решение $w^\dagger = (w_1^\dagger, w_2^\dagger)$, допускающее представления

$$w_1^\dagger(\xi) = C_\ell \sin\left(\frac{\pi}{2}\zeta\right) + \tilde{w}_1^\dagger(\xi), \quad w_2^\dagger(\xi) = \tilde{w}_2^\dagger(\xi) \quad (19)$$

с экспоненциально затухающими при $\eta \rightarrow -\infty$ остатками $\tilde{w}_j^\dagger(\xi)$ и коэффициентом $C_\ell \neq 0$. При этом в случае $\ell \in (\ell_*, 1)$ опять нет ни точек дискретного спектра, ни пороговых резонансов.

4. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ В ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПРИ $\ell \geq \ell_*$

При $\ell = \ell_*$ краевые условия (10) возникают по следующим причинам, проистекающим от метода сращиваемых асимптотических разложений (см. [14, 15], [5, гл. 2] и др.). Во-первых, наличие ограниченного порогового решения (19) обеспечивает его сращивание с главным членом $v_n(y) \sin(\pi z/2h)$ асимптотики (14) при любом следе компоненты v_n вектора v на контуре $\partial\omega$ и потому приходится назначить двойственное в смысле формулы Грина условию Дирихле условие Неймана $\tau_{nn}(v) = 0$. Во-вторых, в скалярной задаче для компоненты w_s порогового резонанса при $\ell > 0$, разумеется, нет, т.е. сращивать главный член $v_n(y) \sin(\pi z/2h)$ асимптотики (14) не с чем и, следовательно, требуется условие $v_s = 0$ на $\partial\omega$.

В случае $\ell > \ell_*$ ограниченные пороговые решения (19) отсутствуют, и поэтому приведенные аргументации обеспечивают полные условия Дирихле (9).

Формальный вывод краевых условий (10) или (9), основанный на методе сращиваемых асимптотических разложений нуждается в строгом обосновании. Как и в книге [6, гл. 4] это делается при помощи подходящего весового неравенства Корна.

Аналитические методы не дают возможности найти критический размер $\ell_* = \ell_*(\lambda / \mu)$ и для нахождения его приближённого значения нужны численные эксперименты. То же самое относится и к выяснению скорости медленного затухания на бесконечности захваченных волн при $\ell = \ell_* - \delta$ и малом $\delta > 0$. Эта информация позволит изучить в ситуации (13) обсуждавшийся в разд. 1 переход от одного типа деформированного состояния пластины в другое.

5. ЭФФЕКТЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ ПРИ $\ell < \ell_*$

Согласно публикациям [5, гл. 17] и [16] наличие захваченных волн в задаче (18) полностью изменяет процедуру построения асимптотики и выдвигает на первый план явление пограничного слоя, обеспечивая тем самым эффект локализации мод собственных колебаний около кромки пластины Ω^h . Именно, разработанные в статье [16] приемы позволяют проверить следующие факты. Во-первых, спектр задачи (2)–(4) приобретает собственные числа

$$\Lambda_m^h = h^{-2}(B_1(\ell) + O(h^{1/2})),$$

расположенные ниже точки $\mu\pi^2 h^{-2}$ (ср. формулу (7)), причем их количество N^h неограниченно возрастает при $h \rightarrow +0$. Во-вторых, для собственных вектор-функций $u_{(m)}^h$, нормированных в пространстве $L^2(\Omega^h)$, справедливо весовое неравенство

$$\left\| e^{\delta_m r_h^2} u_{(m)}^h; L^2(\Omega^h) \right\| \leq c_m, \quad m = 1, \dots, N^h,$$

где δ_m и c_m – положительные величины и $r_h(y) = h + \text{dist}(y, \partial\omega)$. Следовательно, вне окрестности боковой поверхности пластины собственные моды затухают с экспоненциальной скоростью.

Разработанный в книге [5] и статьях [7, 16] асимптотический анализ предоставляет

формулы для собственных чисел задачи (2)–(4), которые (формулы) существенно зависят от формы сечения. Если ω – круг и кривизна κ контура $\partial\omega$ постоянна, то справедливы соотношения

$$\Lambda_m^h = h^{-2}B_1(\ell) + h^{-1}b(\ell) + K_m + O(h^{1/2}),$$

где K_m – собственные числа обыкновенного дифференциального уравнения на окружности

$$-A(\ell)\partial_s^2 v(s) = Kv(s), \quad s \in \partial\omega.$$

Если же кривизна имеет строгий глобальный максимум в точке s_0 , то

$$\Lambda_m^h = h^{-2}B_1(\ell) + h^{-1}b(\ell) + h^{-1/2}K_m + O(1),$$

а K_m – собственные числа уравнения гармонического осциллятора на оси (см., например, монографию [17])

$$-A(\ell)\partial_\zeta^2 v(\zeta) + a(\ell)\zeta^2 v(\zeta) = Kv(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R},$$

где $\zeta = h^{-1/2}(s - s_0)$ – растянутая координата на контуре.

Коэффициенты $A(\ell)$, $b(\ell)$ и $a(\ell)$ сложным образом зависят от параметра $\ell \in (0, \ell_*)$ и выражаются через интегралы от захваченной волны w^ℓ в полуполосе (12).

Спектральный анализ задач (18) и (2)–(4) в ситуации $\ell \in [0, \ell_*)$ не завершен полностью именно из-за того, что явное выражение для захваченной упругой волны w^ℓ недоступно. Как упоминалось, для определения приближенного решения задачи (18) и, в частности, нахождения упомянутых коэффициентов необходимы численные эксперименты, причем применение известных методов осложнено неограниченностью области Π и наличием непрерывного спектра задачи. Особую трудность представляет вопрос о пороговом резонансе, который в принципе позволит выяснить краевые условия в двумерной модели (8) и при $\ell < \ell_*$. Такая модель предоставляет устойчивые асимптотические формулы для собственных чисел в среднечастотном диапазоне спектра – точно так же помимо собственных частот $O(h)$ из нижней части спектра пластины со свободными основаниями, описываемыми классическим бигармоническим уравнением, имеются собственные частоты $O(1)$, отвечающие продольным

колебаниям. “Многосерийность” асимптотических формул для собственных колебаний тонких упругих дел подробно обсуждается в книге [6, гл. 7]. Например, наличие при каком-то $\ell \in [0, 1]$ собственного числа в непрерывном спектре задачи (18) обеспечивает новые локализационные эффекты. Вместе с тем нет никаких сведений о возможности появления собственных чисел на луче $[B^\dagger, +\infty)$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект No. 124041500009-8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
2. Шойхет Б.А. Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37. № 5. С. 913–924.
3. Морозов Н.Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978.
4. Ciarlet P.G. Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures: An Asymptotic Analysis. Paris: Masson, 1988.
5. Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B. Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. 1 & 2. Basel: Birkhäuser Verlag, 2000).
6. Назаров С.А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научная книга, 2002.
7. Камоцкий И.В., Назаров С.А. О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области // Проблемы матем. анализа. Вып. 19. Новосибирск: Научн. книга, 1999. С. 105–148.
8. Назаров С.А. Дискретный спектр коленчатых квантовых и упругих волноводов // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 5. С. 879–895.
9. Rellich F. Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebiete // Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 1943. V. 53. № 1. P. 57–65.
10. Molchanov S., Vainberg B. Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys. 2007. V. 273. № 2. P. 533–559.
11. Grieser D. Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc. 2008. V. 97. № 3. P. 718–752.
12. Jones D.S. The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi-infinite domains // Proc. Camb. Phil. Soc. 1953. V. 49. P. 668–684.
13. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
14. Ван Дайк М.Д. Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967.
15. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
16. Назаров С.А. Двумерные асимптотические модели тонких цилиндрических упругих прокладок // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 6. С. 738–755.
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика (релятивистская теория). М.: Наука, 1974.

REDUCED DIMENSION MODELS FOR A PLATE FIXED ALONG ONE BASE AND A PART OF THE LATERAL SIDE**S. A. Nazarov^a***^aInstitute of Mechanical Engineering Problems of the Russian Academy of Sciences, Saint-Petersburg, Russia*

Presented by Academician of RAS N.F. Morozov

A thin homogeneous isotropic plate has fixed the lower base and a part of the lateral side. The asymptotics of frequencies of natural oscillations of the plate is constructed. In the case of long fixation zone the model implies the two-dimensional problem of the elasticity theory on the cross-section but the reducing of this zone leads to the localization of the modes of natural oscillations near the lateral side of the plate. The asymptotic analysis is based on inspection of the spectrum of the auxiliary planar problem in the semi-infinite strip which describes the boundary layer phenomenon.

Keywords: thin plate, fixed base, two-dimensional model, localization of modes of natural oscillations, waves trapped by an elastic semi-infinite strip

УДК 532.5

ОБ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ДОННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

© 2024 г. А. Г. Петров^{1,*}, И. И. Потапов², А. С. Епихин³

Представлено академиком РАН Р.И. Нигматулиным 14.01.2024 г.

Поступило 25.01.2024 г.

После доработки 09.04.2024 г.

Принято к публикации 10.04.2024 г.

На основе анализа экспериментальных и численных исследований деформирования донной поверхности при механическом воздействии на нее текущей жидкости сделан вывод об автомодельном характере эволюции донной поверхности. Донная волна имеет вид, близкий к одному периоду синусоиды с изменяющейся во времени длиной волны и постоянной крутизной. Кроме того, выявлена аналитическая зависимость скорости изменения длины донной волны от величины среднего напряжения на ней. С помощью установленных закономерностей составляется таблица соответствий длины волны и скорости ее изменения. Определяется степенная аппроксимация табличных значений и затем строится точное решение полученного дифференциального уравнения. Таким образом, для описания всей эволюции донной поверхности достаточно решить четыре или пять задач турбулентного обтекания каждой поверхности и вычислить на них средние значения напряжений. Сравнение с экспериментальными данными и численными решениями показывает, что погрешность решения не превышает нескольких процентов, а расчетное время сокращается в 25–30 раз.

Ключевые слова: донные волны, русловой процесс, размыв, OpenFOAM

DOI: 10.31857/S2686740024030105, **EDN:** JZPZKP

Традиционно для изучения деформаций дна, возникающих под воздействием протекающего по нему гидродинамического потока, используют нестационарные русловые модели [1], требующие значительных вычислительных затрат [2]. Поскольку результаты решения таких задач используются в большом количестве прикладных проектов (прокладка трубопроводов по дну рек [3, 4], деформирование донной поверхности в нижних бьефах гидроузлов [5–7], воздействия движителей судов на дно [8] и т.д.), то возможность сокращения времени расчета имеет большое значение для практики.

В работе выполнен анализ возможности использования автомодельного характера донной деформации для значительного сокращения расчетного времени руслового процесса, эволюционирующего в автомодельном приближении.

1. АВТОМОДЕЛЬНЫЙ РАЗМЫВ ДНА

Экспериментальные данные донной поверхности, размываемой под действием гидродинамического потока [3–8], показывают, что данные процессы имеют автомодельный характер [9–11]. На рис. 1 представлены серии экспериментальных кривых, из которых видно, что донную поверхность во все моменты времени можно представить в следующем виде:

$$\sigma\left(\frac{x}{\zeta_0(t)}\right) = \frac{\zeta(t, x)}{\zeta_0(t)} = \begin{cases} -\sin 2\pi q \frac{x}{\zeta_0(t)}, & q \frac{x}{\zeta_0(t)} \in (0, 1) \\ 0, & q \frac{x}{\zeta_0(t)} \notin (0, 1) \end{cases} \quad (1)$$

$$q = \zeta_0 / \lambda. \quad (2)$$

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия

²Хабаровский федеральный исследовательский центр, Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, Хабаровск, Россия

³Институт системного программирования им. В.П. Иванникова Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: petrovipmech@gmail.com

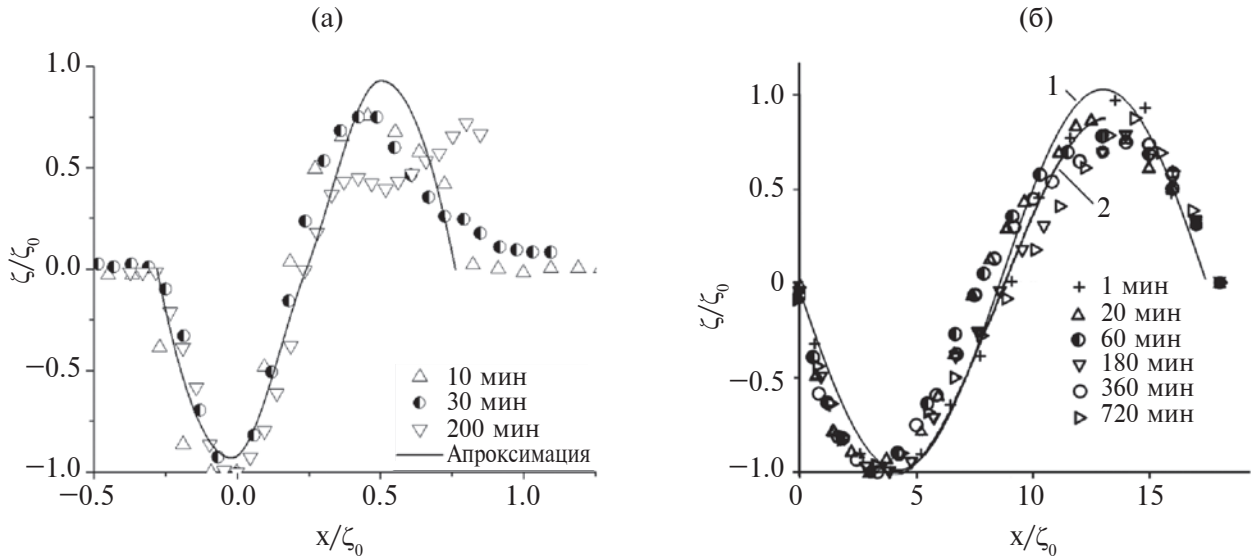


Рис. 1. Эволюция донной поверхности: а – под трубой на дне реки [11], б – под воздействием плоской придонной струи по данным работы [6], 1 – синусоидальная аппроксимация.

Физически величина q равна крутизне донной волны и по данным экспериментов различных русловых процессов является постоянной величиной. Например, по данным экспериментальных кривых для эволюции донной поверхности под трубой на дне реки $q = \zeta_0 / \lambda = 0.08$ (рис. 1а [11]). Другой пример эволюции донной поверхности под воздействием плоской придонной струи (течение из-под щита), по данным работы [6], изображен на рис. 1б. Из него видно, что для шести различных моментов времени сохраняется синусоидальная форма донной поверхности, меняются длина и амплитуда донной волны, а их отношение остается постоянным.

Автомодельные синусоидальные формы (1) изображены на рис. 1 в виде сплошных линий. Изменение амплитуды волны $\zeta_0(t)$ и ее длины $\lambda(t)$ во времени аппроксимируются степенными функциями

$$\lambda = \alpha t^\beta, \quad \zeta_0 = q \alpha t^\beta. \quad (3)$$

Например, для автомодельных донных форм на рис. 1б $\alpha = 70$, $\beta = 1/8$.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При описании эволюции уровня донной поверхности ζ используется закон сохранения донного материала (уравнение Экснера)

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

где G – объемный расход влекомых наносов для частиц грунта, движущихся в активном придонном слое, ε – пористость донного материала.

Для замыкания уравнения (4) используется теоретическая зависимость

$$G = G_0 \frac{(T - T_c)^{3/2} \eta(T - T_c)}{1 + \Gamma}, \quad \Gamma = \frac{1}{\text{tg} \phi} \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

$$T_c = T_{0c} (1 + \Gamma),$$

$$G_0 = \frac{g_0}{g(\rho_s - \rho_w) \sqrt{\rho_w}}, \quad g_0 = \frac{4}{3\kappa \text{tg} \phi}, \quad (5)$$

$$T_{0c} = \frac{9 \kappa^2 \text{tg} \phi (\rho_s - \rho_w) g d}{8 c_x},$$

где T_c – критическое придонное касательное напряжение, T_{0c} – критическое напряжение на ровном дне, $\eta(z)$ – функция Хевисайда.

Теоретическая зависимость (5) подтверждена всеми наиболее известными и надежными экспериментальными данными. Уравнения (5) и (4) совместно с уравнениями гидродинамики представляют собой замкнутую, но весьма сложную систему уравнений, позволяющую

рассчитывать эволюцию донной поверхности под воздействием различных гидродинамических факторов: течение под трубой, под воздействием придонной струи и другие. Используя автомодельную геометрию донной волны, можно описать ее эволюцию, сократив расчетное время почти на два порядка.

3. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ НА ДОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ОТСУТСТВИИ ТРАНЗИТНЫХ НАНОСОВ

С помощью автомодельного решения (1) можно найти распределение напряжения на донной поверхности. Для этого подставим его в уравнение Экснера. Для производной по времени функции $\zeta(t, x)$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta}{\partial t} &= q \left(-\dot{\lambda} \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda(t)} x \right) + \lambda \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda(t)} x \right) \frac{2\pi x}{\lambda^2(t)} \dot{\lambda} \right) = \\ &= q \dot{\lambda} \left(-\sin \left(\frac{2\pi}{\lambda(t)} x \right) + \frac{2\pi x}{\lambda(t)} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda(t)} x \right) \right), \quad \dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt}.\end{aligned}$$

Проинтегрируем уравнение Экснера (4) по x :

$$\begin{aligned}(1 - \varepsilon) \int_0^x \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx + G(t, x) &= G(0), \\ \int_0^x \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx &= q \dot{\lambda} \left[x \sin \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) - \frac{\lambda \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) \right)}{\pi} \right] = \\ &= -\frac{q}{2\pi} \dot{\lambda} \lambda \Phi(\xi) \Rightarrow \\ \Rightarrow G(t, x) - G(0) &= (1 - \varepsilon) \frac{q}{2\pi} \dot{\lambda}(t) \lambda(t) \Phi(\xi), \\ \Phi(\xi) &= 2 - 2 \cos \xi - \xi \sin \xi, \quad \xi = \frac{2\pi x}{\lambda}.\end{aligned}$$

Отсюда, предполагая, что $G(0)$ – (транзитный расход наносов) равен нулю, с помощью (5) получим уравнение для распределения напряжения на донной поверхности T :

$$G_0 \frac{(T - T_c)^{3/2} \eta(T - T_c)}{1 + \Gamma} = (1 - \varepsilon) \frac{q}{2\pi} \dot{\lambda}(t) \lambda(t) \Phi(\xi),$$

разрешая которое относительно T , найдем

$$\begin{aligned}\frac{T}{T_{0c}} &= 1 - \frac{2\pi q}{\text{tg} \phi} \cos \xi + \\ &+ ((1 + \Gamma(\xi)) \Phi(\xi))^{2/3} \Lambda(t)^{2/3}, \\ \Lambda(t) &= \frac{(1 - \varepsilon) q}{2\pi} \frac{\dot{\lambda}(t) \lambda(t)}{G_0 T_{0c}^{3/2}}, \\ \Gamma &= \frac{1}{\text{tg} \phi} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{2\pi q}{\text{tg} \phi} \cos \xi, \\ \xi &= \left(\frac{2\pi}{\lambda(t)} x \right).\end{aligned}\tag{6}$$

Графики функций $\Phi(\xi)$ и $\Gamma(\xi)$, входящих в (6), изображены на рис. 2а, 2б соответственно.

С помощью (6) можно получить связь среднего значения напряжения на донной волне с функцией $\Lambda(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{\bar{T}(\lambda)}{T_{0c}} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{T}{T_{0c}} d\xi = 1 + C \Lambda^{2/3}, \\ C &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{2\pi q}{\text{tg} \phi} \cos \xi \right)^{2/3} \Phi(\xi)^{2/3} d\xi.\end{aligned}$$

Коэффициент C при изменении множителя $\frac{2\pi q}{\text{tg} \phi}$ на интервале (0.4, 0.8) меняется незначительно в пределах (1.97, 2.01). Поэтому можно принять

$$\frac{\bar{T}(\lambda)}{T_{0c}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{T}{T_{0c}} d\xi = 1 + 2\Lambda^{2/3}.\tag{7}$$

Разрешая с помощью (6) это уравнение относительно $d\lambda/dt$, получим дифференциальное соотношение:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{K}{\lambda} \left(\frac{\bar{T}(\lambda)}{T_{0c}} - 1 \right)^{3/2}, \quad K = \frac{\pi G_0 T_{0c}^{3/2}}{\sqrt{2}(1 - \varepsilon)q}.\tag{8}$$

4. СХЕМА РАСЧЕТА ЭВОЛЮЦИИ АВТОМОДЕЛЬНОЙ ДОННОЙ ВОЛНЫ

Предлагается следующий алгоритм для расчета эволюции донной волны в автомодельной форме (3) с помощью уравнения (8). Пусть имеется набор донных волн в виде (1) с длинами волн $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Для каждой донной волны λ_i из решения уравнений гидродинамики численно находится распределение напряжений на равномерной сетке донной волны: $T_1, T_2, \dots, T_N$. По этим значениям по формулам

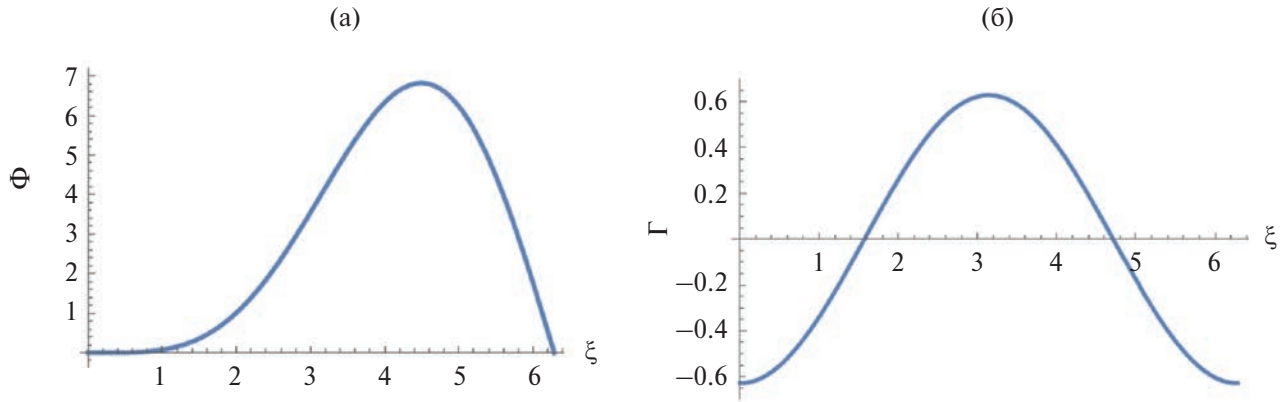


Рис. 2. Графики функций $\Phi(\xi)$ (а) и $\Gamma(\xi)$ (б).

$$\frac{\bar{T}(\lambda)}{T_{0c}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{T_i}{T_{0c}}, \quad T_{0c} = \frac{9\kappa^2 \text{tg}\phi}{8c_x} (\rho_s - \rho_w)gd$$

вычисляются значения

$$\bar{T}(\lambda_1)/T_{0c}, \bar{T}(\lambda_2)/T_{0c}, \dots, \bar{T}(\lambda_k)/T_{0c}$$

и из дифференциального соотношения (8) находится таблица значений производных

$$\dot{\lambda}_1(\lambda_1), \dot{\lambda}_2(\lambda_2), \dots, \dot{\lambda}_k(\lambda_k), \quad \dot{\lambda}_i = \frac{d\lambda_i}{dt}.$$

Аппроксимация табличных значений в виде

$$\frac{d\lambda}{dt} = A\lambda^{-n} \quad (9)$$

находится методом наименьших квадратов. Из условия минимума функции

$$F = \sum_{i=1}^k (\ln \dot{\lambda}_i - \ln A + n \ln \lambda_i)^2$$

получаем систему двух линейных относительно $\ln A$ и n уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k (\ln \dot{\lambda}_i - \ln A + n \ln \lambda_i) &= 0, \\ \sum_{i=1}^k (\ln \dot{\lambda}_i - \ln A + n \ln \lambda_i) \ln \lambda_i &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В свою очередь, уравнение (9) имеет точное решение

$$\lambda(t) = ((n+1)A)^{1/(n+1)} t^{1/(n+1)}. \quad (11)$$

После подстановки в него найденных из системы уравнений (10) значений A и n получаем функцию $\lambda(t)$. Такой подход позволяет существенно сократить расчетное время.

5. РАСЧЕТНЫЙ ПРИМЕР

Для численного расчета напряжений на синусоидальном дне использовался открытый программный комплекс OpenFOAM. Рассматривались обтекания цилиндра (диаметр $D=0.1$ м) с различными формами донной поверхности потоком воды со скоростью 0.4 м/с. Определялись напряжения на донной поверхности для синусоидальных форм с длинами волн $\lambda=0.125, 0.2, 0.3, 0.4, 0.6$ и крутизной $q=a/\lambda=0.08$. На рис. 3 представлены постановка задачи (а) и различные формы донных синусоидальных волн (б); результаты расчета обтекания цилиндра над донными волнами: длина волны $3D$ (в) и длина волны $6D$ (г).

По результатам численного моделирования для пяти значений длин волн λ с крутизной волн $q=0.08$ получены средние напряжения $\bar{T} = 0.99, 0.84, 0.56, 0.46, 0.42$. Данные для песка на дне в системе СИ: диаметр песчинок $d=0.00035$, пористость $\varepsilon=0.35$, параметр Кармана $\kappa=0.25$, коэффициент сопротивления песчаных частиц $c_x=0.55$, предельный угол трения $\text{tg}\phi=0.5$, плотность песка $\rho_s=2650$, плотность воды $\rho_w=1000$. Напряжение на бесконечности ~ 0.36 . Транзитные наносы отсутствуют.

По представленным данным определяем

$$G_0 = \frac{4}{3\kappa \text{tg}\phi g (\rho_s - \rho_w) \sqrt{\rho_w}} = 0.0000209,$$

$$T_{0c} = \frac{9\kappa^2 \text{tg}\phi}{8c_x} (\rho_s - \rho_w)gd = 0.362,$$

$$K = \frac{\pi G_0 T_{0c}^{3/2}}{\sqrt{2}(1-\varepsilon)q} = 0.000194$$

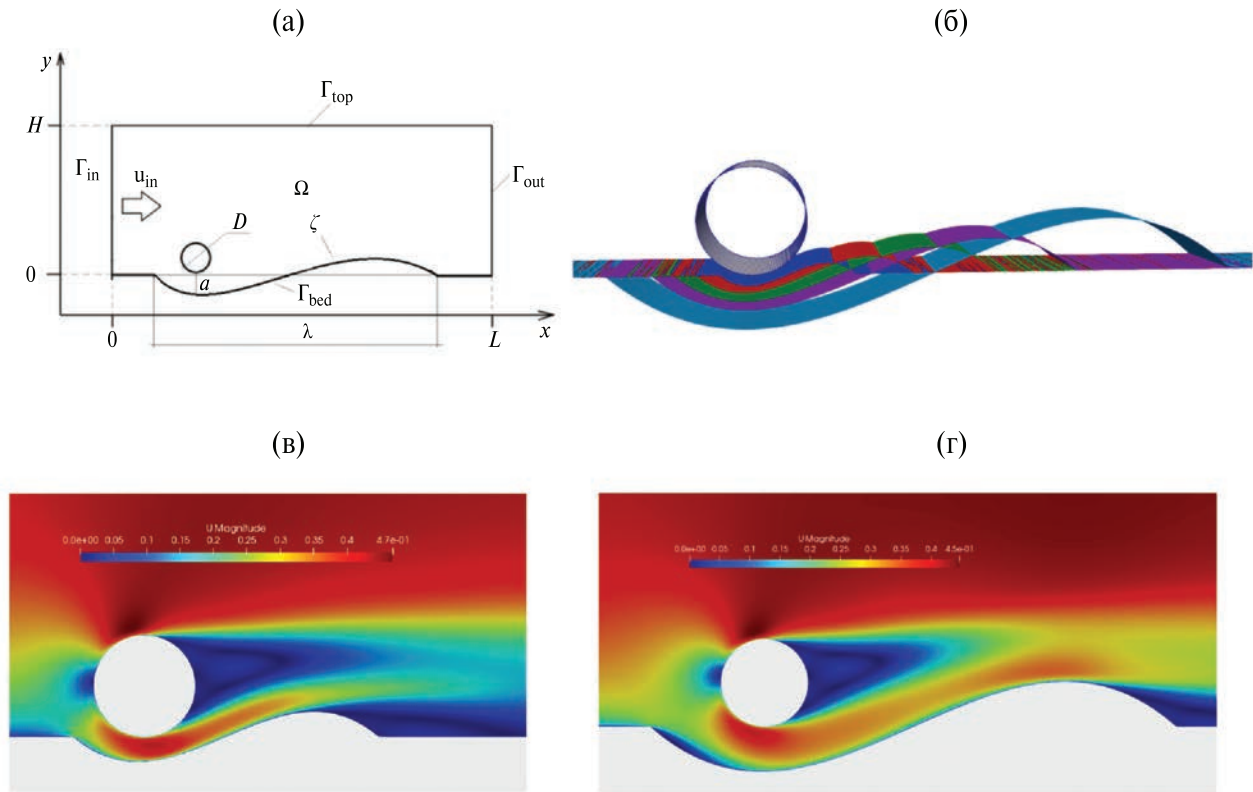


Рис. 3. Постановка задачи обтекания цилиндра: а – схема расчетной области. Γ_{in} – входная граница, Γ_{out} – выходная граница, Γ_{bed} – донная граница, Γ_{top} – верхняя граница; б – формы донной поверхности; результаты расчета обтекания цилиндра над донными волнами: в – длина волны $3D$; г – длина волны $6D$.

и с помощью (8) находим значения скорости изменения длины волны $d\lambda/dt = 0.00355, 0.00147, 0.000262, 0.0000686, 0.0000209$.

Результаты расчетов представлены в табл. 1.

Методом наименьших квадратов из системы уравнений (10) находим коэффициенты интерполяционной функции $\dot{\lambda} = A\lambda^{-n}$ $\ln A = -12.47$, $A = 0.00000385$, $n = 3.42$. Сравнение интерполяционной кривой $\dot{\lambda} = A\lambda^{-n}$ с представленными в табл. 1 красными точками приведено на рис. 4а. Решение определяется по формуле (11). Подставляя найденные значения A , n , получим

Таблица 1

λ	a	$\bar{T}$	$d\lambda/dt$
$1.25D$	0.1	0.99	0.00355
$2D$	0.16	0.84	0.00147
$3D$	0.24	0.56	0.000262
$4D$	0.32	0.46	0.0000686
$6D$	0.48	0.42	0.0000209

$$\lambda(t)(\text{м}) = 0.0834 (t(\text{с}))^{0.226} = 0.211 (t(\text{мин}))^{0.226}.$$

График зависимости

$$\zeta(t)/D = 0.0169 t^{0.226} / D$$

изображен на рис. 4б синей линией в сравнении с экспериментальными данными [11] и результатами расчета непрерывного размыва донной поверхности и деформации сетки [12].

Из графика видно удовлетворительное совпадение численного расчета и эксперимента с теоретической моделью. Погрешность вычислений $\zeta(t)$ не превышает нескольких процентов. При этом численное моделирование гидродинамики с учетом размыва требует до 8 ч. Определение напряжений для 5 рассмотренных случаев и решение задачи по предложенному алгоритму составило порядка 15 мин, т.е. расчетное время сократилось в 30 раз. Стоит отметить, что

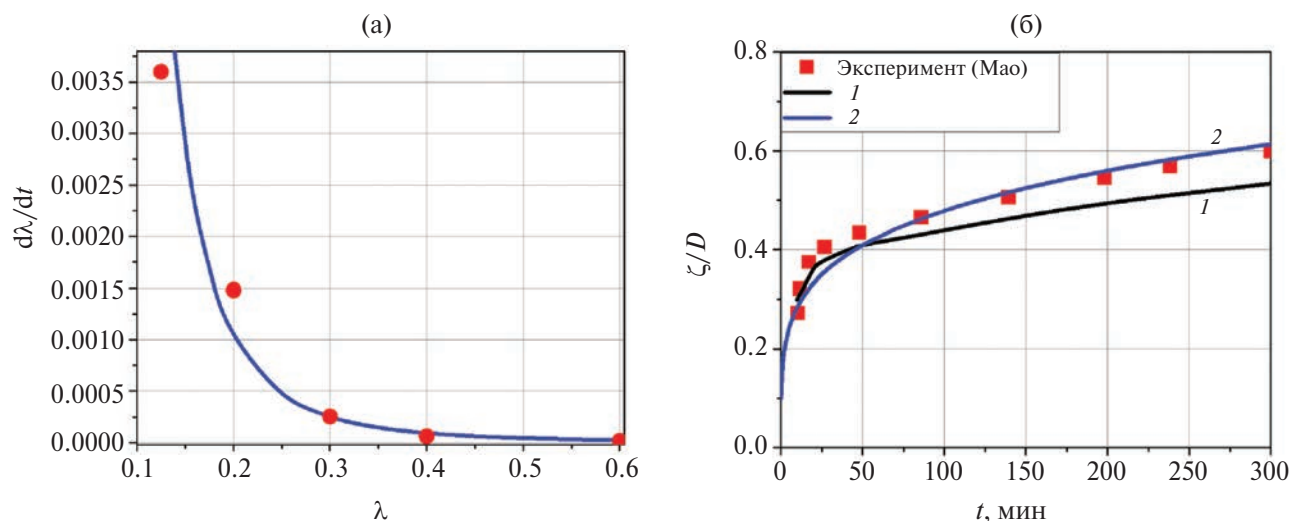


Рис. 4. Сравнение результатов: а – расчетные точки со степенной аппроксимацией; б – расчет [12] (1), экспериментальные данные [11] (красные точки), предложенная модель (2).

предложенная модель зависит от численных результатов напряжений на донной поверхности, которые напрямую определяются моделью турбулентности и их коэффициентами, реализацией пристеночных функций, расчетной сеткой, что может привести к увеличению погрешности расчета. Можно также отметить, что точность расчета практически не изменится, если выбрать из таблицы значения только для четырех длин волн $\lambda = 1.25D, 3D, 4D$. При этом время сократится на 20%.

Таким образом, предложенная модель позволяет дать приемлемую оценку глубины размыва донной поверхности за расчетное время, почти на два порядка меньшее прямого численного моделирования.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10091.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров А.Г., Потапов И.И. Избранные разделы русловой динамики. М.: Ленанд, 2019. 244 с.
2. Беликов В.В., Алексюк А.И. Модели мелкой воды в задачах речной гидродинамики. М.: РАН, 2020. 346 с.
3. Sandra Paskin. The Self-Burial of Seabed Pipelines // Thesis. University of London. 1993. 361 p.
4. Dey S., Navneet P. Singh Clear-Water Scour below Underwater Pipelines under Steady Flow // J. Hydraul. Eng. 2008. V. 134. № 5. P. 588–600.
5. Chatterjee S.S., Ghosh S.N., Chatterjee M. Local scour due to submerged horizontal jet // J. Hydraulic Engineering. 1994. V. 120. № 8. P. 937–991.
6. Dey S., Sarkar A. Scour Downstream of an Apron Due to Submerged Horizontal Jets // J. Hydraulic Engineering. 2006. V. 132. № 3. March 1. P. 246–257.
7. Aamir M., Ahmad Z. Hydraulics of submerged jets causing scour downstream of a rough rigid apron // 14th International Symposium on River Sedimentation. Chengdu, China. 2019. September 16–19. P. 1–10.
8. Samma H., Amir Khosrojerdi, Masoumeh Rostam-Abadi, Mojtaba Mehraein, Yovanni Cataño-Lopera. Numerical simulation of scour and flow field over movable bed induced by a submerged wall jet // IWA Publishing 2020. J. Hydroinformatics. 2020. V. 22. № 2. P. 386–401.
9. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 432 с.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2015. 728 с.
11. Mao Y. The interaction between a pipeline and an erodible bed. Ser. Paper 39. Institute of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering, Technical Univ. of Denmark, Lyngby, Denmark. 1986
12. Liang D., Huang J., Zhang J., Shi S., Zhu N., Chen J. Three-Dimensional Simulations of Scour around Pipelines of Finite Lengths // J. Mar. Sci. Eng. 2022. V. 10. P. 106. <https://doi.org/10.3390/jmse10010106>

SELF-SIMILAR SOLUTIONS OF THE BED DEFORMATION

A. G. Petrov^a, I. I. Potapov^b, A. S. Epikhin^c

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*Computing Center of the FEB RAS, Khabarovsk, Russia*

^c*Ivannikov Institute for System Programming of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS R.I. Nigmatullin

In this paper, a conclusion about the self-similar behavior of the bed surface evolution is made. It is based on the analysis of experimental and numerical studies of the bed surface evolution under the mechanical impact of liquid flow. The bottom wave has a form close to one period of a sinusoidal function with a time-varying wavelength and constant steepness. A method of constructing the automodel dependence of the bed surface on time and spatial coordinate in analytical form is proposed. It was shown that it is enough to select five bottom surfaces with given wavelengths from a series of shapes. Next, the mean values of shear stresses are calculated for them, and the rates of change of wavelengths are found. Then a degree of approximation of the wavelength dependence of its rate of change is determined, and, finally, the exact solution of the corresponding differential equation is obtained. Comparison with experimental data and numerical solutions shows that the solution error does not exceed a few percent and that computational time is reduced by 25–30 times.

Keywords: bottom waves, channel process, scour, OpenFOAM

УДК 535.3

ОПТИЧЕСКИЕ ПОЛОСНО-ПРОПУСКАЮЩИЕ ФИЛЬТРЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА НА СТРУКТУРАХ ИЗ ЧЕРЕДУЮЩИХСЯ СЛОЕВ КВАРЦА И СЕРЕБРА

© 2024 г. Б. А. Беляев^{1,2,*}, В. В. Тюрнев³, Г. В. Скоморохов^{2,3},
С. М. Жарков^{2,3}, А. М. Сержантов^{1,2}, Д. А. Шабанов^{2,3}

Представлено академиком РАН В.Ф. Шабановым 31.01.2024 г.

Поступило 31.01.2024 г.

После доработки 31.01.2024 г.

Принято к публикации 18.03.2024 г.

Разработаны конструкции оптических полосно-пропускающих фильтров на планарных структурах, полученных вакуумным напылением на подложки из кварцевого стекла (SiO_2) трех слоев также из кварца, являющихся полуволновыми резонаторами, разделенными друг от друга, свободного пространства и подложки четырьмя слоями из серебра (Ag). Толщины слоев Ag и SiO_2 определялись по заданным параметрам полосы пропускания фильтров параметрическим синтезом одномерных моделей с использованием электродинамического анализа. При этом использовались экспериментальные частотные зависимости действительной и мнимой частей комплексной диэлектрической проницаемости серебра. Измеренные амплитудно-частотные характеристики изготовленных опытных образцов фильтров красного, зеленого и фиолетового цветов хорошо согласуются с характеристиками, полученными при синтезе.

Ключевые слова: слоистая структура металл-диэлектрик, полосно-пропускающий фильтр, комплексная диэлектрическая проницаемость

DOI: 10.31857/S2686740024030119, EDN: JZBHML

Оптические фильтры, как правило, конструируют на слоистых диэлектрических структурах, в которых полуволновые резонаторы разделены многослойными зеркалами из чередующихся четвертьволновых слоев с высоким и низким показателем преломления [1–3]. Зеркала создают оптимальную связь резонаторов друг с другом под заданную ширину полосы пропускания фильтра, а зеркала крайних резонаторов создают связь еще и с портами фильтра на его

входе и выходе, например со свободным пространством, обеспечивая тем самым требуемый уровень неравномерности амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) в полосе пропускания. Отражательная способность зеркал растет как с увеличением контраста показателей преломления смежных слоев, так и с увеличением их числа. Известно, что при определенных ширинах полосы пропускания фильтра в его зеркалах на четвертьволновых слоях бывает невозможно использовать необходимые величины показателей преломления из-за отсутствия таковых у реальных материалов. Эта проблема решается, если слои в зеркалах сделать немного отличными от четверти длины волны. В этом случае затухание в высокочастотной полосе загашения немного увеличивается, а в низкочастотной — уменьшается. Методики синтеза таких конструкций, состоящих всего лишь из

¹Сибирский государственный университет науки и технологий им. академика М.Ф. Решетнева, Красноярск, Россия

²Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

³Институт физики им. Л.В. Киренского ФИЦ КНЦ Сибирского отделения Российской академии наук, Красноярск, Россия

*E-mail: belyaev@iph.krasn.ru

трех и даже из двух материалов, позволяющих создавать фильтры с равномерными характеристиками в полосе пропускания, описаны в [4] и [5] соответственно.

Отметим, что в [6] показана возможность создания полосно-пропускающих фильтров на слоистых структурах из композитных материалов, в которых наночастицы серебра находятся в диэлектрической матрице из полистирола. Установлено, что с ростом объемной концентрации частиц в композите до ~33% действительная компонента его относительной диэлектрической проницаемости плавно увеличивается с 2.6 до $\sim 10^3$, при этом вплоть до частоты 1 ТГц тангенс угла диэлектрических потерь не превышает 10^{-2} . Настройка таких фильтров осуществляется подбором концентрации частиц в четвертьволновых слоях зеркал. Высокий контраст диэлектрических проницаемостей матрицы и композита позволяет изготавливать зеркала с требуемой отражательной способностью на минимальном количестве слоев.

Одним из существенных недостатков оптических фильтров на мультислойных диэлектрических структурах является большое количество слоев в их конструкциях, например, в фильтре 3-го порядка с относительной шириной полосы пропускания 10% требуется 11 слоев [2], а в фильтре 5-го требуется 49 слоев [1]. Другим недостатком таких фильтров являются узкие полосы заграждения, обусловленные паразитными резонансами мультислойной структуры, существующие как ниже, так и выше полосы пропускания.

Учитывая огромную частотную дисперсию комплексной диэлектрической проницаемости металлов в оптическом диапазоне, в настоящей работе рассматриваются новые конструкции полосно-пропускающих фильтров на планарных структурах. Исследуются конструкции, в которых 3 кварцевых слоя являются полуволновыми резонаторами, а разделяющие их слои из серебра служат полупрозрачными зеркалами. Аналогичные, но однорезонаторные структуры, работающие как полосно-пропускающие фильтры либо на отражение [7], либо на прохождение [8], имеют слишком малые затухания в полосах заграждения. Таким же недостатком обладают фильтры, исследованные в работе [9],

в которых в качестве металла выбрано не серебро, а хром.

РАСЧЕТ ОПТИЧЕСКОГО ФИЛЬТРА НА СЛОИСТОЙ СТРУКТУРЕ

Электродинамический анализ планарных многослойных структур проводился при условии нормального падения света. В радиотехнике многослойные структуры, как правило, моделируют четырехполюсниками, т.е. устройствами с портами на входе и выходе. Портами в рассматриваемой многослойной структуре являются ее две наружные поверхности, граничащие с окружающим свободным пространством. Для расчета коэффициентов прохождения и отражения электромагнитных волн при их падении на слоистые структуры удобно пользоваться безразмерными матрицами передачи $\mathbf{M}$, элементы которых принимают комплексные значения. В микроволновой технике такие матрицы часто называют нормированными ABCD-матрицами [10]. Эти матрицы связывают тангенциальные составляющие напряженности электрического поля E_i и магнитного поля H_i на обеих наружных поверхностях планарной структуры матричным уравнением

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ Z_0 H_1 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} E_2 \\ Z_0 H_2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ — волновое сопротивление свободного пространства [2]. Матрица передачи m -слойной структуры равна произведению

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \dots \mathbf{M}_k \dots \mathbf{M}_m, \quad (2)$$

где $\mathbf{M}_k$ — матрица передачи k -го слоя. Ее элементы выражаются формулой

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & (-iZ_k/Z_0) \sin \theta_k \\ (-iZ_0/Z_k) \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Здесь θ_k — электрическая толщина k -го слоя, $Z_k = Z_0 \sqrt{\mu_k/\epsilon_k}$ — волновое сопротивление материала k -го слоя, а ϵ_k и μ_k — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости материала. При получении формулы (3) предполагалось, что колебания электромагнитного поля описываются множителем $\exp(-i\omega t)$. В рассматриваемом нами случае все μ_k равны единице, так как слоистая структура состоит только из немагнитных материалов.

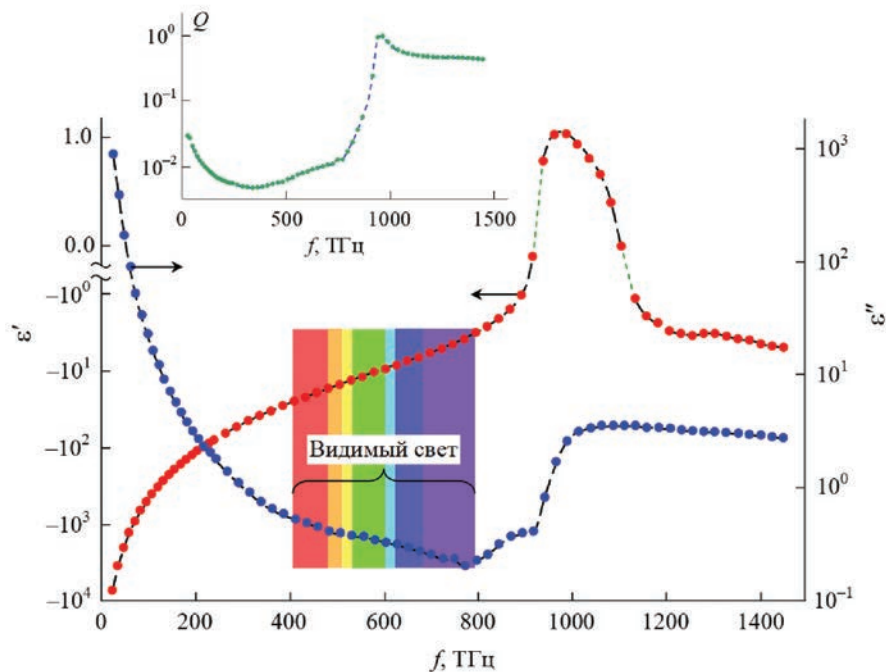


Рис. 1. Частотные зависимости действительной ϵ' и мнимой ϵ'' частей диэлектрической проницаемости серебра. Точки — результаты измерений [11], штриховые линии — интерполяции кубическими сплайнами. На вставке показана частотная зависимость добротности серебра.

Зная матрицу передачи $\mathbf{M}$ многослойной структуры, можно рассчитать матрицу рассеяния $\mathbf{S}$ этой структуры, которая традиционно используется при решении электродинамических задач. Взаимосвязь элементов матрицы $\mathbf{S}$ с элементами матрицы $\mathbf{M}$ выражается простыми формулами

$$S_{11} = \frac{M_{11} + M_{12} - M_{21} - M_{22}}{M_{11} + M_{12} + M_{21} + M_{22}},$$

$$S_{21} = \frac{2}{M_{11} + M_{12} + M_{21} + M_{22}}. \quad (4)$$

Через элементы матрицы рассеяния несложно рассчитать коэффициент отражения $K_R = |S_{11}|^2$ и коэффициент прохождения $K_L = |S_{21}|^2$ падающей электромагнитной волны. Однако в задачах электродинамики вместо коэффициентов отражения K_R и коэффициента прохождения K_L чаще используют такие понятия, как потери на отражение $R = 20 \lg |S_{11}|$ и потери на прохождение $L = 20 \lg |S_{21}|$, измеряемые в децибелах. Логарифмическая шкала необходима особенно при рассмотрении фильтров, когда в полосах заграждения у них большие потери.

Для электродинамического анализа модели оптического фильтра на слоистой структуре,

в котором слои из кварца являются полуволновыми резонаторами, а слои из серебра служат зеркалами, необходимо знать частотные зависимости действительной ϵ' и мнимой ϵ'' частей относительной диэлектрической проницаемости серебра. Частотной дисперсией комплексной диэлектрической проницаемости кварца можно пренебречь, так она очень мала в оптическом диапазоне $\epsilon' = 2.13$ и $\epsilon'' = 5 \cdot 10^{-5}$. Серебро же, напротив, имеет колоссальную дисперсию в оптическом диапазоне как $\epsilon'(f)$, так и $\epsilon''(f)$, зависимости которых представлены на рис. 1 в диапазоне частот от 24 ТГц до 1471 ТГц [11]. Видно, что как действительная, так и мнимая части комплексной диэлектрической проницаемости изменяются на несколько порядков. В этом диапазоне авторы определили ϵ' и ϵ'' на 69 частотах [11], показанных точками на рис. 1. Однако для расчета амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) полосно-пропускающих фильтров требуется гораздо больше точек в этом диапазоне частот, поэтому по измеренным значениям ϵ' и ϵ'' нами была проведена интерполяция зависимостей кубическими сплайнами, разбив указанный диапазон на 5000 точек, представленных штриховыми линиями на рис. 1.

Важно отметить, что в ультрафиолетовой области частот в диапазоне 930–1112 ТГц

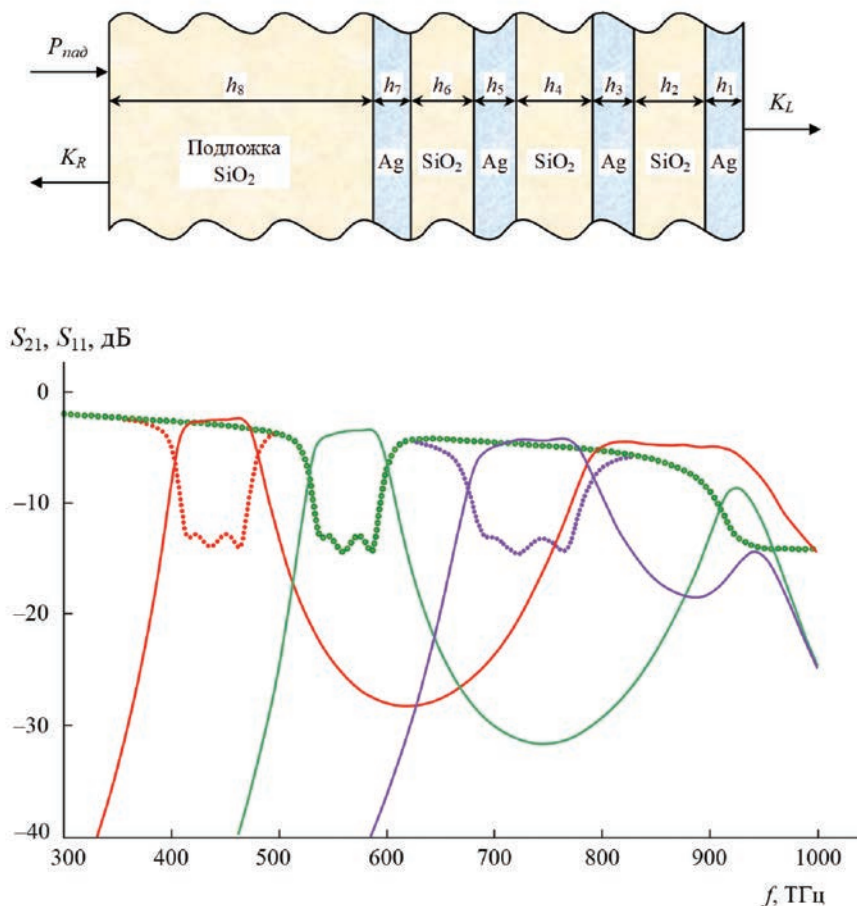


Рис. 2. Конструкция фильтра третьего порядка и АЧХ трех фильтров, настроенных по ширине полосы пропускания на красный, зеленый и фиолетовый цвета видимого спектра частот (прямые потери — линии, потери на отражение — точки).

действительная часть диэлектрической проницаемости серебра принимает положительные значения, достигая максимума $\epsilon' \sim 1.2$ на частоте $f \sim 980$ ТГц. Примерно в этой же области наблюдается “размытый” экстремум мнимой части диэлектрической проницаемости, максимум которой $\epsilon'' \sim 3.5$ попадает на частоту $f \sim 1088$ ТГц.

На рис. 1 показан также спектр частот видимого света, а на вставке рисунка представлена зависимость добротности серебра, вычисленная по формуле [12]

$$Q = \frac{\text{Re} \sqrt{\epsilon}}{2 \text{Im} \sqrt{\epsilon}} = \frac{n'}{2n''}, \quad (5)$$

где n' и n'' — действительная и мнимая части показателя преломления. Эта добротность не превышает значения 0.5 при отрицательных ϵ' , как это было установлено в [12], однако в области положительных ϵ' она имеет максимум $Q \sim 1.0$ на частоте $f \sim 955$ ТГц.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПТИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассмотрим конструкцию фильтра третьего порядка в свободном пространстве (рис. 2), состоящего из чередующихся слоев серебра и кварца с толщинами $h_1, h_2 \dots h_7$, осажденных на подложку из кварцевого стекла толщиной $h_8 = 0.5$ мм. В этой конструкции три четных слоя из SiO₂ являются полуволновыми резонаторами, формирующими полосу пропускания фильтра, а нечетные слои из Ag служат зеркалами, обеспечивающими оптимальные связи резонаторов друг с другом и со свободным пространством. С использованием описанной выше методики электродинамического анализа многослойных структур была написана программа для расчета АЧХ такой структуры, с помощью которой производился параметрический синтез фильтров.

Таблица 1. Толщины слоев h_i в фильтрах третьего порядка: нечетные i – Ag, четные i – SiO₂

Толщина слоя, нм		h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7
Цвет фильтра	Красный	11.3	170.4	28.4	182.4	28.4	170.4	11.3
	Зеленый	18.2	128.1	41.6	134.1	41.6	128.1	18.2
	Фиолетовый	22.0	85.9	45.8	89.0	45.8	85.9	22.0

Для сравнения были синтезированы три фильтра с центральными частотами полос пропускания $f_r = 442.5$ ТГц, $f_g = 565$ ТГц и $f_v = 735$ ТГц, выбранных на краях и в центре видимого диапазона. Ширины полос пропускания Δf задавались по уровню -3 дБ от уровня минимальных потерь прошедшей мощности $K_L(f)$ и составляли для красного цвета $\Delta f = 75$ ТГц ($\Delta f/f_r \approx 17\%$), для зеленого цвета $\Delta f = 70$ ТГц ($\Delta f/f_g \approx 12\%$) и для фиолетового цвета $\Delta f = 110$ ТГц ($\Delta f/f_v \approx 15\%$). Кроме того, задавался максимальный уровень отражений в полосе пропускания $K_R = -14$ дБ. Поставленные условия выполнялись подбором толщин каждого из слоев рассматриваемой структуры в процессе ручного параметрического синтеза фильтров. Полученные толщины слоев представлены в табл. 1, а амплитудно-частотные характеристики синтезированных фильтров показаны на рис. 2. Чтобы не загромождать рисунок, полная частотная зависимость потерь на отражение на рисунке представлена для среднего “зеленого” фильтра, а для “красного” и “фиолетового” фильтров $S_{11}(f)$ показаны только в полосах пропускания. Видно, что с увеличением центральной частоты полосы пропускания минимальные потери в полосе пропускания фильтра монотонно увеличиваются: для “красного” $L_r \approx 2.5$, “зеленого” $L_g \approx 3.5$ и “фиолетового” $L_v \approx 4.3$ дБ. Очевидно, что потери прошедшей мощности в полосе пропускания связаны с затуханием электромагнитных волн в серебряных слоях, обладающих низкой добротностью (см. вставку на рис. 1), толщина которых увеличивается с ростом центральной частоты фильтра (см. табл. 1), что, соответственно, и приводит к росту потерь.

Особенностью рассматриваемых фильтров является наличие на АЧХ дополнительного максимума пропускания в ультрафиолетовой области на частоте ~ 930 ТГц, положение которого почти не изменяется при настройке фильтра на любую центральную частоту первой полосы пропускания. Этот максимум связан

с резонансом плазменных колебаний электронов в серебряных слоях, который наблюдается в ультрафиолетовой области вблизи названной частоты [13]. В этой области действительная часть комплексной диэлектрической проницаемости становится положительной (см. рис. 1), при этом зеркала, теряя свою отражательную способность, пропускают электромагнитные волны. Важно отметить, что на АЧХ “красного” фильтра в ультрафиолетовой области также наблюдается вторая полоса пропускания, сформированная резонансами второй моды колебаний резонаторов из SiO₂ слоистой структуры. Ширина этой полосы значительно больше ширины первой полосы пропускания не только за счет увеличения взаимодействия резонаторов из-за уменьшения отражательной способности зеркал, но и за счет максимума прохождения, связанного с резонансом плазменных колебаний электронов в серебряных слоях, который располагается вблизи высокочастотного склона второй полосы пропускания.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЫТНЫХ ОБРАЗЦОВ ФИЛЬТРОВ

Многослойные структуры опытных образцов фильтров размером 10×10 мм осаждались на подложки размерами 12×12 мм из кварцевого стекла марки JGS1 толщиной 0.5 мм, шероховатость поверхности которых менее 1 нм. Послойное напыление структур проводилось на установке “AJA” (США) методом поочередного магнетронного распыления серебряной и кварцевой мишеней без разгерметизации вакуумной камеры. Для распыления серебряной мишени использовался DC-магнетрон, а для распыления кварцевой мишени – HF-магнетрон. Осаждались семислойные структуры с толщинами слоев, представленными в табл. 1, которые определялись временем напыления каждого слоя при известных скоростях напыления. Для определения скоростей напыления

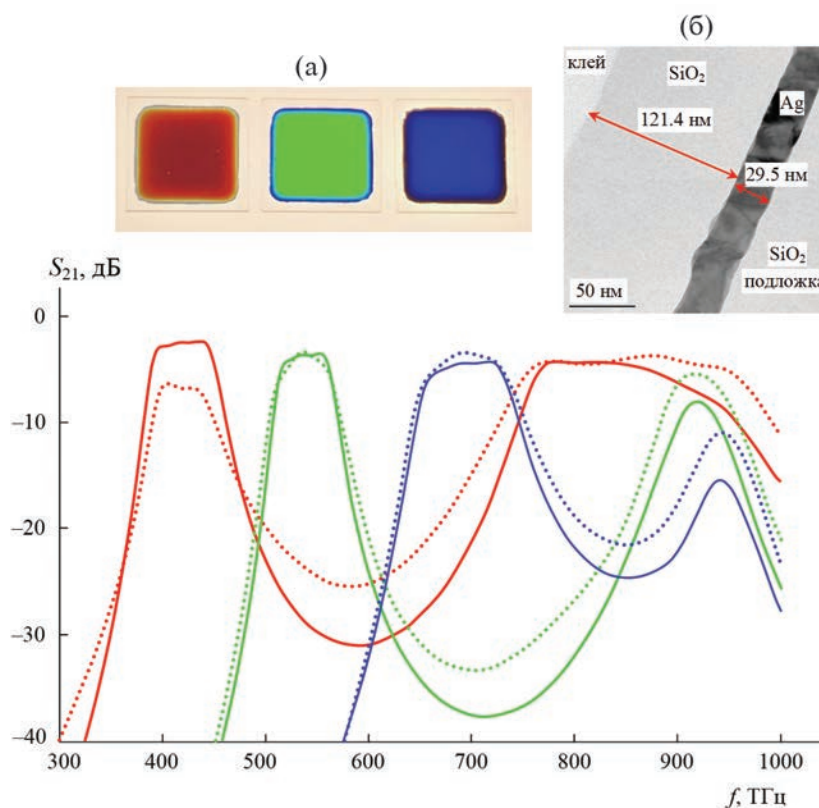


Рис. 3. АЧХ опытных образцов фильтров третьего порядка (точки) и АЧХ их одномерных моделей, настроенных на полосы пропускания опытных образцов по уровню -3 дБ от уровня минимальных потерь (линии). На вставках: а – фотографии опытных образцов, снятые на просвет, б – фотография поперечного среза двухслойной структуры Ag–SiO₂.

предварительно была изготовлена двухслойная структура Ag–SiO₂, в которой слой серебра осаждался в течение 50, а слой кремния – в течение 750 с. Затем был сделан поперечный срез этой структуры, и на электронном микроскопе JEM-2100 (JEOL Ltd.) были измерены толщины этих слоев (рис. 3б). В результате рассчитанная скорость напыления серебра составляла ~ 0.59 нм/с, а кварца ~ 0.16 нм/с.

На рис. 3 точками показаны измеренные на спектрофотометре SHIMADZU UV-3600 (Япония) АЧХ изготовленных опытных образцов трех фильтров, а на вставке рис. 3а представлены фотографии этих фильтров, полученные на просвет. На фотографиях каждого фильтра виден ореол по периметру многослойной структуры, отличающийся по цвету от цвета фильтра. Это объясняется тем, что края структуры имеют меньшую толщину слоев, так как их во время напыления “затеняет” подложкодержатель, при этом спектр краев, соответственно,

сдвигается в более высокие частоты. Поэтому у “красного” фильтра края оранжево-желтые, “зеленого” – синие, а у “фиолетового” они черные, так как спектр его краев попадает в ультрафиолетовую область частот.

При сравнении рассчитанных АЧХ одномерных моделей исходных фильтров (рис. 2) с измеренными АЧХ реальных образцов, изготовленных по их размерам (рис. 3), видно качественное согласие характеристик. Хотя центральные частоты полос пропускания у всех реальных образцов сдвинуты вниз по частоте примерно на 5%, а также у них уменьшены относительные ширины полос пропускания на 1–5%. Эти факты говорят о том, что у изготовленных опытных образцов все слои имеют несколько большую толщину, чем у теоретически рассчитанных фильтров, приведенных в табл. 1. Что, очевидно, связано с точностью определения скоростей напыления слоев. В подтверждение были подобраны толщины слоев одномерных моделей фильтров так, чтобы

Таблица 2. Толщины слоев h_i в фильтрах третьего порядка: нечетные i — Ag, четные i — SiO₂, обеспечивающие совпадение полос пропускания по уровню -3 дБ теоретических и экспериментальных амплитудно-частотных характеристик

Толщина слоя, нм		h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7
Цвет фильтра	Красный	12.7	185.3	31.8	196.0	31.8	185.3	12.7
	Зеленый	19.6	138.1	45.5	143.6	45.5	138.1	19.6
	Фиолетовый	23.5	94.9	48.8	98.4	48.8	94.9	23.5

ширины их полос пропускания, измеренные по уровню -3 дБ от уровня минимальных потерь, совпадали с измеренными ширинами полос пропускания реальных образцов. Толщины слоев представлены в табл. 2, а рассчитанные для них АЧХ показаны сплошными линиями на рис. 3. Видно, что увеличение толщины слоев в одномерных моделях фильтров примерно на 10% приводит к достаточно хорошему совпадению их характеристик.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, созданы планарные конструкции оптических полосно-пропускающих фильтров третьего порядка на структурах, полученных вакуумным напылением на подложки из кварцевого стекла слоев также из кварца, разделенных друг от друга, от подложки и от свободного пространства слоями из серебра. Три слоя из кварца являются полуволновыми резонаторами на центральной частоте полосы пропускания, а четыре слоя из серебра служат зеркалами, которые обеспечивают оптимальные связи резонаторов друг с другом и с портами на входе и выходе устройств. Толщины слоев Ag и SiO₂ по заданным параметрам полосы пропускания фильтров определялись параметрическим синтезом одномерных моделей с использованием их электродинамического анализа. При расчете применялись экспериментальные частотные зависимости действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости серебра, которые, как известно, имеют огромную дисперсию в оптическом диапазоне.

Измеренные АЧХ изготовленных опытных образцов фильтров третьего порядка красного, зеленого и фиолетового цветов хорошо согласуются с расчетными характеристиками, полученными при синтезе устройств. Особенностью рассматриваемых фильтров является наличие

на АЧХ дополнительного максимума пропускания в ультрафиолетовой области на частоте ~ 930 ТГц, положение которого почти не изменяется при настройке фильтра на любую центральную частоту первой полосы пропускания. Этот максимум связан с резонансом плазменных колебаний электронов в серебряных слоях, который, как известно, в серебре наблюдается в ультрафиолетовой области вблизи названной частоты. Как показал расчет, при замене в фильтрах слоев из Ag на Cu или Au (частотные зависимости действительной и мнимой частей диэлектрических проницаемостей меди и золота также приведены в работе [11]) дополнительный максимум на АЧХ наблюдается на частоте ~ 540 ТГц для медных зеркал и ~ 580 ТГц для зеркал из золота. Именно вблизи этих частот, попадающих в зеленую область видимого света, находятся резонансы плазменных колебаний электронов в Cu и Au [13].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, государственное задание FEFE-2023-0004.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Macleod H.A.* Thin-Film Optical Filters. Boca Raton: CRC Press, 2010. 772 p.
2. *Беляев Б.А., Тюрнев В.В., Шабанов В.Ф.* Полосно-пропускающие фильтры на одномерных фотонно-кристаллических структурах // ДАН. 2014. Т. 454. № 6. С. 651–656.
<https://doi.org/10.7868/S0869565214060097>
3. *Li J.* // Optics Commun. 2010. V. 283. P. 2647–2650.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.optcom.2010.02.046>
4. *Беляев Б.А., Тюрнев В.В., Шабанов В.Ф.* // ДАН. 2014. Т. 456. № 4. С. 413–416.
<https://doi.org/10.7868/S0869565214160105>
5. *Belyaev B.A., Tyurnev V.V., Shabanov V.F.* // Optics Letters. 2014. V. 39. No 12. P. 3512–3515.
<http://dx.doi.org/10.1364/OL.39.003512>

6. Беляев Б.А., Лексиков А.А., Тюрнев В.В., Шабанов Д.А. Исследование композита: металлические наночастицы в диэлектрической матрице и многослойных полосно-пропускающих фильтров на его основе // ДАН. 2021. Т. 497. С. 5–11. <https://doi.org/10.31857/S2686740021020024>
7. Li Z., Butun S., Aydin K. // ACS Photonics. 2015. V. 2. P. 183–189. <http://dx.doi.org/10.1021/ph500410u>
8. Jen Y.J., Lin M.J. Coatings. 2018. No. 8. V. 231. P. 1–8. <http://dx.doi.org/10.3390/coatings8070231>
9. Shen W., Sun X., Zhang Y., Luo Z., Liu X., Gu P. // Optics Communications. 2009. V. 282. P. 242–246. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2008.09.080>
10. Гунта К., Гардж Р., Чадха Р. Машинное проектирование СВЧ-устройств. М.: Радио и связь, 1987. 432 с.
11. Babar S., Weaver J.H. // Appl. Opt. 2015. V. 54. No 3. P. 477–481. <http://dx.doi.org/10.1364/AO.54.000477>
12. Belyaev B.A., Tyurnev V.V. Ural Radio Engineering Journal. 2023. V. 7. No 4. P. 457–469. <https://doi.org/10.15826/urej.2023.7.4.006>
13. Borah R., Ninakanti R., Bals S., Verbruggen S.W. Scientific Reports. 2022. No. 12. V. 15738. P. 1–19. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-20117-7>

THIRD-ORDER OPTICAL BANDPASS FILTERS BASED ON STRUCTURES OF ALTERNATING LAYERS OF QUARTZ AND SILVER

**B. A. Belyaev^{a, b}, V. V. Tyurnev^c, G. V. Skomorokhov^{b, c}, S. M. Zharkov^{b, c},
A. M. Serzhantov^{a, b}, D. A. Shabanov^{b, c}**

^a*Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia*

^b*Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia*

^c*Kirensky Institute of Physics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Krasnoyarsk, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.F. Shabanov

Designs of optical bandpass filters have been developed on planar structures, which were obtained by vacuum deposition onto quartz glass (SiO₂) substrates of three layers also of quartz, which are half-wavelength resonators separated from each other, from free space, and from the substrate by four layers of silver (Ag). The thicknesses of the Ag and SiO₂ layers were determined based on the given parameters of the filter passband by parametric synthesis of one-dimensional models using electrodynamic analysis. In this case, experimental frequency dependences of the real and imaginary parts of the permittivity of silver were used. The measured frequency responses of the manufactured prototypes of red, green and purple filters are in good agreement with the responses obtained during synthesis.

Keywords: Layered metal-dielectric structure, bandpass filter, complex permittivity

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ РАДИАЛЬНЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ГИДРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

© 2024 г. К. М. Нгуен^{1,*}, Д. Р. Шелевая^{1,2,**}, Д. А. Красноруцкий^{1,3,***}

Представлено академиком РАН Б.Д. Анниным 29.12.2023 г.

Поступило 09.01.2024 г.

После доработки 19.03.2024 г.

Принято к публикации 21.03.2024 г.

На основе общих уравнений для разрешающих функций в глобальной системе координат получены геометрически нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие динамическое деформирование осесимметричных оболочек вращения. Уравнения учитывают утонение / утолщение при больших продольных деформациях, а также поперечный сдвиг для толстых оболочек. Движение и давление идеальной несжимаемой жидкости описывается потенциалом перемещений. Для получения численного решения применяется метод конечных разностей на основе сплайн-интерполяции полигармоническими радиальными базисными функциями. Методика расчета реализована в собственном программном комплексе. Получено очень хорошее соответствие рассчитываемых перемещений с результатами моделирования разными конечными элементами в ANSYS. Частоты гидроупругих колебаний баков сравниваются с частотами, полученными по методу конечных и граничных элементов, а также результатами из опубликованных статей других исследователей.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, потенциал перемещений, радиальные базисные функции, метод конечных разностей, RBF-FD, полигармонический сплайн

DOI: 10.31857/S2686740024030128, EDN: JZAPUB

Осесимметричными оболочками вращения моделируют топливные баки ракет-носителей с жидкостным ракетным двигателем при решении задачи обеспечения продольной устойчивости (англ. POGO) [1]. Наиболее популярным и универсальным методом анализа тонкостенных конструкций является метод конечных элементов (МКЭ), для учета жидкости часто используют метод граничных элементов (МГЭ).

Целью данной работы является развитие и программная реализация альтернативного МКЭ и МГЭ подхода к расчету тонкостенных оболочечных конструкций, взаимодействующих с жидкостью.

В данной работе в основе вывода разрешающих уравнений оболочки лежит описание кинематики деформирования срединной поверхности с помощью вектора конечного поворота (вектора Эйлера) и использования разрешающих функций в глобальной системе координат. Обзор подходов, методов решения и моделей теории пластин и оболочек приведен в работе [2]. В статье [3] имеется обзор работ по расчету гидроупругих колебаний оболочек.

В трехмерном пространстве рассмотрим криволинейную поверхность оболочки, заданную радиус-вектором:

¹Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия

²Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

³Сибирский научно-исследовательский институт авиации имени С.А. Чаплыгина, Новосибирск, Россия
*E-mail: mckq1985@gmail.com

**E-mail: shelevaya.d.r@hydro.nsc.ru

***E-mail: krasnorutskiy@corp.nstu.ru

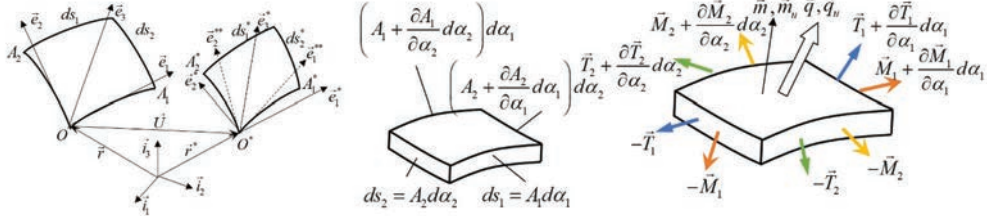


Рис. 1. Деформирование и равновесие малого элемента оболочки.

$$\begin{aligned} \vec{r}(s_1, s_2) &= x_1(s_1, s_2)\vec{i}_1 + x_2(s_1, s_2)\vec{i}_2 + \\ &+ x_3(s_1, s_2)\vec{i}_3 = x_k(s_1, s_2)\vec{i}_k, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\vec{i}_k$ — базисные векторы глобальной системы координат, по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до 3. Поверхность разделяется координатными линиями, бесконечно малый элемент, образуемый линиями $s_1, s_2, s_1 + ds_1, s_2 + ds_2$, в точке O этого элемента поставим локальную систему координат с тремя единичными векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (рис. 1).

Векторы локальной системы координат выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial s_1}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s_2}, \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2; \\ \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{i}_2 \\ \vec{i}_3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \vec{e}_i = \beta_{ik}\vec{i}_k, \end{aligned} \quad (2)$$

где β — матрица начальной геометрии.

Поворот малого элемента определим следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \vec{i}_1^* \\ \vec{i}_2^* \\ \vec{i}_3^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{i}_2 \\ \vec{i}_3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \vec{i}_n^* = \lambda_{nk}\vec{i}_k, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{ii} &= 1 - \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} (\omega_j^2 + \omega_k^2), \\ \lambda_{ij} &= \frac{\sin \omega}{\omega} \omega_k + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \omega_i \omega_j, \\ \lambda_{ik} &= -\frac{\sin \omega}{\omega} \omega_k + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \omega_i \omega_j, \\ i &= 1, 2, 3; j = 2, 3, 1; k = 3, 1, 2; \end{aligned}$$

где ω_k — проекции вектора конечного поворота (вектора Эйлера) на оси глобальной системы координат.

В результате перемещения параллельно самому себе как жесткого целого точка O займет новое положение O^* , длины отрезков $ds_1 = |OA_1|, ds_2 = |OA_2|$ изменятся и станут равными $|O^*A_1^*| = ds_1^*, |O^*A_2^*| = ds_2^*$. Обозначим $\epsilon_1 = (ds_1^* - ds_1)/ds_1, \epsilon_2 = (ds_2^* - ds_2)/ds_2$ — относительные удлинения сторон малого элемента вдоль направлений s_1 и s_2 соответственно. При деформировании векторы локального базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ переходят в $\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*$. С учетом (2) и (3) повернутые орты будут иметь следующие выражения:

$$\vec{e}_i^* = \beta_{ik}\vec{i}_k^* = \beta_{ik}\lambda_{kn}\vec{i}_n. \quad (4)$$

При наличии сдвига в плоскости ортогональность $\vec{e}_1^*$ и $\vec{e}_2^*$ нарушается, и они переходят в $\vec{e}_1^{**}, \vec{e}_2^{**}$. Обозначим угол сдвига χ , тогда:

$$\vec{e}_k^{**} = \alpha_{kj}\vec{e}_j^*,$$

где

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos \chi & \sin \chi \\ \sin \chi & \cos \chi \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$d\vec{r}^* = \vec{e}_1^{**} ds_1^* = (1 + \epsilon_1) \alpha_{1j} \beta_{jk} \lambda_{kn} \vec{i}_n^* ds_1,$$

$$d\vec{r}^* = \vec{e}_2^{**} ds_2^* = (1 + \epsilon_2) \alpha_{2j} \beta_{jk} \lambda_{kn} \vec{i}_n^* ds_2, \quad j = 1, 2.$$

Поскольку $\vec{U} = \vec{r}^* - \vec{r}$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{U}}{\partial s_1} &= \left[(1 + \epsilon_1) (\alpha_{1j} \beta_{jk} \lambda_{kn} + S_{1n}) - \beta_{1n} \right] \vec{i}_n^*, \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial s_2} &= \left[(1 + \epsilon_2) (\alpha_{2j} \beta_{jk} \lambda_{kn} + S_{2n}) - \beta_{2n} \right] \vec{i}_n^*, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$S_{1n} = \frac{T_{1j}}{\kappa G_{13} h^*} \lambda_{kj} \beta_{3k} \beta_{3p} \lambda_{pn},$$

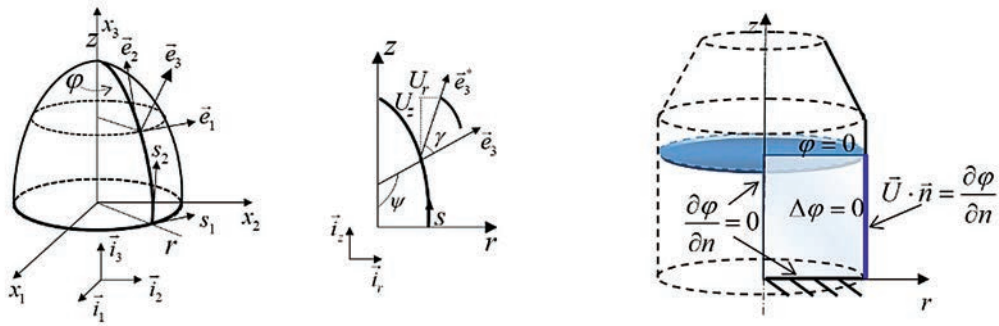


Рис. 2. Осесимметричная оболочка вращения с жидкостью.

$$S_{2n} = \frac{T_{2j}}{\kappa G_{23} h^*} \lambda_{kj} \beta_{3k} \beta_{3p} \lambda_{pn}$$

суть дополнительные углы деформирования за счет поперечного сдвига, G_{13} – модуль сдвига ортотропного материала, h^* – толщина деформированной оболочки, κ – корректирующий коэффициент сдвига прямоугольного сечения ($\kappa \approx \pi^2/12$), $\vec{T}_1 = T_{1j} \vec{i}_j$, $\vec{T}_2 = T_{2j} \vec{i}_j$ – векторы внутренних погонных сил на площадках, ортогональных координатным линиям.

Уравнения (6) описывают кинематику деформирования срединной поверхности оболочки. Они связывают поворот элемента оболочки, растяжение его сторон и изменение угла между ними с перемещениями элемента.

Для деформированной оболочки имеем $ds_1^* = A_1^* d\alpha_1$, $ds_2^* = A_2^* d\alpha_2$. Уравнения динамического равновесия сил (рис. 1), записанные для деформированного состояния, имеют вид

$$\frac{1}{A_1^* A_2^*} \frac{\partial (A_2^* \vec{T}_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1^* A_2^*} \frac{\partial (A_1^* \vec{T}_2)}{\partial \alpha_2} + \vec{q} = -\vec{q}_u, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1^* A_2^*} \frac{\partial (A_2^* \vec{M}_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1^* A_2^*} \frac{\partial (A_1^* \vec{M}_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1^*} \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \alpha_1} \times \vec{T}_1 + \\ + \frac{1}{A_2^*} \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \alpha_2} \times \vec{T}_2 + \vec{m} = -\vec{m}_u, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\vec{T}_1 = T_{1j} \vec{i}_j$, $\vec{T}_2 = T_{2j} \vec{i}_j$ – векторы внутренних погонных сил; $\vec{M}_1 = M_{1j} \vec{i}_j$, $\vec{M}_2 = M_{2j} \vec{i}_j$ – векторы внутренних моментов; $\vec{q} = q_j \vec{i}_j$ – вектор внешней распределенной нагрузки; $\vec{m} = m_j \vec{i}_j$ – вектор внешнего распределенного момента, $\vec{q}_u$ – сила инерции, $\vec{m}_u$ – инерционный момент.

Здесь необходимо отметить, что инерционная сила и момент, в силу сохранения массы элементарного объема, зависят только от ускорения, поэтому в формуле (7) сила инерции

$$\vec{q}_u = -\frac{\rho h \ddot{U}}{(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)},$$

а в (8)

$$\vec{m}_u = -\frac{\rho h^3 (\ddot{\Omega}_1 \vec{e}_1^* + \ddot{\Omega}_2 \vec{e}_2^*)}{12(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)},$$

где $\ddot{\Omega}_{1,2}$ – угловые ускорения вокруг главных осей (точки обозначают дифференцирование по времени t).

При осесимметричном деформировании оболочки вращения (рис. 2) координатная сетка остается ортогональной, т.е. параметр сдвига $\chi = 0$. Введем в рассмотрение цилиндрическую систему координат с ортами

$$\begin{aligned} \vec{i}_r &= \cos \varphi \vec{i}_1 + \sin \varphi \vec{i}_2, \\ \vec{i}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{i}_1 + \cos \varphi \vec{i}_2, \\ \vec{i}_z &= \vec{i}_3. \end{aligned} \quad (9)$$

Радиус-вектор срединной поверхности будет иметь следующий вид:

$$\vec{r}(s, \varphi) = r(s) \vec{i}_r + z(s) \vec{i}_z, \quad (10)$$

где $r(s)$, $z(s)$ – параметрические уравнения меридиана оболочки.

Введем в рассмотрение безразмерные величины следующим образом:

$$\bar{s} = \frac{s}{\ell}, \quad \bar{h} = \frac{h}{\ell}, \quad \bar{r} = \frac{r}{\ell}, \quad \bar{z} = \frac{z}{\ell}, \quad \bar{U} = \frac{U}{\ell}, \quad (11)$$

$$\bar{T} = \frac{(1 - \nu^2)}{E \bar{h} \ell} T, \quad \bar{M} = \frac{12(1 - \nu^2)}{E \bar{h}^2 \ell^2} M,$$

где ℓ — характерный геометрический размер оболочки (например, длина меридиана, радиус), $v = \sqrt{v_{12}v_{21}}$, $E = \sqrt{E_1E_2}$. Введем безразмерный параметр длины меридиана ξ , т.е. $s = s(\xi)$. Определим параметры Ламе следующими соотношениями: $A_1 = r$, $A_2 = s_{,\xi}$, и $d\alpha_1 = d\varphi$, $d\alpha_2 = d\xi$, здесь и далее нижний индекс после запятой означает дифференцирование по этой переменной.

Пропустим промежуточные выкладки. Разрешающая система 6 геометрически нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно 6 функций — $\bar{U}_r, \bar{U}_z, \gamma, \bar{T}_{2r}, \bar{T}_{2z}, \bar{M}_{2\varphi}$, описывающих динамическое напряженно-деформированное состояние осесимметричной ортотропной оболочки при больших продольных деформациях, перемещениях и поворотах, с учетом поперечного сдвига имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{d\bar{U}_r}{d\xi} = (1 + \varepsilon_2)(\bar{d}_r + \bar{d}_z\theta) - \bar{r}_{,\xi}, \\ 2) \quad & \frac{d\bar{U}_z}{d\xi} = (1 + \varepsilon_2)(\bar{d}_z - \bar{d}_r\theta) - \bar{z}_{,\xi}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$3) \quad \frac{d\gamma}{d\xi} = -\frac{\bar{s}_{,\xi}}{\bar{h}f_h^3} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \bar{M}_{2\varphi} - v_{12}\bar{s}_{,\xi}\Delta\bar{k}_1,$$

$$\Delta\bar{k}_1 = \frac{1}{\bar{s}_{,\xi}\bar{r}} [\bar{z}_{,\xi}(\cos\gamma - 1) + \bar{r}_{,\xi}\sin\gamma], \quad \Delta\bar{k}_2 = \frac{\gamma_{,\xi}}{\bar{s}_{,\xi}}; \quad (13)$$

$$4) \quad \frac{d\bar{T}_{2r}}{d\xi} = -A\bar{T}_{2r} + \frac{\bar{s}_{,\xi}}{\bar{r}} B\bar{T}_{1\varphi} - C \frac{\bar{s}_{,\xi}(1 + \varepsilon_2)}{\bar{h}} q_r + D\ddot{\bar{U}}_r,$$

$$5) \quad \frac{d\bar{T}_{2z}}{d\xi} = -A\bar{T}_{2z} - C \frac{\bar{s}_{,\xi}(1 + \varepsilon_2)}{\bar{h}} q_z + D\ddot{\bar{U}}_z, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} 6) \quad & \frac{d\bar{M}_{2\varphi}}{d\xi} = -A\bar{M}_{2\varphi} - \frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}} B\bar{M}_{1s} - \\ & - \frac{12}{\bar{h}}(1 + \varepsilon_2)(\bar{T}_{2r}\bar{d}_z - \bar{T}_{2z}\bar{d}_r) - D\bar{h}\ddot{\gamma}, \end{aligned} \quad (15)$$

дополнительные выражения и обозначения:

$$\bar{d}_r = (\bar{r}_{,\xi} \cos\gamma - \bar{z}_{,\xi} \sin\gamma),$$

$$\bar{d}_z = (\bar{r}_{,\xi} \sin\gamma + \bar{z}_{,\xi} \cos\gamma),$$

$$\theta = \frac{\bar{d}_z\bar{T}_{2r} - \bar{d}_r\bar{T}_{2z}}{\kappa G_{23}\bar{s}_{,\xi}f_hC}, \quad A = \left(\frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}} + \frac{\varepsilon_{1,\xi}}{(1 + \varepsilon_1)} \right),$$

$$\varepsilon_{1,\xi} = \left(\frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}^2} \bar{U}_r - \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{U}_r}{d\xi} \right), \quad B = \frac{(1 + \varepsilon_2)}{(1 + \varepsilon_1)},$$

$$C = \frac{1 - v_{12}v_{21}}{\sqrt{E_1E_2}}, \quad D = C \frac{\bar{s}_{,\xi}\rho\ell^2}{(1 + \varepsilon_1)},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\bar{r}} \bar{U}_r, \quad \varepsilon_2 = \exp(\hat{\varepsilon}_2) - 1,$$

$$\hat{\varepsilon}_2 = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \frac{\bar{T}_{2r}\bar{d}_r + \bar{T}_{2z}\bar{d}_z}{\bar{s}_{,\xi}f_h(\hat{\varepsilon}_2)} - v_{12}\hat{\varepsilon}_1, \quad (16)$$

$$f_h(\hat{\varepsilon}_2) = \exp \left[\frac{v_{12}v_{23} + v_{13}}{v_{12}v_{21} - 1} \hat{\varepsilon}_1 + \frac{v_{21}v_{13} + v_{23}}{v_{12}v_{21} - 1} \hat{\varepsilon}_2 \right],$$

$$\hat{\varepsilon}_1 = \ln(1 + \varepsilon_1),$$

$$\bar{T}_{1\varphi} = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} f_h(\hat{\varepsilon}_1 + v_{21}\hat{\varepsilon}_2),$$

$$\bar{M}_{1s} = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \bar{h} f_h^3(\Delta\bar{k}_1 + v_{21}\Delta\bar{k}_2),$$

где $f_h = h^*/h$ — функция изменения толщины оболочки при деформировании, которая вычисляется итерационно.

Рассмотрим расчет малых колебаний осесимметричного бака с идеальной несжимаемой жидкостью. Для такой модели жидкости ее малые перемещения определяются потенциалом перемещений φ [4], а перемещения стенки бака определяются системой дифференциальных уравнений движения осесимметричной оболочки вращения (12)–(15), которые в сокращенном виде можно записать следующим образом:

$$\frac{dX}{d\xi} = F(\xi, X, \ddot{X}), \quad (17)$$

где $X(\xi, t) = \{U_r, U_z, \gamma, T_{2r}, T_{2z}, M_{2\varphi}\}^T$ — вектор разрешающих функций. В случае малых колебаний решение разыскивается в следующем виде:

$$X(\xi, t) = \Delta X(\xi) \exp(i\omega t), \quad (18)$$

тогда, подставляя решение (18) в (17), линеаризуя и вычитая исходное равновесное состояние, получим уравнение для амплитуд малых колебаний:

$$\frac{d\Delta X}{d\xi} = \left[\frac{\partial F}{\partial X} - \omega^2 \frac{\partial F}{\partial \ddot{X}} \right] \Delta X. \quad (19)$$

В рамках допущений для потенциала малых перемещений жидкости φ получим краевую задачу 4:

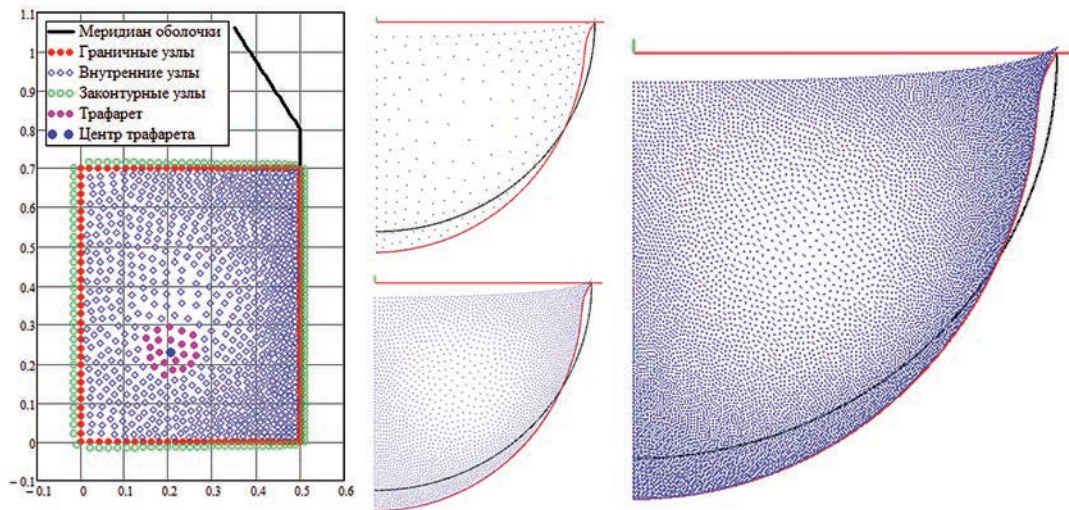


Рис. 3. Примеры заполнения расчетной области узлами.

$$\Delta\varphi = 0 \text{ — в объеме жидкости,} \quad (20)$$

$$\varphi = 0 \text{ — на свободной поверхности жидкости,} \quad (21)$$

$$\partial\varphi/\partial n = 0 \text{ — на оси симметрии и/или неподвижной части бака,} \quad (22)$$

$$\vec{U}\vec{n} = \partial\varphi/\partial n, \quad \vec{T}_2\vec{n} = -\rho_{ж}\varphi\omega^2 \text{ — на смоченной части оболочки,} \quad (23)$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль.

Для аппроксимации производной по координатам в уравнении применяется шаблон центральной разности либо интерполяционный многочлен Лагранжа по четырем точкам для повышения точности аппроксимации при малом числе разбиений меридиана [5].

Для решения краевой задачи (20)–(23) применим метод конечных разностей, а для генерирования весовых коэффициентов разностных схем на произвольном трафарете будем использовать радиальные базисные функции (РБФ). В англоязычной литературе такой подход называется Radial Basis Function Finite Difference method (RBF-FD). В данной работе используется полигармоническая РБФ [6–8]:

$$\varphi(r) = r^{2m} \ln(r), \quad (24)$$

где m — степень четной полигармонической РБФ.

Использование РБФ позволяет вычислять весовые коэффициенты конечных разностей на произвольной (нерегулярной) сетке, имеющей сгущение там, где это требуется (например, в области взаимодействия жидкости и оболочки), а в других местах иметь разреженную структуру для экономии ресурсов ЭВМ.

Быстрый алгоритм генерирования нерегулярной сетки узлов в прямоугольной области предложен в [9]. Этот алгоритм был слегка модифицирован для генерирования сетки из предварительно дискретизированной выпуклой граничной области с произвольной дискретизацией. Примеры результата работы этого алгоритма приведены на рис. 3.

На рис. 3 кроме граничных и внутренних точек области показаны законтурные (вспомогательные) узлы (в англ. ghost nodes). Они вводятся для уравнивания числа уравнений и неизвестных. Таким образом, уравнение $\Delta\varphi = 0$ должно выполняться во всех узлах границы и внутренней области, а законтурные узлы участвуют в формировании трафаретов конечных разностей. На рис. 3 приведен пример трафарета, составленного из 22 точек. Такие трафареты строятся для каждого узла контура и внутри области, и по ним вычисляются весовые коэффициенты конечных разностной аппроксимации требуемых производных.

Рассмотрим алгоритм вычисления весовых коэффициентов для разностных схем. Интерполяционный сплайн на основе РБФ

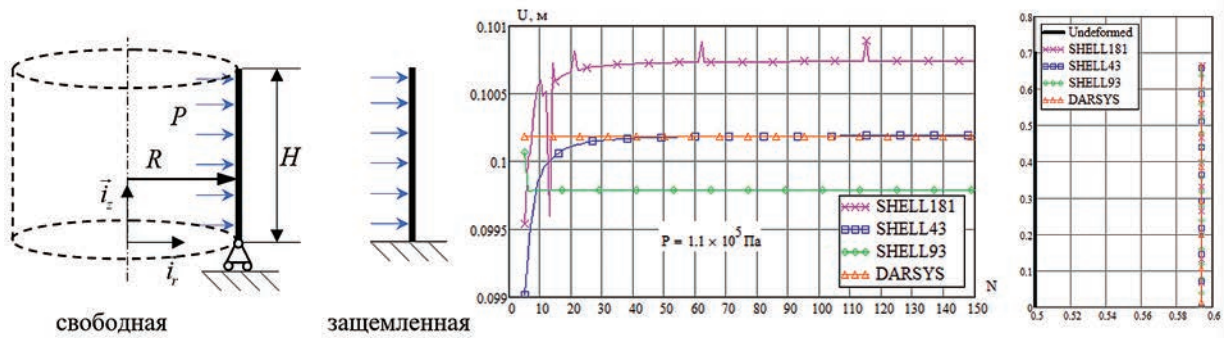


Рис. 4. Цилиндрическая оболочка. Результаты расчета.

записывается в стандартном виде с дополнительным полиномом первой степени [10], гарантирующим уникальность решения [6], а также условиями ортогональности весовых коэффициентов следующим образом:

$$S(x, y) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \phi(x - x_k, y - y_k) + \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y, \quad (25)$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k = 0,$$

где $r_k = (x_k, y_k)$ — узлы интерполяции, n — число узлов интерполяции, λ_k — весовые коэффициенты РБФ, $\gamma_{1,2,3}$ — коэффициенты дополнительного многочлена. Сплайн (25) может быть расширен до пространственного случая, а также до произвольного количества размерностей.

Пусть интерполируемая функция имеет узловые значения f_k , тогда из СЛАУ (25) для определения весовых коэффициентов будет иметь вид:

$$[A] \cdot \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (26)$$

СЛАУ (26) имеет уникальное решение, если узлы интерполяции не повторяются (это условие обеспечивается генератором распределения узлов), а ее матрица $[A]$ не меняет свой вид при аппроксимации произвольного дифференциального оператора L [10], что легко показать. СЛАУ для определения весовых

коэффициентов w_j разложения дифференциального оператора по узловым значениям функции f_j , в которой матрица совпадает с (26):

$$[A] \cdot \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \\ w_{n+1} \\ w_{n+2} \\ w_{n+3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L\phi(x - x_1, y - y_1) \\ L\phi(x - x_2, y - y_2) \\ \dots \\ L\phi(x - x_n, y - y_n) \\ L1 \\ Lx \\ Ly \end{Bmatrix} \Bigg|_{\substack{x=x_c \\ y=y_c}}. \quad (27)$$

Расчетная область, занятая жидкостью, разбивалась неравномерной сеткой, имеющей сгущение на границах и разреженность внутри (рис. 3). Это дает существенную экономию размерности задачи и незначительно сказывается на точности решения. Алгоритм решения уравнений ортотропной осесимметричной оболочки совместно с жидкостью добавлен в функциональные возможности программы DARSYS [5].

Рассмотрим несколько примеров расчета статического деформирования. Цилиндрической оболочки под действием внутреннего распределенного давления P (рис. 4). Радиус $R = 0.5$ м, толщина $h = 0.02$ м, высота $H = 0.7$ м, модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^7$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$.

На рис. 4 приведены зависимости полного перемещения верхней точки меридиана от числа разбиений, а также деформированные конфигурации, рассчитанные в ANSYS разными конечными элементами и по формулам (12)–(16) в DARSYS при значении давления $P = 1.1 \cdot 10^5$ Па при свободном опирании и с защемленным основанием на рис. 5. Кроме того,

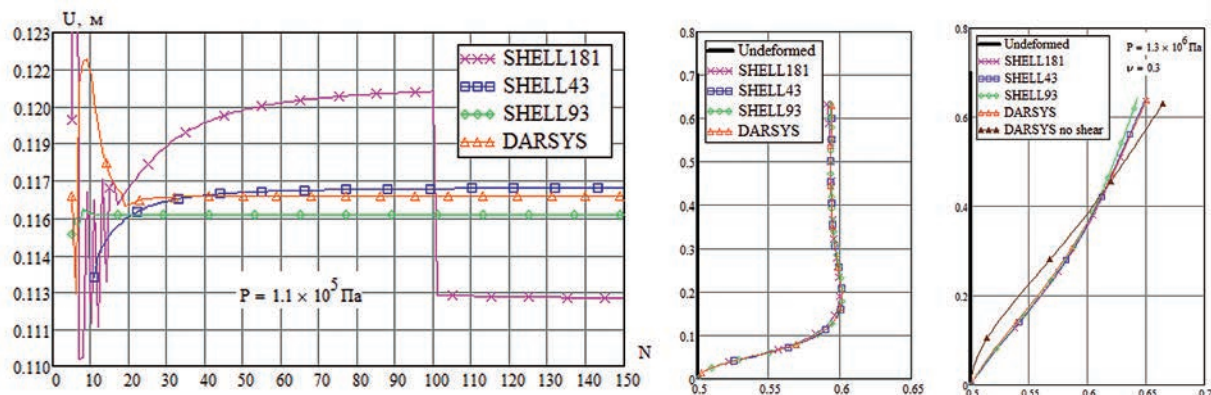


Рис. 5. Защемленная цилиндрическая оболочка. Результаты расчета.

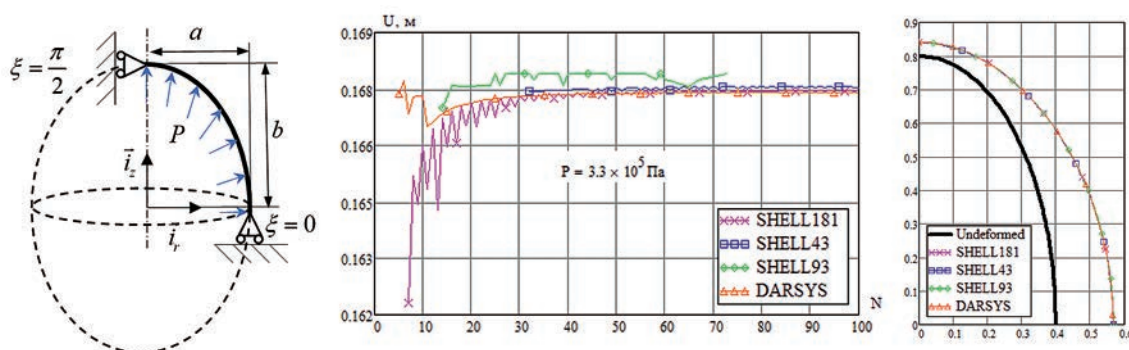


Рис. 6. Эллиптическая оболочка. Результаты расчета.

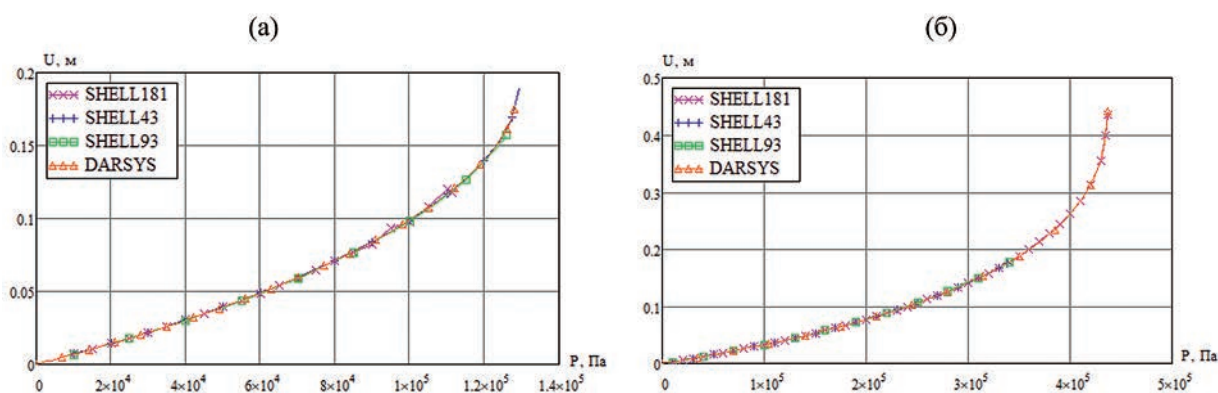


Рис. 7. Цилиндрическая (а) и эллиптическая (б) оболочки, зависимость перемещения от давления.

на рис. 5 показаны деформированные конфигурации меридиана с $h = 0.2$ м, чтобы показать влияние учета поперечного сдвига.

Рассмотрим задачу о деформировании эллиптической оболочки с полуосями $a = 0.4$ м, $b = 2a$ под действием внутреннего давления P (рис. 6). Толщина и материал взяты из предыдущего примера. На рис. 6 приведены зависимости полного перемещения точки меридиана,

лежащей на малой полуоси $\vec{i}_r$ ($\xi = 0$) от числа разбиений, рассчитанные в ANSYS и по формулам (12)–(16) при значении давления $P = 3.3 \cdot 10^5$ Па и деформированная конфигурация. Из рисунков видно, что результаты хорошо согласуются.

На рис. 7 приведены зависимости перемещения от давления для цилиндрической (слева) и эллиптической (справа) оболочки. Нелинейность обусловлена использованием логарифмической

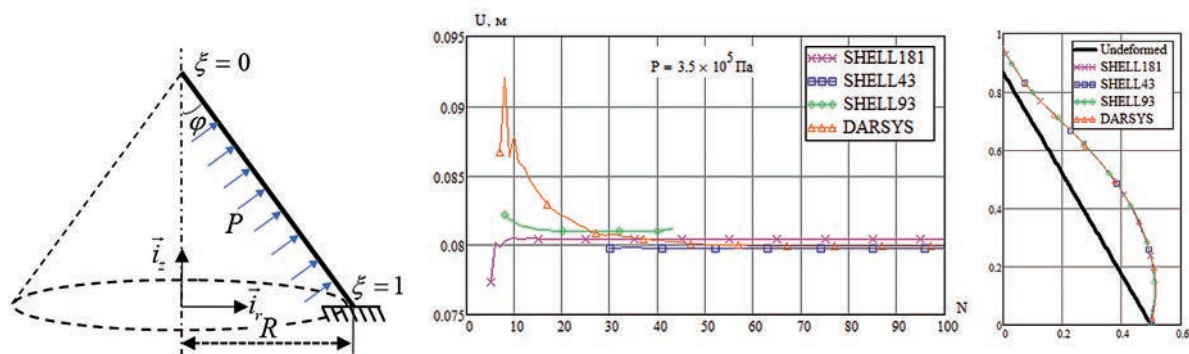


Рис. 8. Коническая оболочка. Результаты расчета.

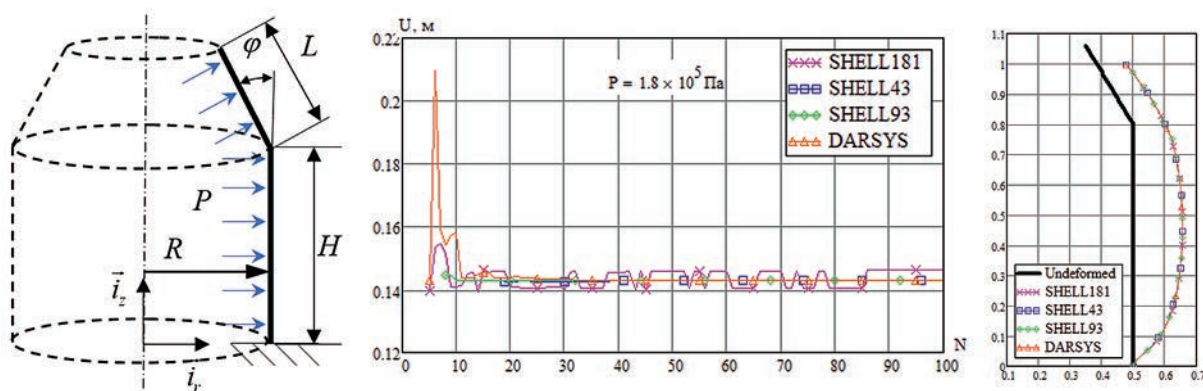


Рис. 9. Составная оболочка. Результаты расчета.

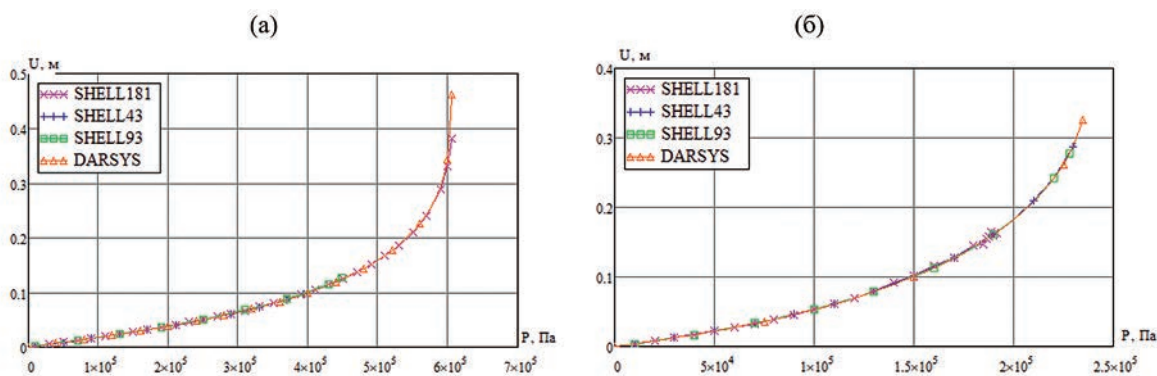


Рис. 10. Коническая (а) и составная (б) оболочки, зависимость перемещения от давления.

деформации в качестве меры, а также эффектом утонения оболочки.

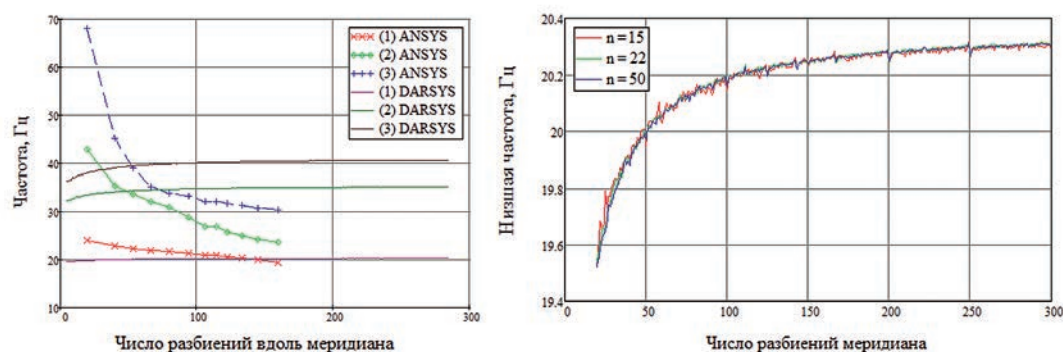
Рассмотрим задачу о деформировании конической оболочки под действием внутреннего распределенного давления P , радиус окружности дна $R = 0.5$ м, угол конуса $\varphi = \pi/6$ (рис. 8), толщину и параметры материала взяты из предыдущих примеров. На рис. 8 приведена деформированная конфигурация и зависимости полного перемещения вершины конуса ($\xi = 0$)

от числа разбиений, рассчитанные в ANSYS и по формулам (12)–(16) при значении давления $P = 3.5 \cdot 10^5$ Па.

Рассмотрим задачу о деформировании составной оболочки (рис. 9) под действием внутреннего распределенного давления P , радиус цилиндра $R = 0.5$ м, высота цилиндра $H = 0.8$ м, длина образующей конуса $L = 0.3$ м, $\varphi = \pi/6$, толщина и материал взяты из предыдущих примеров. На рис. 9 приведена деформированная

Таблица 1. Частоты колебаний полусферической оболочки с водой, Гц

№	1	2	3	4	5	6
	МКЭ-МГЭ [11]	МКЭ [12]	ANSYS [12] (Shell63)	МКЭ-МГЭ [4]	ANSYS (Shell181, Fluid80)	DARSYS
1	23.59	22.00	22.07	22.04	22.333	20.296
2	35.70	33.38	33.41	33.32	33.714	35.172
3	43.92	42.02	41.30	41.10	39.091	40.637


Рис. 11. Сходимость частот гидроупругих колебаний полусферической оболочки с водой.

конфигурация и зависимости полного перемещения верхней точки меридиана составной оболочки ($\xi = 0$) от числа разбиений, рассчитанные в ANSYS и по формулам (12)–(16) при значении давления $P = 1.8 \cdot 10^5$ Па. На рис. 10 представлены зависимости перемещения от давления для цилиндрической (а) и эллиптической (б) оболочки.

Рассмотрим тестовую задачу из статьи [11]: полусферический открытый бак заполнен водой, шарнирно закреплен по радиусу. Радиус $R = 5.08$ м, толщина 0.0254 м, модуль упругости $E = 7 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, плотность материала $\rho = 2770$ кг/м³.

В табл. 1 приведены три низшие частоты осесимметричных гидроупругих колебаний, рассчитанные различными методами в разных программах. Три первые столбца с частотами взяты из статьи [12], в которой нет информации о сходимости в зависимости от дискретизации модели. В табл. 1 в четвертом столбце приведены частоты, которые практически не меняются при увеличении числа конечных и граничных элементов, при расчете в программе В.Е. Левина [4] по МКЭ-МГЭ. В пятом столбце приведены

частоты, рассчитанные в ANSYS Workbench 14.5 при ~ 50 разбиениях вдоль меридиана.

Из табл. 1 видно, что расхождение в первой частоте между разными методами достигает 16%. Для анализа сходимости были проведены расчеты с разной дискретизацией модели. На рис. 11 приведены графики сходимости рассчитанных частот в ANSYS и по разработанной методике. Из рисунка видно, что графики пересекаются с ростом числа разбиений. Сходимости частот в ANSYS Workbench 14.5 (Shell181+Fluid80) получить не удалось, а частоты, рассчитанные по предлагаемой методике, имеют выраженную асимптотику при увеличении числа разбиений меридиана. На рис. 11б приведены зависимости низшей частоты от дискретизации меридиана для различных размеров трафарета конечных разностей РБФ $m = 2$. Повышение степени m не приводит к существенным изменениям, как и увеличение размера трафарета n .

В табл. 2 приведены частоты собственных колебаний составной оболочки из изотропного материала (рис. 9), заполненной водой до уровня 0.5 м. Были проведены расчеты частот

Таблица 2. Частоты колебаний составной оболочки с водой, Гц

№	ANSYS (Shell181, Fluid80)	МКЭ-МГЭ [4]	DARSYS
1	8.464	9.233	9.394
2	10.969	11.256	11.307
3	13.801	14.137	14.130
4	16.377	16.474	16.448
5	16.763	16.937	16.869
6	18.487	18.756	18.577

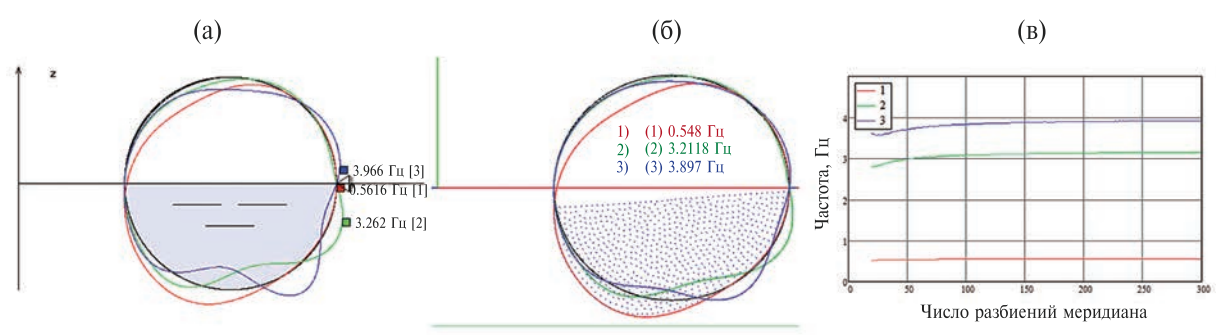


Рис. 12. Формы колебаний тороидального бака (МКЭ-МГЭ [4] (а), DARSYS (б), сходимость частот (в)).

собственных осесимметричных колебаний в программе [4] по МКЭ-МГЭ (~60 элементов), в ANSYS Workbench 14.5 моделировалась четверть модели с условиями симметрии (~119 тыс. элементов) и по предложенной методике в программе DARSYS (300 разбиений меридиана), результаты сведены в табл. 2.

Из табл. 2 видно, что наибольшее различие приходится на низшую частоту и достигает 11%, с ростом номера тона разница падает до 0.5%. Уточнить результаты в ANSYS путем увеличения числа КЭ не удалось.

Рассмотрим тороидальный бак, наполовину заполненный водой, образующая окружность имеет радиус 0.5 м, внутренний радиус – 0.5 м, внешний – 1.5 м. Толщина оболочки 0.02 м,

изотропный материал: модуль упругости $E = 2 \cdot 10^7$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, плотность $\rho = 7850$ кг/м³. Тор шарнирно закреплен по внешнему радиусу. На рис. 12 приведены частоты и формы колебаний, рассчитанные в программе [4] (140 КЭ, 140 ГЭ вдоль меридиана) и по предлагаемой методике в программе DARSYS [5] (140 разбиений меридиана, $m = 2$, $n = 22$). В табл. 3 приведено сравнение первых 6 частот осесимметричных колебаний. Из табл. 3 видно, что частоты хорошо согласуются между собой.

На рис. 12 приведены зависимости 3 низших частот от числа разбиений меридиана, рассчитанные в DARSYS. Из рис. 12 видно, что частоты стремятся к горизонтальным

Таблица 3. Частоты колебаний тороидального бака с водой, Гц

	МКЭ-МГЭ [4]	DARSYS	Разница, %
1	0.5616	0.5480	2.42
2	3.2617	3.2118	1.53
3	3.9653	3.8970	1.72
4	4.4991	4.4930	0.14
5	5.2194	5.1741	0.87
6	6.0651	5.9365	2.12

прямым с ростом числа разбиений без заметных осцилляций.

Предложенная методика расчета имеет перспективы развития, она будет применена для расчета оболочек в общей пространственной постановке на основе разработанных уравнений. Использование разрешающих функций в глобальной системе координат, в т.ч. вектора Эйлера для описания поворотов, позволяет достаточно просто проводить стыковку участков / областей. В будущем будет применен метод отложенной коррекции, который позволяет уточнить решение и получить непосредственную оценку достигнутой точности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колесников К.С. Динамика топливных систем ЖРД / К.С. Колесников, С.А. Рыбак, Е.А. Самойлов. М.: Машиностроение, 1975. 172 с.
2. Аннин Б.Д., Волчков Ю.М. Неклассические модели теории пластин и оболочек // Прикладная механика и техническая физика. 2016. № 5. С. 5–14. <https://doi.org/10.15372/PMTF20160501>
3. Бочкарев С.А. Собственные колебания усеченных конических оболочек, содержащих жидкость / С.А. Бочкарев, С.В. Лекомцев, В.П. Матвеев // Прикладная математика и механика. 2022. Т. 86. № 4. С. 505–526. <https://doi.org/10.31857/S0032823522040038>
4. Левин В.Е. Метод конечных и граничных элементов в динамике конструкций летательных аппаратов: специальность 05.07.03 “Прочность и тепловые режимы летательных аппаратов”: Диссертация на соискание доктора технических наук / В.Е. Левин. Новосибирский государственный технический университет. Новосибирск, 2001. 341 с.
5. Красноруцкий Д.А., Лакиза П.А., Шелева Д.Р. Программный комплекс для моделирования механики системы тонких упругих стержней. Краевые задачи и математическое моделирование: темат. сб. науч. ст. Новокузнецк: Изд-во КГПИ КемГУ, 2023. С. 57–60.
6. Flyer N., Fornberg B., Bayona V. & Barnett G.A. On the role of polynomials in RBF-FD approximations: I. Interpolation and accuracy // J. Computational Physics. 2016. V. 321. P. 21–38. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.05.026>
7. Shankar V, Wright G.B., Kirby R.M., Fogelson A.L. A Radial Basis Function (RBF)-Finite Difference (FD) Method for Diffusion and Reaction-Diffusion Equations on Surfaces // J. Sci. Comput. 2016. Jun 1. V. 63(3). P. 745–768. <https://doi.org/10.1007/s10915-014-9914-1>
8. Kalani Rubasinghe, Guangming Yao, Jing Niu, Gantumur Tsogtgerel. Polyharmonic splines interpolation on scattered data in 2D and 3D with applications, Engineering Analysis with Boundary Elements. 2023. V. 156. P. 240–250. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2023.08.001>
9. Fornberg B., Flyer N. Fast generation of 2-D node distributions for mesh-free PDE discretizations // Computers & Mathematics with Applications. 2015. V. 69. Iss. 7. P. 531–544. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.01.009>
10. Shankar V. The overlapped radial basis function-finite difference (RBF-FD) method: A generalization of RBF-FD // J. Comput. Phys. 2017. V. 342. P. 211–228.
11. Гнитько В.И. Сравнение методов конечных и граничных элементов в задачах о колебаниях составной оболочки вращения с жидкостью / В.И. Гнитько, К.Г. Дегтярев, Е.С. Кононенко, А.М. Тонконоженко // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. 2019. С. 38–45.
12. Мокеев В.В. Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом с помощью метода конечных элементов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1998. № 6. С. 166–174.

USING RBF-FD FOR CALCULATION OF HYDROELASTIC VIBRATIONS OF AXISYMMETRIC ORTHOTROPIC SHELLS OF ROTATION

C. M. Nguyen^a, D. R. Shelevaya^{a, b}, D. A. Krasnorutsky^{a, c}

^a*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

^b*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

^c*S.A. Chaplygin Siberian Research Institute of Aviation, Novosibirsk, Russia*

Presented by Academician of the RAS B.D. Annin

Geometrically nonlinear differential equations describing the dynamic deformation of axisymmetric shells of rotation are derived on the basis of general equations for solving functions in the global coordinate system. The equations take into account thinning/thickening at large longitudinal strains as well as transverse shear for thick shells. The motion and pressure of an ideal incompressible fluid is described by a displacement potential. To obtain the numerical solution, the finite difference method based on spline interpolation by polyharmonic radial basis functions is applied. The calculation method is implemented in software package. Good agreement of the calculated displacements with the results of modeling by different finite elements in ANSYS is obtained. The frequencies of the hydroelastic vibrations of the tanks are compared with those obtained by the finite element and boundary element method, as well as with results from published articles by other researchers.

Keywords: ideal incompressible fluid, displacement potential, radial basis functions, finite difference method, RBF-FD, polyharmonic spline

УДК 620.92, 544.452, 544.454, 519.119

О НАИБОЛЕЕ ВЕРОЯТНОМ ЭНЕРГОВЫДЕЛЕНИИ В СТРУКТУРИРОВАННЫХ СРЕДАХ

© 2024 г. М. Ю. Романовский^{1,2,3,*}

Представлено академиком РАН Б.Ю. Шарковым 05.03.2024 г.

Поступило 11.03.2024 г.

После доработки 11.03.2024 г.

Принято к публикации 18.03.2024 г.

Исследуется вопрос о выделении энергии в иерархически организованных средах, представляющих собой “куски” вещества различного размера, включающие в себя значительные количества вступающих в реакцию частиц, например молекул. Предельными средами здесь являются одномолекулярные (некластеризованные) газы этих веществ, с одной стороны, и однородные конденсированные вещества — с другой. При естественных предположениях о разном количестве частиц вещества, могущих вступить в реакцию энерговыделения (горения, взрыва и др.) в силу их расположения на поверхности/внутри структуры, динамике доступа к реагирующим частицам и очевидном вероятностном характере процесса проводится комбинаторная процедура определения наивероятнейшего распределения энерговыделения. В некотором простом приближении энерговыделение определяется одним параметром комбинаторной схемы. Наивероятнейшее распределение оказывается совпадающим с распределением безусловно минимальных значений энерговыделения. Результат может быть использован для количественной интерпретации отличия величин энерговыделения при горении, взрыве и других процессах при различных условиях.

Ключевые слова: энерговыделение, комбинаторная схема, наивероятнейшее распределение

DOI: 10.31857/S2686740024030138, **EDN:** JYZAOS

Процесс энерговыделения в любой реакции — химической, ядерной, термоядерной — имеет статистический характер. Молекулы/атомы/ядра/частицы, находящиеся в определенном объеме вещества, могут вступать в реакцию (фактически всегда при соударении), а могут и не вступать вплоть до завершения процесса. Очевидно, что количество молекул и т.п. в этом объеме, принявших участие в реакции, есть случайная величина. Эта случайная величина определяет энерговыделение. Все вступающее

в реакцию вещество можно разделить на группы молекул, распадающихся ядер и пр.¹, энерговыделение в первой группе может быть ϵ_1 при количестве частиц в ней p_1 , во второй — ϵ_2 при количестве частиц в ней p_2 , и т.д. Так может быть определена функция распределения (или плотность вероятности распределения) энерговыделения. Наблюдаемыми величинами при этом будут некоторые средние — на одну молекулу, на одно ядро, на единицу объема и т.п. Этими средними могут быть величины размерности энергии, тогда можно говорить о характерных энерговыделениях в рассматриваемых реакциях.

Искомые функции распределения и их средние будут в настоящей работе определены

¹ В дальнейшем будем говорить о вступающих в реакцию частицах, или просто частицах.

¹ЧУ “Наука и инновации”, Москва, Россия

²АНО Национальный центр физики и математики, Москва, Россия

³Российский национальный исследовательский медицинский университет имени Н.И. Пирогова, Москва, Россия

*E-mail: MYRomanovsky@rosatom.ru

с использованием комбинаторных схем. Простейшая комбинаторная схема, исходящая из равномерного распределения по энергии одинаковых частиц при наличии определенного полного количества молекул и величины полной энергии, как известно [1, 2] сводится к выводу экспоненциального распределения Больцмана с помощью формулы Стирлинга. Сам процесс энерговыделения в простейшем случае предположения о равновероятности участия в реакции всех частиц и существовании конечной энергии при энерговыделении очевидно дает в качестве наивероятнейшей плотности вероятности распределения частиц по выделенной энергии

$$p_i \sim \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{T_{eff}}\right),$$

где T_{eff} — нормировочный коэффициент, имеющий смысл некоторой средней, или эффективной, энергии процесса в этом же объеме. Как уже указывалось, можно рассчитывать эту энергию на одну частицу, вступающую в реакцию, или как-то еще.

Если же вступление в реакцию частиц в телах неравновероятно (одни, например, находятся на поверхности, другие — в толще вещества), то можно ожидать отличий в распределениях энерговыделений. Соответственно, энерговыделения в однотипных процессах в таких веществах, а тем более энерговыделения в различных процессах — горения и взрыва [3] — различаются. Об этом также пойдет речь в предлагаемой работе.

Вступление в реакцию зависит от многих параметров — плотности вещества, структуры вещества (степени дисперсности, специальных мер защиты и т.п.), температуры вещества и других характеристик. Покажем, что с точки зрения предлагаемой комбинаторной схемы расчета все эти параметры можно в грубом приближении свести к одному — эффективной работе выхода частицы из массива вещества для последующего вступления в реакцию, и затем учесть это в функции распределения. Действительно, в химической реакции могут “гореть” только частицы, находящиеся на поверхности твердого образца вещества (тела), в ядерные реакции будут вступать только те частицы, до которых долетят нейтроны, при химическом взрыве в реакцию вступают частицы

на фронте ударной волны и т.п. В общем случае наше рассмотрение будет применимо к квазистационарным процессам — горению вещества с постепенным отделением реагирующих молекул от тела, эффектам на фронте ударной волны и т.д. В самом грубом приближении все эти процессы и могут быть учтены в единственном параметре работы выхода частицы из блока вещества со вступлением в энерговыделение в результате реакции.

Если реакции энерговыделения (взаимодействия молекул, в том числе сложные — цепные [3] и т.д.) происходят быстро, то получаемая функция распределения будет иметь смысл текущей, т.е. определенной в данный конкретный момент времени. Соответственно, работа выхода тоже должна быть взята в этот же момент времени. Если работа выхода меняется гораздо медленнее скорости реакции энерговыделения, она может войти в ответ в виде зависящей от (медленного) времени величины. Затем этот параметр — работу выхода — возможно использовать в комбинаторной схеме. Следующий шаг — использование еще одного параметра, соответствующее усложнение комбинаторной схемы и т.д.

Существуют различные теоретико-вероятностные схемы расчетов распределений вероятностей, например, прямой метод расчета плотности вероятности Р.Л. Стратоновича [4], хорошо подходящий для получения плотностей вероятности распределений плазменных микрополей [5–7], потенциалов [8, 9] прямо из микроскопических соотношений. В работе будет использована еще одна комбинаторная схема с одним вышеупомянутым дополнительным параметром [10]. Она описывает более сложные системы, состоящие из неразличимых с точки зрения энерговыделения тел, имеющих внутреннюю структуру, состоящую, в свою очередь, также из неразличимых частиц. Эта неразличимость здесь понимается не в смысле бозе- и фермичастиц, но в том смысле, что нам безразлично, какая частица прореагировала — нас интересует только выделившаяся энергия. Поэтому естественно возникает вопрос, что будет происходить с распределениями по энерговыделению в самом общем случае — если определенные группы частиц отграничены от других, или одни тела — частицы (назовем их

частицами верхнего уровня) содержат другие (нижнего уровня, также неразличимые).

Решение задачи подсказывает комбинаторная проблема о количестве комбинаций при распределении предметов по группам. Покажем также, что к тем же результатам приведет рассмотрение некоторого специального распределения минимальных значений по энергии частиц нижнего уровня в частицах верхнего уровня по выборке частиц верхнего уровня.

КОМБИНАТОРНАЯ ЗАДАЧА

Пусть имеется набор $\{m_i\}$ тел — назовем их частицами верхнего уровня такими, что в m_1 таких неразличимых частицах содержится по p_1 молекул (частиц нижнего уровня), вступающих в реакцию энергосвыделения, в m_2 — по p_2 , и т.д. вплоть до N молекул — частицы нижнего уровня. Эти N молекул составляют M тел — частиц верхнего уровня. Далее введем n — общее количество различных расстановок молекул — частиц нижнего уровня, осуществивших энергосвыделение, т.е. прореагировавших, по телам — частицам верхнего уровня. Полное количество N таких молекул

$$N = \sum_{i=1}^n m_i p_i \quad (1)$$

распределено по всем M телам

$$M = \sum_{i=1}^n m_i. \quad (2)$$

При этом общее количество перестановок всех таких молекул по всем телам есть W_{20} [11, 12]:

$$W_{10} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^n (p_i!)^{m_i}}, \quad (3a)$$

а при условии упомянутой неразличимости тел с точки зрения энергосвыделения

$$W_1' = \frac{N!}{\prod_{i=1}^n (p_i!)^{m_i} \prod_{i=1}^n (m_i!)}. \quad (36)$$

Обычно пользуются выражением $\ln W_1'$:

$$\ln W_1' = \ln(N!) - \sum_{i=1}^n m_i \ln(p_i!) - \sum_{i=1}^n \ln(m_i!). \quad (4)$$

Заметим, что если здесь $m_i = 1$, то для задачи вычисления наивероятнейшего распределения, определяемого условиями (1, 2, 3б), мы имеем формулировку, аналогичную формулировке задачи о получении экспоненциального распределения Больцмана.

Далее задача может быть поставлена различными способами. Мы воспользуемся тем, который сведет задачу к [10]. В результате состоявшегося энергосвыделения от одной частицы нижнего уровня выделяется энергия ϵ , она (в простейшем случае реакций [3], иначе надо специально дополнительно определять участвующие в реакции частицы) для всех таких частиц всех тел одна и та же. Как уже указывалось, количество реализованных энергосвыделений в группе частиц p_i в некотором теле m_i меньше самой величины p_i и составляет P_i . Тогда энергосвыделение в теле m_i составит $\epsilon P_i = \epsilon_i$, а полное энергосвыделение системы

$$E = \sum_{i=1}^n p_i m_i \epsilon_i.$$

Мы, таким образом, считаем, что группа молекул p_i произвела энергосвыделение ϵ_i , не останавливаясь уже на реакции энергосвыделения отдельной частицы нижнего уровня.

Теперь следует получить функции распределения групп молекул p_i и тел m_i по энергии ϵ_i . Для отыскания наивероятнейшего распределения по этим энергиям при произвольном m_i следует учесть, что, кроме выражения (3) или (4a) и связей (1) и (2), еще имеются условия конечности полного энергосвыделения всей системы “частицы нижнего уровня в телах”

$$E = \sum_{i=1}^n p_i m_i \epsilon_i, \quad (5)$$

которое практически означает, что существует среднее “энергосвыделение” одной частицы нижнего уровня $\langle \epsilon_i \rangle$:

$$N \langle \epsilon_i \rangle = E. \quad (5a)$$

Эти средние $\langle \epsilon_i \rangle$ различаются для разных процессов и могут быть связаны с наблюдаемыми энергосвыделениями в данных процессах.

Решим комбинаторную задачу. Для этого сначала образуем вариацию от выражения (4)

с учетом простейших связей (1), (2) и (5). Для этого в уравнение (4) надо в правую часть добавить члены $\alpha N + \beta M + \gamma E$ с лагранжевыми множителями α , β , и γ :

$$\ln W_1 = \ln(N!) - \sum_{i=1}^n m_i \ln(p_i!) - \sum_{i=1}^n \ln(m_i!) + \alpha \sum_{i=1}^n m_i p_i + \beta \sum_{i=1}^n m_i + \gamma \sum_{i=1}^n p_i m_i \epsilon_i. \quad (5b)$$

Используем также первое приближение формулы Стирлинга по $m!$ и $p!$ и произведем варьирование по δp_i и δm_i . Тогда получим для вариации наивероятнейшего распределения $\ln W_1$:

$$\delta \ln W_1 = \sum_{i=1}^n \left[-(\delta m_i) p_i (\ln p_i - 1) - (\delta p_i) m_i \ln p_i - (\delta m_i) \ln m_i + \alpha (\delta m_i) + \beta (\delta m_i) p_i + \beta m_i (\delta p_i) + \gamma (\delta m_i) p_i \epsilon_i + \gamma m_i (\delta p_i) \epsilon_i \right] = 0. \quad (6)$$

Соберем члены при независимых вариациях δp_i и δm_i . Для первой вариации, сократив все слабые на ненулевые величины δp_i и m_i , получим первое уравнение системы:

$$\ln p_i = \alpha + \gamma \epsilon_i. \quad (7)$$

Для второй вариации, сократив на ненулевую величину δm_i и используя уравнение (7), получим

$$\ln m_i = \beta + p_i. \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) дают решение комбинаторной задачи.

Решение уравнения (7) точно соответствует обычному представлению Больцмана–Гиббса [1, 2]. Решения системы (7) и (8) очевидны:

$$p_i = e^{\alpha + \gamma \epsilon_i} \quad (9)$$

и, в свою очередь,

$$m_i = e^{\beta + e^{\alpha + \gamma \epsilon_i}}. \quad (10)$$

Таким образом, истинная функция наивероятнейшего распределения групп частиц нижнего уровня p_i по энерговыделению оказывается точно такой же, как и наивероятнейшая функция распределения Больцмана: это плотность вероятности найти группы частиц нижнего уровня с энерговыделением ϵ_i .

Однако эта функция не является прямо наблюдаемой и прямо измеримой. Для того, чтобы измерить эту функцию распределения, следует иметь прибор, измеряющий p_i в зависимости от ϵ_i . Сделать это в какой-то одной определенной частице верхнего уровня нельзя в силу неразличимости m_i с точки зрения энерговыделения.

Какие функции будут наблюдаемыми? Для выяснения этого перепишем систему (7) и (8), образовав простейшие линейные комбинации уравнений:

$$\begin{aligned} \ln p_i \pm \ln m_i &= \alpha \pm \beta + \gamma \epsilon_i \pm p_i = \\ &= \alpha \pm \beta + \gamma \epsilon_i \pm e^{\alpha + \gamma \epsilon_i}, \end{aligned} \quad (11)$$

где мы воспользовались выражением (10). Таким образом, рассматриваться должны две функции $-p_i m_i$ и p_i/m_i , которые являются решениями системы (7) и (8).

Сделаем некоторые замечания относительно величин α , β и γ . Последняя определяет некоторую обратную среднюю энергию (5а), или “эффективную температуру” (Введение) рассматриваемого процесса энерговыделения. Как уже указывалось, при $m_i = 1$, т.е. для однородных газов, величина γ может быть интерпретирована как обратное характерное энерговыделение при горении в реакции на одну молекулу. Ниже увидим, что из всех характерных энерговыделений в процессах эта является наибольшей.

Смысл двух других величин определится при нормировке $p_i m_i$:

$$p_i m_i = e^{\alpha + \gamma \epsilon_i} e^{e^{\alpha + \gamma \epsilon_i}}. \quad (12)$$

Нормированная на 1 функция этого распределения, описывающая некоторую плотность вероятности, есть

$$(p_i m_i)_{\text{norm}} = |\gamma| \frac{e^{\alpha + \gamma \epsilon_i} e^{e^{\alpha + \gamma \epsilon_i}}}{e^{e^\alpha} - 1}. \quad (12a)$$

Требование нормировки на 1 автоматически приводит к соотношению $\beta = 0$. Из других нормировок могут быть использованы, например, $\beta = \ln N$ – в этом случае (12) нормируется на полное число частиц нижнего уровня во всех телах. Принципиальной оказывается величина α , смысл которой проясним ниже.

Очевидно, что функция $p_i m_i$ (или ее моменты) потенциально должна наблюдаться, поскольку она описывает распределение числа частиц (1). Эта функция значительно отличается от p_i (рис. 1), которая для $\alpha = 0.5$ (1), 1.5 (2) и 2.5 (3) приведена на рис. 1 в виде штриховых кривых. При увеличении $\alpha/|\gamma|$, т.е., например, при уменьшении “эффективной температуры” при постоянном α , значение функции (12а) в нуле по сравнению с прямой 4 резко возрастает, а асимптотическое при умеренных и больших ϵ_i — очень сильно падает (рис. 1). Таким образом, плотность вероятности $p_i m_i$ (или нормированная плотность вероятности $(p_i m_i)_{norm}$ на рис. 1) описывает сдвиг энерговыведения групп частиц p_i в телах m_i в сторону меньших (и вообще нулевых) значений. Наблюдаемость этой функции лучше всего реализуется как раз в многочастичных эффектах типа горения и взрыва, когда “все” тела (верхнего уровня) участвуют в процессе. Здесь² ситуация не зависит качественно от величины α .

Таким образом, двухступенчатая иерархическая система, в которой группы частиц p_i нижнего уровня отграничены в телах m_i верхнего уровня, дает функцию плотности вероятности распределения энерговыведения, зависящей от работы (пропорционально описываемой величиной α в (9)–(12а)), необходимой для того, чтобы “освободить” частицу для участия в реакции. При энерговыведении в ядерном реакторе основная работа тратится на замедление реакторных нейтронов, именно ее можно трактовать как α — “работу обеспечения выхода нейтронов (необходимой энергии)”³. Очевидно, что в эту величину α входит вся динамика процесса — распространение (волна) горения, ударные волны при взрыве и т.п. при условии, что все эти процессы гораздо более медленные, чем реакция взаимодействия молекул/частиц при элементарном энерговыведении. Сюда же

² Вторая функция, являющаяся решением (11), — функция p_i/m_i , это распределение группы частиц p_i в расчете на одно тело верхнего уровня из набора m_i , в рассматриваемой задаче неприменима.

³ Мы рассматриваем упрощенную картину энерговыведения в атомных реакторах только в результате процессов с U-235. Кроме этого, в реакторах ВВЭР энергия замедляющихся нейтронов используется для нагрева теплоносителя первого контура. Тем не менее работа обеспечения выхода нейтронов оказывается значительной, но не потерянной.

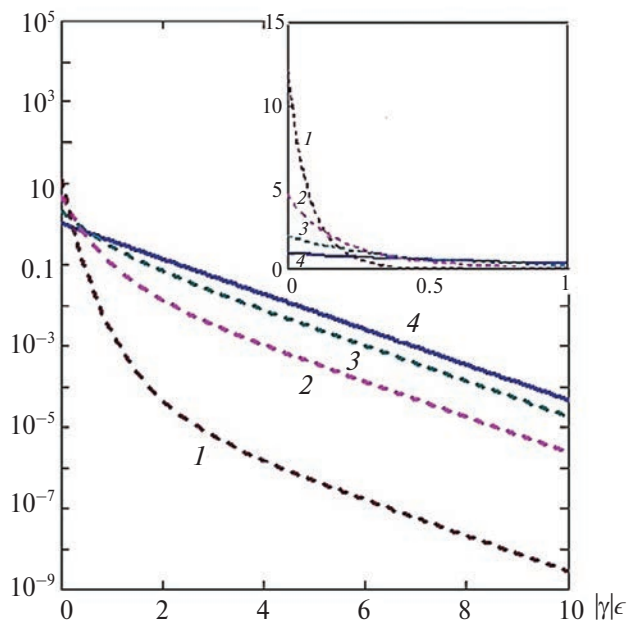


Рис. 1. Нормированные на 1 функции распределения $p_i m_i$ (штриховые кривые 1, 2 и 3) при различных параметрах нормировки α : $\alpha = 2.5$ (1), $\alpha = 1.5$ (2), $\alpha = 0.5$ (3), а также $p_i = |\gamma|e^{|\gamma|\epsilon_i}$ (4). Принято $|\gamma| = 1$. Полулогарифмический масштаб. На врезке — то же в равномерных координатах.

входят и более простые вещи, типа величины дисперсности исходного вещества, вступающего в реакцию, т.е. размер зерна, его форма, концентрация различных присадок, катализаторы, замедлители нейтронов при ядерной реакции и прочее.

Количественно при возрастании α плотность вероятности распределения энерговыведения конденсируется возле оси ординат, т.е. при возрастании α энерговыведение становится все меньше и меньше (см. ниже).

КОМБИНАТОРНАЯ ЗАДАЧА В ПОСТАНОВКЕ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ МИНИМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Комбинаторная задача допускает другую постановку. В ней процесс решения и получаемые результаты, во-первых, совпадают с продемонстрированными выше, а во-вторых, проясняют смысл полученных результатов.

Будем считать, что комбинаторная задача теперь обобщается таким образом, что имеется

плотность вероятности распределения энерговыделения групп p_i частиц нижнего внутри каждого тела (частицы верхнего уровня) из набора m_i . Считая теперь этот набор m_i выборкой, определим функцию распределения (и затем плотность вероятности) минимального значения p_i по всем выборкам m_i . Будем придерживаться процедуры [10, 13].

Рассмотрим функцию p, m_i . Известно [13], что функция плотности вероятности распределения минимальных значений p_i в выборке m_i (или распределение по энергии частиц нижнего уровня в частицах верхнего уровня) есть $m_i e^{m_i(\alpha-x)}$ (мы ввели переменную $|\gamma| \epsilon_i = x$).

Построим новую функцию плотности вероятности, описывающую минимальную случайную величину энерговыделения, возникающую каждый раз при сравнении энерговыделения в группах молекул p_i в выборке тел m_i . Количество этих тел варьируется от двух до полного значения m_i , всякий раз выбирается минимальное энерговыделение. Возьмем сначала полную выборку m_i (т.е. все тела верхнего уровня). Поскольку нам безразлично, в каком теле будет минимальное энерговыделение, следует взять эту плотность вероятности со статистическим весом комбинаторных перестановок с повторением, т.е. с $1/(m_i!)$. Это даст член

$$[(m_i - 1)!]^{-1} e^{m_i(\alpha-x)} = e^{\alpha-x} [(m_i - 1)!]^{-1} e^{(m_i-1)(\alpha-x)}$$

и он будет первым членом нашей будущей суммы — финального значения некоторой функции плотности вероятности.

В неполных на одно тело $m_i - 1$ реализациях (частицах верхнего уровня) плотность вероятности распределения минимального значения будет $(m_i - 1) e^{(m_i-1)(\alpha-x)}$. Мы возьмем эту функцию с весом, по тем же самым соображениям, $1/[(m_i - 1)!]$, получим член будущей суммы и вклад в некоторую функцию плотности вероятности

$$[(m_i - 2)!]^{-1} e^{(m_i-1)(\alpha-x)} = e^{\alpha-x} [(m_i - 2)!]^{-1} e^{(m_i-2)(\alpha-x)}$$

и проделаем эту процедуру в общей сложности $m_i - 1$ раз. Все полученные функции плотности вероятности вида при предельном переходе

$$e^{\alpha-x} [(m_i - k')!]^{-1} e^{(m_i-k')(\alpha-x)} \rightarrow \rightarrow_{m_i-k'=k} e^{\alpha-x} (k!)^{-1} e^{k(\alpha-x)}$$

дадут в сумме некоторую искомую функцию плотности вероятности

$$f(x) = \lim_{m_i \rightarrow \infty} \left[e^{\alpha-x} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{e^{k(\alpha-x)}}{k!} \right] \rightarrow e^{\alpha-x} e^{e^{\alpha-x}}. \quad (13)$$

Функция p, m_i точно совпадает с $f(x)$.

Таким образом, плотность вероятности распределения безусловно⁴ минимального значения энерговыделения совпадает с плотностью вероятности наивероятнейшего распределения. Практически эта функция означает, что при любой физике процесса — дисперсии частиц, волнах горения и взрыва — всегда реализуется наименьшее энерговыделение как раз в силу совпадения p, m_i с $f(x)$. Это — фундаментальный результат решения комбинаторной задачи.

НАБЛЮДАЕМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ

Наблюдаемыми величинами задачи о плотности вероятности распределения энерговыделения в рассматриваемой иерархической системе являются средние. Для определения среднего функции p, m_i нужно сначала выбрать ее нормировку. Для простоты целесообразно это сделать на одну молекулу (на одно ядро) (12а). Тогда среднее $S(\alpha)$ нормированной функции распределения

$$S(\alpha) = \int_0^\infty \epsilon_i (p_i m_i)_{\text{norm}} d\epsilon_i = \frac{Ei(e^\alpha) - C - \alpha}{|\gamma|(e^{e^\alpha} - 1)} \quad (14)$$

будет представлять из себя характерное энерговыделение в соответствующем процессе — горения, взрыва, рассчитанное на одну молекулу (ядро) реагирующего вещества. В (14) $Ei(x)$ — интегральная показательная функция [14], $C = 0.577$ — постоянная Эйлера. Зависимость S от параметра α приведена на рис. 2.

⁴ Безусловно минимальное значение здесь понимается в точном смысле — сколько бы ни было взято реализаций, в которых можно выбирать — от 2 до $m_i - 1$, всегда наивероятнейшим будет минимальное из них.

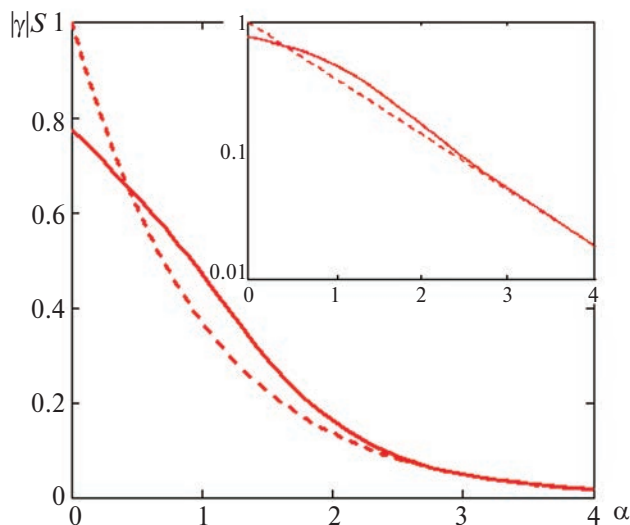


Рис. 2. Зависимость среднего S нормированной функции распределения $(p_i m_i)_{\text{norm}}$ от параметра α , сплошная кривая. Для сравнения штриховой кривой приведена функция $e^{-\alpha}$. На врезке — та же зависимость в полулогарифмических координатах.

Заметим, что даже при $\alpha = 0$, т.е. при нулевой работе отрыва молекулы от тела для вступления в реакцию энерговыведения, $S(0) \approx 0.77/|\gamma| < 1$. Напоминаем, что $|\gamma|^{-1}$ — по определению, некоторая средняя энергия, которая, при расчете на одну частицу, и будет теоретическим энерговыведением при горении. Это означает, что среднее энерговыведение на частицу нижнего уровня всегда меньше теоретического значения даже при нулевой работе отрыва молекулы, так как все равно присутствует некоторая динамика процесса горения/взрыва. При $\alpha \rightarrow \infty$, пользуясь асимптотикой $Ei(x)$, получим $S \rightarrow e^{-\alpha}|\gamma|^{-1}$. Качественно это означает, что если в тела верхнего уровня m_i объединены очень большие количества молекул и работа отрыва их поэтому велика, наивероятнейшее энерговыведение будет весьма слабым. Это характерно для атомных реакторов, где у замедляемых нейтронов отбирается большая энергия, т.е. работа их выхода велика, на рис. 2 она лежит в области асимптоты $S(\alpha)$. Самое сильное энерговыведение наблюдается при $\alpha = 0$, т.е. в однородных газах.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Таким образом, решение комбинаторной задачи дает значение среднего энерговыведения на одну частицу нижнего уровня в различно

структурированных средах. При увеличении работы выхода от соответствующего тела вступающей в реакцию частицы (или сложной динамики последней) это энерговыведение экспоненциально быстро уменьшается. Поэтому самое простое с практической точки зрения — дробить тела верхнего уровня m_i так, чтобы они содержали минимально возможное (с точки зрения технологического процесса, где идет энерговыведение) количество частиц⁵ — тогда энерговыведение на одну прореагировавшую частицу будет значительным (хотя и меньшим соответствующего характерного энерговыведения в процессе). Кроме этого, макроскопическая динамика реагирующих молекул в телах не должна приводить к их быстрому выводу из зоны реакции, т.е. надо, в общем, не терять замедленные нейтроны, бороться с линейными динамическими образованиями типа ударных волн, а организовывать различные (микро)вихревые движения для лучшего вовлечения молекул в реакции.

По-видимому, уменьшение среднего энерговыведения (14) с ростом работы выхода $\sim \alpha$ является очевидным фундаментальным фактом в физике горения и взрыва. Это среднее энерговыведение, очевидно, и есть эффективное энерговыведение соответствующего процесса, которое всегда меньше, чем γ^{-1} . Эта величина сравнивается с γ^{-1} только при стремлении работы выхода к бесконечной отрицательной величине, что, вероятно, означает, что в α физически учитывается не только “прямая” работа отделения частицы от тела для энерговыведения, но и сопутствующая этому динамика.

Другим фундаментальным фактом является совпадение плотности вероятности распределения безусловно минимального значения энерговыведения (см. выше) с наивероятнейшим. Это означает, что реализующееся энерговыведение в процессе, нужное для поддержания процесса, всегда наименьшее.

Еще одним результатом может стать незапрещенная медленная зависимость α от времени. Таким образом, характерное энерговыведение в процессе может меняться со временем

⁵ Для ядерных реакторов это означает, что лучше использовать реакторы с максимально возможным количеством топливных сборок.

в соответствии с (14) и рис. 2, где $\alpha = \alpha(t)$ и соответственно $S = S(t)$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках научной программы Национального центра физики и математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исихара А. Статистическая физика. М.: Мир, 1973. 465 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Ч. 1. 5-е изд., стереот. М.: Физматлит, 2002. 616 с.
3. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980. 479 с.
4. Стратонович Р.Л. Нелинейная неравновесная термодинамика. М.: Наука, 1985. 480 с.
5. Holtsmark J. Uber die Verbreiterung von Spektrallinien // Ann. Phys. 1919. V. 58. P. 577–630.
6. Romanovsky M.Yu. Distributions of Magnetic Micro-filaments in Plasmas // Physics Letters A. 1998. V. 249. P. 99–109.
7. Likalter A.A. Ionization and Electron Transport in Nonideal Plasma / In: Transport and Optical Properties of Nonideal Plasma. Eds. G.A. Kobzev, I.T. Iakubov, M.M. Popovich. N.Y.: Springer, 1995. 318 p.
8. Romanovsky M.Yu. Model space of economic events // Physica A. 1999. V. 265. P. 264–278.
9. Romanovsky M.Yu. Truncated Levy distribution of S&P 500 stock index fluctuations. Distribution of one-share fluctuations in a model space // Physica A. 2000. V. 287. P. 450–460.
10. Romanovsky M.Yu. Most probable distributions and distributions of extremes for particle systems with hierarchical structures // Chaos, Solitons and Fractals. 2022. 159. 112170.
11. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969. 331 с.
12. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. М.: Наука, 1975. 209 с.
13. Гумбель Е. Статистика экстремальных значений. М.: Мир, 1965. 450 с.
14. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.

ON THE MOST PROBABLE ENERGY RELEASE IN STRUCTURED MEDIA

M. Yu. Romanovsky^{a, b, c}

^aPrivate Enterprise for Nuclear Industry Scientific Development “Science and Innovations”, Moscow, Russia

^bNational Center for Physics and Mathematics, Moscow, Russia

^cPirogov Russian National Research Medical University, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS B.Yu. Sharkov

The problem of energy release in hierarchically structured media that are “pieces” of matter of various sizes, contained large quantity of reacting particles, for example, molecules, is investigated. The extremes media here are single—molecular (non-clustered) gases of these substances on the one hand, and homogeneous condensed substances on the other. Under natural assumptions about the different quantity of a substance that can enter into an energy release reaction (combustion, explosion, etc.) due to their location on the surface / inside the structure, the dynamics of access to reacting molecules and the obvious probabilistic nature of the process, a combinatorial procedure is carried out to determine the most probable distribution of energy release. In some simple approximation, the energy release is determined by a single parameter of the combinatorial scheme. The most probable distribution is coincided with the distribution of the unconditionally minimum values of energy release. The result may be used for quantitative interpretation of the difference in the values of the heat of combustion, explosion and other processes under various conditions.

Keywords: energy release, combinatorial scheme, the most probable distribution

Свидетельство о регистрации средства массовой информации
ПИ № ФС 77-77142 от 6 ноября 2019 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Подписано к печати 99.99.2024 г. Дата выхода в свет 99.99.2024 г. Формат 60 × 88¹/₈ Усл. печ. л. Уч.-изд. л.
Тираж экз. Зак. Цена свободная

Учредитель: Российская академия наук

Издатель: Российская академия наук, 119991 Москва, Ленинский пр., 14
Исполнитель по контракту № 4У-ЕП-039-24 ФГБУ «Издательство «Наука»
121099, г. Москва, Шубинский пер., д. 6, стр. 1.
Отпечатано в ФГБУ «Издательство «Наука»
121099, г. Москва, Шубинский пер., д. 6, стр. 1

Журналы РАН, выходящие в свет на русском языке

Автоматика и телемеханика
Агрохимия
Азия и Африка сегодня
Акустический журнал
Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы
Астрономический журнал
Биологические мембраны
Биология внутренних вод
Биология моря
Биоорганическая химия
Биофизика
Биохимия
Ботанический журнал
Вестник Дальневосточного отделения Российской академии наук
Вестник древней истории
Вестник Российской академии наук
Вестник российской сельскохозяйственной науки
Водные ресурсы
Вопросы истории естествознания и техники
Вопросы ихтиологии
Вопросы языкознания
Вулканология и сейсмология
Высокомолекулярные соединения. Серия А
Высокомолекулярные соединения. Серия Б
Высокомолекулярные соединения. Серия С
Генетика
Геология рудных месторождений
Геомagnetизм и аэрономия
Геоморфология и палеогеография
Геотектоника
Геохимия
Геоэкология. Инженерная геология. Гидрогеология. Геокриология
Государство и право
Дефектоскопия
Дифференциальные уравнения
Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления
Доклады Российской академии наук. Науки о жизни
Доклады Российской академии наук. Науки о Земле
Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки
Доклады Российской академии наук. Химия, науки о материалах
Журнал аналитической химии
Журнал высшей нервной деятельности им. И.П. Павлова
Журнал вычислительной математики и математической физики
Журнал неорганической химии
Журнал общей биологии
Журнал общей химии
Журнал органической химии
Журнал прикладной химии
Журнал физической химии
Журнал эволюционной биохимии и физиологии
Журнал экспериментальной и теоретической физики
Записки Российского минералогического общества
Зоологический журнал
Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа
Известия Российской академии наук. Механика твердого тела
Известия Российской академии наук. Серия биологическая
Известия Российской академии наук. Серия географическая
Известия Российской академии наук. Серия литературы и языка
Известия Российской академии наук. Серия физическая
Известия Российской академии наук. Теория и системы управления
Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана
Известия Российской академии наук. Энергетика
Известия Русского географического общества
Исследование Земли из космоса
Кинетика и катализ
Коллоидный журнал
Координационная химия
Космические исследования
Кристаллография
Латинская Америка
Лёд и Снег
Лесоведение
Литология и полезные ископаемые
Мембраны и мембранные технологии
Металлы
Микология и фитопатология
Микробиология
Микроэлектроника
Молекулярная биология
Нейрохимия
Неорганические материалы
Нефтехимия
Новая и новейшая история
Общественные науки и современность
Общество и экономика
Океанология
Онтогенез
Палеонтологический журнал
Паразитология
Петрология
Письма в Астрономический журнал
Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики
Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования
Почвоведение
Приборы и техника эксперимента
Прикладная биохимия и микробиология
Прикладная математика и механика
Проблемы Дальнего Востока
Проблемы машиностроения и надежности машин
Проблемы передачи информации
Программирование
Психологический журнал
Радиационная биология. Радиоэкология
Радиотехника и электроника
Радиохимия
Расплавы
Растительные ресурсы
Российская археология
Российская история
Российская сельскохозяйственная наука
Российский физиологический журнал им. И.М. Сеченова
Русская литература
Русская речь
Сенсорные системы
Славяноведение
Современная Европа
Социологические исследования
Стратиграфия. Геологическая корреляция
США & Канада: экономика, политика, культура
Теоретические основы химической технологии
Теплофизика высоких температур
Успехи современной биологии
Успехи физиологических наук
Физика Земли
Физика и химия стекла
Физика металлов и металловедение
Физика плазмы
Физикохимия поверхности и защита материалов
Физиология растений
Физиология человека
Химическая физика
Химия высоких энергий
Химия твердого топлива
Цитология
Человек
Экология
Экономика и математические методы
Электрохимия
Энтомологическое обозрение
Этнографическое обозрение
Ядерная физика