

ISSN 2686-7400

Том 517

Июль–Август 2024



ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК.

ФИЗИКА,
ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ



НАУКА

— 1727 —

Российская академия наук

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Основан в 1933 г.

Журнал издается под руководством
Президиума РАН

Редакционный совет

Г.Я. Красников (председатель), Н.С. Бортников, А.Г. Габитов,
С.Н. Калмыков, В.В. Козлов, В.Я. Панченко, О.В. Руденко

ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Том 517 2024 Июль—Август

Выходит 6 раз в год
ISSN 2686-7400

Главный редактор
С.В. Гарнов

Редакционная коллегия

А.А. Александров, А.В. Андрияш, М.Х. Ашуров, С.Г. Гаранин,
С.В. Демишев, В.И. Конов, В.А. Левин, А.Г. Литвак,
М.Л. Лямшев (зам. главного редактора), Н.Ф. Морозов,
К.А. Постнов, О.В. Руденко, Н.Н. Сысоев, В.Ю. Хомич,
А.М. Черепашук, Ф.Л. Черноусько, И.А. Щербаков

Заведующая редакцией А.А. Иванюта

Адрес редакции: 119991 Москва, Ленинский пр., 14

E-mail: doklady_physics@mail.ru

Москва

ФГБУ «Издательство «Наука»

СОДЕРЖАНИЕ

Том 517, 2024

Валентин Ефимович Костюков (к 75-летию со дня рождения) 3

ФИЗИКА

Экспериментальное исследование триггеринга парового взрыва при распаде струи расплавленной соли
Н. В. Васильев, С. Н. Вавилов, Е.А. Лиджиев 5

Параметры ударного сжатия графита на начальных стадиях формирования Попигайской астроблемы
В. В. Ким, С. И. Мартыненко, А. В. Острик, К. В. Хищенко, И. В. Ломоносов 9

МЕХАНИКА

Удаление сингулярности поля напряжений для задачи Вилльямса (1952) на основе неевклидовой модели сплошной среды
М. А. Гузев 12

Эволюция вихрей при слиянии капли этанола с водой в интрузивном режиме
Б. Джудар, А. Ю. Ильиных, Ю. Д. Чашечкин 18

Различные типы локализации собственных колебаний прокладки между параллельными фланцами
С. А. Назаров 29

Общее решение системы уравнений моментной линейной теории упругости изотропного псевдоконтинуума Коссера
Н. И. Остросаблин, Р. И. Угрюмов 36

Прогнозирование многостадийной усталостной кривой на основе релаксационной модели необратимого циклического деформирования
Ю. В. Петров, Н. С. Селютина, М. Н. Антонова 41

Осмотическая фильтрация соленой воды в осадочной толще, содержащей полупроницаемые области, и ее возможные приложения
М. М. Рамазанов, Л. И. Лобковский, Н. С. Булгакова, С. Р. Гаджимагомедова 48

Пространственная переориентация твердого тела посредством подвижной массы при наличии внешних сил, заданных как функции времени
А. М. Шматков 59

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Подъем подводного трубопровода сосредоточенной силой
М. А. Ильгамов 65

Перспективы достижения углеродной нейтральности экономически развитыми странами
В. В. Клименко, А. В. Клименко, А. Г. Терешин 71

CONTENTS

Volume 517, 2024

Valentin Efimovich Kostyukov (to His 75th Anniversary) 3

PHYSICS

Experimental Studying of Vapor Explosion Triggering During the Breakup of a Molten Salt Jet
N. V. Vasil'ev, S. N. Vavilov, E. A. Lidzhiev 5

Parameters of Graphite Shock Compression at the Initial Stages of Popigai Astrobleme Formation
V. V. Kim, S. I. Martynenko, A. V. Ostriuk, K. V. Khishchenko, I. V. Lomonosov 9

MECHANICS

Removal of the Stress Field Singularity for the Williams Problem (1952) Basing
on a Non-Euclidean Continuum Model
M. A. Guzev 12

Evolution of Vortices at the Merging of an Ethanol Droplet with Water in an Intrusive Mode
B. Djoudar, A. Yu. Ilinykh, Yu. D. Chashechkin 18

Miscellaneous Types of Localization of Natural Oscillations of a Gasket between Parallel Flanges
S. A. Nazarov 29

General Solution of the Equations System of the Moment Linear Elasticity Theory
of the Isotropic Cosserat Pseudo-Continuum
N. I. Ostrosablin, R. I. Ugryumov 36

Prediction of Multistage Fatigue Curve Based on the Relaxation Model of Irreversible Cyclic Deformation
Yu. V. Petrov, N. S. Selyutina, M. N. Antonova 41

Osmotic Filtration of Salt Water in Sedimentary Strata Containing Semipermeable Areas
and its Possible Applications
M. M. Ramazanov, L. I. Lobkovsky, N. S. Bulgakova, S. R. Gadzhimagomedova 48

Spatial Reorientation of a Solid Body Using a Moving Mass in the Presence of External Forces Specified
as the Functions of Time
A. M. Shmatkov 59

TECHNICAL SCIENCES

Underwater Pipeline Lifting by Concentrated Force
M. A. Ilgamov 65

Prospects for Achieving Carbon Neutrality by Economically Developed Countries
V. V. Klimenko, A. V. Klimenko, A. G. Tereshin 71

ВАЛЕНТИН ЕФИМОВИЧ КОСТЮКОВ (К 75-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

12 августа 2024 г. исполняется 75 лет Валентину Ефимовичу Костюкову, Герою Российской Федерации, директору Российского федерального ядерного центра – Всероссийского научно-исследовательского института экспериментальной физики (РФЯЦ–ВНИИЭФ).

Валентин Ефимович Костюков – крупный организатор работ в области создания ядерного оружия, атомной энергетики, электроники и цифровых технологий. Он играет ведущую роль в развитии расчетно-теоретической, исследовательской, экспериментальной и производственной базы ядерно-оружейного комплекса, обеспечении ее конкурентоспособности по отношению к ведущим ядерным державам.

Костюков В.Е. родился в Борском районе Горьковской области. Инженерная и научная деятельность Валентина Ефимовича начинается в августе 1977 г. в Научно-исследовательском институте измерительных систем им. Ю.Е. Седакова, куда он пришел после окончания с отличием Горьковского политехнического института. Глубокие инженерные знания, организаторский талант, высокое чувство ответственности стали основой его быстрого служебного роста от инженера-технолога до директора института.

В феврале 2008 г. Костюков В.Е. назначен на должность директора ФГУП «РФЯЦ–ВНИИЭФ». На посту директора Костюков В.Е. обеспечивает безусловное выполнение основной миссии ядерного центра – поддержание боеготовности ядерного арсенала страны, вносит личный вклад в реализацию проектов разработки перспективных комплексов вооружений и образцов нового стратегического оружия.

Благодаря деловым и организаторским качествам Костюкова В.Е., его настойчивости и стратегическому мышлению в РФЯЦ–ВНИИЭФ обеспечен качественный скачок в создании уникальных установок и комплексов мирового уровня в интересах развития фундаментальной



и прикладной науки, по созданию отечественных суперкомпьютеров и отечественного программного обеспечения.

Валентин Ефимович Костюков уделяет значительное внимание вопросам подготовки кадров, в том числе высшей квалификации, профессиональному росту работников, привлечению в ядерный центр молодых специалистов. Он внес определяющий вклад в создание Национального центра физики и математики (НЦФМ), призванного объединить усилия атомной и академической науки в интересах получения принципиально новых результатов и подготовки новых кадров высшего уровня, он автор и соавтор свыше 100 научных трудов и 19 изобретений.

Костюков В.Е. является членом научно-технического совета Военно-промышленной комиссии при Президенте Российской Федерации; членом научно-технического совета ЯОК Госкорпорации «Росатом». Ему присвоено звание почетного профессора Российской академии наук.

Валентин Ефимович Костюков ведет широкую общественную деятельность. Он является членом Нижегородской ассоциации промышленников и предпринимателей, членом Совета по науке и инновационной политике при Губернаторе Нижегородской области, был доверенным лицом кандидата в Президенты России В.В. Путина на выборах 2024 года. Активно поддерживает реализацию социальных и благотворительных инициатив.

Научная и общественная деятельность Костюкова В.Е. отмечена Государственными

премиями РФ в области науки и техники, Премией Правительства Российской Федерации, орденами «За заслуги перед Отечеством», а также медалями и ведомственными наградами. Имеет награды Русской православной церкви. Почетный гражданин Нижегородской области. Доктор технических наук, профессор.

Уважаемый Валентин Ефимович! Сердечно поздравляем с Юбилеем, желаем крепкого здоровья, новых достижений на благо нашей Родины.

Бисикало Дмитрий Валерьевич, академик РАН

Гаранин Сергей Григорьевич, академик РАН

Гарнов Сергей Владимирович, член-корреспондент РАН

Завьялов Николай Валентинович, член-корреспондент РАН

Незнамов Василий Петрович, академик РАН

Селемир Виктор Дмитриевич, член-корреспондент РАН

Сергеев Александр Михайлович, академик РАН

Соловьев Вячеслав Петрович, научный руководитель ВНИИЭФ, д.ф.-м.н., профессор

Чернышёв Александр Константинович, член-корреспондент РАН

Шагалиев Рашид Мирзагалиевич, член-корреспондент РАН

Шербаков Иван Александрович, академик РАН

УДК 532.529

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРИГГЕРИНГА ПАРОВОГО ВЗРЫВА ПРИ РАСПАДЕ СТРУИ РАСПЛАВЛЕННОЙ СОЛИ

© 2024 г. Н. В. Васильев^{1,2,*}, С. Н. Вавилов^{1,**}, Е. А. Лиджиев^{1,2,***}

Представлено академиком РАН О.Ф. Петровым 11.04.2024 г.

Поступило 15.04.2024 г.

После доработки 15.04.2024 г.

Принято к публикации 18.06.2024 г.

Представлено экспериментальное исследование с помощью высокоскоростной видеосъемки процесса парового взрыва на дробящейся струе расплавленной соли NaCl в воде. Исследованы режимы распада струи на крупные части, сопровождающиеся отрывом мелких капель-сателлитов. Впервые в лабораторных условиях воспроизведено и зафиксировано распространение парового взрыва на двух крупных фрагментах распада струи вследствие самопроизвольного триггеринга процесса на капле-сателлите. Показана возможность возникновения парового взрыва на начальном этапе первой стадии грубого дробления и перемешивания струи расплава.

Ключевые слова: паровой взрыв, недогретая вода, расплавленная соль, распад струи, капля-сателлит, триггеринг, высокоскоростная видеосъемка

DOI: 10.31857/S2686740024040013, EDN: JРQMEM

Взаимодействие высокотемпературных струй расплавов с водой, при котором с очень высокой скоростью происходит образование больших объемов пара, называется паровым взрывом [1–4]. Это потенциально крайне опасное явление возможно при авариях на атомных электростанциях, в металлургической и целлюлозно-бумажной промышленности и др. Обычно на первом этапе процесса парового взрыва (премиксинга) происходит гидродинамический распад струи расплавленного вещества на отдельные капли (с размерами ~1 см) [5]. Затем после резкого парообразования на одной из капель (триггеринга), спровоцированного, по всей видимости, локальным касанием воды

и расплава в результате колебаний толщины паровой пленки, процесс распространяется на все соседние капли. В наших предыдущих работах [6, 7] с помощью высокоскоростной видеосъемки (метода, успешно используемого в исследованиях в данной области [8–11]) было впервые зафиксировано такое распространение парового взрыва между отдельными каплями расплава.

В работе [12] с помощью видеосъемки в определенных диапазонах чисел Рейнольдса и Онезорге были показаны режимы дробления жидкой струи в другой жидкости на крупные части с размерами порядка ее диаметра, сопровождающиеся отрывом небольших капель «сателлитов» с диаметром примерно на порядок ниже. На этих каплях-сателлитах потенциально более вероятен самопроизвольный триггеринг парового взрыва, который провоцирует дальнейшее распространение процесса на соседние крупные фрагменты распада струи.

В настоящей работе представлены результаты экспериментального исследования с помощью

¹Объединенный институт высоких температур Российской академии наук, Москва, Россия

²Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

*E-mail: nikvikvas@mail.ru

**E-mail: sergeynv@mail.ru

***E-mail: lind722k@gmail.com

высокоскоростной видеосъемки механизма распространения самопроизвольного триггеринга парового взрыва при распаде струи расплава соли NaCl в воде при режимах, сопровождающихся формированием капле-сателлитов. Эксперименты проводились на установке, подробно описанной в [6, 7]. Исследовался процесс парового взрыва при распаде струи расплава NaCl массой 5–6 г с температурой $t_{\text{NaCl}} = 1000\text{--}1100^\circ\text{C}$, падающей в емкость с дистиллированной водой объемом 20 л с температурой $t_{\text{в}} = 20\text{--}25^\circ\text{C}$ с высоты примерно 70–80 мм. Диаметр отверстия для выхода струи из графитового тигля, в котором посредством индукционного нагрева производилось расплавление соли, составлял 4 мм.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И ОБСУЖДЕНИЕ

Иллюстрация наблюдаемого в опытах процесса представлена на рис. 1 и видеосъемке из приложенного файла (с частотой кадров 77 кГц). На рис. 1 можно видеть момент распада струи расплава NaCl в воде на две крупные части (рис. 1а) с формированием капли-сателлита (отмечена белой стрелкой на рис. 1б). От момента погружения струи в воду до первого кадра на рис. 1 прошло ~ 85 мс. Диаметр капли-сателлита составил $d_{\text{сат}} \approx 0.43$ мм, что соответствует примерно десятой части от диаметра струи (диаметр струи принимался равным диаметру отверстия тигля – 4 мм).

Числа подобия для струи в приведенном эксперименте имели значения: число Рейнольдса $Re = 2070$, число Онезорге $Oh = 1.4 \cdot 10^{-3}$, что по [12] соответствуют типичным режимам распада струи на крупные фрагменты с образованием капле-сателлитов. Расчет чисел подобия проводился по формулам: $Re = \rho v d / \mu$, $Oh = \mu / (\rho \sigma d)^{0.5}$, где ρ , v , d , μ , σ – соответственно плотность, скорость, диаметр, коэффициент динамической вязкости и коэффициент поверхностного натяжения для струи расплава. Физические свойства расплава NaCl (ρ , σ) рассчитывались по формулам из [13]. Скорость движения струи оценивалась по кадрам видеосъемки и составила $v = 0.4$ м/с.

Описание типичного протекания процесса в проведенных экспериментах представлено

ниже. Через небольшое время после распада струи (в эксперименте на рис. 1 это время составило ~ 1.5 мс) на капле-сателлите начинаются колебания толщины паровой пленки (более детально это можно увидеть на видео из приложенного файла) со скоростью порядка 10 м/с. Причем амплитуда и период (τ) с каждым последующим колебанием возрастают (табл. 1), что, по всей видимости, является следствием процесса постепенной фрагментации капли, ведущего к увеличению площади контакта расплава с водой. В качестве параметра амплитуды использовался максимальный диаметр капли (d_{max}), покрытой паровой оболочкой, за период колебания. Заметим, что колебания толщины паровой пленки на одиночных расплавленных каплях перед паровым взрывом отмечались также в [8, 14].

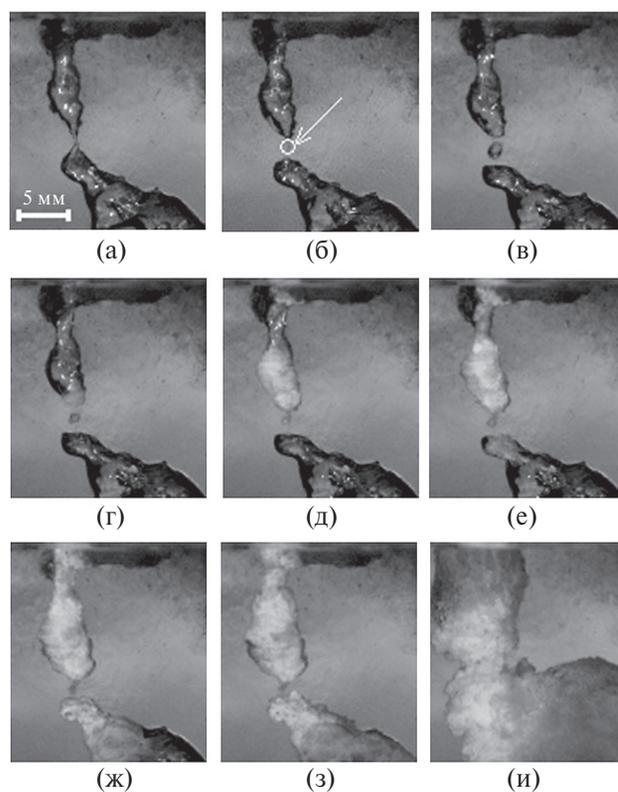


Рис. 1. Распространение парового взрыва при распаде струи расплавленной соли NaCl в воде (температура воды $t_{\text{в}} = 23^\circ\text{C}$, температура соли в тигле $t_{\text{NaCl}} = 1100^\circ\text{C}$, числа подобия для струи $Re = 2070$, $Oh = 1.4 \cdot 10^{-3}$). Время экспозиции – 4.5 мкс. Время от кадра момента распада струи (а): 1.11 мс (б); 1.87 (в); 1.99 (г); 2.02 (д); 2.03 (е); 2.05 (ж); 2.08 (з); 2.34 мс (и). Белой стрелкой обозначена капля-сателлит, образовавшаяся при распаде струи. Верхняя граница кадров соответствует уровню воды в емкости.

Таблица 1. Параметры последовательных колебаний толщины паровой пленки на капле-сателлите

Параметры	Первое колебание	Второе колебание	Третье колебание
d_{\max} , мм	0.60	0.85	1.70
τ , мкс	40	65	140

На кадре (рис. 1в) представлен момент достижения капель-сателлитом максимального диаметра во время третьего цикла колебаний толщины паровой пленки на ней. По-видимому, импульса давления в жидкости, сформированного вследствие резкого парообразования во время третьего цикла, оказалось достаточно для сначала локального контакта воды с расплавом на верхнем крупном фрагменте распавшейся струи (рис. 1г) и последующего распространения парового взрыва по всей его поверхности (рис. 1г–ж). Что затем спровоцировало аналогичные процессы на нижнем фрагменте (рис. 1е–з).

ВЫВОДЫ

В работе впервые с помощью высокоскоростной видеосъемки зафиксировано распространение парового взрыва на два крупных фрагмента распада расплавленной струи в результате импульса давления, спровоцированного самопроизвольным триггерингом на мелкой капле-сателлите (с размером на порядок ниже). Данный процесс наблюдался при типичных режимах распада струи на крупные части, сопровождающихся отрывом мелких капель, при определенных диапазонах чисел Re и Oh . Таким образом, показана возможность возникновения парового взрыва еще на начальном этапе первой стадии (премиксинга) принятой последовательности его развития.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-79-01062, <https://rscf.ru/project/23-79-01062/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fletcher D.F., Theofanous T.G. Heat Transfer and Fluid Dynamic Aspects of Explosive Melt–Water Interactions // *Advances in heat transfer*. 1997. V. 29. P. 129–213. [https://doi.org/10.1016/S0065-2717\(08\)70185-0](https://doi.org/10.1016/S0065-2717(08)70185-0)
2. Berthoud G. Vapor explosions // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2000. V. 32. № 1. P. 573–611. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.32.1.573>
3. Мелихов В.И., Мелихов О.И., Якуш С.Е. Термическое взаимодействие высокотемпературных расплавов с жидкостями // *ТВТ*. 2022. Т. 60. № 2. С. 280–318. <https://doi.org/10.31857/S0040364422020284>
4. Мелихов В.И., Мелихов О.И., Волков Г.Ю., Якуш С.Е., Салех Б. Моделирование струйного истечения жидкости в затопленное пространство методом VOF // *Теплоэнергетика*. 2023. № 1. С. 75–86. <https://doi.org/10.56304/S0040363622120050>
5. Ивочкин Ю.П. Исследование механизмов термогидродинамических и МГД процессов с жидкометаллическими рабочими телами: дис. ... докт. техн. наук. М.: ОИВТ РАН, 2015.
6. Клименко А.В., Вавилов С.Н., Васильев Н.В., Зейгарник Ю.А., Скибин Д.А. Паровой взрыв: экспериментальные наблюдения стадии спонтанного триггеринга процесса // *Доклады РАН. Физика, технические науки*. 2022. Т. 503. С. 13–16. <https://doi.org/10.31857/S2686740022010084>
7. Васильев Н.В., Вавилов С.Н., Зейгарник Ю.А. Визуализация процессов, происходящих при самопроизвольном триггеринге парового взрыва // *Научная визуализация*. 2023. Т. 15. № 2. С. 38–44. <https://doi.org/10.26583/sv.15.2.04>
8. Manickam L., Qiang G., Ma W., Bechta S. An experimental study on the intense heat transfer and phase change during melt and water interactions // *Experimental Heat Transfer*. 2019. V. 32. № 3. P. 251–266. <https://doi.org/10.1080/08916152.2018.1505786>
9. Simons A., Bellemans I., Crivits T., Verbeken K. The effect of vapour formation and metal droplet temperature and mass on vapour explosion behavior // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2022. V. 196. 123289. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2022.123289>
10. Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю. Эволюция формы последовательных каверн импакта свободно падающей капли // *Доклады РАН. Физика, технические науки*. 2022. Т. 502. С. 36–44. <https://doi.org/10.31857/S2686740021060055>
11. Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю. Перенос вещества капли при формировании первичной каверны // *Доклады РАН. Физика, технические науки*. 2023. Т. 508. С. 42–52. <https://doi.org/10.31857/S2686740022060062>
12. Saito S., Abe Y., Koyama K. Flow transition criteria of a liquid jet into a liquid pool // *Nuclear*

- engineering and design. 2017. V. 315. P. 128–143.
<https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2017.02.011>
13. *Катышев С.Ф., Десятник В.Н.* Плотность и поверхностное натяжение расплавов системы NaF–NaCl–ZrF₄ // Атомная энергия. 1998. Т. 84. № 1. С. 61–64.
14. *Hansson R.C., Dinh T.N., Manickam L.T.* A study of the effect of binary oxide materials in a single droplet vapor explosion // Nuclear Engineering and Design. 2013. V. 264. P. 168–175.
<https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2013.02.017>

EXPERIMENTAL STUDYING OF VAPOR EXPLOSION TRIGGERING DURING THE BREAKUP OF A MOLTEN SALT JET

N. V. Vasil'ev^{a,b}, S. N. Vavilov^a, E. A. Lidzhiev^{a,b}

^a*Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*Bauman Moscow State Technical University (National Research University), Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS O. F. Petrov

The paper presents an experimental study using high-speed video recording of the process of vapor explosion on a breakup jet of molten NaCl salt in water. The regimes of jet breakup into large parts, accompanied by the separation of small satellite droplets, have been studied. For the first time, the propagation of a vapor explosion on two large fragments of jet breakup due to spontaneous triggering of the process on a droplet-satellite was reproduced and recorded under laboratory conditions. The possibility of a vapor explosion occurring at the initial stage of the first stage of coarse crushing and mixing of the melt jet is shown.

Keywords: vapor explosion, subcooled water, molten salt, jet breakup, droplet-satellite, triggering, high speed video recording

УДК 523.6

ПАРАМЕТРЫ УДАРНОГО СЖАТИЯ ГРАФИТА НА НАЧАЛЬНЫХ СТАДИЯХ ФОРМИРОВАНИЯ ПОПИГАЙСКОЙ АСТРОБЛЕМЫ

© 2024 г. В. В. Ким^{1,*}, С. И. Мартыненко¹, А. В. Острик¹, К. В. Хищенко¹,
член-корреспондент РАН И. В. Ломоносов¹

Поступило 14.12.2023 г.

После доработки 14.12.2023 г.

Принято к публикации 25.12.2023 г.

Для изучения гипотезы о метеоритном происхождении месторождения импактных алмазов, расположенного в бассейне реки Попигай, проведено численное моделирование процесса высокоскоростного удара массивного астероида с поверхностью Земли. В двумерной осесимметричной постановке моделируется нормальное соударение хондритного астероида со слоистой структурой земного грунта со скоростью 25 км/с. Слой природного углерода располагается в приповерхностной зоне нагружаемой области. Расчеты проведены с использованием многомерной параллельной реализации метода конечно-размерных частиц в ячейке. Для описания свойств материала метеорита и грунта используются модели уравнений состояния хондрита, кварца и углерода. Получены термодинамические параметры ударного сжатия материалов грунта на начальных стадиях процессов нагружения и кратерообразования.

Ключевые слова: высокоскоростной удар, численное моделирование, углерод, хондрит

DOI: 10.31857/S2686740024040024, EDN: JPOGGW

Крупнейшие в мире месторождения импактных алмазов “Скальное”/”Ударное”, расположенные в районе Попигайского ударного кратера, вероятно, возникли в результате концентрированного ударного воздействия от падения крупного астероида на поверхность Земли около 36 млн лет назад [1]. В результате удара большие скопления природного углерода подверглись быстрому нагреву и сжатию до экстремальных температур и давлений и, как следствие, фазовому превращению графит-алмаз [2, 3]. В настоящей работе проведено теоретическое исследование методами вычислительной газовой динамики процесса высокоскоростного удара массивного астероида по слоистой структуре земного грунта, для определения значений термодинамических

параметров происходящего при этом процесса ударного сжатия углерода, сконцентрированного в приповерхностных слоях.

В двумерной осесимметричной постановке моделируется удар пористого хондритного микрометеорита ($D = 7$ км, $\rho_0 = 3$ г/см³, $V_0 = 25$ км/с) по поверхности Земли, представленной в виде последовательности слоев углерода и кварца. Мощность углеродосодержащего слоя в районе Попигайского кратера оценивается толщиной от 1 до 1.3 км. В расчете начальные толщины слоев составляют 1.2, 12 и 50 км, с начальными плотностями вещества $\rho_0 = 1.3, 2.6$ и 2.8 г/см³ соответственно. На рис. 1 схематично показана постановка эксперимента.

В настоящей работе для моделирования течения многокомпонентной многофазной сжимаемой среды используется численный метод конечно-размерных частиц в ячейке [4]. Метод относится к лагранжево-эйлеровым методам. Изначально “частичная” природа метода оставляет возможность точного отслеживания

¹Федеральный исследовательский центр проблем химической физики и медицинской химии Российской академии наук,

Черноголовка, Московская обл., Россия

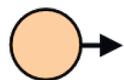
* E-mail: kim@fcr.ac.ru

положения и ориентации контактных и свободных границ в произвольных комбинациях и позволяет в любой момент времени точно сопоставить каждому конкретному элементу среды используемую компоненту / фазу / тело / модель. Практически отсутствуют проблемы расчета “смешанных” и “схлопывающихся” расчетных ячеек, которые присущи чисто эйлеровым методам. Метод успешно использовался для решения задач физики экстремальных состояний, моделирования высокоскоростного пробивания металлических преград [4], космических импактных экспериментов DeepImpact, LCROSS, APOPHIS, задач по генерации экстремальных состояний в металлах интенсивными ионными и протонными пучками. Для описания поведения материалов метеорита и грунта используются широкодиапазонные уравнения состояния [4].

На начальных стадиях процесса внедрения метеорита в грунт давления во фронте головной ударной волны достигают значения 240 ГПа. За первую секунду метеорит проникает на глубину 22 км, диаметр воронки при этом составляет 16 км. Материал ударника разогревается до температуры $T = 110$ КК.

На рис. 2 представлено расчетное поле распределения плотности в материале метеорита и грунта при $t = 10$ с. К этому моменту фронт

Хондрит
 $D = 7$ км
 $\rho_0 = 3$ г/см³
 $V_0 = 25$ км/с



Углерод
 $h_1 = 1.2$ км
 $\rho_0 = 1.3$ г/см³

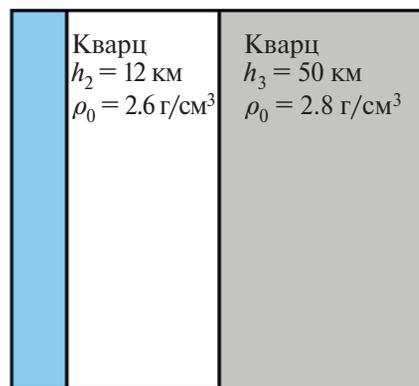


Рис. 1. Постановка задачи.

ударной волны уходит вглубь на глубину 50 км, контактная граница ударника углубляется до 42 км, диаметр воронки составляет 38 км. При этом максимальное давление во фронте волны спадает до 0.9 ГПа.

Со снижением давления сжатия происходит замедление процесса углубления кратера, после чего моделируемая стадия сжатия заканчивается. Далее на стадии экскавации происходит модификация воронки с обрушением стенок кратера.

Таким образом, проведено теоретическое исследование газодинамики начальных этапов процесса удара метеорита по поверхности Земли методами численного моделирования в двумерной постановке. Получены значения газодинамических параметров ударного сжатия

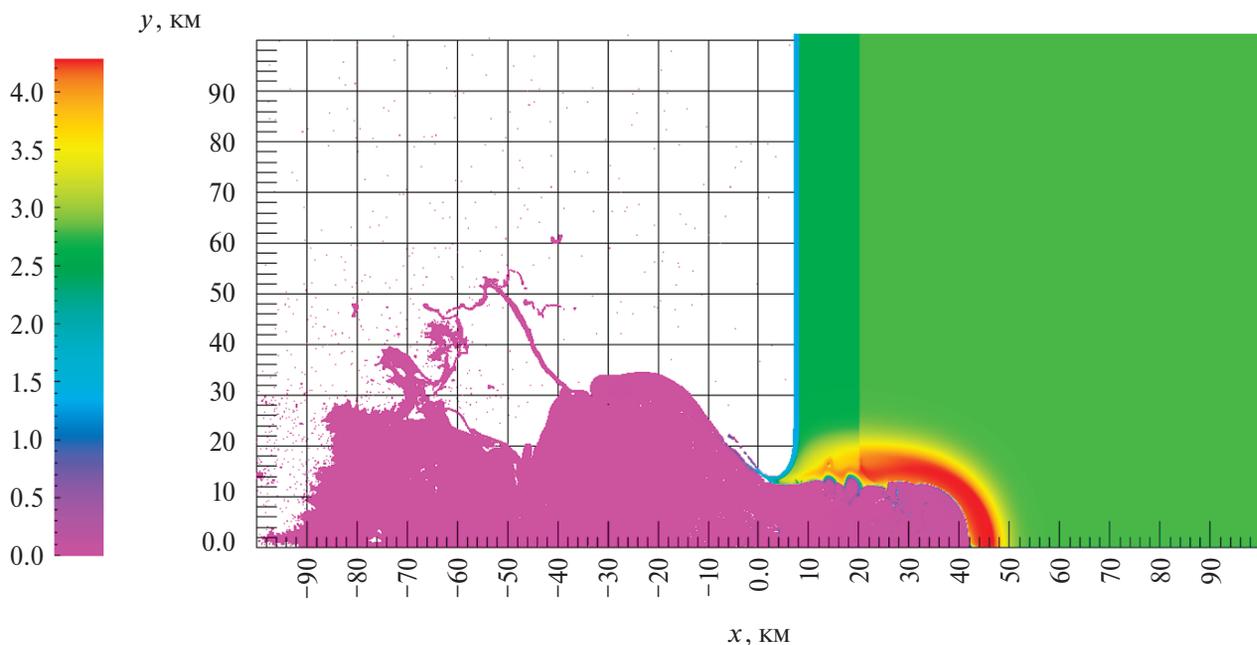


Рис. 2. Результаты расчета. Поле распределение плотности в момент времени 10 с.

и результирующие параметры образовавшегося кратера.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 21-72-20023).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Щербаков И.А. Некоторые приоритетные результаты, полученные в области физики в 2019 году (из отчетного доклада академика-секретаря ОФН РАН) // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2020. Т. 492. № 1. С. 4–53.
2. Маса́йтис В.Л. Там, где алмазы. СПб.: Изд-во ВСЕГЕИ, 2016. 384 с. ISBN 978-5-93761-241-0
3. Hazards due to comets and asteroids. Ed. T. Gehrels. Univ. of Arizona Press. 1996. 1300 p.
4. Fortov V.E., Kim V.V., Lomonosov I.V., Matveichev A.V., Ostrik A.V. Numerical modeling of hypervelocity impacts // Int. J. Impact Eng. 2006. V. 33 (1–12). P. 244.

PARAMETERS OF GRAPHITE SHOCK COMPRESSION AT THE INITIAL STAGES OF POPIGAI ASTROBLEME FORMATION

V. V. Kim^a, S. I. Martynenko^a, A. V. Ostrik^a, K. V. Khishchenko^a,
Corresponding Member of the RAS I. V. Lomonosov^a

^a*Federal Research Center of Problems of Chemical Physics and Medicinal Chemistry,
Russian Academy of Sciences, Chernogolovka, Moscow Region, Russia*

A numerical modeling of the process of a high-speed impact of a massive asteroid with the Earth's surface was carried out to study the hypothesis of the meteoritic origin of the impact diamond deposit located in the Popigai River basin. A normal collision of a chondritic asteroid with a layered structure of the Earth's soil at a speed of 25 km/s is simulated in 2D axisymmetric formulation. The natural carbon deposit layer is located in the near-surface zone of the loaded area. The calculations were carried out using a multidimensional parallel implementation of the finite-size particle-in-cell method. Models of the equations of state of chondrite, quartz and carbon are used to describe the properties of the meteorite and soil material. Thermodynamic parameters of impact compression of soil materials at the initial stages of loading and crater formation processes are obtained.

Keywords: hypervelocity impact, numerical modeling, graphite, chondrite

УДК 539.3

УДАЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНОСТИ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ ВИЛЛЬЯМСА (1952) НА ОСНОВЕ НЕЕКЛИДОВОЙ МОДЕЛИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

© 2024 г. Академик РАН М. А. Гузев^{1,2,*}

Поступило 18.03.2024 г.

После доработки 18.03.2024 г.

Принято к публикации 11.06.2024 г.

Рассматривается сингулярное решение для поля упругих напряжений в задаче Вилльямса о равновесии пластин с угловыми вырезами. Построена схема минимального расширения классической модели упругой сплошной среды на пути отказа от условия совместности Сен-Венана для деформаций, что приводит к неевклидовой модели сплошной среды. В рамках этой модели показано, что поле полных напряжений не содержит сингулярности для всех углов выреза.

Ключевые слова: сингулярные поля напряжений, функция напряжений Эйри, асимптотический метод Вилльямса, неевклидова модель

DOI: 10.31857/S2686740024040037, EDN: JPKWKG

В механике сплошной среды хорошо известен факт существования сингулярных решений для компонент поля напряжений σ_{ij} в задачах теории упругости о равновесии пластин с угловыми вырезами [1]. Построенное Вилльямсом [1] такое решение для плоских конфигураций связано с введением функции напряжения Эйри Ψ . При выполнении уравнений равновесия Коши

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

решение для σ_{ij} записывается через Ψ в виде

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2 \partial x^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^1 \partial x^1}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^1 \partial x^2}. \quad (2)$$

В классической теории упругости функция напряжений Ψ_{clas} удовлетворяет бигармоническому уравнению [2]:

$$\Delta^2 \Psi_{clas} = 0. \quad (3)$$

¹Институт прикладной математики
Дальневосточного отделения
Российской академии наук,
Владивосток, Россия

²Пермский национальный исследовательский
политехнический университет, Пермь, Россия
*E-mail: guzev@iam.dvo.ru

В [1] выбирается регулярное решение χ для этого уравнения в полярной системе координат (r, φ) :

$$\chi = r^{\lambda+1} [b_1 \cos(1 + \lambda)\varphi + b_2 \sin(1 + \lambda)\varphi + b_3 \cos(1 - \lambda)\varphi + b_4 \sin(1 - \lambda)\varphi], \quad (4)$$

где λ – параметр, b_1, b_2, b_3, b_4 – постоянные. В [1] показано, что параметр $\lambda < 1$ при углах выреза пластины между π и 2π . Поскольку компоненты поля упругих напряжений τ_{ij} равны

$$\tau_{rr} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r}, \quad \tau_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}, \quad (5)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \varphi},$$

то из (4), (5) следует, что они проявляют сингулярное поведение $\sim r^{\lambda-1} \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$. Именно на эту сингулярность поля упругих напряжений указал Вилльямс [1] и предложил асимптотический метод их исследования в окрестности угла выреза. В дальнейшем подход Вилльямса вошел в фольклор механики упругости [2], а в современных работах [3] предложены идеи использовать этот подход в вычислительных методах для повышения их эффективности

в узлах сетки вблизи вершины угла. С другой стороны, в физических теориях прочности и пластичности [4] сингулярности полей напряжений также рассматриваются и предлагаются способы их удаления. Тем не менее, для сингулярности Вилльямса такого способа не представлено в научной литературе, поэтому целью данной работы является восполнение данного пробела.

Следует заметить, что поля, определяемые соотношением (2), принадлежат к более широкому классу напряжений: они являются самоуравновешенными. Это означает [5], что сила, действующая на выбранную область среды, равна нулю и суммарный момент сил внутренних напряжений обращается в нуль. Математически сформулированные условия записываются соответственно в виде:

$$\int_{\partial S} \sigma_{ij} n_j dl = 0, M_{ik} = \int_{\partial S} (\sigma_{ij} x_k - \sigma_{kj} x_i) n_j dl = 0, \quad (6)$$

где S – площадь, занимаемая телом; ∂S – граница этой области, n_j – направляющие косинусы внешней нормали к границе области. Самоуравновешенные поля напряжений в инженерной литературе также называются остаточными напряжениями – это напряжения, которые существуют внутри материала или тела, когда на него не действуют внешние силы. При экспериментальном исследовании [4] этих полей не наблюдается их сингулярного поведения, хотя они могут иметь значения, сравнимые с напряжениями, возникающими при внешних воздействиях. Описание этих полей на основе классической теории упругости, т.е. используя соотношения (2), (3) для функции напряжения, приводит к сингулярностям. Однако возникшее противоречие может быть преодолено на основе обобщения классической теории.

Возможный подход в этом направлении был предложен С.К. Годуновым [6] и связан с расширением геометрических оснований классической теории упругости. Хорошо известно, что шесть компонент классического тензора деформаций ε_{ij} выражаются только через три компоненты вектора перемещений, поэтому функции ε_{ij} не могут быть произвольными и должны удовлетворять дополнительным ограничениям, которые в механике сплошной среды называются условиями совместности для деформаций. Эти условия сводятся к тому, что тензор

Римана–Кристоффеля, вычисленный для метрического тензора деформации $g_{ij} = \delta_{ij} - 2\varepsilon_{ij}$ [6], обращается в нуль. С геометрической точки зрения это означает, что пространство, соответствующее данной метрике, является евклидовым. Однако Годуновым было замечено, что классические компоненты деформаций ε_{ij} не совпадают в общем случае с деформациями E_{ij} , определяемыми через реологическое соотношение между компонентами поля напряжений и деформаций даже для линейной связи (8) (в [6] поля E_{ij} называются эффективными). Поэтому тензор Римана–Кристоффеля, вычисленный для эффективного метрического тензора деформации $G_{ij} = \delta_{ij} - 2E_{ij}$, в общем случае не равен нулю, т.е. пространство для описания эффективных деформаций становится неевклидовым. Таким образом, общая идея при обобщении классической теории состоит в отказе от классических условий совместности, что приводит к необходимости построения неевклидовой модели сплошной среды.

Используем сформулированную идею при анализе проблемы Вилльямса. Известно, что в двумерном случае тензор Римана–Кристоффеля определяется единственной компонентой [7], и для рассматриваемых нами малых деформаций $|E_{ij}| \ll 1$ отличие ее от нуля задается через функцию несовместности:

$$\frac{R}{2} = \frac{\partial^2 E_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{22}}{\partial x^1 \partial x^1} - 2 \frac{\partial^2 E_{12}}{\partial x^1 \partial x^2}. \quad (7)$$

В классической теории упругости $R = 0$, что соответствует выполнению условий совместности для деформаций (условия Сен-Венана) и существованию таких функций u_1, u_2 , что $E_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$. В механике сплошной среды функции u_1, u_2 определяют поле смещений точек среды и E_{ij} совпадают с классическими компонентами деформаций: $E_{ij} = \varepsilon_{ij}$.

Переход к неевклидовой модели сплошной среды связан с предположением, что $R \neq 0$. Реологическое соотношение между компонентами поля напряжений и эффективными деформациями E_{ij} оставим линейным как в классической теории (закон Гука):

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} E_{kk} + 2\mu E_{ij}, \quad (8)$$

где λ , μ – феноменологические параметры Ламе, δ_{ij} – символ Кронекера. Выразим E_{ij} из (8) и подставим в (7), что приводит к уравнению для $\sigma = \sigma_{ij}$:

$$\Delta\sigma = \frac{\mu}{1-\nu}R, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Используя (2), получаем уравнение для функции напряжений Ψ :

$$\Delta^2\Psi = \frac{\mu}{1-\nu}R. \quad (9)$$

Таким образом, при расширении классической теории мы получили неоднородное бигармоническое уравнение для функции напряжения (9). Поскольку оно является линейным, то его решение Ψ можно представить в виде суммы классической функции напряжений Ψ_{clas} и дополнительного вклада $\Psi_{non-clas}$:

$$\Psi = \Psi_{clas} + \Psi_{non-clas}, \quad (10)$$

где $\Psi_{non-clas}$ – частное решение (9). Подставляя (10) в (2), получаем следующие представления для компоненты поля напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \tau_{11} + T_{11}, \quad \tau_{11} = \frac{\partial^2\Psi_{clas}}{\partial x^2\partial x^2}, \quad T_{11} = \frac{\partial^2\Psi_{non-clas}}{\partial x^2\partial x^2}, \\ \sigma_{22} &= \tau_{22} + T_{22}, \quad \tau_{22} = \frac{\partial^2\Psi_{clas}}{\partial x^1\partial x^1}, \quad T_{22} = \frac{\partial^2\Psi_{non-clas}}{\partial x^1\partial x^1}, \quad (11) \\ \sigma_{12} &= \tau_{12} + T_{12}, \quad \tau_{12} = -\frac{\partial^2\Psi_{clas}}{\partial x^1\partial x^2}, \quad T_{12} = -\frac{\partial^2\Psi_{non-clas}}{\partial x^1\partial x^2}. \end{aligned}$$

Из (11) видно, что структура поля внутренних напряжений складывается из классического поля упругих напряжений τ_{ij} и неклассического поля напряжений T_{ij} , определяемого через функцию несовместности R .

Функция R использовалась при формулировке моделей сплошных сред с внутренней структурой [8], и в предположении квадратичной зависимости внутренней энергии среды от термодинамических переменных было получено уравнение для R в следующем виде:

$$\Delta^2R = \gamma R, \quad \gamma \neq 0, \quad (12)$$

где параметр γ характеризует размер внутренней пространственной структуры. Перейдем к безразмерным переменным $x^i \rightarrow x^i/\sqrt[4]{\gamma}$ и выполним перенормировку для σ_{ij}, Ψ, R ,

полагая $\sigma_{ij} \rightarrow \mu\sigma_{ij}$, $\Psi \rightarrow \Psi\mu/\sqrt{\gamma}$, $R \rightarrow R\sqrt{\gamma}(1-\nu)$, получаем

$$\Delta^2\Psi = R, \quad \Delta^2R = R. \quad (13)$$

Тогда из (10), (13) следует, что $\Psi_{non-clas}$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\Delta^2\Psi_{non-clas} = \Psi_{non-clas}. \quad (14)$$

При построении решений уравнений (3), (14) выберем из них такие, чтобы полное поле σ_{ij} (11) не имело сингулярного поведения при $r \rightarrow 0$. Это обеспечивается при условии, что возможные сингулярности компонент τ_{ij}, T_{ij} взаимно компенсируются и разложение функции напряжений (10) по степеням r при $r \rightarrow 0$ начинается со слагаемых не ниже r^2 . Далее будет показано, что такое разложение в рамках предложенных модельных представлений реализуется (см. (21)).

Сначала заметим, что класс решений уравнения (3) является более широким, чем тот, который указан в [1]. Действительно, полагая $\Psi_{clas} = r^{1+s}F(\varphi)$ в (3), получаем уравнение для $F(\varphi)$:

$$r^{s-1} \left[(1-s)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \left[(1+s)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] F(\varphi) = 0.$$

Если выбрать $s = \lambda$, $0 < \lambda < 1$, то

$$\begin{aligned} \Psi_{clas} &= r^{\lambda+1} [b_1 \cos(1+\lambda)\varphi + b_2 \sin(1+\lambda)\varphi + \\ &+ b_3 \cos(1-\lambda)\varphi + b_4 \sin(1-\lambda)\varphi] \end{aligned}$$

и построенное решение для Ψ_{clas} совпадает с χ (4). Если параметр $1+s < 0$, то функция Ψ_{clas} имеет степенную особенность. Поскольку (3) является линейным уравнением, то общее решение для классической функции напряжений Ψ_{clas} представим в виде суммы функции χ и сингулярного вклада, для которого полагаем $s = \lambda - 2$:

$$\Psi_{clas} = \chi + \frac{1}{r^{1-\lambda}} [B_1 \cos(1-\lambda)\varphi + B_2 \sin(1-\lambda)\varphi] \quad (15)$$

с некоторыми постоянными B_1, B_2 . На первый взгляд кажется, что такой выбор Ψ_{clas} приводит к увеличению порядка сингулярности классического поля упругих напряжений, создавая новую трудность при решении задачи Виллямса. Однако предварительный анализ показал, что без введения B_1, B_2 не удастся замкнуть

задачу выбора всех коэффициентов в неевклидовой модели.

В полярной системе координат решение уравнения (14) представим через цилиндрические функции вещественного и мнимого аргументов. Эвристический рецепт их выбора можно сформулировать следующим образом: при $r \rightarrow 0$ компоненты T_{ij} должны иметь сингулярности того же порядка по r , что и функции τ_{ij} . Тогда решение уравнения (14) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Psi_{non-clas} = & J_{1+\lambda}(r)(a_1 \cos(1 + \lambda)\varphi + \\ & + a_2 \sin(1 + \lambda)\varphi) + \\ & + I_{-1+\lambda}(r)(a_3 \cos(1 - \lambda)\varphi + a_4 \sin(1 - \lambda)\varphi), \end{aligned} \quad (16)$$

где $J_{1+\lambda}(r)$ – функция Бесселя, $I_{-1+\lambda}(r)$ – модифицированная функция Бесселя, a_1, a_2, a_3, a_4 – постоянные. Справедливы следующие асимптотические представления для $J_{1+\lambda}(r), I_{-1+\lambda}(r)$ при $r \rightarrow 0$ [9]:

$$\begin{aligned} J_{1+\lambda}(r) = & \left(\frac{r}{2}\right)^{1+\lambda} \left(1 - \frac{1}{\Gamma(2+\lambda)}\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^4 S_1(r)\right), \\ I_{-1+\lambda}(r) = & \left(\frac{r}{2}\right)^{-1+\lambda} \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\Gamma(1+\lambda)}\left(\frac{r}{2}\right)^4 + \left(\frac{r}{2}\right)^6 S_2(r)\right), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция, $S_1(r), S_2(r)$ – аналитические функции, ограниченные при $r \rightarrow 0$. Из (16), (17) видно, что при $r \rightarrow 0$ ведущий вклад $\Psi_{non-clas}$ имеет порядок $r^{-1+\lambda}$ и он является сингулярным, такая же сингулярность присутствует в последнем слагаемом (15) для Ψ_{clas} . Полная функция напряжений Ψ (10) не должна содержать такого сингулярного вклада при $r \rightarrow 0$. Данное условие справедливо, если коэффициент при нем равен нулю, что приводит к следующим ограничениям на выбор постоянных:

$$B_1 + a_3 2^{1-\lambda} = 0, B_2 + a_4 2^{1-\lambda} = 0. \quad (18)$$

Следующий член в разложении Ψ по r содержит слагаемые $\sim r^{1+\lambda}$. Выше было указано, что это разложение должно включать слагаемые порядка не ниже r^2 , тогда, приравнявая нулю

коэффициенты при $r^{1+\lambda}$ для различных тригонометрических функций, получим систему соотношений

$$\begin{aligned} b_1 - \frac{a_1}{2^{1+\lambda}} = 0, b_2 - \frac{a_2}{2^{1+\lambda}} = 0, \\ b_3 + \frac{a_3}{2^{1+\lambda}\Gamma(\lambda)} = 0, b_4 + \frac{a_4}{2^{1+\lambda}\Gamma(\lambda)} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

При выполнении условий (18), (19) разложение функции Ψ по степеням r начинается со слагаемых $\sim r^{3+\lambda}$ и дается формулой

$$\begin{aligned} \Psi = \Psi_{clas} + \Psi_{non-clas} = & -\left(\frac{r}{2}\right)^{3+\lambda} \frac{1}{\Gamma(2+\lambda)}(a_1 \cos(1 + \lambda)\varphi + \\ & + a_2 \sin(1 + \lambda)\varphi) + \left(\frac{r}{2}\right)^{3+\lambda} \frac{1}{2\Gamma(1+\lambda)}(a_3 \cos(1 - \lambda)\varphi + \\ & + a_4 \sin(1 - \lambda)\varphi) + \left(\frac{r}{2}\right)^{5+\lambda} \Omega_\lambda(r, \varphi), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Omega_\lambda(r, \varphi) = & S_1(r)(a_1 \cos(1 + \lambda)\varphi + a_2 \sin(1 + \lambda)\varphi) + \\ & + S_2(r)(a_3 \cos(1 - \lambda)\varphi + a_4 \sin(1 - \lambda)\varphi). \end{aligned}$$

Если переопределить коэффициенты в (20), полагая

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{2}\right)^{3+\lambda} \frac{1}{\Gamma(2+\lambda)} a_1 = A_1, \quad -\left(\frac{1}{2}\right)^{3+\lambda} \frac{1}{\Gamma(2+\lambda)} a_2 = A_2, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{3+\lambda} \frac{1}{2\Gamma(1+\lambda)} a_3 = A_3, \quad \left(\frac{r}{2}\right)^{3+\lambda} \frac{1}{2\Gamma(1+\lambda)} a_4 = A_4, \end{aligned}$$

то функция напряжений Ψ равна

$$\Psi = r^{\lambda+3} \Phi_\lambda(\varphi) + \left(\frac{r}{2}\right)^{5+\lambda} \Omega_\lambda(r, \varphi),$$

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(\varphi) = & A_1 \cos(1 + \lambda)\varphi + A_2 \sin(1 + \lambda)\varphi + \\ & + A_3 \cos(1 - \lambda)\varphi + A_4 \sin(1 - \lambda)\varphi. \end{aligned} \quad (21)$$

Отсюда видно, что ведущее слагаемое в функции напряжений имеет порядок $r^{\lambda+3}$ при $r \rightarrow 0$. Следовательно, в полярной системе координат компоненты полного поля напряжений σ_{ij} имеют порядок $r^{\lambda+1}$ и не содержат сингулярностей при $r \rightarrow 0$ для $\lambda < -1$.

Выполненные вычисления показали, что проблема Вилльямса допускает решение и реализуется на пути расширения классической теории с переходом к неевклидовой модели

сплошной среды. В рамках этой модели удалось перейти к несингулярному полю полных напряжений, в котором сингулярность поля упругих напряжений была скомпенсирована дополнительным полем, источником которого является несовместность поля деформаций.

Сделаем некоторые замечания относительно выбора параметра λ . В построенном решении (21) значение λ не было фиксировано. Однако при решении краевых задач может возникать дополнительное ограничение на λ . В качестве примера рассмотрим свободные условия на границе углового выреза [1]:

$$\sigma_{\varphi\varphi}|_{\varphi=0} = \sigma_{r\varphi}|_{\varphi=0}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}|_{\varphi=\alpha} = \sigma_{r\varphi}|_{\varphi=\alpha} = 0.$$

Тогда из (2), (21) в ведущем порядке по $r \rightarrow 0$ получаем $\Phi(0) = \Phi'(0) = \Phi(\alpha) = \Phi'(\alpha) = 0$, где штрих обозначает дифференцирование по φ . Линейное уравнение для нахождения постоянных A_k , $k = 1, 2, 3, 4$, является однородным и имеет нетривиальное решение при обращении детерминанта системы в нуль, что дает следующее условие:

$$\sin \lambda \alpha = \pm \lambda \sin \alpha. \quad (22)$$

Сравнение соотношения (22) со спектральным уравнением (15) [1] показывает, что они совпадают. Значит, определяемая из (22) функциональная зависимость $\lambda = \lambda(\alpha)$ такая же, как и у Вилльямса. Следовательно, предложенная в данной работе процедура удаления указанной Вилльямсом сингулярности сохраняет классические спектральные соотношения в случае свободных краевых условий.

В общем случае значение параметра λ не фиксируется. Поскольку (3), (14) являются линейными уравнениями, то общее решение для функции напряжений можно представить в виде линейной комбинации решений (21) для различных λ . Такое решение для поля полных напряжений не содержит сингулярностей при

$r \rightarrow 0$ для $\lambda < -1$ и может быть полезным для моделирования физических процессов в отсутствии осевой симметрии.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-19-00447, <https://rscf.ru/project/22-19-00447/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Williams M.L.* Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension // *J. Applied Mechanics*. 1952. V. 19 (4). P. 526–528. <https://authors.library.caltech.edu/records/2zph7-ee089>
2. *Barber J.R.* Wedge Problems. In *Elasticity. Part of the book series: Solid Mechanics and Its Applications*. V. 172. Dordrecht: Springer, 2010. P. 149–170. https://doi.org/10.1007/978-90-481-3809-8_11
3. *Pan W., Cheng C., Wang F., Hu Z., Li J.* Determination of singular and higher order non-singular stress for angularly heterogeneous material notch 292 // *Engineering Fracture Mechanics*. 2023. 109592. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2023.109592>
4. *Sinclair G.B.* Stress Singularities in Classical Elasticity—I: Removal, Interpretation and Analysis // *Applied Mechanics Reviews*. 2004. V. 57(4). P. 251–297. <http://dx.doi.org/10.1115/1.1762503>
5. *Мясников В.П., Гузев М.А.* Геометрическая модель внутренних самоуравновешенных напряжений в твердых телах // *ДАН*. 2001. Т. 380. № 5. С. 627–629.
6. *Годунов С.К., Роменский Е.И.* Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Научная книга, 1998. 280 с.
7. *Новиков С.П., Тайманов И.А.* Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005. 584 с.
8. *Гузев М.А.* Структура кинематического и силового поля в Римановой модели сплошной среды // *ПМТФ*. 2011. Т. 52. № 5. С. 39–48.
9. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

REMOVAL OF THE STRESS FIELD SINGULARITY FOR THE WILLIAMS PROBLEM (1952) BASING ON A NON-EUCLIDEAN CONTINUUM MODEL

Academician of the RAS **M. A. Guzey**^{a,b}

^a*Institute for Applied Mathematics Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russia*

^b*Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia*

A singular solution for the elastic stress field in the Williams problem on the equilibrium of plates with corner cutouts is considered. A scheme has been constructed for the minimal expansion of the classical elastic continuum model without taking into account the Saint-Venant compatibility conditions for deformations, which leads to a non-Euclidean continuum model. Within this model framework, the total stress field is shown to contain no singularity for all cutout angles.

Keywords: singular stress fields, Airy stress function, Williams' asymptotic method, non-Euclidean continuum model

УДК 532.5

ЭВОЛЮЦИЯ ВИХРЕЙ ПРИ СЛИЯНИИ КАПЛИ ЭТАНОЛА С ВОДОЙ В ИНТРУЗИВНОМ РЕЖИМЕ

© 2024 г. Б. Джудар^{1,*}, А. Ю. Ильиных^{2,**}, Ю. Д. Чашечкин^{2,***}

Представлено академиком РАН Д.М. Климовым 11.03.2024 г.

Поступило 15.03.2024 г.

После доработки 14.06.2024 г.

Принято к публикации 17.06.2024 г.

Методом высокоскоростной видеорегистрации прослежена эволюция вихрей, образующихся при слиянии с водой свободно падающей капли 95%-ного водного раствора этанола, подкрашенного бриллиантовым зеленым. В интрузивном режиме, когда потенциальная поверхностная энергия больше или одного порядка с ее кинетической энергией, капля более плотной жидкости плавно втекает и формирует в толще принимающей жидкости погружающуюся чечевицеобразную интрузию, которая постепенно трансформируется в кольцевой вихрь. Интрузия более легкой жидкости начинает всплывать и постепенно стягивается вокруг каверны, которая принимает коническую форму. От центра заостренного дна каверны, достигшей максимальной глубины, в толщу жидкости выталкивается компактный объем, содержащий легкую жидкость капли. После схлопывания каверны первичная интрузия расплывается вдоль свободной поверхности. При этом погружающийся объем трансформируется в небольшой сферический вихрь, который, достигнув максимальной глубины, останавливается и образует компактную вторичную интрузию, вытянутую по вертикали. Далее центральная часть вторичной интрузии начинает всплывать и трансформируется в новый кольцевой вихрь. Диаметр вихря увеличивается по мере приближения к свободной поверхности. Медленно всплывающая оболочка интрузии образует бутылкообразное основание цилиндрического следа кольцевого вихря, окрашенного пигментом капли. Прослежены изменения размеров основных структурных компонентов в ходе эволюции картины течения.

Ключевые слова: эксперимент, разноплотные жидкости, интрузия, каверна, погружающийся и всплывающий вихри, след

DOI: 10.31857/S2686740024040046, EDN: JPIUAA

Научный интерес к изучению кольцевых вихрей, сформировавшийся к середине XIX в. [1], стимулировал поиск удобных методов их создания и наблюдения в лабораторных условиях. В их число вошел и процесс слияния свободно падающей капли с покоящейся жидкостью, в котором самопроизвольно формируются небольшие вихри. Четкая фотография погружающегося кольцевого вихря,

образующегося при слиянии единичной капли с водой [2], привлекла внимание современников и была воспроизведена на суперобложке популярного трактата [3]. Первые результаты изучения влияния физических свойств жидкостей и высоты свободного падения капли на параметры вихревого кольца приведены в [4]. Выборки из кинофильмов, иллюстрирующие эволюцию формы каверны и интрузии, содержащей пигментированную жидкость капли, которая постепенно трансформируется в тороидальный вихрь, представлены в [5]. Влияние вязкости на формирование завихренности при слиянии падающей капли с жидкостью обсуждается в [6]. Подсветка картины течения рентгеновскими лучами позволила предельно

¹Университет науки и технологий Орана имени Моххамеда Будиафа, Оран, Алжир

²Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: bochra.djoudar@univ-usto.dz

** E-mail: ilynukh@ipmnet.ru

*** E-mail: chakin@ipmnet.ru

сократить длительность выдержки и получить четкие изображения формирующихся кольцевых вихрей и тонких струй, вылетающих в воздух на границе области слияния жидкостей [7]. При изучении влияния контактной скорости и формы капли на структуру течения установлено, что наиболее устойчивые вихри образуются на границе диапазона перехода формы осциллирующей в полете капли от сферической к вытянутой по вертикали [8].

Фотографии последовательности регулярных распадов кольцевых вихрей импакта капли на множественные петли, на вершинах которых формируются собственные вихри, образующие вихревые ярусы, приведены в [9]. Эволюция тонкой структуры картины течений в интрузивном и импактном режимах слияния свободно падающей капли прослежена в [10]. Выразительные фотографии каскадов вихревых систем, наблюдаемых в воде при погружении капель раствора глицерина различной концентрации, имеющего большую плотность и вязкость, чем принимающая жидкость, приведены в [11]. Эволюция картины столкновения летящих капель этанола и воды визуализирована в [12].

В большинстве опытов с изучением вихревого движения в бассейн с водой падали капли, плотность жидкости которых незначительно [9, 10] или существенно [11] превосходит плотность принимающей среды. В таких условиях импульс капли, градиент плавучести, обусловленный разностью плотностей сливающихся жидкостей, и градиент давления, создаваемый растущей каверной, действуют в одном направлении. Сформировавшийся вихрь плавно погружается и постепенно замедляется вследствие вязкой диссипации и вовлечения окружающей среды в расширяющееся вихревое течение. Картина вихревых течений при слиянии капли жидкости меньшей плотности, чем у принимающей среды, ранее не изучалась. В данной работе впервые проведена визуализация эволюции структуры течения при слиянии капли этанола с частично дегазированной водопроводной водой в интрузивном режиме, когда кинетическая энергия капли меньше или сравнима с ее потенциальной поверхностной энергией (ППЭ). В таком режиме капля вначале плавно втекает в толщу жидкости и формирует

чечевицеобразную интрузию с внутренним тороидальным вихрем, а каверна образуется с запаздыванием [10].

Идеи универсального описания природных процессов на основе уравнений переноса энергии [13] получили существенное развитие в [14] при построении системы фундаментальных уравнений механики жидкостей — дифференциальных форм закономерностей переноса плотности, импульса и энергии с учетом уравнений состояния [15, 16], разработанных для описания динамики и структуры эволюционирующих сред. Полные решения линеаризованной системы уравнений движения [14], построенные методами теории сингулярных возмущений [17] с учетом условия совместности, составили основу классификации структурных компонентов течений [18]. Она включает и крупномасштабные волны, вихри, струи, которые характеризуют регулярные решения [14], и высокоградиентные волокна и прослойки, которым соответствуют сингулярные решения [18].

Выбор определяющих размерных параметров, характеризующих изучаемые течения, проведен с учетом [14, 18]. Жидкость или газ определяется как сплошная текучая среда, изменения внутренней энергии которой задаются дифференциалом потенциала Гиббса $dG = -s_e dT + V dP + S_b d\sigma + \mu_i dS_i$ [15]. Производные потенциала Гиббса G определяют термодинамические величины — плотность ρ и удельный объем $V = 1/\rho$, энтропию s_e , давление P , температуру T , концентрацию растворенных веществ и взвешенных частиц S_i , химический потенциал i -го компонента μ_i , коэффициент поверхностного натяжения σ . Некоторые из величин, в частности давление и плотность, имеют прямой механический и расширенный физический смысл. Производные потенциала Гиббса $G = G(\rho, P, T, S_i, \sigma)$ образуют уравнения состояния, связывающие плотность $\rho = \rho(P, T, S_i)$ с другими термодинамическими величинами, обеспечивающие замыкание системы фундаментальных уравнений [14, 18].

Молекулярный перенос импульса, температуры и вещества характеризуют коэффициенты динамической μ_i и кинематической $\nu = \mu/\rho$ вязкости, температуропроводности κ_T и диффузии κ_S . Большая теплоемкость

жидкостей позволяет в ряде задач пренебречь температурными эффектами и получать экспериментально проверяемые решения редуцированной системы фундаментальных уравнений, учитывающие гетерогенность жидкости, обеспеченную распределением солености.

В число основных размерных параметров, характеризующих изучаемые течения, входят потенциалы Гиббса капли G_d , воздушной среды G_a и принимающей жидкости G_t (индексы отмечают принадлежность), плотности $\rho_{d,a,t}$, кинематическая $\nu_{d,a,t}$ и динамическая $\mu_{d,a,t}$ вязкости; полные σ_d^a , σ_t^a и нормированные на плотность жидкости коэффициенты поверхностного натяжения контактирующих сред $\gamma_d^a = \sigma_d^a / \rho_d$, $\gamma_t^a = \sigma_t^a / \rho_t$, $\text{см}^3/\text{с}^2$; коэффициент диффузии окрашивающей каплю примеси в принимающей жидкости κ_d ; эквивалентный диаметр D , площадь поверхности S_d , объем V , масса M , высота свободного падения H и скорость капли U в момент первичного контакта; ППЭ $E_\sigma = \sigma S_d$, кинетическая энергия $E_k = MU^2/2$, потенциальная энергия в гравитационном поле с ускорением свободного падения g .

Полная энергия падающей сферической капли $E_d = E_p + E_k + E_\sigma$ складывается из потенциальной энергии E_p , экстенсивной кинетической энергии с дифференциалом $dE_k = 0.5\rho U^2 dV$, а также ППЭ, заключенной в приповерхностном шаровом слое толщиной порядка размера молекулярного кластера $\delta_\sigma \sim 10^{-6}$ см объемом $V_\sigma = \delta_\sigma S_d$ и массой $M_\sigma = \rho V_\sigma$.

Время передачи кинетической энергии E_k и импульса $\mathbf{P}_d = M\mathbf{v}$ капли $\Delta t = D/U$ в опытах составляет несколько миллисекунд и на несколько порядков превышает время конверсии ППЭ $\Delta\tau = (\delta_\sigma / U) \sim 10^{-8}$ с при уничтожении приповерхностного слоя сливающихся жидкостей толщиной $\delta_\sigma \sim 10^{-6}$ см. Быстрые процессы преобразования ППЭ в другие формы на кольцевой границе области слияния жидкостей играют определяющую роль в установлении режима течения [10].

Отношения физических величин образуют наборы собственных временных и пространственных масштабов, определяющих требования к методике измерений в части выбора размера области наблюдения течений,

пространственного и временного разрешения инструментов, а также безразмерных отношений, характеризующих капельные течения. Набор традиционных безразмерных параметров включает числа Рейнольдса $Fr_d = U^2/\nu D$, Фруда $Fr_d = U^2/gD$, Вебера $We_d = U^2 D/\gamma_d$, Бонда $Bo = gD^2/\gamma_d^a$, Онезорге $Oh_d = \nu_d/\sqrt{\gamma_d^a D}$, Шмидта $Sc = \nu_t/\kappa_d$. В силу двойственности природы параметров описания свободной поверхности, число Вебера также является мерой отношения кинетической и поверхностной энергии капли.

Различия физических свойств контактирующих сред характеризуются безразмерными отношениями, составленными по аналогии с числом Атвуда – относительной разностью плотностей $R_\rho = \frac{\rho_t - \rho_d}{\rho_t + \rho_d}$, коэффициентов поверхностного натяжения $R_\sigma = \frac{\sigma_t - \sigma_d}{\sigma_t + \sigma_d}$ и динамических вязкостей $R_\mu = \frac{\mu_t - \mu_d}{\mu_t + \mu_d}$.

Степень выраженности быстрых атомно-молекулярных процессов преобразования ППЭ и передачи кинетической энергии капли характеризуют отношения компонентов энергии $R_E = \frac{E_k}{E_\sigma}$ и их плотностей $R_W = \frac{E_k M_\sigma}{E_\sigma M}$. Отношения компонентов энергии R_E в условиях опытов меняются в широких пределах, плотность поверхностной энергии $W_\sigma = E_\sigma/V_\sigma$ – всегда большая величина в силу малости толщины области ее локализации δ_σ .

Большое число безразмерных параметров задачи отражает сложность пространственной картины течений, эволюционирующей под действием нескольких одновременно протекающих процессов с различными временными и пространственными масштабами.

Опыты выполнены на модифицированном Стенде для изучения тонкой структуры быстропротекающих процессов (ТСТ), входящем в состав Уникальной исследовательской установки УИУ “ГФК ИПМех РАН” [19]. Одиночные капли 95%-ного раствора этанола отрывались от нормального среза сменного капилляра дозатора под действием собственного веса и падали в прозрачный бассейн размером $10 \times 10 \times 7$ см или $30 \times 30 \times 5$ см, заполненный частично дегазированной водопроводной водой. Значения физических параметров рабочих жидкостей приведены в табл. 1. Область течения

Таблица 1. Физические параметры рабочих жидкостей

	$T, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{г/см}^3$	$\sigma, \text{г/с}^2$	$\gamma, \text{см}^3/\text{с}^2$	$\mu, \text{г/см} \cdot \text{с}$	$\nu, \text{см}^2/\text{с}$
Этанол, 95%	20	0.81	22.7	28.0	0.014	0.017
Вода	20	0.998	72.0	72.0	0.01	0.01

освещали два многоточечных светодиодных осветителя Optonis MultiLED со световым потоком 7700 лм, световолоконный осветитель Schott KL2500LCD и прожектор ReyLab Xenos RH-1000 мощностью 1 кВт.

Картина течения регистрировалась видеокамерой Optonis CR 300x2 или фотоаппаратом Canon EOS 350D. Горизонтальная линия визирования располагалась на уровне невозмущенной поверхности жидкости. Расстояние от линзы до центра области течения выбиралось в диапазоне от 12 до 40 см, при этом размеры пикселя лежали в диапазоне от 10 до 50 мкм. Выдержка устанавливалась минимальной при задании уровня пространственного разрешения, размера регистрируемой области и освещенности. Во всех опытах скорость съемки составляла 4000 кадров/с. При подготовке эксперимента внимание уделялось организации светового потока, обеспечивающего визуализацию тонкой структуры основных элементов течения – интрузии, каверны, вихрей, волн на всех этапах эволюции течения. Перед каждым опытом проводилась регистрация масштабного маркера.

После настройки аппаратуры натекающая жидкость формировала на срезе капилляра единичную каплю, которая отрывалась под действием собственного веса и свободно падала в принимающую жидкость. В полете капля перекрывала световой луч в фотодетекторе и запускала видеокамеру с регулируемой задержкой (временной шаг 1 мкс). Контактная скорость оценивалась по длительности задержки сигнала с фотоприемника и измерениям положения капли на трех последних кадрах видеопленки, предшествующих контакту и началу ее втекания в принимающую жидкость. Более подробное описание установки приводится в [20].

Опыты выполнены на верхней границе диапазона параметров интрузивного режима слияния свободно падающей капли [10] при

$R_E = E_k/E_\sigma = 1.064$. Эволюцию картины течения на начальном этапе слияния капли 95%-ного раствора этанола, падающей в частично дегазированную водопроводную воду, иллюстрирует выборка из видеопленки, представленная на рис. 1. При первичном контакте капля начинает интенсивно растекаться, образуя круговое пятно на поверхности жидкости и одновременно вливаться в толщу принимающей жидкости по всему сечению области контакта (рис. 1, $t = 1$ мс).

В силу задержки начала поступления и уменьшения длительности процесса втекания жидкости с удалением от центра течения, интрузия принимает чечевицеобразную форму (схема течения приведена в [10]). Знак кривизны выпуклой нижней кромки формирующейся интрузии сохраняется в течение всего процесса слияния. Светлые пятна на поверхности капли – блики засветки. По мере втекания капли растут и ширина, и глубина интрузии, внешний диаметр которой при $t = 2.25$ мс на рис. 1 примерно равен диаметру капли в области контакта. Поскольку рост интрузии продолжается в течение всего процесса слияния капли, размеры области контакта и максимального диаметра начинают существенно отличаться при $t > 5$ мс.

Появление каверны глубиной $h_{ca}(t) = 0.47$ мм проявляется в просветлении верхнего участка интрузии, обусловленном уменьшением толщины окрашенной части жидкости. Луч частично пересекает прозрачную каверну и оптическая длина луча в воде уменьшается при $t = 8$ мс. Распределение освещенности в просветленной полоске позволяет считать дно каверны плоским.

На периферии интрузии появляются просветленные кольцевые области диаметром $d_{cv}^l = d_{cv}^r = 0.65$ мм, $t = 10.5$ мс – сечения ядра тороидального кольцевого вихря, который наблюдался в толще окрашенной интрузии во многих опытах [2, 4, 5, 10]. Растущая каверна

сдвигает интрузию в толщу жидкости. Подтекающая принимающая жидкость отделяет верхнюю кромку интрузии от свободной поверхности и заметно изменяет ее форму. Нижний край интрузии остается выпуклым, а верхний, облегающий дно каверны сферической формы, – вогнутым при $t = 10.5$ мс. Пятнистые структуры в изображении каверны указывают на неравномерность распределения концентрации пигмента в азимутальном направлении.

В тороидальном вихре, сохраняющемся в верхней части интрузии при $t = 14$ мс, выделяются просветленные круги диаметрами $d_{cv}^l = 1.2$ мм слева и $d_{cv}^r = 0.98$ мм справа. При этом толщина окрашенного слоя – остатка интрузии в центре течения под каверной, не превышает $h_{in} = 0.24$ мм. В распределении

пигмента заметны кольцевые структуры в верхней и вертикальные в нижней части каверны.

Взаимодействие растущей каверны с окружающей интрузией, образованной из легкой жидкости капли, приводит к существенному изменению картины течения при $t = 14$ мс на рис. 1. Погружающаяся каверна принимает коническую форму с углом при вершине $\varphi_{ca} = 83^\circ$. Нижняя кромка интрузии также приобретает коническую форму с углом при вершине $\varphi_{in} = 128^\circ$. В этой стадии течения формы легкой интрузии (рис. 1, $t = 14$ мс) и картины втекания капли большей плотности, когда $R_p < 0$ [5, 10], существенно отличаются. В распределении пигмента на стенках каверны выделены кольцевые структуры в верхней и вертикальные в нижней части изображения.

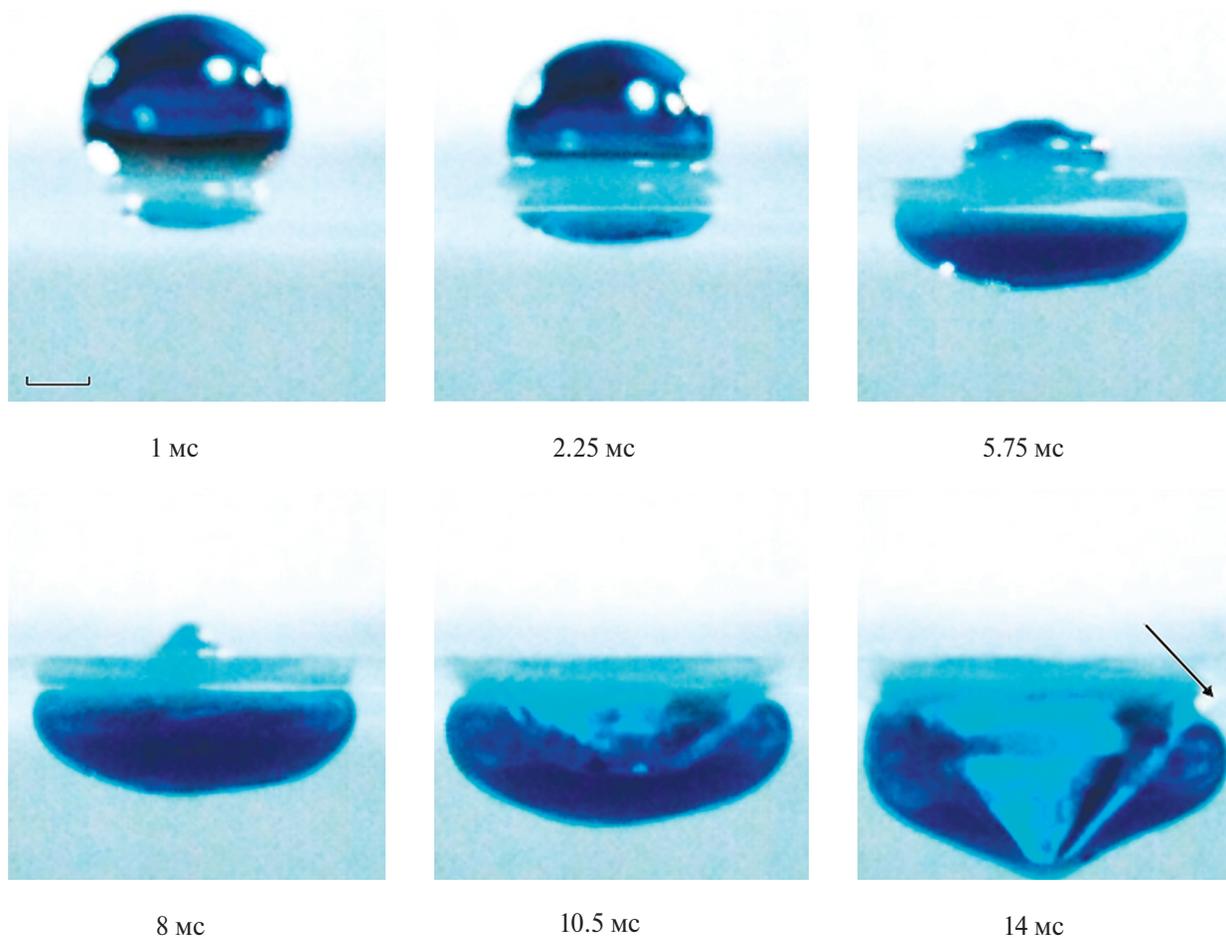


Рис. 1. Формирование интрузии на начальном этапе процесса слиянии с водопроводной водой окрашенной капли 95%-ного этанола ($D = 3.5$ мм, $U = 0.3$ м/с, $E_o = 0.87$ мкДж, $E_k = 0.82$ мкДж, $Re = 600$, $Fr = 2.6$, $We = 11$, $Bo = 4.3$, $Oh = 0.0055$, $R_E = E_k/E_o = 1.064$, $R_p = 0.1$, $R_o = 0.007$, длина метки – 1 мм, стрелкой отмечена граница депрессии).

При дальнейшей эволюции в картине течения появляются новые структурные компоненты, форму которых иллюстрируют выборки из видеофильма, представленные на рис. 2. В течение $\Delta t = 0.5$ мс на окончании конуса каверны формируется компактный объем жидкости диаметром $d_{vs} = 0.9$ мм при $t = 14.5$ мс. Конус каверны глубиной $h_{ca} = 2.82$ мм при этом несколько расширяется, угол при вершине составляет $\varphi_{ca} = 85^\circ$, угол раскрытия нижней конической поверхности интрузии равен $\varphi_{in} = 128^\circ$. Диаметры сечений тороидального вихря в верхней части интрузии практически не меняются и равны $d_{co}^l = 1.0$ мм, $d_{co}^r = 0.95$ мм. Сформировавшийся объем жидкости отделяется от кромки каверны при $t = 15.25$ мс. Высота интрузии продолжает увеличиваться, угол нижней кромки интрузии равен $\varphi_{in} = 130^\circ$.

После достижения максимальной глубины $h_{ca}(t) = 3$ мм при $t = 16$ мс дно каверны и нижняя кромка интрузии начинают скругляться. Между погружающимся сферическим объемом (распределение окраски в котором принимает вид, типичный для сферического вихря) и дном

каверны формируется окрашенная цилиндрическая “шейка” высотой $h_{ne} = 0.17$ мм и диаметром $d_{ne} = 0.27$ мм. В этой фазе течения интрузия оконтурена слоем слабо окрашенной жидкости. Диффузность границы интрузии этанола подчеркивает различие процессов слияния раствора вещества, химически реагирующего с принимающей жидкостью, и химически нейтрального раствора электролита [10].

С началом фазы коллапса дно каверны уплощается, а диаметр увеличивается. При этом всплывающая вместе с каверной более легкая интрузия, на периферии которой все еще прослеживаются два круга диаметром $d_{cv}^l = d_{cv}^r = 1.0$ мм при $t = 18.25$ мс, подтекает под дно каверны.

Погружающийся объем принимает вид деформированного сферического вихря диаметром $d_{vs} = 0.9$ мм с выпуклой головной частью и вогнутой донной, к которой примыкает цилиндрический след диаметром $d_{vw} = 0.12$ мм. В поперечном распределении красителя в погружающемся объеме четко выражены две более плотные области, которые можно интерпретировать как сечения внутреннего вихревого

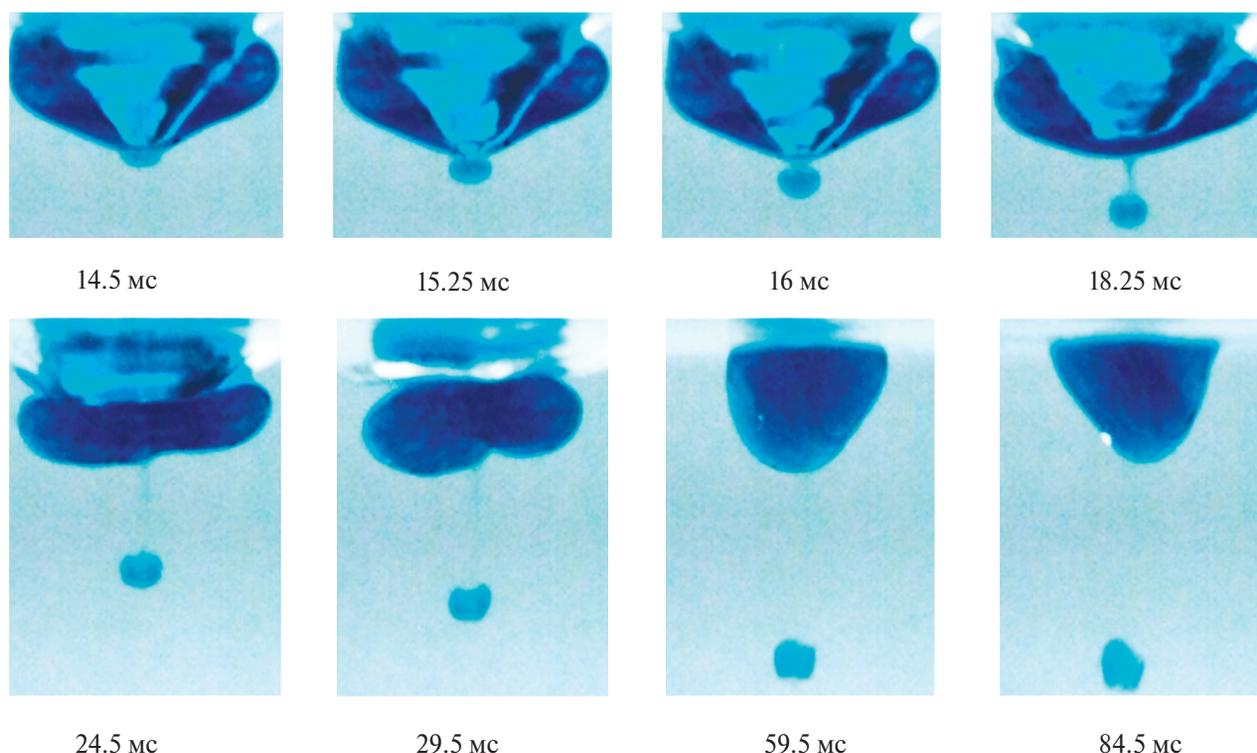


Рис. 2. Вторая стадия эволюции картины течения: схлопывание каверны, стягивание интрузии, вылет, погружение и остановка легкого вихря, образующего вторичную интрузию (параметры опыта приведены на рис. 1).

кольца. Погружающийся вихорек практически не теряет пигмент и оставляет быстро исчезающий след при $t = 24.5$ мс.

По мере схлопывания каверны охватывающая ее интрузия сильно деформируется и теряет аксиальную симметрию. При $t = 29.5$ мс диаметр левого круга имеет $d_{cv}^l = 1.9$ мм, а правого $d_{cv}^r = 1.5$ мм. Движение погружающегося вихря начинает замедляться. При этом его размеры, значения которых приведены ниже, меняются незначительно.

В процессе коллапса каверны интрузия стягивается и преобразуется в компактный конический объем в центре картины течения при $t = 59.5$ мс. Погружающийся вихорек останавливается и образует вторичную интрузию диаметром $d_{2i} = 0.9$ мм и высотой $h_{2i} = 0.82$ мм, внешняя часть которой имеет близкую к цилиндрической форму. Остаток легкой жидкости в ее центре постепенно отделяется от оболочки и, с приобретением сферической формы, начинает всплывать при $t = 84.5$ мс на рис. 2.

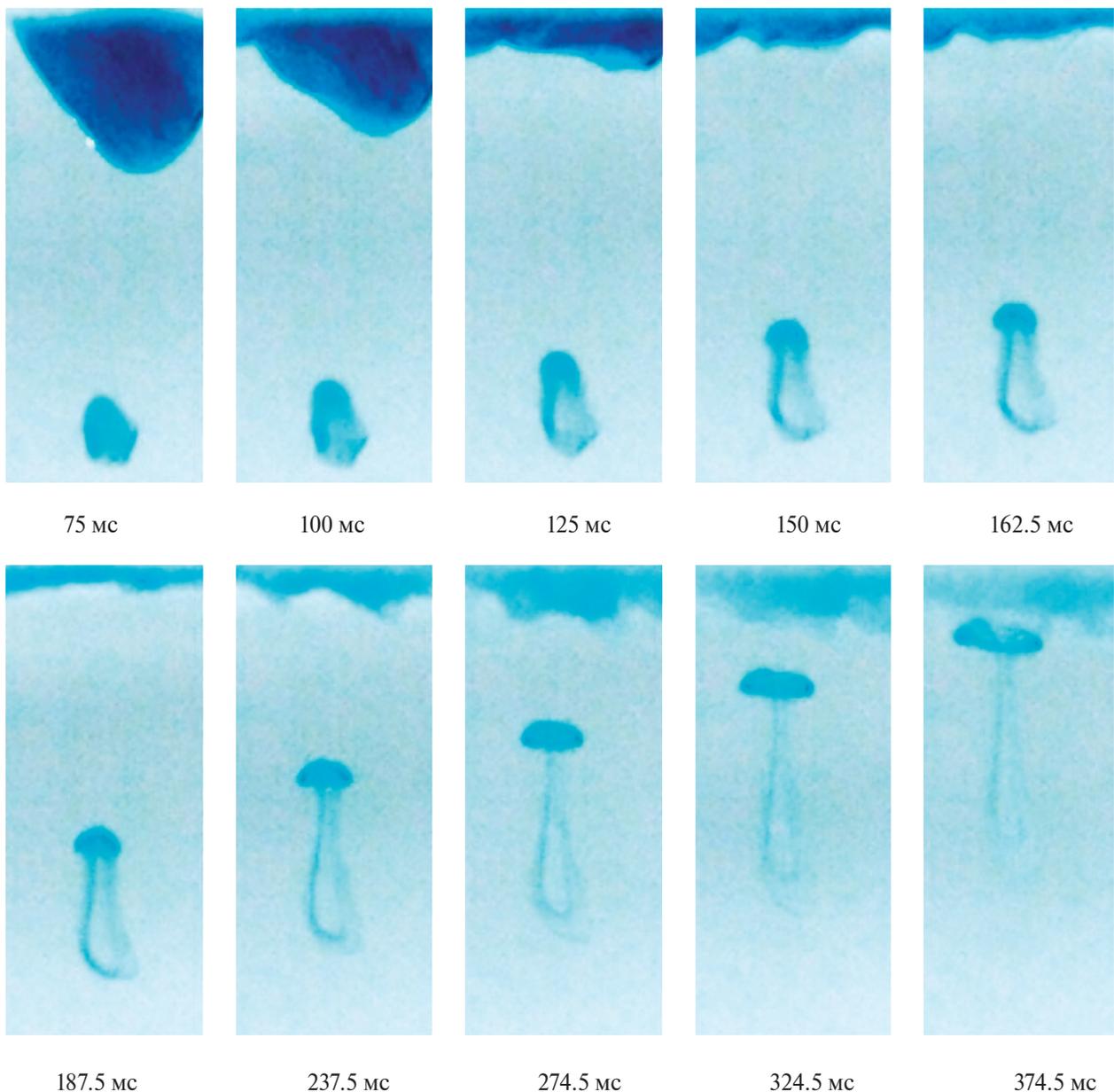


Рис. 3. Эволюция картины течения на заключительной стадии процесса слияния капли 95%-ного раствора этанола, включающей растекание первичной интрузии, трансформацию вторичной интрузии, формирование и движение всплывающего вихря и его следа.

Колеблущаяся интрузия, форма которой непрерывно изменяется, растекается вдоль свободной поверхности жидкости.

Дальнейшую эволюцию картины течения иллюстрирует выборка из видеофильма, представленная на рис. 3. Достаточно четкое различие скоростей медленно всплывающей конической интрузии с окрашенной периферией и быстро всплывающего ядра проявляется на рис. 3, $t = 75$ мс. Оболочка вторичной интрузии постепенно приобретает выраженную коническую форму. Окрашенный цилиндрический след связывает растущий сферический объем с трансформирующейся оболочкой. При этом нижняя кромка основной интрузии начинает сглаживаться, а высота — уменьшаться.

Головная сферическая часть вторичной интрузии, которая всплывает со скоростью $u_r = 1$ см/с, отходит от конического основания, движущегося более медленно, $u_f = 0.37$ см/с при $t = 100$ мс. Увеличение высоты области всплывающей жидкости на следующих трех кадрах $t = 125, 150, 162.5$ мс подчеркивает различие скоростей движения головной и донной части. Оголовок, приобретающий грибовидную форму с выпуклой передней и вогнутой задней кромкой, движется быстрее нижней кромки вторичной интрузии, которая постепенно принимает бутылкообразную форму.

В этой фазе первичная интрузия растекается вдоль свободной поверхности. Толщина слоя окрашенной жидкости в верхней части кадра постепенно убывает. Нижняя кромка интрузии остается неровной. Просветленный промежуточный слой, образующий диффузную границу более плотно окрашенной интрузии, утолщается неравномерно.

Далее высота растекающейся первичной интрузии уменьшается (рис. 3, $t = 100$ мс). Одновременно становится более выраженной разность скоростей всплытия отделяющегося объема и остатка оболочки вторичной интрузии.

Картина течения несколько преобразуется от кадра к кадру при $t = 125, 150$ и 182.5 мс — головная часть вторичной интрузии приобретает грибообразную форму с выпуклой передней и вогнутой задней кромкой, медленно всплывающая оболочка — бутылкообразную. Оба

элемента течения связывает цилиндрический след.

Изменения высоты, формы нижней границы первичной интрузии, интенсивности окраски на заключительных кадрах, приведенных на рис. 3, иллюстрируют сложность многомасштабных гидродинамических и физико-химических процессов, одновременно протекающих в области контакта этанола первичной интрузии с водой.

Головная часть всплывающей вторичной интрузии последовательно трансформируется, область максимальной концентрации пигмента меняет свою форму. Пигмент стекает по поверхности всплывающего объема и накапливается в тонком кольце на границе с вогнутой донной поверхностью. Диаметр кольца монотонно увеличивается. Выпуклая фронтальная оболочка постепенно просветляется. Диаметр цилиндрического следа в области контакта с головным вихрем прогрессивно уменьшается, а диаметр основания следа, форма которого становится все более симметричной, увеличивается. Общий контраст окрашенной и фоновой частей течения падает вследствие диффузии веществ и химической реакции этанола с водой.

Эволюция размеров выделенных структурных компонентов течений представлена на рис. 4. На начальном этапе процесса слияния капля растекается по поверхности жидкости и одновременно поступает в толщу жидкости по всей площади поверхности контакта, формируя чечевицеобразную интрузию, нижняя кромка которой продвигается в толщу жидкости с практически постоянной скоростью $u_{in} = 20$ см/с. Вертикальный размер интрузии, который представлен на рис. 4 линией 1, аппроксимируется кусочно-линейной функцией, $h_{in}(t) = 0.2t$ мм на интервале $0 < t < 15.5$ мс и более медленно после появления каверны $h_{in}(t) = 0.01t + 3.1$ мм на интервале $16 < t < 40$ мс.

Горизонтальный размер интрузии на начальном этапе формирования аппроксимируется функцией $l(t) = 2.1t^{1/2}$ мм на интервале $0 < t < 5$ мс и дробно-линейной функцией $l(t) = 7t/(t+3)$ мм на более широком интервале $0 < t < 17$ мс. На заключительной стадии роста аппроксимирующая функция имеет вид $l(t) = 100t^{-1} + 1.2$ мм на интервале $24.5 < t < 40$ мс.

Растущая каверна появляется в поле зрения с запаздыванием $\Delta t = 6.86$ мс. Глубина каверны вначале линейно увеличивается со временем $h_{ca}(t) = 0.36t$ мм на интервале $8 < t < 15.5$ мс, достигает максимума при $t = 16$ мс, а далее монотонно убывает $h_{ca}(t) = 30/t$ мм на интервале $17 < t < 40$ мс (кривая 6, рис. 4). Каверну окружает область депрессии (отмечена на рис. 1, $t = 14$ мс), диаметр которой также растет пропорционально времени $d_d(t) = 0.43t$ мм при $8 < t < 16$ мс. Диаметр каверны $d_{ca}(t) = 0.7 + 100/t$ мм, появляющейся в поле зрения, несколько меньше ширины интрузии. Со временем размеры объемных компонентов начинают сближаться.

При $t = 15$ мс от основания каверны отрывается компактный объем более легкой жидкости, положение нижней кромки которого $h_{2d}(t) = 0.5t^{2/3} + 3.37$ мм на интервале $14.5 < t < 32$ мс иллюстрирует кривая 4 на рис. 4.

Положения нижней и верхней кромок всплывающей окрашенной области при $t > 75$ мс, включающей головной формирующийся вихрь, след и бутылкообразный остаток интрузии, приведены на рис. 5.

Скорость всплытия вихря, которая на начальном этапе равна $u_{ud} = 1$ см/с, начинает медленно убывать при приближении к свободной поверхности, где плотность жидкости уменьшается вследствие растворения этанола (рис. 5а).

Для иллюстрации влияния разности плотностей на динамику продвижения кромки интрузии в толщу жидкости на рис. 5б приводятся

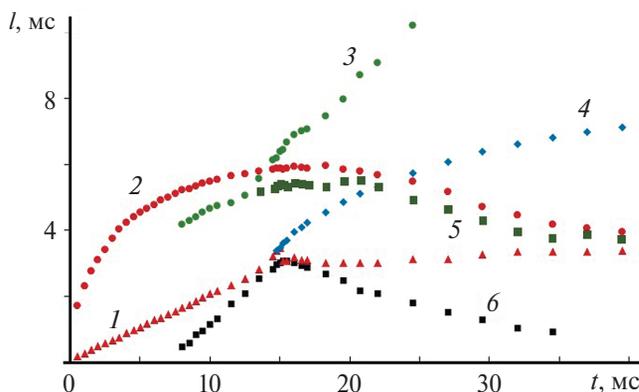


Рис. 4. Эволюция размеров структурных компонентов картины слияния капли этанола с водой (условия опытов приведены на рис. 1): линии 1, 2 – глубина $h_{in}(t)$ и диаметр $d_{in}(t)$ интрузии; 3 – диаметр депрессии $d_d(t)$; 4 – глубина нижней кромки погружающегося объема $h_{2d}(t)$; 5, 6 – диаметр $d_{ca}(t)$ и глубина $h_{ca}(t)$ каверны.

значения глубины и диаметра первичной интрузии при погружении раствора перманганата калия плотностью $\rho = 1.00$ г/см³ и раствора этанола $\rho = 0.81$ г/см³. Значения глубин интрузии неразличимы в пределах точности эксперимента, диаметр интрузии раствора перманганата калия несколько превышает размер интрузии этанола в области максимальных размеров и значительно отличается при $t > 28$ мс, когда интрузия этанола начинает стягиваться к коллапсирующей каверне.

Изменение положения нижней кромки погружающегося объема – вторичной интрузии,

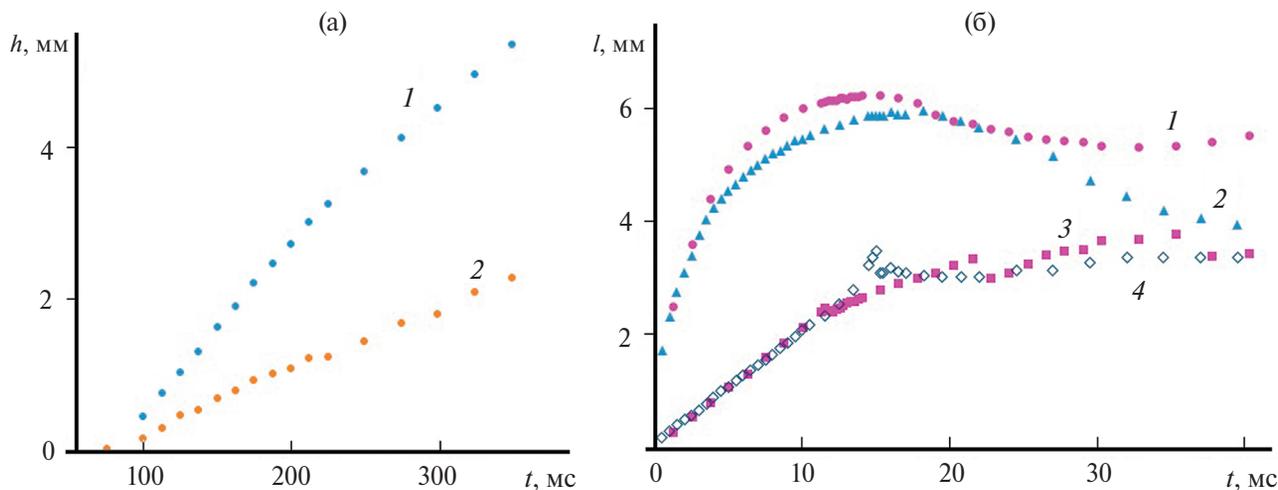


Рис. 5. Геометрия течения: а – глубина верхней (линия 1) и нижней (2) кромок всплывающей жидкости; б – эволюция размеров первичной интрузии при погружении капли разбавленного водного раствора перманганата калия (0.01%, малиновые индексы) и 95%-ного раствора этанола (синие): линии 1, 2 – диаметры, 3, 4 – высоты.

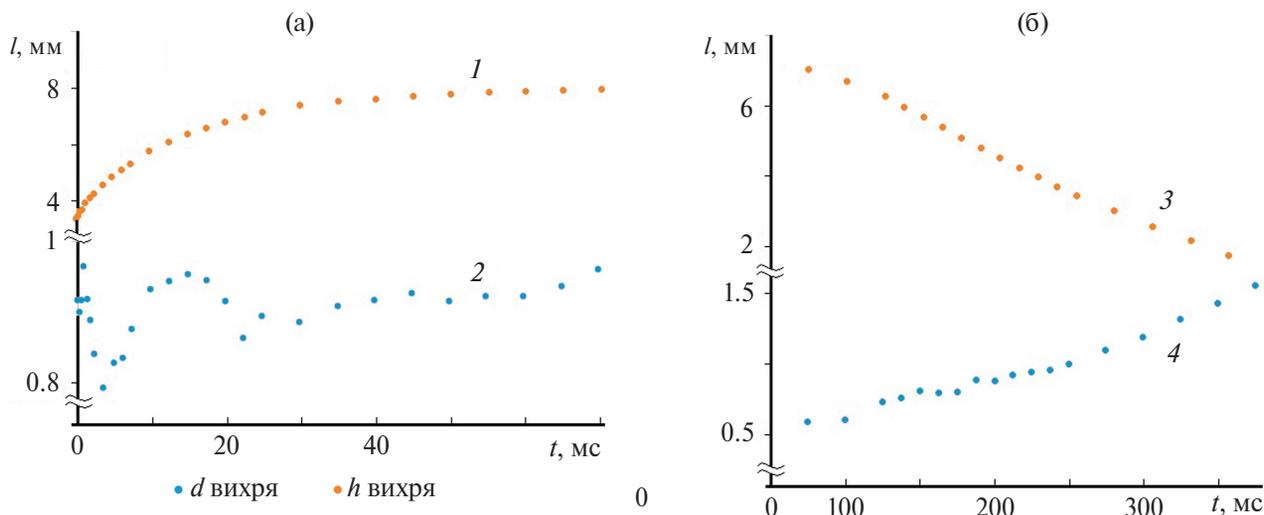


Рис. 6. Эволюция геометрии течения: а – размеры погружающегося объема: кривая 1 – глубина нижней кромки, 2 – диаметр; б – всплывающего вихря: кривая 3 – глубина, 4 – диаметр.

приведенное на рис. 6, аппроксимируется кривой $h_{2d}(t) = 0.5t^{2/3} + 3.37$ мм на интервале $14.5 < t < 32$ мс. Диаметр погружающегося объема вначале резко убывает $d_{2d}(t) = -0.06t + 1$ мм, увеличивается, снова спадает и очень медленно растет $d_{2d}(t) = 0.0025t + 0.8$ при $t > 22$ мс. Положение центра всплывающего кольца окрашенной жидкости иллюстрирует кривая 3 (рис. 6б), аппроксимация $h_{ud}(t) = -0.02t + 8.6$ мм, а его диаметр – кривая 4 $d_{ud}(t) = 0.003t + 0.3$ мм.

Механизм существенного уменьшения темпа роста поперечного размера погружающегося объема легкой жидкости по сравнению со скоростью роста всплывающего вихревого кольца, образованного той же самой жидкостью, нуждается в дальнейшем изучении.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в Лаборатории механики жидкостей ИПМех РАН при поддержке Минобрнауки РФ в рамках Госзадания, номер госрегистрации: 124012500442-3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Darrigol O. Worlds of flow. A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl. Oxford: University Press. 2005. 356 p.
2. Okabe J., Inoue S. The Generation of Vortex Ring // Kyushu Univ., Rep. Res. Inst. Appl. Mech. 1960. V. 8(32). P. 91–101.
3. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 760 с.

4. Chapman D.S., Critchlow P. R. Formation of vortex rings from falling drops // J. Fluid Mech. 1967. V. 29(1). P. 177–185. <https://doi.org/10.1017/S0022112067000709>
5. Rodriguez F., Mesler R. The penetration of drop-formed vortex rings into pools of liquid // J. Colloid Interface Sci. 1988. V. 121(1). P. 121–129 [https://doi.org/doi:10.1016/0021-9797\(88\)90414-6](https://doi.org/doi:10.1016/0021-9797(88)90414-6)
6. Cresswell R.W., Morton B.F. Drop-formed vortex rings-The generation of vorticity // Physics of Fluids. 1995. V. 7. P. 1363–1370. <https://doi.org/10.1063/1.868524>
7. Lee J. S., Park S. J., Lee J. H., Weon B. M., Fezzaa K., Je J. H. Origin and dynamics of vortex rings in drop splashing // Nature Commun. 2015. V. 6(1). <https://doi.org/10.1038/ncomms9187>
8. Dooley B., Warncke A., Gharib M. et al. Vortex ring generation due to the coalescence of a water drop at a free surface // Exp. in Fluids. 1997. V. 22. P. 369–374. <https://doi.org/10.1007/s003480050062>
9. Степанова Е.В., Чашечкин Ю.Д. Перенос маркера в составном вихре // Известия РАН. МЖГ. 2010. № 6. P. 12–29.
10. Chashechkin Yu.D., Ilinykh A. Y. Intrusive and impact modes of a falling drop coalescence with a target fluid at rest // Axioms. 2023. V. 12(4). P. 374. <https://doi.org/10.3390/axioms12040374>
11. Zhang Y., Mu Z., Wei Y., Jamil H., Yang Y. Evolution of the heavy impacting droplet: Via a vortex ring to a bifurcation flower // Phys. of Fluids. 2021. V. 33. P. 113603. <https://doi.org/10.1063/5.0064072>
12. Gao T.-C., Chen R.-H., Pu J.-Y., Lin T.-H. Collision between an ethanol drop and a water drop. Experiments in Fluids. 2005. V. 38(6). P. 731–738. <https://doi.org/10.1007/s00348-005-0952-1>

13. Thomson W., Tait P.G. A Treatise on Natural Philosophy. Oxford (UK): Clarendon Press, 1867. 727 p.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
15. Feistel R. Thermodynamic properties of seawater, ice and humid air: TEOS-10, before and beyond // Ocean Sciences. 2018. V. 14. P. 471–502. <https://doi.org/10.5194/os-14-471-2018>
16. Harvey A. H., Hrubý J., Meier K. Improved and always improving: reference formulations for thermophysical properties of water // J. of Phys. and Chem. Ref. Data. 2023. V. 52. P. 011501. <https://doi.org/10.1063/5.0125524>.
17. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 532 с.
18. Chashechkin Y.D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms. 2021. V. 10(4). P. 286. <https://doi.org/10.3390/axioms10040286>
19. УИУ “ГФК ИПМех РАН”: Гидрофизический комплекс для моделирования гидродинамических процессов в окружающей среде и их воздействия на подводные технические объекты, а также распространения примесей в океане и атмосфере. Сайт: <http://www.ipmnet.ru/uniquequip/gfk/#equip>.
20. Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю. Задержка формирования каверны в интрузивном режиме слияния свободно падающей капли с принимающей жидкостью // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2021. Т. 496. С. 34–39. <https://doi.org/10.31857/S268674002101003X>

EVOLUTION OF VORTICES AT THE MERGING OF AN ETHANOL DROPLET WITH WATER IN AN INTRUSIVE MODE

B. Djoudar^a, A. Yu. Ilinykh^b, Yu. D. Chashechkin^b

^aUniversité des Sciences et de la Technologie d’Oran Mohamed Boudiaf, Oran, Algeria

^bIshlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS D.M. Klimov

The evolution of vortices formed when a freely falling drop of a 95% aqueous solution of ethanol, tinted with brilliant green, merges with water in the intrusive mode has been traced by method of high-speed video recording. The drop smoothly flows into the liquid and forms a subducting lenticular intrusion, in which a weakly expressed ring vortex is formed if the potential surface energy is greater than or of the same order as its kinetic energy. Gradually, the intrusion of lighter liquid begins to float up and contracts around the cavern, which takes on a conical shape. From the center of the pointed bottom of the cavity, which has reached its maximum depth, a compact volume containing a light liquid of droplet is pushed into the thickness of the liquid. After the cavern collapses, the primary intrusion spreads along the free surface of the target fluid. In this case, the submerging volume is transformed into a small spherical vortex, which reaches its maximum depth, and then stops and forms a compact secondary intrusion elongated vertically. Next, the central part of the secondary intrusion begins to flow up and gradually transforms into a new ring vortex. As it approaches the free surface, the diameter of the vortex increases. The slowly rising shell of the intrusion forms the bottle-shaped base of the cylindrical trace of the ring vortex, colored with droplet pigment. Changes in the sizes of the main structural components during the evolution of the flow pattern were traced.

Keywords: experiment, fluids of different densities, intrusion, cavern, submerging and rising vortices, trace

УДК 517.958:539.3(5)

РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРОКЛАДКИ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ФЛАНЦАМИ

© 2024 г. С. А. Назаров^{1,*}

Представлено академиком РАН [Н.Ф. Морозовым] 20.04.2023 г.

Поступило 07.01.2024 г.

После доработки 07.01.2024 г.

Принято к публикации 09.04.2024 г.

У тонкой цилиндрической прокладки зафиксированы оба основания, а боковая поверхность свободна от внешних воздействий. Для сечений с гладкой границей и прямоугольного представлена асимптотика частот собственных колебаний. На основе исследования спектра смешанной краевой задачи теории упругости в четверти единичного слоя обнаружен новый эффект локализации мод собственных колебаний около вершин прямоугольного сечения и экспоненциального затухания при удалении от них. При гладкой границе сечения концентрация мод происходит либо около всей кромки (круговая пластина), либо вблизи точек максимума кривизны контура.

Ключевые слова: тонкая прокладка между фланцами, модели пониженной размерности, локализация мод собственных колебаний, волны, захваченные упругой полуполосой и четвертью слоя

DOI: 10.31857/S2686740024040059, EDN: JPINVN

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Тонкая однородная изотропная цилиндрическая пластина $\Omega^h = \omega \times (0, h)$ находится в идеальном контакте с двумя прямыми абсолютно жесткими фланцами (рис. 1) и имеет продольное сечение $\omega \in \mathbb{R}^2$, ограниченное простым замкнутым контуром $\partial\omega$. Далее различаем три случая: ω — круг или прямоугольник (рис. 2а, б), а также произвольная область с гладкой границей, у которой кривизна κ (отрицательная на вогнутых участках) принимает максимальное значение в одной точке (рис. 2в). Собственные колебания прокладки описываются системой уравнений Ламе

$$-\mu \Delta_x u^h - (\lambda + \mu) \nabla_x \nabla_x \cdot u^h = \Lambda^h u^h \quad \text{в } \Omega^h \quad (1)$$

с условиями свободного края (Неймана) на боковой поверхности $\Gamma^h = \partial\omega \times (0, h)$ и

жесткого заземления (Дирихле) на основаниях $\Sigma_p^h = \omega \times \{p\}$, $p = 0, 1$, а именно,

$$\sigma^{(n)}(u^h) = 0 \quad \text{на } \Gamma^h, \quad u^h = 0 \quad \text{на } \Sigma^h := \Sigma_0^h \cup \Sigma_1^h. \quad (2)$$

При этом $\nabla_x = \text{grad}$, $\nabla_x \cdot = \text{div}$, $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ — оператор Лапласа, Λ^h — спектральный параметр, пропорциональный квадрату частоты колебаний, $u^h = (u_1^h, u_2^h, u_3^h)$ — вектор смещений, а $\sigma^{(n)}(u^h)$ — вектор нормальных напряжений с декартовыми компонентами

$$\sigma_k^{(n)}(u^h) = n_1 \sigma_{1k}(u^h) + n_2 \sigma_{2k}(u^h), \quad k = 1, 2, 3.$$

Здесь $n = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внешней нормали к границе сечения $\omega \in \mathbb{R}^2$, $\sigma_{jk}(u^h)$ — компоненты тензора напряжений второго ранга,

$$\sigma_{jk}(u^h) = \mu \left(\frac{\partial u_j^h}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^h}{\partial x_j} \right) + \lambda \delta_{j,k} \nabla_x \cdot u^h, \quad (3)$$

$$j, k = 1, 2, 3,$$

а $\lambda \geq 0$ и $\mu > 0$ — постоянные Ламе и $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера.

¹Институт проблем машиноведения
Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Россия
*E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk



Рис. 1. Круглая (а) и прямоугольная (б) прокладки. Жестко заземленные основания глубоко тонированы.

Вариационная формулировка задачи (1), (2) апеллирует к интегральному тождеству [1, 2]

$$E_3(u^h, \psi^h; \Omega^h) = \Lambda^h(u^h, \psi^h)_{\Omega^h} \quad \forall \psi^h \in H_0^1(\Omega^h; \Sigma^h),$$

причем $(\cdot, \cdot)_{\Omega^h}$ — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega^h)$, скалярном или векторном, $H_0^1(\Omega^h; \Sigma^h)$ — пространство Соболева функций, обращающихся в нуль на основаниях пластины, а удвоенная упругая энергия, запасенная пластиной выглядит так:

$$E_3(u^h, u^h; \Omega^h) = \int_{\Omega^h} \left(2\mu \sum_{k=1}^3 \left| \frac{\partial u_k^h}{\partial x_k} \right|^2 + \frac{\mu}{2} \sum_{j,k=1}^3 (1 - \delta_{j,k}) \left| \frac{\partial u_j^h}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^h}{\partial x_j} \right|^2 + \lambda |\nabla_x \cdot u^h|^2 \right) dx. \quad (4)$$

Нижний индекс 3 приписан к обозначению квадратичной формы (4) для того, чтобы отличать ее от удвоенной упругой энергии E_2 в плоской задаче, которая (энергия) получается удалением из подынтегрального выражения компоненты u_3^h и всех производных по переменной x_3 .

Основная цель сообщения — указать асимптотическое поведение при $h \rightarrow +0$ собственных чисел задачи (1), (2)

$$0 < \Lambda_1^h \leq \Lambda_2^h \leq \dots \leq \Lambda_m^h \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (5)$$

и соответствующих собственных вектор-функций $u_{(1)}^h, u_{(2)}^h, \dots, u_{(m)}^h, \dots \in H_0^1(\Omega^h; \Sigma^h)$, которые подчинены условиям ортогональности и нормировки

$$(u_{(p)}^h, u_{(q)}^h)_{\Omega^h} = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (6)$$

2. ЭФФЕКТЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ

В классической теории пластин Кирхофа (см. [3–6] и др.), которая подразумевает постановку условий Неймана (отсутствия внешнего нагружения) на обоих основаниях Σ_0^h и Σ_1^h пластины, моды собственных колебаний описываются решениями краевых задач на сечении ω и поэтому оказываются распределенными по всему телу Ω^h . В статье [7], по видимому, впервые установлено, что собственные вектор-функции задачи (3) (или (1), (2) в дифференциальной форме) сконцентрированы около кромки Γ^h и затухают с экспоненциальной скоростью при удалении от нее. На первый взгляд кажется, что причиной их такого “странного” поведения служит жесткое защемление оснований Σ_p^h , не “пропускающее” колебания вовнутрь тела Ω^h . Это впечатление ошибочно: в той же статье проверено, что асимптотика собственных пар $\{\Lambda_m^h; u_{(m)}^h\}$ системы (1) с условиями Дирихле, распространенными на всю поверхность пластины,

$$u^h = 0 \quad \text{на } \partial\Omega^h = \bar{\Gamma}^h \cup \Sigma_0^h \cup \Sigma_1^h \quad (7)$$

описывается именно решениями задачи Дирихле для системы двух уравнений Гельмгольца

$$-\mu \Delta_{x'} v = Mv \quad \text{на } \omega, \quad v = (v_1, v_2) = 0 \quad \text{на } \partial\omega, \quad (8)$$

где $x' = (x_1, x_2)$ — система продольных координат. Таким образом, в задаче (1), (7) эффект локализации отсутствует. Как пояснено в [8, 7], предельная задача в значительной мере определяется феноменом пограничных слоев, которые существенно различаются для краевых условий (2) и (7), а для рассматриваемой далее прямоугольной прокладки (рис. 1б) появляется ранее неизвестный пространственный пограничный слой (см. рис. 3 и разд. 3).

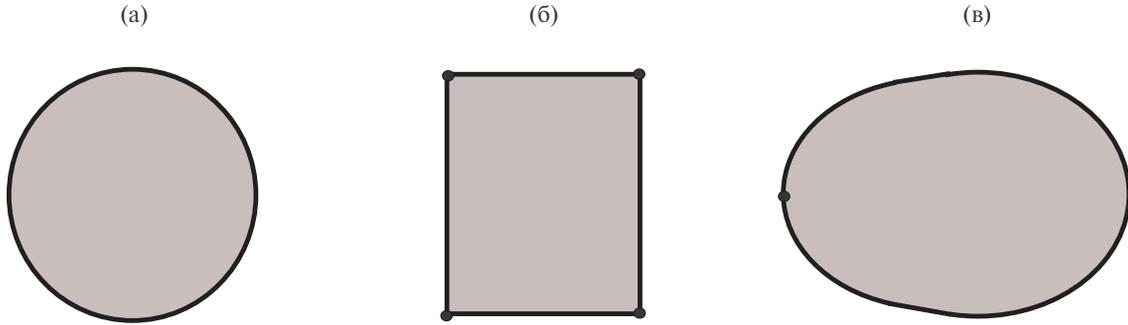


Рис. 2. Круговое, прямоугольное и яйцевидное продольные сечения прокладки. Постоянная и нулевая кривизны (а, б). Угловые точки (б) и единственная точка максимальной кривизны (в) снабжены меткой •.

В разд. 4 сообщения воспроизведены асимптотические конструкции, отвечающие обнаруженному ранее эффекту локализации в задаче (1), (2), которые различаются для кругового и, например, яйцевидного сечений на рис. 2а–в, и в значительной степени повторяют материал сообщения [8], где, в частности, обследована упругая накладка (верхнее основание Σ_1^h , как и боковая поверхность Γ^h , освобождено от внешних воздействий), для которой также характерна концентрация собственных мод вблизи кромки. Основной и абсолютно новый результат — локализация мод около углов прямоугольного сечения (рис. 2б) при $\lambda > 0$ — представлен в разд. 5. В разд. 6 отдельно рассмотрен случай $\lambda = 0$, в котором локализация происходит в окрестностях сторон прямоугольника. Эти выводы обеспечены технически наиболее сложным в сообщении анализом спектра смешанной краевой задачи теории упругости в четверти слоя (рис. 3)

$$\Xi = \{ \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_1 > 0, \xi_2 > 0, \xi_3 \in (0, 1) \}, \quad (9)$$

возникающей вследствие растяжения исходных координат в h^{-1} раз. Так, в разд. 3 удалось проверить, что при $\lambda > 0$ дискретный спектр задачи содержит по крайней мере одно собственное число, причем именно соответствующая собственная вектор-функция, затухающая на бесконечности с экспоненциальной скоростью, порождает эффект “околоугловой” локализации. В случае $\lambda = 0$ у задачи в неограниченной области (9) возникает пороговый резонанс (см. публикации [9–11] и см. разд. 3), который как раз и дает возможность завершить асимптотический анализ “околореберной” локализации в разд. 6.

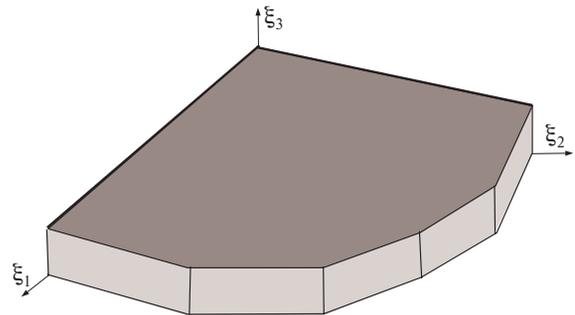


Рис. 3. Четверть единичного слоя. Жестко защемленные основания глубоко тонированы.

Обнаруженное необычное поведение мод собственных колебаний порождает концентрацию напряжений в малых или узких зонах хрупкого тела, которая в свою очередь провоцирует процесс разрушения. Приведенные результаты подтверждают известный из повседневной практики факт: отслоение прокладок и накладок обычно начинается с угловых или иных сингулярных точек на границе. Именно поэтому при наклеивании тонких поверхностных заплаток у них обычно закругляются углы, а тщательная проклейка края заплатки особенно важна. Прокладки между фланцами в водопроводных и газовых трубах обязательно имеют округлую, обычно кольцевую, форму.

3. СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА В ЧЕТВЕРТИ СЛОЯ

Рассмотрим спектральную смешанную краевую задачу теории упругости для однородного изотропного упругого тела (9) на рис. 3, вариационная формулировка которой выглядит так:

$$E_3(w, \psi; \Xi) = M(w, \psi)_\Xi \quad \forall \psi \in \mathcal{H} := H_0^1(\Xi; Y_1 \cup Y_2). \quad (10)$$

Здесь M — спектральный параметр, $Y_p = \{\xi \in \partial \Xi: \xi_3 = p\}$, $p = 0, 1$, — основания четверти слоя, которые жестко защемлены, но боковая поверхность оставлена свободной (ср. исходные краевые условия (2)). Поскольку левая часть интегрального тождества (10) — положительно определенная, замкнутая в $H^1(\Xi)$ и симметричная билинейная форма, задаче о собственных колебаниях четверти слоя Ξ ставится [13, гл. 10, 1] в соответствие положительно определенный самосопряженный неограниченный оператор \mathcal{A} в гильбертовом пространстве $L^2(\Xi)$.

По обычной схеме (построение сингулярной последовательности Вейля при $M \geq M_+$ и регуляризатора оператора при $M \in (0, M_+)$; ср. работу [14]) проверяется, что существенный спектр \wp_{ess} оператора \mathcal{A} — луч $[M_+, +\infty)$, точка отсечки которого — первое (наименьшее) собственное число

$$M_+ := \beta_1 \in (0, \mu\pi^2) \quad (11)$$

плоской задачи теории упругости в полубесконечной единичной полосе (далее — полуполосе)

$$\Pi = \{\xi' = (\xi_2, \xi_3): \xi_2 > 0, \xi_3 \in (0, 1)\}. \quad (12)$$

Существование изолированного собственного числа (11) в дискретном спектре последней задачи установлено, например, в статье [12]. Соответствующую собственную вектор-функцию, обращающуюся в нуль на боковых сторонах полуполосы Π , нормированную в пространстве $L^2(\Pi)$ и затухающую при $\xi_2 \rightarrow +\infty$ с экспоненциальной скоростью, обозначим через $W = (W_2, W_3)$.

Нижняя грань всего спектра \wp оператора \mathcal{A} вычисляется согласно минимальному принципу [13, теорема 10.2.1]

$$\underline{\wp} = \inf_{\psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}} \frac{E_3(\psi, \psi; \Xi)}{\|\psi; L^2(\Xi)\|^2}. \quad (13)$$

Таким образом, дискретный спектр \wp_d оператора \mathcal{A} непустой, если только нашлась пробная вектор-функция $\psi^\varepsilon \in \mathcal{H}$, для которой

$$E_3(\psi^\varepsilon, \psi^\varepsilon; \Xi) < M_+ \|\psi^\varepsilon; L^2(\Xi)\|^2. \quad (14)$$

В этом случае величина (13) располагается ниже точки отсечки (11) и является первым собственным числом оператора \mathcal{A} . Положим

$$\psi_1^\varepsilon(\xi) = \sqrt{\varepsilon} Y(\xi), \quad \psi_q^\varepsilon(\xi) = e^{-\varepsilon \xi_1} W_q(\xi'), \quad q = 2, 3, \quad (15)$$

где Y — какая-то гладкая функция с малым носителем. В силу формулы (15) имеем

$$\|\psi^\varepsilon; L^2(\Xi)\|^2 = \int_0^{+\infty} e^{-2\varepsilon \xi_1} d\xi_1 \|W; L^2(\Pi)\|^2 +$$

$$+ \varepsilon \|Y; L^2(\Pi)\|^2 = \frac{1}{2\varepsilon} + O(\varepsilon),$$

$$E_3(\psi^\varepsilon, \psi^\varepsilon; \Xi) = \int_0^{+\infty} e^{-2\varepsilon \xi_1} d\xi_1 E_2(W, W; \Pi) +$$

$$+ 2\sqrt{\varepsilon} E_3(W, Y; \Xi) + O(\varepsilon).$$

При этом $W = (0, W_2, W_3)$ и $Y = (Y, 0, 0)$, а $E_2(W, W; \Pi) = \beta_1 \|W; L^2(\Pi)\|^2 = M_+$ — упругая энергия полуполосы, порожденная захваченной двумерной волной. В итоге при помощи формулы интегрирования по частям придаем неравенству (14) следующий вид:

$$2\sqrt{\varepsilon} \lambda \int_{\Pi} Y(0, \xi') \nabla_{\xi'} \cdot W(0, \xi') d\xi' = \quad (16)$$

$$= 2\sqrt{\varepsilon} E_3(W, Y; \Xi) < -C\varepsilon.$$

Поскольку собственная мода W не может быть соленоидальной всюду в упругой полуполосе Π , находим точку $P \in \Pi$, в которой $\nabla_{\xi'} \cdot W(P) \neq 0$, и подбираем функцию Y так, чтобы интеграл из левой части (16) стал отрицательным. В итоге, при $\lambda > 0$ неравенство (14) выполнено для пробной вектор-функции ψ^ε с компонентами (20) и достаточно малом $\varepsilon > 0$, т.е. дискретный спектр \wp_d оператора \mathcal{A} в самом деле непустой. Первое собственное число задачи (10) обозначим M_1 а соответствующую собственную вектор-функцию — $w_{(1)} \in \mathcal{H}$. При помощи приемов из [7] можно убедиться в экспоненциальном затухании $w_{(1)}(\xi)$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

При $\lambda = 0$ вектор-функция W — ограниченное решение задачи в четверти слоя Ξ , а значит, в ней реализуется пороговый резонанс [9–11].

К сожалению, вопрос о кратности дискретного спектра при любых значениях параметра λ остался открытым.

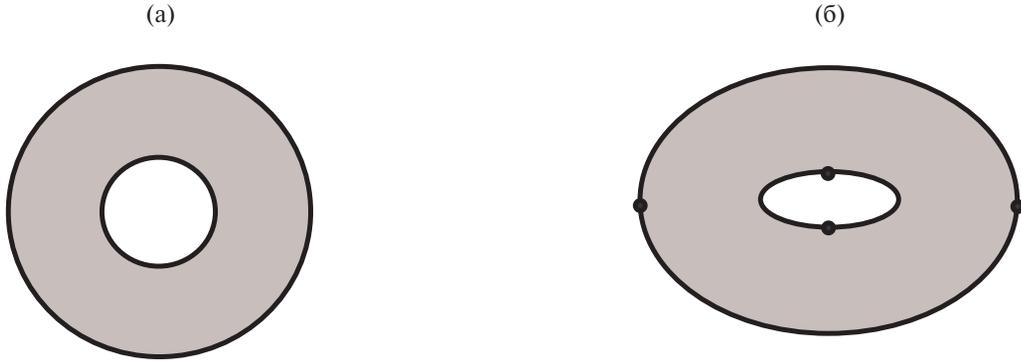


Рис. 4. Круговое (а) и эллиптическое (б) кольца. Точки максимумов кривизны (б) снабжены метками •.

4. СЕЧЕНИЯ С ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Сообщим известные сведения о собственных парах задачи (1), (2) (см. публикации [7, 8]). Асимптотическое представление собственных чисел выглядит так:

$$\Lambda_m^h = h^{-2}B + h^{-1}b_J + h^{-1/J}K_m + O(h^{-J/2}). \quad (17)$$

Здесь $J = 1$ при $\omega = \{x' = (x_1, x_2) : |x'| < 1\}$, но $J = 2$ для области на рис. 2в, у которой строгий глобальный максимум $\kappa_0 > 0$ кривизны границы достигается в одной точке $s_0 \in \partial\omega$. Положительные множители B и b_1 сложным образом зависят от интегральных характеристик собственной моды W в полуполосе Π и, разумеется, от постоянных Ламе λ и μ . В случае круга K_m — собственное число обыкновенного дифференциального уравнения на единичной окружности

$$-A\partial_s^2 V(s) = KV(s), \quad s \in \partial\omega, \quad (18)$$

причем (n, s) — локальная система координат, т.е. расстояние до контура $\partial\omega$, измеренная вдоль внешней нормали, и длина дуги на нем. Во втором случае K_m — собственное число уравнения гармонического осциллятора (см., например, книгу [15]):

$$-A\partial_\eta^2 V(\eta) + a\eta^2 V(\eta) = KV(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}, \quad (19)$$

где $\eta = h^{-1/2}(s - s_0)$ — растянутая координата (ср. сообщение [8]), а коэффициенты $A > 0$ и $a > 0$ зависят от W и λ, μ , а также от $\partial_s^2 \kappa(s_0) < 0$. Кроме того, множитель b_2 в формуле (17) пропорционален величине $\kappa_0 > 0$.

Отметим, что асимптотические представления собственных вектор-функций, нормированных согласно формуле (6), приобретают вид

$$u_{(m)}^h(x) = \begin{cases} h^{-1} \left(V_m(s) W(-h^{-1}n, h^{-1}z) + O(h) \right) & \text{при } J = 1, \\ h^{-5/4} \left(V_m(h^{-1/2}(s - s_0)) W(-h^{-1}n, h^{-1}z) + O(h^{1/2}) \right) & \text{при } J = 2, \end{cases}$$

где V_m — собственная функция уравнения (18) или (19), а различие в показателях степеней малого параметра h обусловлено разным растяжением координат.

Для кругового и эллиптического колец (рис. 4) асимптотические серии (17) собственных чисел задачи (1), (2) тиражируются: асимптотические конструкции годятся соответственно для внутренней окружности на рис. 4а, или нескольких точек глобальных и локальных максимумов кривизны, помеченных значком • на рис. 4б.

5. ПРЯМОУГОЛЬНОЕ СЕЧЕНИЕ И $\lambda > 0$

В противоположность технически сложному исследованию спектра задачи (10) асимптотика первых четырех (по количеству вершин прямоугольника) собственных чисел из последовательности (5) легко выводится при помощи максиминимального принципа [13, теорема 10.2.2] и принимает вид

$$\Lambda_k^h = h^{-2} \left(M_1 + O(e^{-\delta/h}) \right), \quad \delta > 0, \quad k = 1, \dots, 4. \quad (20)$$

Соответствующие собственные вектор-функции задачи (1), (2) допускают представления

$$u_{(k)}^h(x) = h^{-3/2} \left(w_{(1)}(\xi^{(k)}) + O(e^{-\delta/h}) \right),$$

причем $k = 1, \dots, 4$ и $\xi^{(k)}$ — растянутые в h^{-1} раз декартовы координаты с центрами в вершинах прямоугольного сечения.

Асимптотическое строение собственных чисел Λ_m^h с номерами $m \geq 5$ — полностью открытый вопрос из-за отсутствия информации о кратности дискретного спектра задачи (10) и появления у нее пороговых резонансов.

6. ПРЯМОУГОЛЬНОЕ СЕЧЕНИЕ И $\lambda = 0$

Поскольку кратность дискретного спектра осталась неизвестной, обсуждаем две ситуации.

Если и при $\lambda = 0$ дискретный спектр оператора A остается непустым, то начальные члены последовательности (5) по-прежнему имеют вид (20).

В случае $\wp_d = \emptyset$ благодаря тому, что в задаче (10) при $\lambda = 0$ возникает двойной пороговый резонанс, асимптотика собственных чисел становится такой:

$$\Lambda_m^h = h^{-2} \beta_1 + K_m + O(h^{1/2}).$$

Здесь $\{K_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ — объединенная и упорядоченная последовательность собственных чисел задач Неймана для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -A \partial_s^2 V_p(s) &= K V_p(s), \quad s \in (-\ell_p, \ell_p), \\ \pm \partial_s V_p(\pm \ell_p) &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

на сторонах прямоугольника

$$\omega = (-\ell_1, \ell_1) \times (-\ell_2, \ell_2).$$

При этом задачи (21) с индексами $p = 1, 2$ учитываются дважды — для каждой из противоположных сторон. Асимптотика собственных вектор-функций $u_{(m)}^h$ устроена достаточно сложно из-за возникновения угловых пограничных слоев.

7. НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ

Для сечений, изображенных на рис. 2, в разд. 4–6 представлены лишь основные (первые) асимптотические серии собственных чисел задачи (1),

(2) (или (3) в вариационной форме). В разд. 4 уже упоминалось, что для обоих колец на рис. 4 возникают и другие серии собственных числах с устойчивыми асимптотиками. В случае прямоугольного сечения также можно построить собственные числа, порожденные двумерной (8) или одномерной (21) моделями упругой прокладки Ω^h . Это не сделано в сообщении по причине отсутствия информации о пороговых резонансах задач теории упругости в полуполосе (12) и четверти слоя (9), и потому обоснованно поставить краевые условия на сторонах или в вершинах прямоугольника не удастся. Подчеркнем, что при отсутствии порогового резонанса в задаче (10) при $\lambda > 0$ условия Неймана в задачах (21) заменяются условиями Дирихле в точках $s = \pm \ell_p$.

По-видимому, кратности дискретного спектра и пороговые резонансы можно определить разве лишь при помощи численных методов: в силу общих результатов [11] доступны приемы изучения названных объектов на основе вычисления устойчивых интегральных характеристик задач для упругих тел Π и Ξ .

Предложенный в разд. 3 подход к изучению спектра трехмерной задачи теории упругости весьма чувствителен к геометрической и материальной симметриям. Какие-либо результаты о спектре анизотропного сектора слоя с произвольным углом продольного сечения неизвестны.

Вывод двумерной модели (8) для ортотропной прокладки $\Omega^h = \omega \times (0, h)$ не встречает заметных препятствий согласно общим асимптотической процедурам [6]. Кроме того, приемы из работы [12] и книги [6] позволяют распространить модель и на прокладки с искривленной боковой поверхностью подходящих форм. Вопрос о поведении собственных частот тонких прокладок переменной толщины не рассматривался.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 124041500009-8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

2. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
3. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
4. *Шойхет Б.А.* Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37. № 5. С. 913–924.
5. *Морозов Н.Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости. Ленинград: изд-во ЛГУ, 1978.
6. *Назаров С.А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научная книга, 2002.
7. *Назаров С.А.* Двумерные асимптотические модели тонких цилиндрических упругих прокладок // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 6. С. 738–755.
8. *Назаров С.А.* Модели пониженной размерности для пластины, закрепленной вдоль основания и части боковой поверхности // Доклады РАН. Физика, техн. науки. 2024. Т. 516. С. 59–64.
9. *Molchanov S., Vainberg B.* Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys. 2007. V. 273. № 2. P. 533–559.
10. *Grieser D.* Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc. 2008. V. 97. № 3. P. 718–752.
11. *Назаров С.А.* Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов // Известия РАН. Серия матем. 2020. Т. 84. № 6. С. 73–130.
12. *Назаров С.А.* Упругие волны, захваченные полубесконечной полосой с защемленными боковыми сторонами и изломанным торцом // Прикладная матем. и механика. 2023. Т. 87. № 2. С. 264–278.
13. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
14. *Dauge M., Lafranche Y., Ourmières-Bonafos T.* Dirichlet spectrum of the Fichera layer // Integral Equations and Operator Theory. 2018. V. 90 (5, article 60).
15. *Ландау Л.Д., Лифшице М.* Квантовая механика (релятивистская теория). М.: Наука, 1974.

MISCELLANEOUS TYPES OF LOCALIZATION OF NATURAL OSCILLATIONS OF A GASKET BETWEEN PARALLEL FLANGES

S. A. Nazarov^a

^a*Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,
Saint-Peterburg, Russia*

Presented by Academician of the RAS N.F. Morozov

Both bases of a thin cylindrical gasket are fixed but the lateral side stays traction-free. For middle cross-sections with a smooth boundary as well as for a square one, we describe the asymptotics of frequencies of natural oscillations. Based on an investigation of the spectrum of the mixed boundary-value problem in the theory of elasticity in a quarter of the unit layer, we discover a new effect of localization of modes of natural oscillations near vertices of the square section and of the exponential decay at a distance from them. In the case of the smooth boundary of the cross-section eigenmodes concentrate either near the whole edge (a circular plate), or at the vicinity of points of maximum of the contour curvature.

Keywords: thin gasket between flanges, models of reduced dimension, localization of modes of natural oscillations, waves trapped by elastic semi-infinite strip and quarter of layer

УДК 539.3:517.958

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МОМЕНТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ИЗОТРОПНОГО ПСЕВДОКОНТИНУУМА КОССЕРА

© 2024 г. Н. И. Остросаблин^{1,*}, Р. И. Угрюмов^{1,**}

Представлено академиком РАН Б.Д. Анниным 27.02.2024 г.

Поступило 05.03.2024 г.

После доработки 18.04.2024 г.

Принято к публикации 22.04.2024 г.

Для системы уравнений в смещениях для изотропного псевдоконтинуума Коссера найдено два варианта представления общего решения через три функции, удовлетворяющих трем независимым уравнениям, т.е. система диагоназируется. Приведены формулы производства новых решений (операторы симметрии), позволяющие путем дифференцирования из какого-либо заданного решения находить новые решения исходных уравнений. Для случаев плоской и антиплоской деформации получены некоторые частные решения.

Ключевые слова: моментная теория упругости, псевдоконтинуум Коссера, общие решения, операторы симметрии, диагональная система, стесненное вращение, несимметричные тензоры напряжений и деформаций

DOI: 10.31857/S2686740024040068, EDN: JOXCGI

1. Моментная упругая среда представляется совокупностью частиц, характеризуемых в декартовой прямоугольной системе координат x_i , $i = 1, 2, 3$, вектором смещений u_i и независимым вектором поворотов ω_i [1–3]. Такая теория впервые была предложена в начале XX в. в работах братьев Коссера [1]. В моментной среде при нагружении возникают несимметричные силовые напряжения $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ji}$ и моментные напряжения $\mu_{ij} \neq \mu_{ji}$. Деформированное состояние моментной среды характеризуют несимметричные тензоры деформации e_{ij} и кручения-изгиба κ_{ij} [1–3]:

$$e_{ij} = \partial_j u_i - \omega_{ij}, \quad \kappa_{ij} = \partial_j \omega_i, \quad (1)$$

где $\omega_{ij} = \varepsilon_{ikj} \omega_k$, $\omega_i = (1/2) \varepsilon_{ijk} \omega_{kj}$; ∂_j – производная по координате x_j ; ε_{ijk} – кососимметричный по любой паре индексов тензор Леви-Чивиты; по повторяющимся индексам проводится суммирование. Определяющие уравнения для

упругой изотропной моментной среды имеют вид [1, 2]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda e_{kk} \delta_{ij} + (\mu + \alpha) e_{ij} + (\mu - \alpha) e_{ji}, \\ \mu_{ij} &= \beta \kappa_{kk} \delta_{ij} + (\gamma + \varepsilon) \kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{ji}, \end{aligned} \quad (2)$$

где λ , μ – постоянные Ламе; α , β , γ , ε – дополнительные постоянные упругости; δ_{ij} – символ Кронекера, единичная матрица.

Удельную энергию деформации можно записать в виде

$$\begin{aligned} 2\Phi &= \sigma_{ij} e_{ij} + \mu_{ij} \kappa_{ij} = \frac{1}{3} (3\lambda + 2\mu) e_{kk} e_{ii} + \\ &+ 2\mu \left(e_{(ij)} - \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij} \right) \left(e_{(ij)} - \frac{1}{3} e_{ss} \delta_{ij} \right) + \\ &+ 2\alpha e_{[ij]} e_{[ij]} + \frac{1}{3} (3\beta + 2\gamma) \kappa_{kk} \kappa_{ii} + \\ &+ 2\gamma \left(\kappa_{(ij)} - \frac{1}{3} \kappa_{kk} \delta_{ij} \right) \left(\kappa_{(ij)} - \frac{1}{3} \kappa_{ss} \delta_{ij} \right) \\ &+ 2\varepsilon \kappa_{[ij]} \kappa_{[ij]}. \end{aligned} \quad (3)$$

Круглые и квадратные скобки в индексах означают симметричную и антисимметричную части тензоров по соответствующим индексам. Из последних выражений (3) очевидно, что

¹Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева
Сибирского отделения Российской академии наук,
Новосибирск, Россия

*E-mail: o.n.ii@yandex.ru

**E-mail: riugryumov@mail.ru

$2\Phi > 0$ всегда, когда постоянные удовлетворяют неравенствам

$3\lambda + 2\mu > 0, \mu > 0, \alpha > 0; 3\beta + 2\gamma > 0, \gamma > 0, \varepsilon > 0,$
при этом соотношения (2) обратимы.

В упрощенной теории Коссера считают, что вектор поворота ω_i равен среднему повороту поля перемещений [1]

$$\omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} \partial_k u_l. \quad (4)$$

Тогда тензоры (1) принимают вид

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad (5)$$

$$\varkappa_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} \partial_{jk} u_l, \quad \varkappa_{ii} = 0.$$

С использованием (2), (4), (5) и уравнений равновесия получаются три уравнения для трех смещений [1]:

$$\mu \partial_{kk} u_i + (\lambda + \mu) \partial_{ik} u_k + \frac{1}{4} (\gamma + \varepsilon) \partial_{kk} \varepsilon_{imn} \partial_m \varepsilon_{njl} \partial_j u_l = 0. \quad (6)$$

Слагаемые со вторыми производными в (6) соответствуют классическим уравнениям Ламе, а слагаемые с четвертыми производными отвечают за моментное состояние псевдоконтинуума Коссера. К уравнениям (6) добавляют граничные условия в напряжениях или задают

на границе рассматриваемой области смещения. Вопрос о граничных условиях для системы (6) и способы ее интегрирования кратко обсуждаются в [1]. Определив из (6) смещения u_i , с учетом (2), (4), (5) можно найти $\omega_i, \sigma_{ij}, \mu_{ij}$.

С учетом соотношения $\varepsilon_{imn} \varepsilon_{njl} = \delta_{ij} \delta_{ml} - \delta_{il} \delta_{mj}$ матрицу операторов системы (6) запишем в виде:

$$A_{ij} = \mu \partial_{kk} \delta_{ij} + (\lambda + \mu) \partial_{ij} + \frac{1}{4} (\gamma + \varepsilon) \partial_{kk} (\partial_{ij} - \delta_{ij} \partial_{mm}). \quad (7)$$

Для матрицы (7) операторов системы (6) имеют место соотношения

$$AT = TD, \quad T'A = DT', \quad (8)$$

где штрих означает транспонирование матрицы. Тогда общее решение системы (6) имеет вид [4, 5]

$$u = Tv, \quad Dv = f, \quad Tf = 0, \quad (9)$$

где

$$T = \left[\partial_i, \varepsilon_{ips} c_p \partial_s, c_i \partial_{kk} - c_m \partial_{mi} \right] = \begin{bmatrix} \partial_1 & c_2 \partial_3 - c_3 \partial_2 & c_1 \partial_{kk} - c_m \partial_{m1} \\ \partial_2 & c_3 \partial_1 - c_1 \partial_3 & c_2 \partial_{kk} - c_m \partial_{m2} \\ \partial_3 & c_1 \partial_2 - c_2 \partial_1 & c_3 \partial_{kk} - c_m \partial_{m3} \end{bmatrix}; \quad (10)$$

$$D = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) \partial_{kk} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{kk} \left[\mu - \frac{1}{4} (\gamma + \varepsilon) \partial_{mm} \right] & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{kk} \left[\mu - \frac{1}{4} (\gamma + \varepsilon) \partial_{mm} \right] \end{bmatrix}; \quad (11)$$

c_p — произвольный ненулевой числовой вектор.

Запишем решение (9) с учетом (10), (11):

$$\begin{aligned} u_1 &= \partial_1 v_1 + (c_2 \partial_3 - c_3 \partial_2) v_2 + (c_1 \partial_{kk} - c_m \partial_{m1}) v_3, \\ u_2 &= \partial_2 v_1 + (c_3 \partial_1 - c_1 \partial_3) v_2 + (c_2 \partial_{kk} - c_m \partial_{m2}) v_3, \\ u_3 &= \partial_3 v_1 + (c_1 \partial_2 - c_2 \partial_1) v_2 + (c_3 \partial_{kk} - c_m \partial_{m3}) v_3; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \partial_{kk} v_1 &= f_1, \quad \partial_{kk} \left[\mu - \frac{1}{4} (\gamma + \varepsilon) \partial_{mm} \right] v_2 = f_2, \\ \partial_{kk} \left[\mu - \frac{1}{4} (\gamma + \varepsilon) \partial_{mm} \right] v_3 &= f_3; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \partial_1 f_1 + (c_2 \partial_3 - c_3 \partial_2) f_2 + (c_1 \partial_{kk} - c_m \partial_{m1}) f_3 &= 0, \\ \partial_2 f_1 + (c_3 \partial_1 - c_1 \partial_3) f_2 + (c_2 \partial_{kk} - c_m \partial_{m2}) f_3 &= 0, \\ \partial_3 f_1 + (c_1 \partial_2 - c_2 \partial_1) f_2 + (c_3 \partial_{kk} - c_m \partial_{m3}) f_3 &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, решение системы (6) по формулам (12) выражается через три функции v_i , которые удовлетворяют трем отдельным независимым уравнениям (13), однородным или неоднородным.

Из [4] и соотношений (8) следует, что если $u = Tv$, где $Dv = 0$, то система (6), (7) удовлетворяется: $Au = ATv = TDv = 0$. Если $v = T\tilde{u}$, где $A\tilde{u} = 0$, то выполняется уравнение

$Dv = DT\tilde{u} = T'A\tilde{u} = 0$. Таким образом, согласно формулам

$$u = Tv, \quad v = T'\tilde{u}, \quad (15)$$

решения уравнений $Au = 0$, $Dv = 0$ переходят друг в друга, и системы эквивалентны [6]. Но чтобы не было потери части решений, в общем случае необходимо в правой части (13) учитывать функции f_i , ядро оператора T (10), (14).

Кроме того, из формул (15) получаем, что если $A\tilde{u} = 0$, то $u = TT'\tilde{u}$ – новое решение:

$$Au = ATT'\tilde{u} = TDT'\tilde{u} = TT'A\tilde{u} = 0.$$

Если $D\tilde{v} = 0$, то и $v = T'T\tilde{v}$ – решение:

$$Dv = DT'T\tilde{v} = T'AT\tilde{v} = T'TD\tilde{v} = 0.$$

Выражение $u = TT'\tilde{u}$ есть формула производства решений, так как из любого решения \tilde{u} получается новое решение u ; оператор $Q = TT'$ является оператором симметрии в смысле группового анализа [4].

В матрице (10) все три столбца ортогональны друг к другу и третий столбец содержит вторые производные. Но можно взять третий столбец в виде, аналогичном второму столбцу, содержащем первые производные. Тогда вместо матрицы (10) будет матрица вида

$$T = \begin{bmatrix} \partial_1 & c_2\partial_3 - c_3\partial_2 & \gamma_2\partial_3 - \gamma_3\partial_2 \\ \partial_2 & c_3\partial_1 - c_1\partial_3 & \gamma_3\partial_1 - \gamma_1\partial_3 \\ \partial_3 & c_1\partial_2 - c_2\partial_1 & \gamma_1\partial_2 - \gamma_2\partial_1 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где c_p , γ_m – произвольные ненулевые непропорциональные векторы, при этом определитель

$$|T| = [(c_2\gamma_3 - c_3\gamma_2)\partial_1 + (c_3\gamma_1 - c_1\gamma_3)\partial_2 + (c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1)\partial_3] \partial_{kk}$$

не равен нулю [7]. Для случая матрицы (16) также имеют место соотношения (8) и общее решение системы (6) вида (9) с той же диагональной матрицей D (11), а функции v_i удовлетворяют трем независимым уравнениям (13). Формулы (15) и все другие приведенные выше соотношения между функциями имеют место и в случае матрицы (16). Оператор симметрии $Q = TT'$ дан в явном виде в [7]. Придавая компонентам c_j , γ_j различные значения, можно получить различные варианты общих решений в случаях (10) или (16).

Во втором и третьем уравнениях (13) дифференциальный оператор $D_2 = D_3 = D$ представляет собой произведение оператора

Лапласа $D_{(1)} = \partial_{kk}$ и оператора Гельмгольца

$$D_{(2)} = \mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{mm}.$$

Тогда решение однородного уравнения $Dv = D_{(1)}D_{(2)}v = 0$ по теореме Боджо [1] можно представить в виде суммы $v = g + h$, где g – гармоническая функция $D_{(1)}g = \partial_{kk}g = 0$, а функция h удовлетворяет уравнению Гельмгольца $D_{(2)}h = \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{mm} \right] h = 0$. Различные частные решения уравнений Лапласа и Гельмгольца приведены в [8]. Таким образом, общее решение уравнений в смещениях (6) псевдоконтинуума Коссера по формулам (9)–(14), (16) выражается через гармонические функции и функции Гельмгольца. По формуле $u = TT'\tilde{u}$, $A\tilde{u} = 0$ получают новые решения из любого известного решения \tilde{u} . Если постоянная $\gamma + \varepsilon = 0$, то полученные решения переходят в известные представления для случая классического изотропного материала [4, 5, 7].

2. Рассмотрим некоторые частные решения системы уравнений (6), (7). Для антиплоской деформации [9] принимают, что $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = u_3(x_1, x_2)$. В этом случае система (6), (7) сводится к одному уравнению

$$A_{33}u_3 = (\partial_{11} + \partial_{22}) \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)(\partial_{11} + \partial_{22}) \right] u_3 = 0. \quad (17)$$

Как сказано выше, решение уравнения (17) имеет вид $u_3 = g + h$. Если $h = 0$, то получим решение $u_3 = g$, соответствующее классической безмоментной теории упругости. В [9] в качестве решения классической антиплоской задачи теории упругости исследуется гармоническая функция

$$u_3 = g = \frac{K}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho^{1/2} \sin(\varphi/2), \quad (18)$$

соответствующая трещине продольного сдвига, где K – постоянная, а ρ , φ – полярные координаты. Разрыв вдоль отрицательного направления оси x_1 обеспечивается функцией $\sin(\varphi/2)$. Решение уравнения Гельмгольца для трещины продольного сдвига имеет вид:

$$u_3 = h = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_1}} \rho^{-1/2} \text{sh}(\lambda_1\rho) \sin(\varphi/2), \quad \lambda_1 = \sqrt{\frac{4\mu}{\gamma + \varepsilon}}. \quad (19)$$

На рис. 1 приведены графики различных решений уравнения (17). Только первые две функции являются решениями классической задачи.

Для плоской деформации [9] считают, что $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$, $u_3 = 0$, при этом система (6), (7) сводится к двум уравнениям, общее решение которых принимает вид

$$\begin{aligned} u_1 &= \partial_1 v_1 - \partial_2 v_2, \quad u_2 = \partial_2 v_1 + \partial_1 v_2; \\ (\lambda + 2\mu)(\partial_{11} + \partial_{22})v_1 &= f_1, \quad (\partial_{11} + \partial_{22}) \times \\ &\times \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)(\partial_{11} + \partial_{22}) \right] v_2 = f_2; \quad (20) \\ \partial_1 f_1 - \partial_2 f_2 &= 0, \quad \partial_2 f_1 + \partial_1 f_2 = 0. \end{aligned}$$

Последние два уравнения являются условиями Коши–Римана для аналитической функции $f(z) = f_1 + if_2$, $i = \sqrt{-1}$ комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$. Уравнения (20) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \partial_1 v_1 - \partial_2 v_2 - \partial_2 h, \quad u_2 = \partial_2 v_1 + \partial_1 v_2 + \partial_1 h; \\ (\lambda + 2\mu)(\partial_{11} + \partial_{22})v_1 &= f_1, \quad \mu(\partial_{11} + \partial_{22})v_2 = f_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_1 f_1 - \partial_2 f_2 &= 0, \quad \partial_2 f_1 + \partial_1 f_2 = 0; \\ \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)(\partial_{11} + \partial_{22}) \right] h &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Из уравнений (21) следует известная формула Колосова–Мусхелишвили, представляющая смещения $u_1 + iu_2$ через комплексные потенциалы [7]:

$$\begin{aligned} u_1 + iu_2 &= \kappa\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + i(\partial_1 + i\partial_2)h, \\ \kappa &= \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}, \end{aligned}$$

где черта над функциями означает комплексное сопряжение, а штрих – производную по z . Если известна функция h , удовлетворяющая уравнению Гельмгольца (21), то из (21) несложно найти дополнительные моментные смещения $u_k^{(m)}$. Например, для функции h вида (19) получим смещения

$$\begin{aligned} u_1^{(m)} &= -\partial_2 h = -\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_1}} \left[\frac{1}{2}\rho^{-3/2} \text{sh}(\lambda_1\rho) \cos(3\varphi/2) + \lambda_1\rho^{-1/2} \text{ch}(\lambda_1\rho) \sin\varphi \sin(\varphi/2) \right], \\ u_2^{(m)} &= \partial_1 h = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_1}} \left[-\frac{1}{2}\rho^{-3/2} \text{sh}(\lambda_1\rho) \sin(3\varphi/2) + \lambda_1\rho^{-1/2} \text{ch}(\lambda_1\rho) \cos\varphi \sin(\varphi/2) \right]. \end{aligned}$$

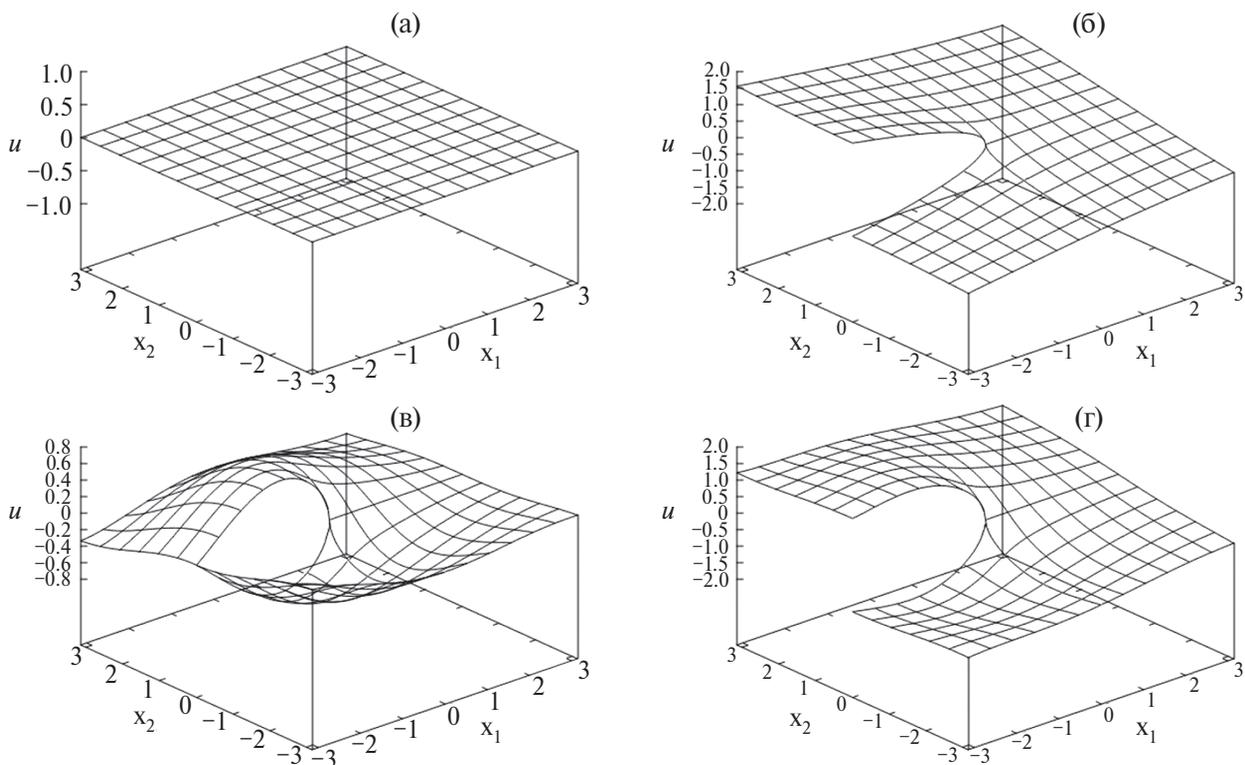


Рис. 1. Решение задачи о трещине продольного сдвига: а – сетка до деформирования, б – классическое решение (18) ($K = \mu$), в – моментное решение (19) ($\lambda_1 = 1$), г – линейная комбинация этих решений.

Некоторые двумерные задачи для изотропной моментной среды решены, например, в работах [10, 11].

Таким образом, в работе получено два варианта общего решения для системы уравнений в смещениях изотропного псевдоконтинуума Коссера. Система уравнений диагонализуется и решение выражается через гармонические функции и функции Гельмгольца. Даны формулы производства новых решений, исходя из любого заданного решения. Получены частные решения задачи о трещине продольного сдвига и представление общего решения уравнений плоской деформации.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Сибирского отделения Российской академии наук (код проекта 2.3.1.3.1)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. *Купрадзе В.Д.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелия, М.О. Башелейшвили, Т.В. Бурчуладзе. М.: Наука, 1976. 664 с.
3. *Аннин Б.Д., Остросаблин Н.И., Угрюмов Р.И.* Определяющие уравнения анизотропной моментной линейной теории упругости и двумерная задача о чистом сдвиге со стесненным вращением // Сиб. журн. индустр. математики. 2023. Т. 26. № 1. С. 5–19.
4. *Остросаблин Н.И.* Общие решения и приведение системы уравнений линейной теории к диагональному виду // Прикл. механика и техн. физика. 1993. Т. 34. № 5. С. 112–122.
5. *Остросаблин Н.И.* Об уравнениях линейной теории упругости анизотропных материалов, сводящихся к трем независимым волновым уравнениям // Прикл. механика и техн. физика. 1994. Т. 35. № 6. С. 143–150.
6. *Борок В.М.* О системах линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 1957. № 1. С. 45–65.
7. *Остросаблин Н.И.* Общее решение и приведение системы уравнений линейной изотропной упругости к диагональному виду // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12. № 2. С. 79–83.
8. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
9. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
10. *Морозов Н.Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. 183 с.
11. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.

GENERAL SOLUTION OF THE EQUATIONS SYSTEM OF THE MOMENT LINEAR ELASTICITY THEORY OF THE ISOTROPIC COSSERAT PSEUDO-CONTINUUM

N. I. Ostrosablin^a, R. I. Ugryumov^a

^a*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

Presented by Academician of the RAS B.D. Annin

For a system of equations in displacements for the Cosserat medium, two variants of representing the general solution through three functions satisfying three independent equations was found, i. e. the system is diagonalized. Expressions for the production of new solutions (symmetry operators) are given. The expressions provides to find new solutions to the original equations by differentiating from any given solution. Some particular solutions was obtained for the cases of plane and antiplane deformation.

Keywords: moment elasticity theory, Cosserat pseudocontinuum, general solutions, symmetry operators, diagonal system, constrained rotation, asymmetric stress and strain tensors

УДК 539.388.1

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ МНОГОСТАДИЙНОЙ УСТАЛОСТНОЙ КРИВОЙ НА ОСНОВЕ РЕЛАКСАЦИОННОЙ МОДЕЛИ НЕОБРАТИМОГО ЦИКЛИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

© 2024 г. Член-корреспондент РАН Ю. В. Петров^{1,2,*},
Н. С. Селютина^{1,2,**}, М. Н. Антонова^{1,***}

Поступило 01.02.2024 г.

После доработки 01.02.2024 г.

Принято к публикации 09.04.2024 г.

В работе проводится исследование многостадийной усталостной зависимости (диаграммы Вёлера) материала и предлагается новая модель для ее прогнозирования на основе учета механизмов пластического деформирования и разрушения при циклических нагрузках и комбинации релаксационных процессов с эволюционным развитием поврежденности, для которого начальное условие формируется при помощи вычисляемой в процессе циклирования энергии необратимой деформации. Работоспособность модели проверяется на примере результатов испытаний циклического деформирования стали DP500. Показано, что в рамках единого подхода можно оценить одновременно кратковременную, усталостную и длительную прочность материала.

Ключевые слова: разрушение, циклическая прочность, единая усталостная диаграмма, пластичность, поврежденность, релаксация, эффект стабилизации, характерное время релаксации

DOI: 10.31857/S2686740024040073, EDN: JOURMUD

1. Кривая Вёлера, также известная как кривая усталости или $S-N$ кривая, представляет собой графическое изображение, иллюстрирующее зависимость между амплитудой циклического напряжения (S) и количеством циклов до разрушения (N) для материала, который разрушается в результате механического циклирования. Эта кривая имеет решающее значение для понимания усталостного поведения материалов, особенно металлов. Она помогает инженерам и материаловедам разрабатывать компоненты и конструкции, способные выдерживать циклические нагрузки в течение длительного времени. Гипотетическую кривую

обычно демонстрируют, как состоящую из трех областей, представляющих различные режимы усталости: малоцикловую усталость (МЦУ, LCF – low-cycle fatigue), многоцикловую усталость (МнЦУ, HCF – high cycle fatigue) и сверхмногоцикловую усталость (СвМУ, GCF – gigacycle fatigue). Для каждой области характерны свои механизмы и поведение. Исследования показывают, что в случае малоцикловой усталости доминирует механизм, связанный с пластической деформацией и зарождением различных, в том числе трещиноподобных, дефектов. Напряжения характеризуются достаточно высоким уровнем и макроскопический разрыв материала происходит после относительно небольшого количества циклов. При этом разрушение часто сопровождается как накоплением пластической деформации, так и ростом трещин. В случае многоцикловой усталости зарождение и кумулятивный рост поврежденности, в том числе трещиноподобных дефектов, становится более значительным. Процесс

¹Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

²Институт проблем машиноведения

Российской академии наук,

Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: yuripetr@gmail.com

**E-mail: nina.selutina@gmail.com

***E-mail: maliya.antonova@gmail.com

протекает при средних амплитудах напряжений с умеренным числом циклов до макроразрыва материала. Как пластическая деформация, так и рост дефектов способствуют разрушению. При сверхмногоциклового усталости видимые повреждения и трещины обычно возникают из-за внутренних дефектов материала и особенностей поверхности. Уровень напряжения характеризуется низкими амплитудами, а разрыв среды происходит в основном из-за внезапного роста небольших трещин после большого количества циклов.

Несмотря на то, что эти различия полезны для понимания усталостного поведения в различных режимах напряжения, наличие единой концепции для объяснения всей кривой Вёлера может быть ценно по нескольким причинам. Единая концепция упрощает понимание усталостного поведения, облегчая работу инженеров и исследователей в различных режимах напряжения. Также подобная концепция позволила бы более просто ввести идеи обобщения явления усталости (МЦУ, МнЦУ, СвМУ) в процесс проектирования, что дает большую возможность разрабатывать материалы и конструкции, которые могут хорошо работать в различных условиях нагружения. Единая концепция облегчает разработку прогностических инженерных моделей, позволяющих оценить усталостную долговечность при различных условиях нагружения, что помогает в оптимизации компонентов при проектировании. Также целостное понимание механизмов усталости на разных стадиях поможет разрабатывать материалы с улучшенной усталостной прочностью по всей зависимости Вёлера. Таким образом, единая концепция, объясняющая все участки усталостной кривой, может обеспечить целостную основу для понимания и решения проблемы усталостного поведения материалов, что является важным инструментом для повышения эффективности процессов проектирования и разработки материалов.

Как правило, различные участки общей усталостной кривой описываются комплексом разных моделей, базирующихся на различных подходах и трактовках экспериментальных данных. Обзоры работ по малоциклового [1, 2], многоциклового [3, 4] и сверхмногоциклового усталости [5] показывают разнообразие

существующих в теории усталостного разрушения подходов и отсутствие единого подхода для расчета $S-N$ кривой. Однако в работе [6] авторы обращают внимание на то, что даже простой учет накапливающейся интенсивности напряжений у вершины трещины при импульсном динамическом циклировании позволяет в рамках линейной механики разрушения получить единую аналитическую формулу, дающую зависимость с тремя характерными участками.

Единый подход возможен при условии создания модели, которая может одновременно явно учитывать релаксационные процессы при пластическом деформировании в сочетании с процессом накопления повреждений в материале. Примером необходимости учета происходящей релаксации напряжений при циклических нагрузках является наличие возникающего эффекта стабилизации накопленной пластической деформации. Обычно в теории приспособляемости каждая из методик связана с задаваемым режимом деформирования на каждом отдельном цикле, и методика привязана к каждому типу нагружения. В данной работе, на основе учета накапливающейся необратимой деформации и расчета объема диссипировавшей энергии сформулирована комбинированная модель, которая может быть применена для прогнозирования эффектов циклического разрушения в широком диапазоне числа циклов: от малоциклового до многоциклового усталости. В рамках предложенного далее подхода релаксационная модель пластического деформирования [7], применяемая для прогнозирования эволюции, изменяющейся в процессе циклирования деформационной кривой, дополняется уравнением поврежденности Качанова–Работнова [8, 9], что позволяет прогнозировать зависимость числа циклов до разрушения на стадии, последующей установлению стабилизации пластической деформации.

2. Для прогнозирования усталостной кривой материала в широком диапазоне числа циклов до разрушения рассмотрим комбинированную модель, состоящую из релаксационной модели необратимого деформирования материалов [10, 11], модифицированной для случая циклического нагружения [7, 12], и кинетического уравнения поврежденности типа Качанова–Работнова [8, 13]. За точку перехода между

двумя моделями берется момент достижения стабилизации пластической деформации t_{stab} [7, 14], которому соответствует ненулевое начальное условие ω_0 , применяемое при решении эволюционного уравнения для параметра поврежденности. В случае отсутствия эффекта стабилизации пластической деформации, когда нет новых пластических деформаций за новый цикл, расчет проводится только по релаксационной модели циклического деформирования. Рассмотрим подробнее расчетную схему до ($t < t_{stab}$) и после ($t > t_{stab}$) начала стабилизирующего цикла пластической деформации, когда на определенном цикле отсутствуют новые пластические деформации.

2.1. Для прогнозирования накапливаемой в материале пластической деформации предлагается использовать релаксационную модель пластического деформирования, модифицированную для циклического процесса [7, 12]. Расчетную схему истинных напряжений материала по модели [7, 12, 15] на j цикле до $t < t_{stab}$ можно представить в следующем виде:

$$\sigma_j(\varepsilon_j(t)) \Big|_{t < t_{stab}; t < t_*} = \begin{cases} \sigma(\varepsilon_j(t)), & t < t_j^{unl}, \\ E(\varepsilon_j(t) - \varepsilon_j^{unl})H(\varepsilon_j(t) - \varepsilon_j^{unl}), & t \geq t_j^{unl}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\sigma_j(\varepsilon_j(t))$ – временная зависимость напряжений, $\varepsilon_j(t)$ – текущая деформация, t_j^{unl} – время разгрузки, и ε_j^{unl} – деформация при времени разгрузки t_j^{unl} , t_{stab} – время начала стабилизирующего цикла в материале, t_* – время разрушения. Зависимость напряжение–деформация в истинных координатах $\sigma(\varepsilon_j(t))$ на каждом j цикле определяется по релаксационной модель пластичности:

$$\sigma(\varepsilon_j(t)) = \begin{cases} E\varepsilon_j(t), & t < t_y^j, \\ E[\gamma_j(t)]^{1-p} \varepsilon_j(t), & t \geq t_y^j \end{cases} \quad (2)$$

с функцией релаксации напряжений на j цикле:

$$\gamma_j(t) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \left(\frac{\Sigma(s)}{\sigma_y^j} \right)^\alpha ds \leq 1, \\ \frac{1}{\left(\frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \left(\frac{\Sigma(s)}{\sigma_y^j} \right)^\alpha ds \right)^{\frac{1}{\alpha}}}, & \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \left(\frac{\Sigma(s)}{\sigma_y^j} \right)^\alpha ds > 1. \end{cases} \quad (3)$$

Как отмечалось в работах [16, 17], циклический предел текучести меньше статического предела текучести, поэтому в расчетной схеме рассматриваем σ_y^j статический предел текучести для образцов, подвергающихся циклическим нагрузкам.

Условие текучести на каждом j цикле определяется по критерию текучести [18]:

$$\frac{1}{\tau} \int_{t_y^j - \tau}^{t_y^j} \left(\frac{\Sigma(s)}{\sigma_y^j} \right)^\alpha ds = 1. \quad (4)$$

На каждом ($j+1$) цикле статический предел текучести определяется по условию

$$\sigma_y^{j+1} + \sigma_y^j = 2 \left| \sigma_j \left(\varepsilon_j \left(t_j^{unl} \right) \right) \right|, \quad (5)$$

где $\sigma_y^0 = \sigma_y$. В случае отсутствия эффекта стабилизации накопленной пластической деформации время разрушения t_* определяем по структурно-временному подходу [19]:

$$\frac{1}{\tau_f} \int_{t_* - \tau_f}^{t_*} \left(\frac{\Sigma(s)}{\sigma_*} \right)^{\alpha_f} ds = 1, \quad (6)$$

σ_* – предел прочности при статическом нагружении, α_f и τ_f – структурно-временные параметры критерия разрушения [16].

Модель (1)–(6) с явным учетом протекающих релаксационных процессов позволяет прогнозировать на текущем цикле накопленную пластическую деформацию и объемную плотность энергии деформации. При возникающем эффекте стабилизации пластической деформации модель позволяет оценивать циклическую прочность материала, как максимальное напряжение материала на петле гистерезиса, и соответствующий номер цикла N_{stab} .

2.2. Для того чтобы определить число циклов до разрушения материала N после установившегося режима стабилизации пластической деформации ($t > t_{stab}$) необходимо использовать обобщенное уравнение поврежденности [8, 13] с параметром поврежденности $0 \leq \omega \leq 1$, определяемым из эволюционного уравнения накопления повреждений:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega^b}{(1-\omega)^a} A(\sigma_0)^a, \quad (7)$$

σ_0 – заданная временная функция напряжений; a, b, A – постоянные величины. На момент

начала режима стабилизации t_{stab} в материале уже присутствует поврежденность ω_0 , которая формирует начальное условие для уравнения (7). Время и номер цикла связаны соотношением $t = N/v$ [20], где v – частота нагружения. Параметр поврежденности ω_0 определяется как соотношение плотности объемной энергии деформации W_{stab} , накопленной к стабильному циклу N_{stab} , к плотности объемной энергии деформации при квазистатических нагрузках W_c : $\omega_0 = W_{stab} / W_c$. Объемную плотность энергии деформации за цикл определяем как площадь подграфика деформационной диаграммы, рассчитанной по релаксационной модели для циклического деформирования. Предполагаем, что σ_0 постоянная величина, определяемая по релаксационной модели пластичности на стабилизирующем цикле.

Для решения уравнения (6) предполагается ненулевое начальное условие ω_0 , как осуществлялось в статье [21]:

$$\omega|_{t=t_{stab}} = \omega_0. \quad (8)$$

И $\omega = 1$ (в момент разрушения $t = t_*$ параметр поврежденности равен 1). Разделяя переменные, проинтегрируем уравнение (7) по времени от t_{stab} до t_* и выразим число циклов до разрушения материала:

$$N = N_{stab}(\sigma_0) + \frac{1}{A\sigma_0} \left(1 - \frac{1}{\omega_0^2}\right) \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+2)}, \quad (9)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция, определяемая при $x > 0$ как

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s} ds. \quad (10)$$

Тогда, используя уравнения (1)–(10), можно построить зависимость критического напряжения до разрушения σ_0 от числа цикла $N_* = t_* v$ (или усталостную S – N -зависимость).

2.3. На рис. 1 построена единая усталостная диаграмма для гипотетического материала в логарифмических координатах со следующими выбранными параметрами $\sigma_y^0 = 400$ МПа, $\sigma_* = 620$ МПа, $\alpha = 1$, $\tau = 1$ с, $\beta = 0.067$, $A = 0.003$ МПа $^{-1}$ с $^{-1}$, $a = 1.5$, $b = 1$. Режим нагружения проводился с фиксированной величиной общей деформации, по аналогии с работой [14]. Проводя две касательные линии к наклонному участку усталостной

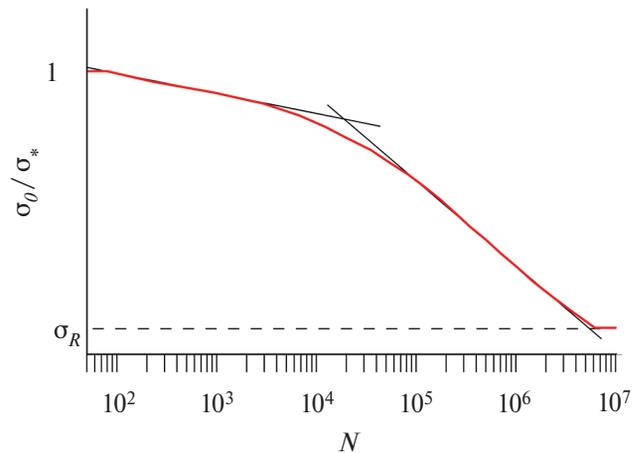


Рис. 1. Зависимость предельного напряжения до разрушения, нормированного к статической прочности гипотетического материала, от числа циклов для гипотетического материала.

кривой, показанные на рис. 1, можно выявить этапы малоциклового усталости (до $2 \cdot 10^4$ цикла), многоциклового усталости (от $2 \cdot 10^4$ до $3 \cdot 10^7$ цикла) и сверхмногоциклового усталости (после $3 \cdot 10^7$ цикла). В отличие от существующих моделей [1–5], эти три этапа строятся на основе единой комбинированной модели с фиксированным набором параметров.

Рассмотрим подробнее особенность применения единой комбинированной модели. На рис. 2 построена зависимость номера цикла N_{stab} , при котором новые пластические деформации не накапливаются, от числа циклов до разрушения N для гипотетического материала, для которого построена кривая Вёлера на рис. 1. Каждой циклической прочности σ_0 соответствует номер цикла N_{stab} . Как показано на рис. 2, с уменьшением циклической прочности номера цикла N_{stab} уменьшается, но увеличивается число циклов до разрушения N . При $N \sim 4 \cdot 10^7$ цикла материал деформируется упруго, так как $N_{stab} = 1$. При $N < 4 \cdot 10^7$ материал деформируется упруго-пластически. Применение эволюционного уравнения поврежденности (7) позволяет “сдвинуть” вправо результаты по циклической прочности и N_{stab} , полученные по релаксационной модели пластичности (1)–(6), и получить итоговую единую усталостную кривую. Другими словами, используя сочетание идей о явном учете релаксационных процессов и процесса накопления поврежденности, позволяет построить единую усталостную кривую, в том

числе важный для инженерной практики непрерывный наклонный участок единой усталостной кривой.

3. Проведем проверку работоспособности предлагаемой комбинированной модели с экспериментальными данными на мягкое нагружение для двухфазной стали DP500 [22] $\sigma_y = 350$ МПа, $\sigma_* = 570$ МПа. В работе [22] проводилось циклические усталостные испытания с частотой нагружения 20 Гц в следующем режиме: минимальное напряжение равнялось нулю и среднее напряжение равнялось половине минимального напряжения. Ранее на основе этих же экспериментальных данных был спрогнозирован эффект стабилизации пластической деформации [12]. Расчетные параметры модели получены: $\alpha = 1$, $\tau = 0.67$ мс, $\beta = 0.67$, $a = 1$, $b = 0.02$. На рис. 3 показана теоретическая усталостная зависимость для двухфазной стали DP600, имеющая хорошее соответствие с экспериментальными данными. Из рис. 3 видно, что комбинированная модель способна прогнозировать единую усталостную зависимость как в случае малоциклового, так и в случае многоциклового деформирования. В рамках комбинированной модели не требуется необходимости четкого разделения на случаи малоциклового и многоциклового усталости, так как прогнозируется единая усталостная зависимость для материала.

4. Предложена новая модель построения единой усталостной кривой на основе одновременного учета механизмов пластического деформирования и разрушения при циклических нагрузках. Показано, что комбинация релаксационной модели пластического деформирования, позволяющей прогнозировать деформационную диаграмму материала, и эволюционного уравнения поврежденности, в котором начальное условие формируется по вычисляемой в процессе циклирования энергии необратимой деформации, позволила построить усталостную зависимость, учитывающую эволюцию деформационного отклика материала. Показана необходимость одновременного учета процесса накопления поврежденности при циклических нагрузках и релаксационных процессов пластического деформирования, что может быть сделано при помощи введения в рассмотрение характерных времен релаксации данного

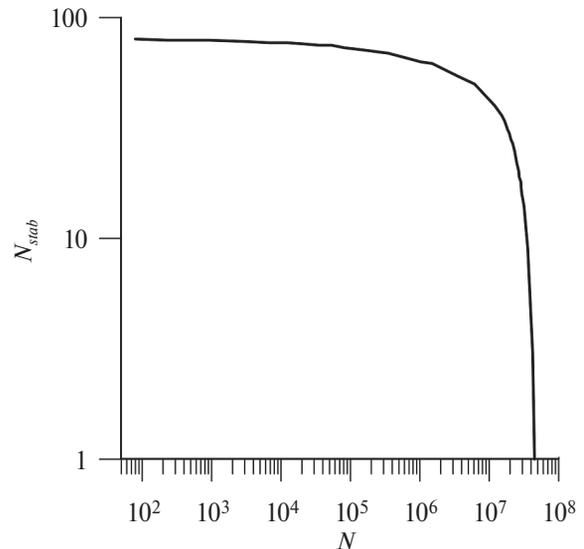


Рис. 2. Зависимость номера цикла N_{stab} , при котором новые пластические деформации не накапливаются, от числа циклов до разрушения N для гипотетического материала.

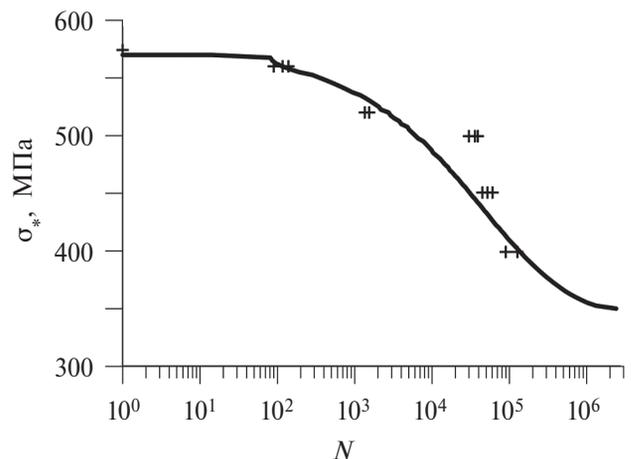


Рис. 3. Прогнозирование усталостной кривой (диаграммы Вёлера) стали DP500 на основе единой релаксационной модели необратимого циклического деформирования и экспериментальных данных [22].

материала. Проведена качественная верификация модели на экспериментальных данных на примере стали DP600.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант № 075-15-2022-1114). Разделы 2 и 3 выполнены Н.С. Селютиной при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-71-01059).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lakshmi S., Prabha Dr.C.* A Review on Low Cycle Fatigue Failure // International Journal of Science Technology and Engineering. 2017. V. 3. № 11. P. 77–80.
2. *Xu Y., Li X., Zhang Y., Yang J.* Ultra-Low Cycle Fatigue Life Prediction Model – A Review // Metals. 2023. V. 13 № 6. 1142.
3. *Sakai T.* Historical review and future prospect for researcher on very high cycle fatigue of metallic materials // Fatigue Fract. Eng. M. 2023. V. 46. № 4. P. 1217–1255.
4. *Hectors K., Waele W.D.* Cumulative Damage and Life Prediction Models for High-Cycle Fatigue of Metals: A Review // Metals 2021. V. 11. № 2. P. 204.
5. *Jeddi D., Palin-Luc T.* A review about the effects of structural and operational factors on the gigacycle fatigue of steels // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. 2018. V. 41. P. 969–990.
6. *Павловская Е.Е., Петров Ю.В.* О некоторых особенностях решения динамических задач теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 4. С. 39–45.
7. *Петров Ю.В., Селютин Н.С.* Прогнозирование эффекта стабилизации пластической деформации при циклическом деформировании на основе структурно-временного подхода // ДАН. 2017. Т. 476. № 5. С. 523–526.
8. *Работнов Ю.Н.* О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
9. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения М.: Наука, 1974. 312 с.
10. *Петров Ю.В., Бородин И.Н.* Релаксационный механизм пластического деформирования и его обоснование на примере явления зуба текучести в нитевидных кристаллах // ФТТ. 2015. Т. 57. № 2. С. 336–341.
11. *Selyutina N.S., Petrov Y.V.* Instabilities of dynamic strain diagrams predicted by the relaxation model of plasticity // J. Dynamic Behavior of Materials. 2022. V. 8. P. 304–315.
12. *Селютин Н.С., Петров Ю.В.* Эффект стабилизации пластической деформации при малоцикловом деформировании // Физ. мезомех. 2019. Т. 22. № 5. С. 13–18.
13. *Степанова Л.В., Игонин С.А.* Параметр поврежденности Ю.Н. Работнова и описание длительного разрушения: результаты, современное состояние, приложение к механике трещин и перспективы // ПМТФ. 2015. Т. 56. № 2.
14. *Макаров А.В., Саврай Р.А., Горкунов Э.С., Юровских А.С., Малыгина И.Ю., Давыдова Н.А.* Структура, механические характеристики, особенности деформирования и разрушения при статическом и циклическом нагружении закаленной и конструкционной стали, подвергнутой комбинированной деформационно-термической наноструктурирующей обработке // Физ. мезомех. 2014. Т. 17. № 1. С–57.
15. *Selyutina N.S., Smirnov I.V., Petrov Yu.V.* Stabilisation effect of strain hysteresis loop for steel 45 // Int. J. Fatigue. 2021. V. 145. 106133.
16. *Branco R., Costa J.D., Antunes F.V.* Low-cycle fatigue behaviour of 34CrNiMo6 high strength steel // Theor. Appl. Fract. Mec. 2012. V. 58. P. 28–34.
17. *Fatoba O., Akid R.* Uniaxial cyclic elasto-plastic deformation and fatigue failure of API-5L X65 steel under various loading conditions // Theor. Appl. Fract. Mec. 2018. V. 94. P. 147–159.
18. *Груздков А.А., Петров Ю.В.* О температурно-временном соответствии при высокоскоростном деформировании металлов // ДАН. 1999. Т. 364. № 6. С. 766–768.
19. *Petrov Y.V., Karihaloo B.L., Bratov V.V., Bragov A.M.* Multi-scale dynamic fracture model for quasi-brittle materials // Int. J. Eng. Sci. 2012. V. 61. P. 3–9.
20. *Арутюнян А.Р.* Формулировка критерия усталостной прочности композиционных материалов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7. № 3. С. 511–517.
21. *Каштанов А.В., Петров Ю.В.* Энергетический подход к определению уровня мгновенной поврежденности // ЖТФ. 2006. Т. 76. № 5, С. 71–75.
22. *Moćko W., Brodecki A., Kruszka L.* Mechanical response of dual phase steel at quasi-static and dynamic tensile loadings after initial fatigue loading // Mech. Mater. 2016. V. 92. P. 18–27.
23. *Zhou H., Wang Y., Shi Y., Xiong J., Yang L.* Extremely low cycle fatigue prediction of steel beam-to-column connection by using a micro-mechanics based fracture model // Int. J. Fatigue 2013. V. 48. P. 90–100.

PREDICTION OF MULTISTAGE FATIGUE CURVE BASED ON THE RELAXATION MODEL OF IRREVERSIBLE CYCLIC DEFORMATION

Corresponding Member of the RAS **Yu. V. Petrov^{a,b}**, **N. S. Selyutina^{a,b}**, **M. N. Antonova^a**

^a*St. Petersburg State University, St. Petersburg, Peterhof, Russia*

^b*Institute for Problems in Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia*

The paper studies the multi-stage fatigue dependence (Wöhler diagram) of the material and proposes a new model for its prediction based on considering the mechanisms of plastic deformation and fracture under cyclic loads and a combination of relaxation processes with the evolutionary development of damage, for which the initial condition is formed using the calculation calculated during the cycling process energy of irreversible deformation. The performance of the model is verified using the results of cyclic deformation tests on DP500 steel as an example. It is shown that within the framework of a unified approach it is possible to simultaneously evaluate the short-term, fatigue and long-term strength of the material.

Keywords: fracture, cyclic strength, unified fatigue diagram, plasticity, damage, relaxation, stabilization effect, characteristic relaxation time

УДК 532.685: 532.71

ОСМОТИЧЕСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СОЛЕННОЙ ВОДЫ В ОСАДОЧНОЙ ТОЛЩЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПОЛУПРОНИЦАЕМЫЕ ОБЛАСТИ, И ЕЕ ВОЗМОЖНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

© 2024 г. М. М. Рамазанов^{1,2,*}, академик РАН Л. И. Лобковский^{3,4,**},
Н. С. Булгакова^{1,5,***}, С. Р. Гаджимагомедова^{1,5,****}

Поступило 03.04.2024 г.

После доработки 03.04.2024 г.

Принято к публикации 11.06.2024 г.

Выполнено математическое моделирование и исследование процесса фильтрации соленой воды в осадочной толще с учетом явления осмоса. Показано, что осмотическое взаимодействие соленой и пресной воды в осадочной толще, содержащей прослойки и включения слабопроницаемых пород (глины, илы и т.д.), может привести к появлению зон больших аномалий давления и разрушению геосреды. Предложенный осмотический механизм разрушения геосреды объясняет образование покмарков и кратеров на поверхности пассивных участков коры, не испытывающих каких-либо движений и деформаций длительный период времени. Данный механизм является альтернативным по отношению к распространенной точке зрения о полигональной системе разломов тектонической природы, на основе которых объясняются покмарки на морском дне или кратеры в областях вечной мерзлоты на суше. Исследуемая математическая модель показала, что в рассматриваемых условиях возникает конвекция раствора с замкнутыми линиями тока наподобие гравитационной конвекции.

Ключевые слова: соленый раствор, осмос, обобщенная математическая модель, осмотическая конвекция, осадочная толща, полупроницаемые области, газогидраты, покмарки, кратеры, осмотическое разрушение геосреды

DOI: 10.31857/S2686740024040088, EDN: JOPYXD

Явление осмоса было открыто в 1748 г. французским естествоиспытателем Ж.А. Нолле. Осмос представляет собой одностороннюю диффузию растворителя через полупроницаемую

мембрану из разбавленного раствора в более концентрированный. Движущей силой осмоса является стремление уравнивать концентрацию солей по обе стороны мембраны. Давление, которое оказывает растворитель на мембрану, называется осмотическим. На основе осмотических явлений создаются новые материалы и технологии. Например, известная норвежская компания Statkraft нашла способ превратить осмотическое давление в электричество. Новая технология позволяет извлекать электроэнергию из естественной разницы содержания минеральных солей в пресной и морской воде, а не из кинетической энергии их движения.

Осмотический эффект может проявляться также в малопроницаемых пористых средах (глины, ил) [1–5]. В растворах движущей силой являются градиенты химических потенциалов растворителя и растворенных компонентов [6, 7].

¹Институт проблем геотермии и возобновляемой энергетики – филиал Объединенного института высоких температур Российской академии наук, Махачкала, Россия

²Институт динамики геосфер имени академика М.А. Садовского

Российской академии наук, Москва, Россия

³Институт океанологии им. П.П. Ширшова

Российской академии наук, Москва, Россия

⁴Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева Дальневосточного отделения

Российской академии наук, Владивосток, Россия

⁵Дагестанский государственный университет народного хозяйства, Махачкала, Россия

*E-mail: mukatay-igp@mail.ru

**E-mail: llobkovsky@ocean.ru

***E-mail: ipgnatali@mail.ru

****E-mail: salikhat.g@gmail.com

В [8] установлено, что осмос может вызвать высокие давления в поровой воде. В работе [2] отмечается, что условия, необходимые для значительного осмотического давления, являются обычными в недрах и что большинство осадочных бассейнов имеют большие контрасты в концентрации растворенных веществ (часто >200 г/л [9, 10]). Аномальные давления в водоносных горизонтах, вызванные химическим осмосом, могут служить механизмом образования разломов [11]. Явление осмоса играет существенную роль при бурении и строительстве скважин. При бурении скважин, даже при очень маленькой проницаемости глинистой корки, в пласт может поступать значительное количество фильтрата бурового раствора вследствие осмотического втягивания, так как осмотическое давление может достигать неожиданно больших значений [12].

Как показано в [13], коэффициент осмоса некоторых природных пород и тампонажных материалов может в десятки, а то и в сотни раз превышать коэффициент фильтрации. Теоретическое объяснение явления химического и термического осмоса на основе неравновесной термодинамики приводится в [6, 7, 12, 14–17].

Для высокой эффективности мембранных свойств пород с высоким содержанием глины, например, сланцев, необходимы низкие пористости (0.05 или ниже) [2]. Эти низкие пористости сланцев, как правило, имеют место на глубинах 1–5 км. Обычно аномальные давления, возникающие в осадочных бассейнах на таких глубинах, объясняются природными и техногенными процессами, к которым, в частности, относятся диагенез, тектонические деформации, добыча нефти. Однако выясняется, что во многих случаях аномальное давление также может возникнуть вследствие осмотического эффекта из-за ранее существовавших химических разностей потенциалов в поровой воде.

В последнее время большой интерес вызывают процессы выбросов парниковых газов, в основном метана, через воронкообразные геоморфологические структуры на морском дне (покмарки), а также крупные кратеры на суше в районах вечной мерзлоты. Что касается крупных кратеров, обнаруженных в последние годы в Сибири на полуостровах Ямал и Таймыр, то их происхождение обычно связывают

со взрывными выбросами метана в атмосферу в результате возникновения аномально высокого давления, связанного с интенсивным притоком флюидов в определенные зоны осадочной толщи. Аналогичные представления о выбросах метана на морском дне в виде холодных сипов часто используются при объяснении природы покмарков. Однако выясняется, что покмарки не обязательно связаны с каналами разгрузки флюидов или газовых сипов, а могут представлять собой просто места нарушений осадочной толщи без каких-либо следов флюидных или газовых потоков. Такая ситуация, например, имеет место в области широкого распространения покмарков на Чукотском плато в Восточной Арктике [18, 19]. Рассматриваемая в работе модель осмотической фильтрации неоднородно соленой воды в осадочной толще, содержащей полупроницаемые области с одной стороны, показывает возможность появления предельно больших аномалий давления, которые могут приводить к разрушению слоистой геосреды, а с другой — демонстрирует картину течения солевого раствора с замкнутыми линиями тока как при гравитационной конвекции.

Для понимания процессов, связанных с осмотической фильтрацией неоднородно соленой воды в осадочной толще с полупроницаемыми включениями, можно выделить две базовые задачи. В первом случае полупроницаемые области осадочных пород содержат сильно концентрированный раствор соли по сравнению с окружающей средой. Вторая задача соответствует противоположному случаю, когда полупроницаемые области насыщены раствором с аномально низкой концентрацией соли. Первый случай с точки зрения приложения к криопэгам в упрощенном виде ранее был рассмотрен в работе [20]. В настоящей работе численно-аналитическим методом решены обе нелинейные задачи. Ранее задача об осмотической конвекции впервые была поставлена и решена авторами в аналитическом виде для случая малых градиентов концентрации соли в растворе [21].

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИЛЬТРАЦИИ РАСТВОРОВ

Вывод математической модели фильтрации растворов с учетом осмоса и соответствующих граничных условий можно найти в [6]. Здесь

ограничимся ее формулировкой в простейшем случае.

Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\frac{k}{\eta} \left(\rho \frac{\partial \mu_1}{\partial c} \nabla c + \rho \frac{\partial \mu_1}{\partial T} \nabla T + \nabla p - \rho \mathbf{g} \right), \\ \frac{\partial m \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial (mc + a)}{\partial t} + \gamma \mathbf{v} \nabla c &= \gamma D \Delta c, \\ \frac{\partial a}{\partial t} &= \varphi(a, c, T), \quad m = m(a), \\ C_m \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \mathbf{v} \nabla T &= \lambda \Delta T. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь первое уравнение – закон Дарси, второе – уравнение неразрывности, третье – уравнение баланса массы соли и четвертое – уравнение баланса энергии; c – концентрация соли; \mathbf{v} – поле скоростей; C_p – удельная теплоемкость раствора; C_m – эффективная теплоемкость единицы объема насыщенной пористой среды; D – коэффициент диффузии соли; k – проницаемость; m – пористость; p – давление; T – температура; μ_1 – химический потенциал растворителя; η – вязкость раствора; λ – эффективная теплопроводность насыщенной пористой среды; ρ – плотность раствора; a – концентрация соли в твердой фазе. Коэффициент γ принимает значения от нуля до единицы. Этот коэффициент характеризует степень влияния пористой среды на фильтрацию соли, т.е. степень проявления мембранного свойства. В случае если пористая среда обладает свойствами идеальной полупроницаемости, т.е. не пропускает молекулы соли, этот коэффициент равен нулю. Если молекулы соли наравне с молекулами растворителя свободно проходят поры, то $\gamma = 1$. В общем случае γ , как и проницаемость, может быть переменной величиной и даже тензором.

Следующие условия являются естественными на границе полупроницаемого включения [6]:

$$\begin{aligned} [\rho v_n] &= 0, \quad \left[\gamma \left(v_n c - D \frac{\partial c}{\partial n} \right) \right] = 0, \\ v_n &= -\beta \left(\rho \frac{\partial \mu_1}{\partial c} [c] + [p] \right), \quad \oint v_n ds = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} [T] &= 0, \quad \left[\rho v_n h - \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right] = 0, \\ \gamma &= \begin{cases} 0, & (x, z) \in \Omega, \\ 1, & (x, z) \notin \Omega, \end{cases} \end{aligned}$$

где β – коэффициент пропорциональности, который зависит от свойств среды, в частности, от ее проницаемости, и должен определяться эмпирическим путем; Ω – область, занимаемая полупроницаемым включением. Первые два равенства описывают условия сохранения потока массы раствора и соли, третье условие вытекает из первого уравнения системы (1), из которого следует, что скачок химического потенциала на границе сред приводит к конечной скорости течения раствора (осмотический эффект). Четвертое условие означает отсутствие источников массы и позволяет устранить произвол, возникающий при решении задачи в двухсвязной области. В случае наличия n включений в растворе такие условия должны выполняться для каждого из них. Наконец, последние два условия означают непрерывность температуры и потока энергии.

Таким образом, система уравнений (1) с условиями (2) на границах полупроницаемых включений, условиями на остальных границах, не обладающих свойствами полупроницаемости, и начальными условиями представляет собой замкнутую математическую модель для описания фильтрации растворов в рассматриваемой пористой среде с полупроницаемыми включениями. Рассмотрим осмотическую конвекцию на основе сформулированной математической модели.

2. ОСМОТИЧЕСКАЯ КОНВЕКЦИЯ

2.1. Постановка задачи

Пусть в бесконечной вертикальной плоскости расположено полупроницаемое включение в виде круга произвольного радиуса (рис. 1). Вдали от включения невозмущенная концентрация убывает линейно с глубиной по закону $c_s = c_0 - \gamma_c z$ (ось z направлена вниз и отсчитывается от центра круга). Считаем, что температура среды также линейно убывает с глубиной таким образом, что плотность раствора с глубиной увеличивается незначительно, т.е. имеет

место устойчивая стратификация и не возникает естественная гравитационная конвекция. Далее, для простоты считаем процесс изотермическим, а плотность постоянной. Механическое равновесие в таких условиях невозможно и поэтому возникнет течение, вызванное осмосом. Необходимо найти стационарное решение задачи, описывающее данное течение.

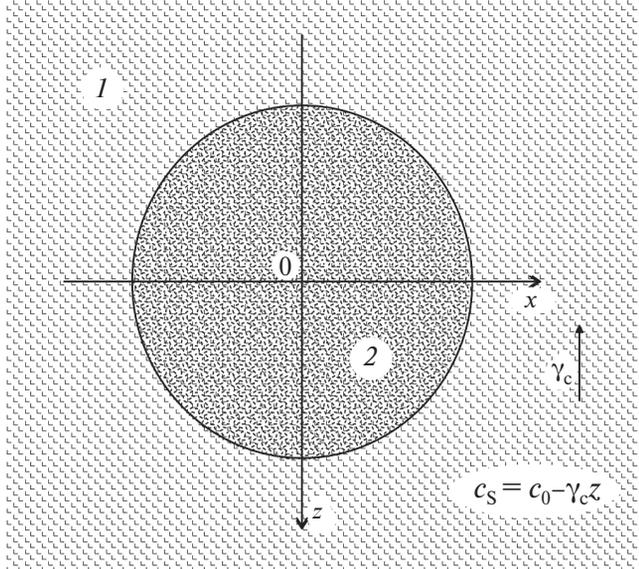


Рис. 1. Модель задачи: 1 – проницаемая пористая среда; 2 – полупроницаемое включение; γ_c – градиент концентрации соли; c_0 – невозмущенная концентрация на глубине центра включения.

Предполагаем, что концентрация соли внутри включения равна $C_0 = \text{const}$, а проницаемость вне включения не слишком мала. Тогда можно не учитывать градиент концентрации в уравнениях движения флюида в обеих средах и считать, что осмос проявляется за счет скачка концентрации соли на границе включения. Кроме того, пренебрегаем выпадением соли в осадок, т.е. адсорбцией. Будем отсчитывать давление от гидростатического, а концентрацию – от начального невозмущенного распределения. Тогда, согласно (1), с учетом сделанных предположений имеем следующие уравнения для области вне включения:

$$\Delta p_e = 0, \quad \mathbf{v}_e = -\frac{k_e}{\eta} \nabla p_e, \quad (3)$$

$$\mathbf{v}_e \nabla (c_e + c_0 - \gamma_c z) = D_e \Delta c_e$$

и для области внутри круга (включения):

$$\Delta p_i = 0, \quad \mathbf{v}_i = -\frac{k_i}{\eta} \nabla p_i. \quad (4)$$

Граничные условия (2) в полярных координатах имеют вид

$$\begin{aligned} r = r_0: & -\frac{k_e}{\eta} \frac{\partial p_e}{\partial r} = -\frac{k_i}{\eta} \frac{\partial p_i}{\partial r}, \\ & -\frac{k_e}{\eta} \frac{\partial p_e}{\partial r} = -\beta \left[\rho \frac{\partial \mu_1}{\partial c} (c_0 - \gamma_c r_0 \cos \theta + c_e - C_0) + p_e - p_i \right], \\ & -\frac{k_e}{\eta} \frac{\partial p_e}{\partial r} (c_0 - \gamma_c r_0 \cos \theta + c_e) - D \left(-\gamma_c \cos \theta + \frac{\partial c_e}{\partial r} \right) = 0, \\ r \rightarrow \infty: & p_e \rightarrow 0, \quad c_e \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5)$$

2.2. Безразмерное представление задачи

Запишем задачу в безразмерном виде, вводя масштабы

$$\begin{aligned} [x] = [z] = r_0, \quad [v] = \frac{D}{r_0}, \\ [p] = -\rho \frac{\partial \mu_1}{\partial c} \gamma_c r_0, \quad [c] = \gamma_c r_0, \\ \text{Ra}_o = -\frac{\rho k_e \gamma_c r_0}{\eta D} \frac{\partial \mu_1}{\partial c}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь Ra_o – осмотическое число Рэлея.

В безразмерном виде имеем следующие уравнения:

Вне включения

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_e}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p_e}{\partial \theta^2} = 0, \\ v_{er} = -\text{Ra}_o \frac{\partial p_e}{\partial r}, \quad v_{e\theta} = -\text{Ra}_o \frac{1}{r} \frac{\partial p_e}{\partial \theta}, \\ v_{er} \left(\frac{\partial c_e}{\partial r} - \cos \theta \right) + v_{e\theta} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial c_e}{\partial \theta} + \sin \theta \right) = \\ = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c_e}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 c_e}{\partial \theta^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Внутри включения

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_i}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p_i}{\partial \theta^2} = 0, \\ v_{ir} = -\text{Ra}_o \frac{k_i}{k_e} \frac{\partial p_i}{\partial r}, \quad v_{i\theta} = -\text{Ra}_o \frac{k_i}{k_e} \frac{1}{r} \frac{\partial p_i}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (8)$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} r = 1: & -\frac{\partial p_e}{\partial r} = -\frac{k_i}{k_e} \frac{\partial p_i}{\partial r}, \\ & -\frac{\partial p_e}{\partial r} = -\frac{k_i \beta_0}{k_e} \left[\cos \theta - c_e - \sigma_0 + \Sigma_0 + p_e - p_i \right], \end{aligned}$$

$$\sigma_0 = \frac{c_0}{\gamma_c r_0}, \quad \Sigma_0 = \frac{C_0}{\gamma_c r_0}, \quad \beta_0 = \frac{\eta r_0}{k_i} \beta, \quad (9)$$

$$-Ra_o \frac{\partial p_e}{\partial r} (\sigma_0 - \cos \theta + c_e) - \left(-\cos \theta + \frac{\partial c_e}{\partial r} \right) = 0,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad p_e \rightarrow 0, \quad c_e \rightarrow 0.$$

2.3. Решение задачи

Опуская для краткости громоздкий вывод решения, приведем сразу его окончательный вид:

$$\Psi_e = Ra_o \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{r^n} \sin n\theta, \quad v_{er} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_e}{\partial \theta}, \quad v_{e\theta} = -\frac{\partial \Psi_e}{\partial r},$$

$$\Psi_i = Ra_o \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n \sin n\theta, \quad v_{ir} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_e}{\partial \theta}, \quad v_{i\theta} = -\frac{\partial \Psi_e}{\partial r},$$

$$c_e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k \ln r + \beta_k}{r^k} \cos k\theta, \quad c_i = 0, \quad (10)$$

$$p_e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{r^n} \cos n\theta, \quad p_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \cos n\theta - \sigma_0 + \Sigma_0,$$

$$a_n = -\frac{k_e}{k_i} b_n,$$

$$b_m = \frac{\beta_m - \delta_{m,1}}{1 + \frac{k_i}{k_e} + \frac{k_e m}{k_i \beta_0}}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Здесь Ψ – функция тока; индексами e, i обозначены величины, относящиеся к областям вне и внутри полупроницаемого включения соответственно.

Постоянные коэффициенты $\alpha_k, \beta_k, k = 1, 2, \dots$, определяются нелинейными алгебраическими уравнениями

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{nb_n (\alpha_k - k\beta_k)}{k+n+1} cs(n, k, m) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n cs(n, 1, m) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{nk b_n [\alpha_k + (k+n+1)\beta_k]}{(k+n+1)^2} sn(n, k, m) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sn(n, 1, m) = -\frac{2\pi}{Ra_o} \frac{m\alpha_m}{m+1}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \alpha_m = m\beta_m + \delta_{1m} + \frac{Ra_o}{\pi} \left[\pi\sigma_0 m b_m - \sum_{n=1}^{\infty} nb_n cs(n, 1, m) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} nb_n \beta_k cs(n, k, m) \right], \end{aligned}$$

$$m = 1, 2, \dots$$

Здесь обозначено:

$$cs(n, k, m) = \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos k\theta \cos m\theta d\theta,$$

$$sn(n, k, m) = \int_0^{2\pi} \sin n\theta \sin k\theta \cos m\theta d\theta,$$

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n \neq m. \end{cases}$$

2.4. Одночленное приближение

Приведем отдельно одночленное приближение в явном виде. Если в рядах (10)–(11) ограничиться только одним членом, получим следующее решение:

$$\Psi_e = Ra_o \frac{b_1}{r} \sin \theta, \quad v_{er} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_e}{\partial \theta}, \quad v_{e\theta} = -\frac{\partial \Psi_e}{\partial r},$$

$$\Psi_i = Ra_o b_1 r \sin \theta, \quad v_{ir} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_e}{\partial \theta}, \quad v_{i\theta} = -\frac{\partial \Psi_e}{\partial r},$$

$$c_e = \frac{\beta_1}{r} \cos \theta, \quad c_i = 0, \quad (12)$$

$$p_e = \frac{b_1}{r} \cos \theta, \quad p_i = a_1 r \cos \theta - \sigma_0 + \Sigma_0,$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \frac{2Ra_o \sigma_0}{1 + Ra_o \sigma_0 + \frac{k_e}{k_i} + \frac{k_e m}{k_i \beta_0}} - 1, \quad (13)$$

$$b_1 = -\frac{2}{1 + Ra_o \sigma_0 + \frac{k_e}{k_i} + \frac{k_e m}{k_i \beta_0}}, \quad a_1 = -\frac{k_e}{k_i} b_1.$$

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Выражения (10)–(11), а в одночленном приближении (12)–(13), представляют собой искомого стационарное решение задачи в безразмерном виде. Масштабы величин даны в (6). В этих решениях концентрация соли и давление отсчитываются от невозмущенных начальных распределений. Соответственно для определения безотносительных (полных) значений этих величин необходимо к ним добавить их начальные невозмущенные значения.

Отметим, что одночленное решение (12)–(13) в точности совпадает с решением, полученным в [21] в первом приближении по градиенту концентрации γ_c . Это решение позволяет наглядно увидеть характер зависимости различных величин от параметров задачи, включая осмотическую силу.

Обратим внимание на важное свойство полученного решения. Из решения (10)–(11) или (12)–(13) не трудно заметить, что установившееся поле скоростей не зависит от концентрации соли внутри включения. Стационарное течение полностью определяется концентрацией раствора вне включения и его свойством полупроницаемости. Если градиент концентрации вне включения равен нулю или полупроницаемое включение отсутствует, то раствор будет находиться в механическом равновесии. Однако концентрация соли внутри полупроницаемой области имеет важнейшее значение, поскольку она вместе с концентрацией раствора вне включения определяют величину и характер аномалии давления.

Из (10)–(11) следует, что решение в безразмерном исчислении зависит всего от нескольких параметров, в частности от осмотического числа Рэлея. Исходных же параметров задачи значительно больше. Поэтому данные значений безразмерных величин можно получить для разных значений исходных параметров. Безразмерные величины, использованные на рис. 2, можно получить, например, при следующих значениях исходных параметров:

$$R = 8.3 \text{ Дж}/(\text{К} \cdot \text{моль}), \quad \rho_w = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3, \\ T_0 = 270 \text{ К}, \quad M = 58.44 \text{ г}/\text{моль}, \quad b_0 = 2, \\ c_0 = 30 \text{ г}/\text{л}, \quad \gamma_c r_0 = c_0/3, \quad \phi = 0.1, \\ \eta = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad k_e = 10^{-18} \text{ м}^2, \quad D = 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Отсюда с помощью (6) для числа Рэлея получено значение $Ra_0 = 10$.

Рассмотрим полученные результаты. Из рис. 2 следует, что во включении линии тока представляют собой почти прямые наклонные отрезки, вдоль которых растворитель движется вверх. Вне включения раствор движется вниз, образуя в итоге замкнутые линии тока и ячейки. Отметим, что в одночленном приближении линии тока внутри полупроницаемого включения строго вертикальны, а вне включения симметричны относительно не только вертикальной, но и горизонтальной оси симметрии включения. В общем случае, как это видно из рис. 2, имеется асимметрия, и линии тока вне включения несколько вытянуты вниз. Видно также, что по мере удаления от включения

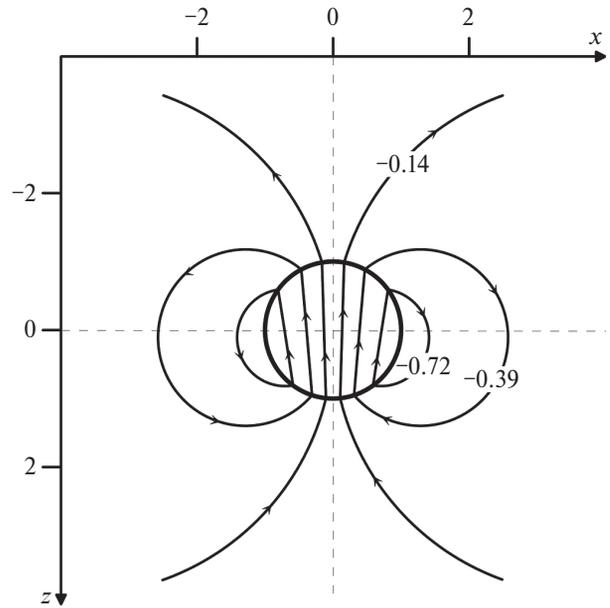


Рис. 2. Линии тока раствора в пористой среде с полупроницаемым включением при:

$$Ra_0 = 10, \quad k_e = 10^{-18} \text{ м}^2, \quad c_0 = 26 \text{ г}/\text{л}, \\ \gamma_c r_0 / c_0 = 1/3, \quad k_i / k_e = 0.1, \\ \phi = 0.1, \quad \eta = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad D = 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Цифрами показаны значения функции тока Ψ .

интенсивность конвекции падает. Таким образом, исследованная модель показала, что в данных условиях возникает осмотическая конвекция с замкнутыми линиями тока наподобие гравитационной конвекции.

Из рис. 3а видно, что с ростом числа Рэлея расход растет, т.е. растет интенсивность конвекции. Одночленное решение дает неплохое приближение при небольших числах Рэлея, однако с ростом числа Рэлея оно все больше отклоняется от точного решения. Тем не менее, это простое решение может быть использовано для предварительной оценки скоростей фильтрации и изучения свойств осмотической конвекции, как это сделано в [21]. Согласно рис. 3б, расход растворителя растет также и с ростом заданного градиента концентрации γ_c при фиксированном числе Рэлея и прочих параметров. При этом важно подчеркнуть, что число Рэлея также пропорционально γ_c , т.е. конвекция зависит от γ_c не только через число Рэлея, но и через граничное условие. С ростом градиента

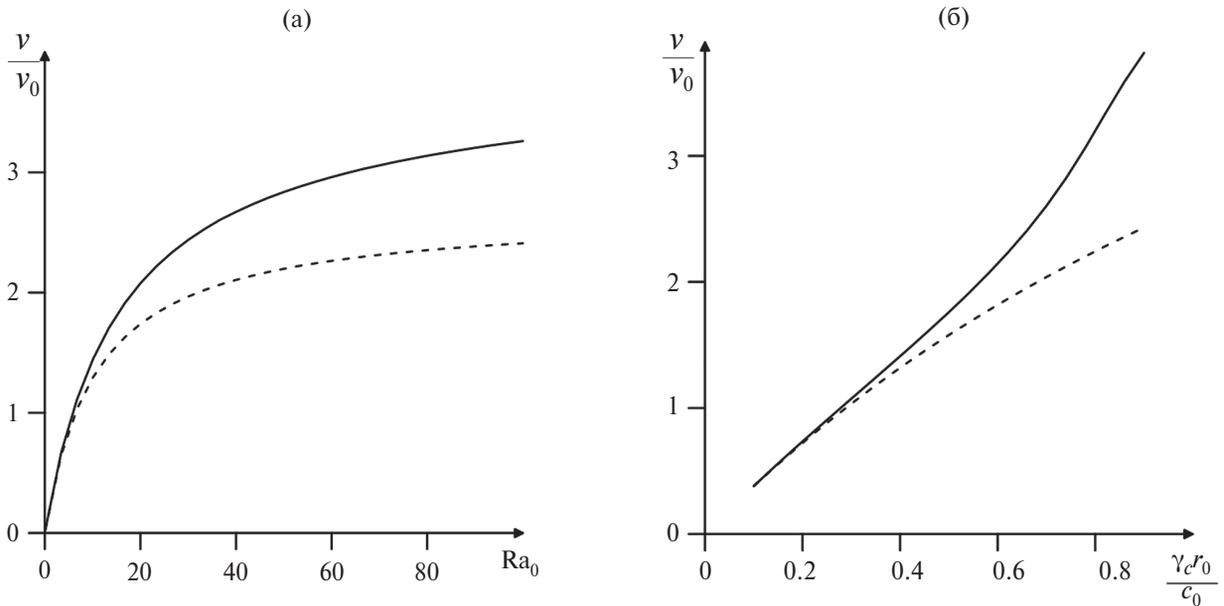


Рис. 3. Зависимость средней скорости фильтрации растворителя через полупроницаемое включение: а – от числа Рэлея при $k_i/k_e = 0.1$ и $\gamma_c r_0 / c_0 = 1/3$; б – от приведенного градиента концентрации при $Ra_0 = 30$. Пунктиром показано одночленное приближение решения. $v_0 = 0.03$ м/год; $c_0 = 30$ г/л; $\gamma_c r_0 / c_0 = 1/3$.

концентрации γ_c отклонение одночленного приближения от точного решения также растет.

Рисунок 4а построен для предельного случая $Ra_0 = 0$, когда раствор покоится, однако он справедлив для произвольных достаточно малых чисел Рэлея, когда конвективным переносом соли вне включения можно пренебречь,

по сравнению с молекулярной диффузией. Из рис. 4 видно, что в этом случае концентрация соли над включением увеличивается, а под включением уменьшается. При этом интенсивность конвекции, согласно рис. 3а, очень мала и равна нулю в предельном случае, когда $Ra_0 = 0$. Рисунок 4б, напротив, соответствует развитой конвекции, когда в основной области

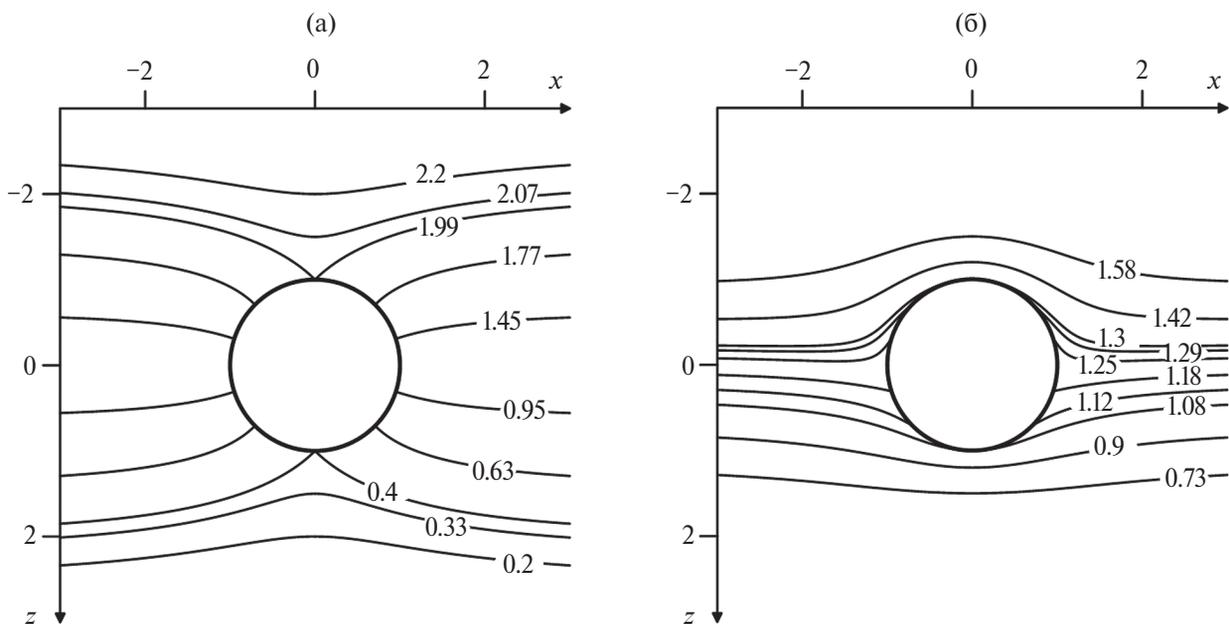


Рис. 4. Линии уровня безразмерной концентрации раствора c/c_* в пористой среде, содержащей полупроницаемое включение при $c_* = 25$ г/л, $\gamma_c r_0 = 10$ г/л, $c_0/\gamma_c r_0 = 3$, $k_i/k_e = 0.1$: $Ra_0 = 0$ (а). $Ra_0 = 30$ (б).

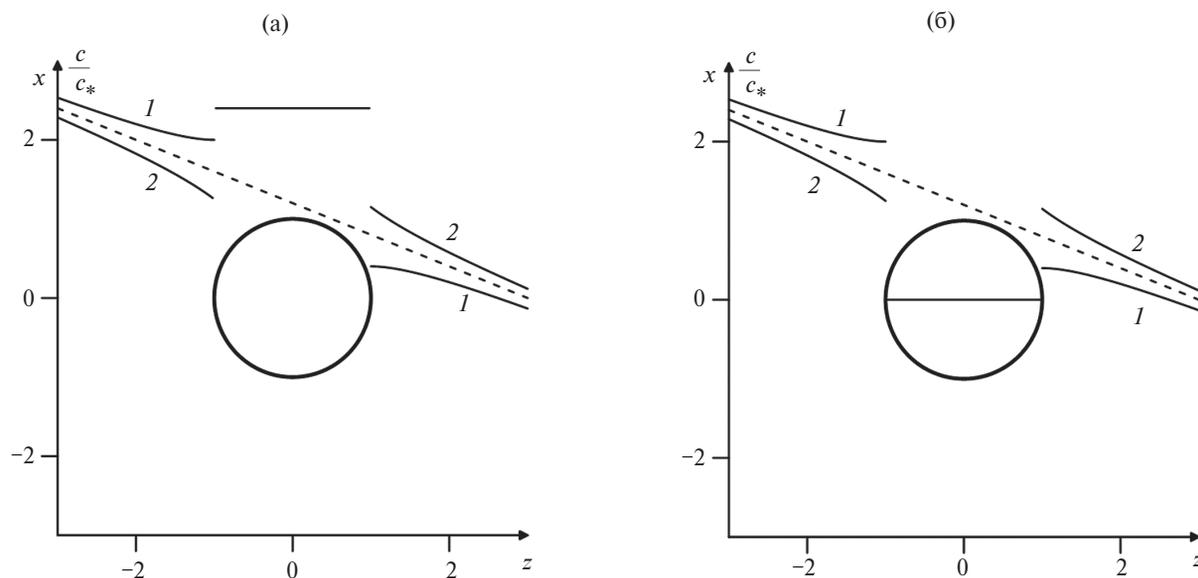


Рис. 5. Распределение концентрации соли в растворе с глубиной при $k_i/k_e = 0.1$ и $Ra_o = 0$ (1); $Ra_o = 30$ (2) а – включение содержит сильно концентрированный раствор; б – включение содержит anomalно слабо концентрированный раствор; $\gamma_c r_0 = 10$ г/л, $c_0/\gamma_c r_0 = 3$, $k_i/k_e = 0.1$, $c_* = 25$ г/л.

конвективный перенос доминирует над диффузией. Диффузия будет играть существенную роль лишь в пограничном слое вблизи границы включения. Как видно из рис. 4б, в этом случае, напротив, концентрация над включением уменьшается, а под включением растет. Это связано с тем, что развитая конвекция стремится выровнять распределение концентрации вне включения. Масштаб солености на рис. 4 равен 25 г/л. Отметим, что линии уровня давления качественно аналогичны, поэтому не приводятся.

На рис. 5 пунктиром показано невозмущенное распределение концентрации соли, цифрой 1 обозначены кривые, справедливые для малых чисел Рэлея, т.е. когда конвекция очень слаба или отсутствует, кривые 2 соответствуют развитой конвекции. Из рисунков следует, что при малых числах Рэлея осмос приводит к росту концентрации соли над включением и ее уменьшению под включением, конвекция же стремится выровнять концентрации соли над и под включением. Концентрация соли внутри включения остается первоначальной, поскольку включение не пропускает молекулы соли. Из рисунка видно так же, что образуются скачки концентрации на границе включения, характерные для осмоса. Масштаб солености на рис. 5 также равен 25 г/л.

Как видно из рис. 6, если внутри полупроницаемой области раствор более концентрированный (рис. 6а), то имеется положительная аномалия давления, в противном случае (рис. 6б) имеет место депрессия давления. Отметим, что во втором случае при некоторых значениях входных параметров давление внутри включения может формально получиться отрицательным, что лишено физического смысла. Это будет означать, что в данном случае вся влага из полупроницаемого включения будет вытянута. Из рис. 6 с учетом рис. 5 следует, что перепад солености в 10 г/л вызывает аномалию давления порядка 1 МПа. Согласно [2], аномалии, вызванные осмосом, в глинистых породах осадочного бассейна могут достигать 20 МПа. Таким образом, в рассматриваемом случае мы имеем аномалию давления, которая может быть значительной.

Рассмотрим одно из возможных приложений полученных результатов. Случай, когда внутри включения имеется положительная аномалия солености раствора и соответственно положительная аномалия давления, в упрощенном виде рассматривался в работе [20] в связи с приложением к криопэгам. Из-за сделанных упрощений наличие полученной выше конвекции в цитированной работе осталось незамеченным, однако аномалия давления в связи с аномалией солености была количественно оценена. В этой

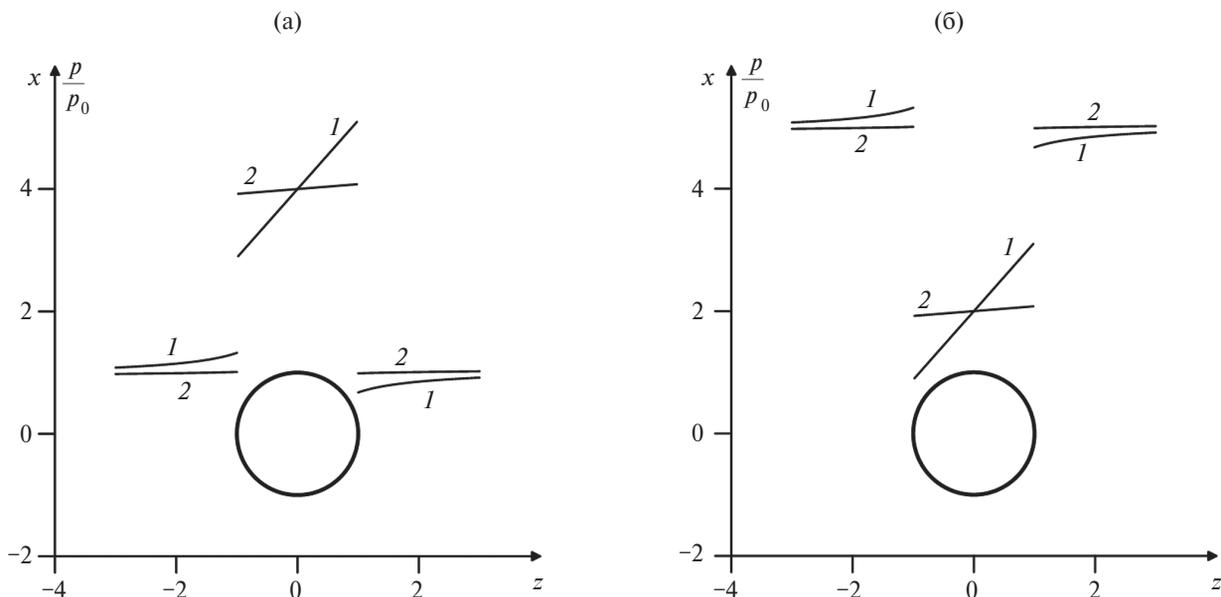


Рис. 6. Распределение безразмерного давления в растворе при $k_i/k_e = 0.3$ и $Ra_o = 0$ (1); $Ra_o = 30$ (2); $p_0 = 1.2$ МПа: а – включение содержит сильно концентрированный раствор, избыточная концентрация равна $C_0 - c_0 = 36$ г/л; б – включение содержит anomalously слабо концентрированный раствор.

работе показано, что значительный объем поверхностной талой воды может мигрировать вниз под действием осмотического давления, связанного с криопэггом (линзой рассола). Показано, что достигаемое на глубине избыточное давление, вызванное скоплением воды в пласте, может превышать предел прочности и вызывать растрескивание мерзлого грунта. Если такие трещины распространяются на поверхность, быстрое снижение давления на глубине может привести к разложению гидрата метана, выделению газа метана и механическому взрыву. Данный механизм рассматривается как возможная причина образования кратеров в Сибири. Предполагается, что это описанное явление также может быть причиной образования покмарков на морском дне в мелкозернистых отложениях, таких как ил и глина. Отмечается, что рассмотренный механизм способен значительно ускорить разложение гидратов метана, и перенос выделенного метана с глубины на поверхность в качестве парникового газа может влиять на потепление климата. Полученное выше более строгое решение задачи (см. рис. 5а–5б) подтверждает реалистичность данной гипотезы.

Рассмотрим теперь второй случай, когда внутри включения имеется отрицательная аномалия солёности раствора и соответственно отрицательная аномалия давления (рис. 5б–5б).

Если внутри рассматриваемого включения имеются газогидраты, то депрессия давления может привести к их быстрому разложению, сопровождаемому последующим ростом давления в пласте, вызванном скоплением освобождённого газа. Это может привести к растрескиванию мерзлого грунта и даже к механическому взрыву [20]. Разница между обоими случаями заключается в том, что в первом случае депрессия давления как триггер разложения газогидратов появляется после первичного образования трещин и разломов из-за повышенного давления на первом этапе, а во втором случае депрессия давления вызвана изначально осмосом из-за anomalously низкой солёности внутри полупроницаемой области. Таким образом, оба сценария выбросов метана имеют схожий характер на поздней стадии.

С другой стороны, возможно объяснение возникновения “сухих” покмарков и без наличия газогидратов – просто в результате схлопывания геосреды из-за значительного уменьшения давления в опреснённых зонах слабой солёности. В этом случае на поверхности над опреснёнными зонами должны возникнуть воронки – “сухие” покмарки, которые наблюдаются в большом количестве на Чукотском плато Восточно-Арктического шельфа [18, 19].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе сформулированной математической модели рассмотрена осмотическая фильтрация соленой воды в осадочном слое, содержащем полупроницаемую область, насыщенную сильно или слабо концентрированным, по сравнению с окружающей средой, раствором. Показано, что в обоих случаях может возникнуть осмотическая конвекция с замкнутыми линиями тока наподобие гравитационной конвекции. Эта конвекция, если она развита, приводит к выравниванию концентрации соли, т.е. к уменьшению разности концентрации соли над и под полупроницаемым включением. Показано, что в рассматриваемых условиях может возникнуть значительная депрессия давления в полупроницаемой области. Это может вызвать разложение газогидратов, при их наличии, с последующим повышением давления в пласте с возможным растрескиванием пласта и механическим взрывом с образованием кратеров.

Рассмотренный осмотический механизм разрушения осадочной толщи имеет два важных следствия:

1. Он не связан с обязательной разгрузкой флюидов или газов, что, как правило, подразумевается при анализе покмарков или кратеров. Этот важный вывод позволяет правильно интерпретировать “сухие” покмарки, которые наблюдаются в разных местах, например, в южной части Чукотского плато [18, 19].

2. Достаточно часто встречаются поля покмарков в тектонически пассивных областях коры (например, Чукотское плато), где отсутствовали деформации коры на протяжении достаточно продолжительных периодов времени (миллионы лет и больше). Поэтому осмотический механизм разрушения представляет собой альтернативный подход к интерпретации генезиса покмарков по отношению к традиционному тектоническому подходу, который основывается на существовании так называемой полигональной системы разломов [18].

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института проблем геотермии и возобновляемой энергетики – филиала ОИВТ РАН; в рамках государственного задания Института

океанологии им. П.П. Ширшова РАН (проект № FMWE-2024-0018); частично при поддержке РНФ № 22-67-00025, № 21-77-30001.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Magara K.* Compaction, Ion Filtration, and Osmosis in Shale and Their Significance in Primary Migration // *The Am. Assoc. Petrol. Geol. Bull.* 1974. V. 58. №. 2. P. 283–290.
<https://doi.org/10.1306/83D913D5-16C7-11D7-8645000102C1865D>
2. *Neuzil C.E.* Osmotic generation of ‘anomalous’ fluid pressures in geological environments // *Nature*. 2000. V. 40. P. 182–184.
<https://doi.org/10.1038/35003174>
3. *Young A., Low P.F.* Osmosis in argillaceous rocks // *AAPG Bull.* 1965. V. 49. P. 1004–1008.
<https://doi.org/10.1306/A663368E-16C0-11D7-8645000102C1865D>
4. *Fritz S.J.* Ideality of clay membranes in osmotic processes: A review // *Clays Clay Miner.* 1986. V. 34. P. 214–223.
<https://doi.org/10.1346/CCMN.1986.0340212>
5. *Bolt G.H.* Electrochemical phenomena in soil and clay systems // *Developments in Soil Science*. V. 5B. 1979. P. 387–432.
[https://doi.org/10.1016/S0166-2481\(08\)70666-4](https://doi.org/10.1016/S0166-2481(08)70666-4)
6. *Рамазанов М.М., Каракин А.В., Лобковский Л.И.* Математическая модель движения растворов с учетом осмотического эффекта // *ДАН*. 2019. Т. 489. № 1. С. 75–79.
<https://doi.org/10.31857/S0869-5652489175-79>
7. *Keijzer Th.J.S., Loch J.P.G.* Chemical osmosis in compacted dredging sludge // *Soil. Sci. Soc. Am. J.* 2001. V. 65. P. 1045–1055.
<https://doi.org/10.2136/sssaj2001.6541045x>
8. *Marine I.W., Fritz S.J.* Osmotic model to explain anomalous hydraulic heads // *Water Resour. Res.* 1981. V. 17. P. 73–82.
<https://doi.org/10.1029/WR017I001P00073>
9. *Hanor J.S.* Geofluids: Origin, Migration and Evolution of Fluids in Sedimentary Basins / Ed. John Parnell. Geological Society. 1994. P. 151–174.
10. *Bachu S.* Synthesis and model of formation-water flow // *Alberta Basin, Canada. Am. Assoc. Petrol. Geol. Bull.* 1995. V. 79. P. 1159–1178.
<https://doi.org/10.1306/8D2B2209-171E-11D7-8645000102C1865D>
11. *Berry F.A.F., Hanshaw B.B.* Geological field evidence suggesting membrane properties of shales // *Proc. 21st Int. Geol. Congress. Copenhagen*, 1960. P. 209.
12. *Мирзаджанзаде А.Х., Ентов В.М.* Гидродинамика в бурении. М.: Недра, 1985. 196 с.
13. *Воронкевич С.Д., Сергеев В.И., Емельянов С.Н.* Исследование фильтрационно-осмотических

- процессов при создании плотных защитных экранов / Задачи механики природных процессов. М.: НИИ Механики МГУ, 1983. С. 47–63.
14. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуации / Под ред. Ю. А. Чизмадзе. М.: Мир, 1973. 280 с.
 15. Чураев Н.В. Физикохимия процессов массопереноса в пористых телах. М.: Химия, 1990. 272 с.
 16. Graham J., Tanaka N., Crilly T., Alfaro M. Modified Cam-Clay modeling of temperature effects in clays // Can. Geotech. J. 2001. V. 38. P. 608–621. <https://doi.org/10.1139/cgj-38-3-608>
 17. Srivastava R.C., Avasthi P.K. Non-equilibrium thermodynamics of thermo-osmosis of water through kaolinite // Hydrol. 1975. V. 24. P. 111–120. [https://doi.org/10.1016/0022-1694\(75\)90145-6](https://doi.org/10.1016/0022-1694(75)90145-6)
 18. Астахов А.С., Маркевич В.С., Колесник А.Н., Ван Рудзян, Кононов В.В., Обрезков М.С., Босин А.А. Возможные условия и время формирования покмарков Чукотского плато // Океанология. 2014. Т. 54. № 4. С. 1–14. <https://doi.org/10.7868/S0030157414040029>
 19. Логвина Е.А., Матвеева Т.В., Гладыш В.А., Крылов А.А. Комплексные исследования покмарков на Чукотском плато // Проблемы Арктики и Антарктики. 2011. № 2(88). С. 45–54.
 20. Morgado A., Rocha L., Cartwright J., Cardoso S. Osmosis drives explosions and methane release in Siberian permafrost // arXiv - PHYS – Geophysics. Pub Date: 2023-08-11. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.06046>
 21. Рамазанов М.М., Булгакова Н.С., Лобковский Л.И. Осмотическая конвекция // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2022. Т. 504. № 1. С. 47–52. <https://doi.org/10.31857/S2686740022020109>

OSMOTIC FILTRATION OF SALT WATER IN SEDIMENTARY STRATA CONTAINING SEMIPERMEABLE AREAS AND ITS POSSIBLE APPLICATIONS

**M. M. Ramazanov^{a,b}, Academician of the RAS L. I. Lobkovsky^{c,d},
N. S. Bulgakova^{a,e}, S. R. Gadzhimagomedova^{a,e}**

^a*Institute for Geothermal Research and Renewable Energy – Branch of Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences, Makhachkala, Russia*

^b*Sadovsky Institute of Geosphere Dynamics, Moscow, Russia*

^c*Shirshov Institute of Oceanology of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^d*V.I. Il'ichev Pacific Oceanological Institute,*

Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russia

^e*Dagestan State Institute of National Economy, Makhachkala, Russia*

Mathematical modeling and investigation of the filtration process of salt water in the sedimentary column, taking into account the phenomenon of osmosis, has been performed. It is shown that the osmotic interaction of salt and fresh water in a sedimentary column containing interlayers and inclusions of poorly permeable rocks (clays, silts, etc.) can lead to the appearance of zones of large pressure anomalies and the destruction of the geomedium. The proposed osmotic mechanism of destruction of the geomedium explains the formation of pockmarks and craters on the surface of passive areas of the crust that do not experience any movements and deformations for a long period of time. This mechanism is an alternative to the common point of view about a polygonal fault system of tectonic nature, on the basis of which marks on the seabed or craters in permafrost areas on land are explained. The mathematical model under study showed that under the conditions under consideration, convection of a solution with closed current lines occurs, similar to gravitational convection.

Keywords: saline solution, osmosis, generalized mathematical model, osmotic convection, sedimentary column, semipermeable areas, gas hydrates, pockmarks, craters, osmotic destruction of the geomedium

УДК 62-50

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОСРЕДСТВОМ ПОДВИЖНОЙ МАССЫ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНИХ СИЛ, ЗАДАННЫХ КАК ФУНКЦИИ ВРЕМЕНИ

© 2024 г. А. М. Шматков^{1,*}

Представлено академиком РАН Ф.Л. Черноусько 29.02.2024 г.

Поступило 01.03.2024 г.

После доработки 01.03.2024 г.

Принято к публикации 09.04.2024 г.

Исследовано пространственное движение механической системы, состоящей из твердого тела и подвижной точечной массы, взаимодействующих друг с другом посредством незаданных внутренних сил. Задача состоит в построении такой траектории для точечной массы, при движении по которой твердое тело под действием силы взаимодействия с этой массой меняет свою ориентацию в пространстве по известной программе. Предполагается наличие действующих на оба объекта внешних сил, заданных как функции времени. Получена разрешенная относительно производных система из трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, позволяющая решить задачу. Эти соотношения можно использовать для управления космическими аппаратами и робототехническими системами.

Ключевые слова: переориентация твердого тела, подвижная точечная масса, пространственное движение

DOI: 10.31857/S2686740024040098, EDN: JOPINN

1. Способ перемещения технического устройства зависит от способа, которым оно взаимодействует с окружающей средой. Как правило, применяют внешние по отношению к корпусу движители: колеса, пропеллеры, ноги и т.п. Это создает проблемы, если окружающая среда агрессивна, поскольку трудно обеспечить герметичность корпуса. Если же среда ранима, что имеет место, например, при движении внутри человеческого организма, то традиционные движители могут ее повредить. Для управления пространственной ориентацией космических аппаратов широко используют реактивные двигатели, однако они расходуют рабочее тело, которое необходимо доставлять с Земли.

Менее распространенный способ перемещения заключается в применении подвижных масс, внутренних по отношению к корпусу [1, 2].

Этот метод используют в микророботах [3–5] и в капсульных роботах, перемещающихся внутри трубопроводов [6]. Одномерные поступательные движения в системах с внутренними подвижными массами широко описаны в научной литературе, например, [7, 8]. Рассмотрены различные виды сопротивлений со стороны внешних сред, в том числе вязкое и сухое трение, а также трение с зависящими от скорости движения линейным, квадратичным и более общими законами сопротивления. Найдена средняя скорость перемещения таких систем, получены оптимальные законы управления, обеспечивающие наибольшую среднюю скорость, и оптимальные значения механических и геометрических параметров. Была проведена экспериментальная проверка указанных результатов [9], подтвердившая их.

По сравнению с одномерным случаем двумерные и трехмерные движения систем с внутренними управляемыми подвижными массами

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук, Москва, Россия
*E-mail: shmatkov@ipmnet.ru

гораздо сложнее [10]. Плоское движение таких систем при наличии сухого трения описано в [11], где рассмотрен в основном случай отсутствия внешних сил. В случае, когда внутренняя масса мала по сравнению с массой твердого тела, найдено двумерное движение, обеспечивающее максимально быстрое вращение твердого тела вокруг неподвижной оси [12]. Случай произвольного соотношения масс рассмотрен в [13]. Движение по плоскости было также изучено в [14, 15]. Частные случаи трехмерного движения были исследованы в [16]. Трехмерная задача о пространственном развороте твердого тела при помощи подвижной массы в отсутствии внешних сил была рассмотрена в [17], где маневр осуществляется с помощью серии последовательных поворотов. Возможности применения нескольких масс для решения той же задачи исследованы в [18]. В случае замкнутой механической системы для изменения ориентации твердого тела по произвольной заданной программе при помощи одной подвижной массы было найдено точное аналитическое решение и условия, при которых оно существует [19].

Важный частный случай управления пространственной ориентацией твердого тела с помощью подвижной точечной массы возникает при исследовании систем, в которых зависимость внешних сил от времени известна заранее, до начала маневра. В качестве примера рассмотрим движение искусственного спутника Земли на низкой (от 400 до 1000 км) околоземной круговой орбите. В общем случае основными действующими на него моментами внешних сил являются гравитационный, аэродинамический и магнитный [20]. Эти моменты существенно зависят от ориентации спутника в пространстве, но меняются незначительно при изменении радиуса орбиты спутника, скажем, в пределах 100 м. Теперь возьмем дополнительное устройство, действием моментов внешних сил на которое можно пренебречь. Следовательно, его можно рассматривать как материальную точку. Предположим, что это устройство взаимодействует при помощи неких сил с указанным выше космическим аппаратом, не удаляясь от него более чем на десятки метров, и пусть программа изменения пространственной ориентации космического аппарата задана. Тогда при сделанных допущениях можно полагать, что внешние силы, действующие на

систему, состоящую из спутника и дополнительного устройства, известны заранее как функции времени и не зависят от маневров этих двух объектов, вызванных силами взаимодействия между ними.

Основываясь на подходе, изложенном в [21], получим векторное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной известной функции и описывающее движение рассматриваемой механической системы.

2. Следуя [21], рассмотрим механическую систему, состоящую из твердого тела и взаимодействующей с ним подвижной материальной точки. Пусть тело имеет массу m_b и тензор инерции \mathbf{J} относительно своего центра масс, заданного в неподвижной системе координат вектором \mathbf{r}_b . Масса материальной точки равна m_p , а ее положение определено вектором \mathbf{r}_p в той же системе координат. Предположим, что на систему действуют внешние силы, описанные как известные функции времени. Необходимо найти такое движение материальной точки, чтобы ориентация твердого тела в пространстве изменялась по заранее заданной программе.

Поскольку центр масс тела в общем случае не остается в покое, то переориентацию будем рассматривать в кёниговых осях [22], т.е. в поступательно перемещающейся системе координат с началом в центре масс тела.

Заданную последовательность положений твердого тела в пространстве относительно кёниговой системы координат будем описывать с помощью ортогональной матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$. Тогда [22] компонентами вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ в связанной с телом системе координат являются элементы кососимметрической матрицы $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}}$, причем точка над символом обозначает производную по времени. Это позволяет найти вектор относительного кинетического момента тела вокруг его центра масс в связанной с телом системе координат, равный произведению $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$, и построить его проекции в кёниговой системе координат, получив вектор $\mathbf{K}_b = \mathbf{A}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$.

3. По известным внешним силам можно получить главный вектор этих сил \mathbf{F} , определяющий изменение вектора \mathbf{r}_c центра масс всей системы [22] согласно уравнению

$$(m_b + m_p)\ddot{\mathbf{r}}_c = \mathbf{F}, \quad \mathbf{r}_c = \frac{m_b \mathbf{r}_b + m_p \mathbf{r}_p}{m_b + m_p}. \quad (1)$$

Заметим, что вектор \mathbf{r}_c не зависит от выбора движения материальной точки, а потому может быть найден заранее по начальным условиям для тела и подвижной точки в момент времени t_0 , которые будем полагать известными:

$$\mathbf{r}_b(t_0) = \mathbf{r}_{b0}, \quad \dot{\mathbf{r}}_b(t_0) = \mathbf{v}_{b0}, \quad \mathbf{r}_p(t_0) = \mathbf{r}_{p0}, \quad \dot{\mathbf{r}}_p(t_0) = \mathbf{v}_{p0}, \quad (2)$$

где \mathbf{r}_{b0} , \mathbf{v}_{b0} , \mathbf{r}_{p0} и \mathbf{v}_{p0} – заданные постоянные векторы. Кроме того, можно вычислить действующий на тело относительный момент внешних сил \mathbf{M}_b относительно центра масс тела, так как соответствующее движение тела тоже задано.

Для подвижной материальной точки вектор \mathbf{K}_p относительного кинетического момента вокруг центра масс тела и вектор \mathbf{M}_p относительного момента внешних сил в неподвижной системе координат определяются уравнениями

$$\mathbf{K}_p = m_p (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_b) \times \frac{d(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_b)}{dt}, \quad \mathbf{M}_p = (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_b) \times \mathbf{F}_p. \quad (3)$$

Тогда с учетом соотношений (3) для всей системы в целом справедлива теорема об изменении относительного момента количеств движения [23]

$$\frac{d\mathbf{K}_b}{dt} + \frac{d\mathbf{K}_p}{dt} = \mathbf{M}_b + \mathbf{M}_p - (m_b + m_p)(\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_b) \times \frac{d^2 \mathbf{r}_b}{dt^2}. \quad (4)$$

Воспользуемся первым соотношением из формул (3) и непосредственным дифференцированием получим

$$\dot{\mathbf{K}}_p = m_p (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_b) \times \frac{d^2 (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_b)}{dt^2}. \quad (5)$$

Из второго соотношения в формулах (1) следует, что

$$\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_b = \frac{m_p}{m_b + m_p} (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_b). \quad (6)$$

Подставим выражения (5) и (6) в уравнение (4). Получим

$$(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_b) \times (m_p \ddot{\mathbf{r}}_p - \mathbf{F}_p) = \mathbf{M}_b - \dot{\mathbf{K}}_b. \quad (7)$$

Выразим из второго соотношения в формулах (1) вектор

$$\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_b = \frac{m_b + m_p}{m_b} (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_c). \quad (8)$$

С помощью равенства (8) преобразуем уравнение (7) к виду

$$\frac{m_p (m_b + m_p)}{m_b} (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_c) \times (\ddot{\mathbf{r}}_p - \ddot{\mathbf{a}}_p) = \mathbf{M}_b - \dot{\mathbf{K}}_b, \quad (9)$$

$$\ddot{\mathbf{a}}_p = \frac{\mathbf{F}_p}{m_p}.$$

Заметим, что согласно принципу относительности Галилея к вектору \mathbf{a}_p можно добавить вектор $(t - t_0)\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_0$, где \mathbf{c}_1 и \mathbf{c}_0 – произвольные постоянные векторы. Теперь введем величины

$$\mathbf{r}_d = \mathbf{r}_p - \mathbf{a}_p, \quad \mathbf{r}_s = \mathbf{r}_c - \mathbf{a}_p. \quad (10)$$

Векторы (10) позволяют записать уравнение (9) в виде

$$\frac{m_p (m_b + m_p)}{m_b} (\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s) \times \ddot{\mathbf{r}}_d = \mathbf{M}_b - \dot{\mathbf{K}}_b. \quad (11)$$

Для сокращения формул введем [21] вектор

$$\mathbf{f} = \frac{m_b}{m_p (m_b + m_p)} (\mathbf{M}_b - \dot{\mathbf{K}}_b). \quad (12)$$

Заметим, что в общем случае этот вектор может зависеть не только от времени, но и от координат твердого тела и подвижной материальной точки, если от них зависят действующие на рассматриваемые объекты внешние силы. Однако далее этот случай рассмотрен не будет.

С помощью обозначения (12) можно представить уравнение (11) в форме [21]

$$(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s) \times \ddot{\mathbf{r}}_d = \mathbf{f}, \quad (13)$$

где вектор \mathbf{r}_s известен, а вектор \mathbf{r}_d необходимо найти с использованием начальных условий (2).

Введем вектор

$$\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s) \times (\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s) \quad (14)$$

и запишем уравнение (13) в виде

$$(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s) \times (\ddot{\mathbf{r}}_d - \ddot{\mathbf{r}}_s) + (\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s) \times \ddot{\mathbf{r}}_s = \mathbf{f}. \quad (15)$$

Тогда с помощью вектора (14) можно представить соотношение (15) в форме

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} + (\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s) \times \ddot{\mathbf{r}}_s = \mathbf{f}. \quad (16)$$

Будем обозначать скалярное произведение произвольных векторов $\boldsymbol{\zeta}$ и $\boldsymbol{\chi}$ как $(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\chi})$.

Поскольку из равенства (13) следует, что $(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s, \mathbf{f}) = 0$, а из равенства (14) вытекает, что $(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s, \boldsymbol{\eta}) = 0$, то можно искать вектор $\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s$ в форме

$$\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s = k\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{f}, \quad (17)$$

где k – неизвестная скалярная функция. Подставим выражение (17) в формулу (14) и раскроем двойное векторное произведение. Получаем

$$-k(\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s, \mathbf{f})\boldsymbol{\eta} + k(\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s, \boldsymbol{\eta})\mathbf{f} = \boldsymbol{\eta}. \quad (18)$$

Продифференцируем по времени тождество $(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s, \mathbf{f}) = 0$, вытекающее из равенства (13). Имеем

$$(\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s, \mathbf{f}) + (\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{f}}) = 0. \quad (19)$$

Так как из соотношения (14) следует равенство $(\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s, \boldsymbol{\eta}) = 0$, то из уравнения (18) получаем

$$(\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s, \mathbf{f}) = -\frac{1}{k}. \quad (20)$$

Подставим выражение (20) в формулу (19), учтя соотношения (17). Тогда $-1/k + k(\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}}) = 0$, откуда

$$k^2 = \frac{1}{(\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}})}. \quad (21)$$

Заметим, что если подставить выражение (14) для вектора $\boldsymbol{\eta}$ в равенство (21) и раскрыть двойное векторное произведение с учетом формулы $(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s, \mathbf{f}) = 0$, то получим $(\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}}) = -(\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s, \mathbf{f})(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{f}})$, откуда с помощью тождества (19) имеем $(\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}}) = (\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{f}})^2$, т.е. $(\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}}) \geq 0$. Из формулы (20) следует, что знак величины k противоположен знаку скалярного произведения $(\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s, \mathbf{f})$ и что значение k может быть найдено всегда, когда это скалярное произведение не равно нулю. На основании соотношений (2), (14), (17) и (21) запишем уравнение (16) и начальные условия для его решения на том интервале времени, на котором $(\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s, \mathbf{f}) \neq 0$, в форме

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{\text{sign}((\mathbf{v}_{p0} - \mathbf{v}_{c0}, \mathbf{f}(t_0)))}{\sqrt{(\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}})}} (\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{f}) \times \ddot{\mathbf{r}}_s = \mathbf{f}, \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\eta}(t_0) = (\mathbf{r}_{p0} - \mathbf{r}_{c0}) \times (\mathbf{v}_{p0} - \mathbf{v}_{c0}),$$

где согласно формуле для вектора \mathbf{r}_c из соотношений (1) имеем

$$\mathbf{r}_{c0} = \frac{m_b \mathbf{r}_{b0} + m_p \mathbf{r}_{p0}}{m_b + m_p}, \quad \mathbf{v}_{c0} = \frac{m_b \mathbf{v}_{b0} + m_p \mathbf{v}_{p0}}{m_b + m_p}.$$

4. В точках, где $(\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s, \mathbf{f}) = 0$, уравнение (22) применять нельзя. Поскольку из равенства (14) следует, что $(\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s, \boldsymbol{\eta}) = 0$, то из формулы (18) вытекает, что в исследуемых точках $\boldsymbol{\eta} = 0$. В работе [21] показано, что

$$\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s = k_2 \mathbf{f}_\perp + k_3 \mathbf{f} \times \dot{\mathbf{f}}, \quad \mathbf{f}_\perp = \dot{\mathbf{f}} - \frac{(\mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}})}{f^2} \mathbf{f}, \quad (23)$$

$$f^2 = (\mathbf{f}, \mathbf{f}), \quad (\mathbf{f}_\perp, \mathbf{f}) = 0,$$

где k_2 и k_3 – неизвестные функции времени. Из соотношения (19) при условии $(\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s, \mathbf{f}) = 0$ получаем, что $(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{f}}) = 0$. Тогда из формул (23) при неколлинеарности векторов \mathbf{f} и $\dot{\mathbf{f}}$ следует, что $k_2 = 0$. В общем случае условие $\boldsymbol{\eta} = 0$ имеет вид

$$(k_2 \mathbf{f}_\perp + k_3 \mathbf{f} \times \dot{\mathbf{f}}) \times (\dot{k}_2 \mathbf{f}_\perp + k_2 \dot{\mathbf{f}}_\perp + \dot{k}_3 \mathbf{f} \times \dot{\mathbf{f}} + k_3 \mathbf{f} \times \ddot{\mathbf{f}}) = 0. \quad (24)$$

Упростим выражение (24), взяв нулевое значение k_2 и полагая величину k_3 ненулевой. Получим

$$-\dot{k}_2 f_\perp^2 \mathbf{f} + k_3 (\mathbf{f} \times \dot{\mathbf{f}}, \ddot{\mathbf{f}}) \mathbf{f} = 0. \quad (25)$$

Полагая векторы \mathbf{f} и \mathbf{f}_\perp ненулевыми, имеем

$$\dot{k}_2 = k_3 \frac{(\mathbf{f} \times \dot{\mathbf{f}}, \ddot{\mathbf{f}})}{f_\perp^2}. \quad (26)$$

Для общего случая в работе [21] выведено соотношение

$$k_3 = -\eta_{11} - 2\dot{k}_2 \eta_{12} - k_2 \eta_{13},$$

$$\eta_{11} = \frac{(\ddot{\mathbf{r}}_s, \mathbf{f})}{(\dot{\mathbf{f}} \times \ddot{\mathbf{f}}, \mathbf{f})}, \quad \eta_{12} = \frac{(\dot{\mathbf{f}}_\perp, \ddot{\mathbf{f}})}{(\dot{\mathbf{f}} \times \ddot{\mathbf{f}}, \mathbf{f})}, \quad (27)$$

$$\eta_{13} = \frac{(\ddot{\mathbf{f}}_\perp, \mathbf{f})}{(\dot{\mathbf{f}} \times \ddot{\mathbf{f}}, \mathbf{f})}.$$

Взяв $k_2 = 0$ в формулах (27) и подставив в них выражение (26) для величины k_2 , получим линейное уравнение относительно функции k_3 . Найдя последнюю и применив определение (23), имеем для тех моментов времени t^* , когда $(\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s, \mathbf{f}) = 0$, формулу

$$\mathbf{r}_p(t^*) = \mathbf{r}_c - \frac{(\ddot{\mathbf{r}}_s, \mathbf{f}) f_{\perp}^2}{(f_{\perp}^2 + 2(\dot{\mathbf{f}}_{\perp}, \mathbf{f}))(\mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}} \times \dot{\mathbf{f}})} \mathbf{f} \times \dot{\mathbf{f}}, \quad (28)$$

где правая часть должна быть вычислена при $t = t^*$. Тогда в момент t^* вместо соотношения (22) следует использовать уравнение

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} - (\mathbf{r}_p(t^*) - \mathbf{r}_c) \times \ddot{\mathbf{r}}_s = \mathbf{f}, \quad \boldsymbol{\eta}(t^*) = 0. \quad (29)$$

Заметим, что формулы (28) и (29), в свою очередь, можно применять не всегда. Кроме того, из равенства нулю вектора $\boldsymbol{\eta}$ не следует существование производной по времени от вектора \mathbf{r}_p в тот же момент. Соответствующие особые случаи требуют отдельного анализа с применением результатов, полученных в статье [21].

5. Рассмотрим пример использования полученных выше формул. Далее все размерные величины представлены в системе единиц СИ, а потому не будем указывать размерность.

Предположим, что масса подвижной материальной точки $m_p = 0.1$, и пусть твердое тело общей массой $m_b = 9/2$ представляет собой восемь одинаковых материальных точек, связанных между собой абсолютно жесткими невесомыми стержнями и расположенных в вершинах прямоугольного параллелепипеда, имеющего размеры $2b_x = 0.25$, $2b_y = 0.12$ и $2b_z = 0.065$. Тогда главные центральные моменты инерции можно вычислить по формулам

$$\begin{aligned} J_x &= m_b (b_y^2 + b_z^2), & J_y &= m_b (b_z^2 + b_x^2), \\ J_z &= m_b (b_x^2 + b_y^2). \end{aligned} \quad (30)$$

Согласно соотношениям (30) можно получить вектор \mathbf{K}_b .

Пусть в момент времени t_0 твердое тело покоится. Выберем неподвижную систему координат так, чтобы в этот момент ее начало находилось на пересечении осей симметрии указанного прямоугольного параллелепипеда, а оси координат были параллельны осям симметрии. Пусть внешние силы, действующие на все материальные точки системы, направлены вдоль положительного направления оси абсцисс, не зависят от времени и имеют проекции $F_{px} = 2$ для подвижной точки и $F_{bix} = 8/i$, $i = 1, \dots, 8$, для точек, входящих в состав тела. Из формул (1) и (2) можно найти параметры движения центра масс всей системы:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_c &= \mathbf{r}_c(t_0) + \mathbf{v}_c(t_0)(t - t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2(m_b + m_p)} \mathbf{F}, \\ \mathbf{r}_c(t_0) &= \frac{m_b \mathbf{r}_{b0} + m_p \mathbf{r}_{p0}}{m_b + m_p}, \\ \mathbf{v}_c(t_0) &= \frac{m_b \mathbf{v}_{b0} + m_p \mathbf{v}_{p0}}{m_b + m_p}. \end{aligned} \quad (31)$$

Пусть в начальный момент времени положение и скорость подвижной материальной точки заданы следующими векторами:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{p0} &= (-1.742, -0.3529, -0.8313), \\ \mathbf{v}_{p0} &= (-0.3427; -0.4481; 0.6470). \end{aligned} \quad (32)$$

Вычисления с учетом формул (31) и начальных условий (32) были проведены для случая, когда нужно обеспечить вращение вокруг постоянного единичного вектора $\boldsymbol{\rho} = (0.6000; 0.1000; 0.7937)$ с постоянной угловой скоростью $\omega = 2$ в течение 1/4 с. На рис. 1 показана траектория подвижной материальной точки в системе отсчета, жестко связанной с твердым телом. Положения материальной точки показаны с шагом 0.002 по времени. Она движется справа налево.

Таким образом, полученные выше соотношения можно применять для вычисления параметров такого движения материальной точки, которое обеспечивает заданное изменение ориентации твердого тела в пространстве при наличии внешних сил, определенных как известные функции времени.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 23-11-00128).

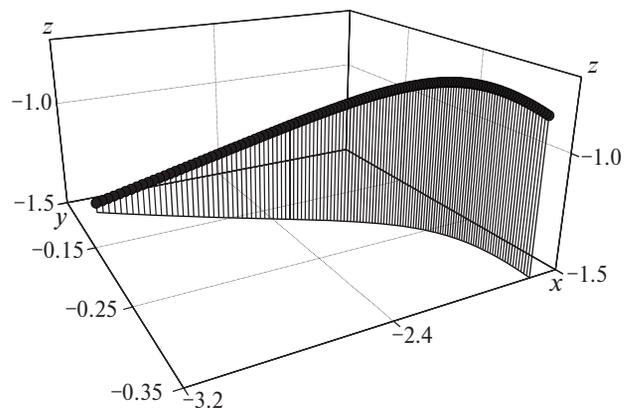


Рис. 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Xu J., Fang H.* Improving performance: recent progress on vibration-driven locomotion systems // *Non-linear Dyn.*, 2019. V. 98. N 4. P. 2651–2669.
2. *Liu Y., Chernousko F.L., Terry B.S., Chávez J.P.* Special issue on self-propelled robots: from theory to applications // *Meccanica*. 2023. V. 58. P. 317–319.
3. *Schmoekkel F., Worn H.* Remotely controllable mobile microrobots acting as nano positioners and intelligent tweezers in scanning electron microscopes (SEMs) / *Proc. Intern. Conference Robotics and Automation*. 2001. IEEE, N.Y. P. 3903–3913.
4. *Lampert P., Vakebtutu A., Lagrange B., De Lit P., Delchambre A.* Design and performances of a one-degree-of-freedom guided nano-actuator // *Robot. Comput. Integr. Manuf.* 2003. V. 19. N 1/2. P. 89–98.
5. *Vartholomeos P., Papadopoulos E.* Dynamics, design and simulation of a novel micro-robotic platform employing vibration microactuators // *J. Dyn. Syst. Meas. Control*. 2006. V. 128. N 1. P. 122–133.
6. *Gradetsky V., Solovtsov V., Kniazkov M., Rizzotto G.G., Amato P.* Modular design of electromagnetic mechatronic microrobots / *Proc. of 6th Intern. Conference Climbing and Walking Robots (CLAWAR)*. 2003. Catania, Italy. P. 651–658.
7. *Черноусько Ф.Л.* О движении тела, содержащего подвижную внутреннюю массу // *ДАН*. 2005. Т. 405. № 1. С. 56–60.
8. *Bolotnik N.N., Figurina T.Yu., Chernousko F.L.* Optimal control of the rectilinear motion of a two-body system in a resistive medium // *J. Appl. Math. Mech.* 2012. V. 76. N 1. P. 1–14.
9. *Li H., Furuta K., Chernousko F.L.* Motion generation of the Capsbot using internal force and static friction / *Proc. 45th IEEE Conference on Decision and Control*. 2006. San Diego, USA. P. 6575–6580.
10. *Zimmerman K., Zeidis I., Bolotnik N., Pivovarov M.* Dynamics of a two-module vibration-driven system moving along a rough horizontal plane // *Multibody Syst. Dyn.* 2009. V. 22. N 2. P. 199–219.
11. *Chernousko F.L.* Two-dimensional motions of a body containing internal moving masses // *Meccanica*. 2016. V. 51, N 12. P. 3203–3209.
12. *Черноусько Ф.Л.* Оптимальное управление движением двухмассовой системы // *ДАН*. 2018. Т. 480. № 5. С. 528–532.
13. *Шматков А.М.* Поворот тела за кратчайшее время перемещением точечной массы // *ДАН*. 2018. Т. 481. № 5. С. 498–502.
14. *Bolotnik N., Figurina T.* Controllability of a two-body crawling system on an inclined plane // *Meccanica*. 2023. V. 58. P. 321–336.
15. *Figurina T., Knyazkov D.* Periodic regimes of motion of capsule system on rough plane // *Meccanica*. 2023. V. 58. P. 493–507.
16. *Chernousko F.L.* Controlling the orientation of a solid using the internal mass // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2019. V. 60. N 2. P. 278–283.
17. *Naumov N.Yu., Chernousko F.L.* Reorientation of a rigid body controlled by a movable internal mass // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2019. V. 58. N 2. P. 252–259.
18. *Chernousko F.* Reorientation of a rigid body by means of auxiliary masses // *Meccanica*. 2023. V. 58. P. 387–395.
19. *Shmatkov A.M.* Objects changing the spatial orientation of a solid body by using mobile mass // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2020. V. 59. N 4. P. 622–629.
20. *Белецкий В.В., Яншин А.М.* Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наук. думка, 1984. 187 с.
21. *Shmatkov A.M.* Changing the spatial orientation of a rigid body using one moving mass in the presence of external forces // *Meccanica*. 2023. V. 58. P. 441–450.
22. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М.: ЧеРо, 1999. 572 с.
23. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2008. 304 с.

SPATIAL REORIENTATION OF A SOLID BODY USING A MOVING MASS IN THE PRESENCE OF EXTERNAL FORCES SPECIFIED AS THE FUNCTIONS OF TIME

A. M. Shmatkov^a

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS F.L. Chernousko

The spatial motion of a mechanical system consisting of a rigid body and a moving point mass, interacting with each other by means of unspecified internal forces, has been studied. The task is to construct such a trajectory for a point mass, when moving along which a rigid body, under the influence of the force of interaction with this mass, changes its orientation in space according to a known program. It is assumed that there are external forces acting on both objects, specified as functions of time. A system of three first-order ordinary differential equations, resolved with respect to derivatives, is obtained, which allows solving the problem. These relationships can be used to control spacecraft and robotic systems.

Keywords: reorientation of a rigid body, moving point mass, spatial motion

УДК 534.01:539.6

ПОДЪЕМ ПОДВОДНОГО ТРУБОПРОВОДА СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ

© 2024 г. Член-корреспондент РАН М. А. Ильгамов^{1,2,3,*}

Поступило 28.03.2024 г.

После доработки 20.06.2024 г.

Принято к публикации 21.06.2024 г.

Рассматривается статический линейный изгиб трубопровода при его подъеме сосредоточенной силой. Учитываются собственные веса трубы и транспортируемой среды, подъемная сила воды. Предполагается большая длина поднятого участка трубопровода по сравнению с глубиной водоема. Дается параметрический анализ влияния весовых и жесткостных характеристик трубопровода на потребное значение подъемной силы.

Ключевые слова: трубопровод, подъем, сосредоточенная сила, длина поднятого участка

DOI: 10.31857/S2686740024040108, **EDN:** JONDQX

1. Мероприятия по укладке трубопроводов на морское дно, а также по профилактике, ремонту и восстановлению их работоспособности связаны с приложением внешних поперечных сосредоточенных сил для подъема их определенного участка. Под действием весов трубы и транспортируемой среды, выталкивающей силы воды, внутреннего и внешнего давлений, внешней сосредоточенной силы труба подвергается изгибу. Анализ возникающих вопросов в указанных направлениях посвящено большое количество работ.

Вопросы изгиба и устойчивости трубопроводов изучены, например, в работах [1–6]. Обзор исследований статики и динамики трубопроводов дается в [7]. В [8] рассматривается сильный изгиб трубопровода сосредоточенной силой. Изгиб в процессе укладки на морское дно с борта судна рассматривается в работе [9]. При этом учитываются влияние осевых сил, немалость угла поворота осевой линии трубы,

влияние собственного веса и выталкивающей силы воды.

Изгибом некоторой части подводного трубопровода сопровождается его всплытие. Может происходить всплытие даже при превышении веса трубопровода над выталкивающей силой воды, что объясняется одновременным проявлением таких факторов, как температурное расширение трубы, неблагоприятный начальный изгиб, сложный механизм влияния среднего давления воды и транспортируемого газа и т.д. Эти вопросы рассмотрены в статьях [5, 10, 11]. Указана роль нелинейных факторов, которые сильно осложняют анализ. В частности, трудно получить обозримое решение в случае действия не одной, а нескольких подъемных сил, что имеет место практически.

Приведенный в данном сообщении линейный подход позволяет получить обозримые результаты по влиянию на подъем большего числа входных параметров, например, нескольких сосредоточенных подъемных сил. Кроме того, устанавливаются явные зависимости между изгибной жесткостью, внешними силами, эффективным весом трубопровода и его длиной, подвергнутой подъему. Прямая задача состоит в определении изгиба трубопровода, в частности, подъема участка под сосредоточенной силой до поверхности водоема, при заданных весовых

¹Институт машиноведения им А.А. Благонравова
Российской академии наук, Москва, Россия

²Институт механики и машиностроения
Казанского научного центра
Российской академии наук, Казань, Россия

³Институт механики
Уфимского федерального исследовательского центра
Российской академии наук, Уфа, Россия

*E-mail: ilgamov@anrb.ru

и жесткостных характеристиках, условиях закрепления, заданных значениях сосредоточенных сил и длины поднятого участка. Под обратной задачей подразумевается определение длины поднятого участка и сосредоточенных сил при заданных других входных параметрах.

2. На рис. 1 приводится схема трубопровода с длиной поднятой части $2L$, находящегося в водоеме с горизонтальным дном и глубиной H . Предполагается, что подъем трубы сосредоточенной силой P не превышает глубины H , форма ее является пологой кривой, угол поворота осевой линии мал по сравнению с единицей, поперечное сечение остается круговым и перпендикулярным к осевой линии. Будем считать $L/H > 10$. Гидродинамические силы на трубу, возникающие в результате ее обтекания водой, а также скорость течения транспортируемой среды не учитываются.

Труба может состоять из одного слоя, двух и трех концентрических слоев. В последнем случае средним слоем является бетонный цилиндр, третьим – внешняя тонкостенная оболочка. В случае двухслойной трубы распределенная поперечная сила на единицу длины q и изгибная жесткость D равны:

$$\begin{aligned} q &= q_0 + q_g - q_f, \quad D = E_1 J_1 + E_2 J_2, \\ q_0 &= \pi \rho_1 \left[(R_g + h_1)^2 - R_g^2 \right] + \pi \rho_2 \left[R_f^2 - (R_f - h_2)^2 \right], \\ q_g &= \pi \rho_g R_g^2, \quad q_f = \pi \rho_f R_f^2, \\ J_1 &= \frac{\pi}{4} \left[(R_g + h_1)^4 - R_g^4 \right], \quad J_2 = \frac{\pi}{4} \left[R_f^4 - (R_f - h_2)^4 \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где q_0 , q_g , q_f – веса трубы и транспортируемой среды единицы длины, а также подъемная сила воды. R_g , R_f – внутренний радиус внутренней трубы и внешний радиус внешней трубы, h_1 , ρ_1 , E_1 и h_2 , ρ_2 , E_2 – толщины стенок, удельные веса и модули упругости материалов внутренней и внешней труб, ρ_g , ρ_f – удельные веса сред внутри и вне трубы.

Ввиду симметрии системы (рис. 1) граничные условия относительно прогиба $w(x)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= 0, \quad D \frac{d^3 w}{dx^3} = \frac{P}{2} \quad (x=0), \\ w &= 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad (x=L). \end{aligned} \quad (2)$$

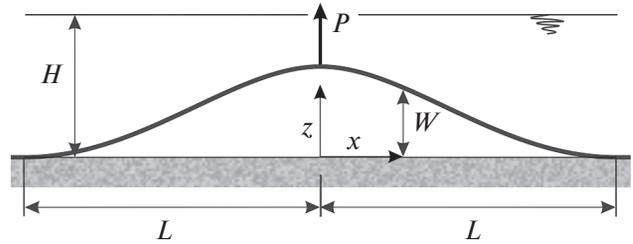


Рис. 1. Схема подъема участка длинного трубопровода, находящегося на дне водоема, сосредоточенной силой.

В линейном уравнении статического изгиба трубопровода [11]

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \pi (p_g R_g^2 - p_f R_f^2) \frac{d^2 w}{dx^2} = -q, \quad (3)$$

p_g , p_f – давления сред внутри и вне трубы на уровне осевой линии. Давление $p_f = p_0 + \rho_f (H - w)$ меняется от значения $p_0 + \rho_f H$ на дне водоема до атмосферного давления p_0 на поверхности воды. Ввиду принятого отношения $L/H > 10$ и глубины $H \leq 10$ м изменение давления по всей длине поднятой части происходит плавно, а максимальное значение $p_f \approx 0.2$ МПа. При этом внутреннее давление p_g может быть большим, например в газопроводах $p_g \approx 12$ МПа. Однако при подъемных работах оно сбрасывается. Если в оценках функцию прогиба $w(x)$ принять в виде $\cos(\pi x/L) + 1$, то отношение второго члена в уравнении (3) к первому имеет порядок $(p_g R_g^2 - p_f R_f^2) L^2 (\pi D)^{-1}$ и мало по сравнению с единицей. Поэтому в дальнейшем анализе второй член в (3) опускаем. Исключим из рассмотрения случаи направления силы вниз ($P < 0$) и превышение подъемной силы воды над весом трубы и транспортируемой среды ($q < 0$). Значение $q < 0$ соответствует всплытию трубопровода без приложения подъемной силы.

Принятые выше допущения относительно глубины водоема и давлений позволяет более наглядно рассмотреть обратную задачу. Удовлетворяя решение уравнения (3) без второго члена в левой части

$$w = -\frac{qx^4}{24D} + \frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2}{2} + cx + d$$

условиям (2), получаем выражение для прогиба

$$w = \frac{PL^3}{24D} \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right) - \frac{qL^4}{24D} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right)^2. \quad (4)$$

Однако из этого решения при заданных значениях веса q , жесткости D , силы P нельзя определить прогиб, так как неизвестна длина $2L$ поднятой части трубопровода.

3. Для определения L можно исходить из выражения полной потенциальной энергии системы [12]

$$\Pi = \frac{D}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \frac{P}{2} W + q \int_0^L w dx,$$

где $W = w(0)$ – прогиб трубопровода в месте приложения силы P . Ввиду симметрии задачи относительно $x = 0$ и в соответствии со вторым условием (2) здесь учитывается работа силы $P/2$. С учетом (4) получаем

$$\Pi = \frac{L^3}{96D} \left(-P^2 + 2PqL - \frac{16}{15} q^2 L^2 \right).$$

Из условия экстремума $\partial \Pi / \partial L = 0$ находим уравнение и его корень

$$L^2 - \frac{3P}{2q} L + \frac{9P^2}{16q^2} = 0, \quad L = \frac{3P}{4q}. \quad (5)$$

Более простым является условие равновесия трубопровода, когда участок его под силой P ($x = 0$) поднят до уровня W , в частности, до поверхности водоема $H - R_f \approx H$. Из (4) получаем выражение

$$P = \frac{24DW}{L^3} + qL, \quad (6)$$

откуда следует, что часть силы P идет на преодоление реакции изгибной жесткости при поднятии до уровня W , а другая часть – на преодоление половины веса трубопровода длиной $2L$ (не всего веса $2qL$). Минимальное потребное значение силы P достигается при длине подъема $2L$, определяемой из условия $\partial P / \partial L = 0$. Подстановка сюда выражения (6) дает

$$L = \left(\frac{72DW}{q} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (7)$$

Чем больше изгибная жесткость и высота подъема, меньше вес трубопровода (с учетом влияния жидкости), тем больше длина его поднятой части. Значение силы через исходные параметры и стрелу подъема получаем, исключив в (6) длину L по (7):

$$P = \frac{4}{3} (72Dq^3 W)^{\frac{1}{4}}. \quad (8)$$

Потребная сила для подъема участка трубопровода, в частности, до поверхности воды ($W = H$), приближенно равна $P \approx 4(Dq^3 H)^{1/4}$. Таким образом, чем больше изгибная жесткость, вес трубопровода и высота подъема, тем больше потребная сила. Но имеется слабая зависимость P от DW . Например, при увеличении высоты подъема в два раза потребная подъемная сила увеличивается менее чем на 19%. Более сильная зависимость есть от веса. При увеличении его в два раза потребная подъемная сила возрастет на 68%.

Исключив DW в (7) и (8), получаем значение полудлины подъема через силовые факторы $L = 3P/4q$, что совпадает с (5). Длина поднятия трубопровода прямо пропорциональна подъемной силе и обратно пропорциональна весу трубопровода единичной длины.

Из (8) следует также зависимость W от P :

$$W = \frac{0.0044 P^4}{Dq^3}, \quad (9)$$

которая свидетельствует о сильной зависимости стрелы подъема от подъемной силы.

Возможен случай, когда заранее неизвестна не только длина L , но и глубина H . Для определения последней может быть использован способ догружения системы. Дополнительная малая подъемная сила ΔP определяется динамометром, как и сила P . Соответствующий малый подъем ΔH также определяется экспериментально (или деформации верхней линии на внешней поверхности). Подставляя вместо P и H в (9) суммы $P + \Delta P$, $H + \Delta H$, получаем

$$H = \frac{(P + \Delta P)^4}{230Dq^3} - \Delta H.$$

4. По (4) изгибающий момент равен

$$M = -(P/4)(L - 2x) + (q/6)(L^2 - 3x^2). \quad (10)$$

В случае снижения веса трубы и внутренней среды до значения подъемной силы воды (в (1) $q_0 + q_g \rightarrow q_f$, $q \rightarrow 0$) прогиб и изгибающий момент являются кососимметричными относительно середин полудлин, т.е. точек перегиба $x = \pm L/2$. Максимальный момент $M = \mp PL/4$ возникает в точках $x = 0, \mp L$. В этом анализе условия (2) сохраняются. В соответствии с (5) устойчивое равновесное положение может

быть только при сильном увеличении L . Тогда приходим к задаче всплытия трубопровода [11]. При $q \neq 0$ в соответствии с (10) и (5) точки перегиба перемещаются в сторону приложения сосредоточенной силы P и имеют координаты $x = \pm L/3$ (вместо $\pm L/2$ в случае $q = 0$). Максимальное значение момента находится в точках $x = \pm 2L/3$, а при $x = L$ оно обращается в нуль. Таким образом, при $x = L$ нулевыми являются не только прогиб и угол поворота (условия (2)), но и кривизна осевой линии. Перерезывающая сила равна $Q = dM/dx = P/2 - qx$. В соответствии с (5) $Q(x = L) = -qL/3$. Опорная реакция равна $qL/3$. Как видно из второго условия (2), $Q(x = 0) = P/2 = 2qL/3$.

Представляет интерес отношение половины длины подъема L к глубине водоема $W = H - R_f \approx H$. Определение его нужно и для обоснования принятого выше допущения $L/H > 10$. Рассмотрим однослойную стальную трубу с модулем упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа = $2 \cdot 10^{11}$ кг/(м·с²), удельным весом $\rho = 76\,520$ кг/(м·с²), внутренним радиусом $R_g = 0.6$ м, толщиной стенки $h = 0.03$ м. Примем значения удельных весов среды внутри трубы $\rho_g = 8830$ кг/(м·с²), морской воды $\rho_f = 10\,000$ кг/(м·с²), глубины водоема $H = 10$ м. В соответствии с (1) и (7) $q = 6400$ кг/с², $D = 44 \cdot 10^8$ кг·м³/с² и $L \approx 150$ м. Таким образом, отношение $L/H = 15$ и допущение $L/H > 10$ соблюдается. Соответствующая потребная подъемная сила по (8) $P = 1.27 \cdot 10^6$ кг·м/с² = 1.27 МН. Наиболее неблагоприятная оценка имеет место в случае подъема трубы, находящейся на земной поверхности ($\rho_f = 0$). Тогда $q = 18\,880$ кг/с², $L = 114$ м.

5. Подъем трубопровода может осуществляться не одной, а несколькими сосредоточенными силами (рис. 2). Рассмотрим равновесие трубопровода под действием двух сосредоточенных сил P и P_1 и силы веса q . Предполагаем, что расстояние $l_1 > 0$ между P и P_1 задано (определяется в соответствии с техническими нормами). Ввиду линейности задачи относительно $w(x)$ общий подъем определяется суммой подъемов под действием сил P и P_1 при полудлинах поднятой части L и L_1 . Прогиб $w_1(x)$ под действием силы P_1 и соответствующая полудлина L_1 даются выражением (4), где вместо P, L, w нужно подставить P_1, L_1, w_1 . При этом оставим начало координаты ($x = 0$) в точке под силой P ,

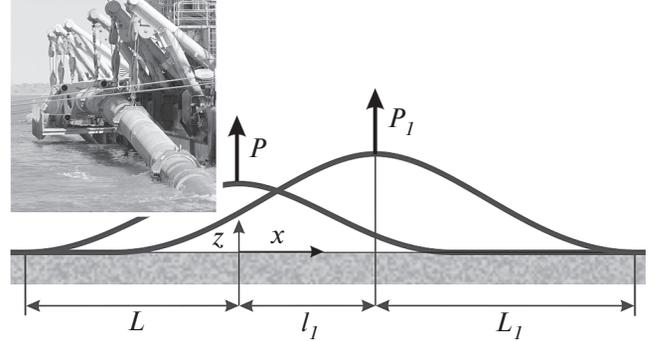


Рис. 2. Схема подъема участка длинного трубопровода двумя сосредоточенными силами.

поэтому $l_1 > 0$ и в (4) вместо x нужно подставить $x - l_1$. Итак,

$$\begin{aligned} 24D(w + w_1) = & P \left[L^3 - 3Lx^2 - 2x^3 \right]_{\alpha} + \\ & + P \left[L^3 - 3Lx^2 + 2x^3 \right]_{\beta} - \\ & - q \left[L^2 - x^2 \right]_{\gamma} + P_1 \left[L_1^3 - 3L_1(x - l_1)^2 - \right. \\ & \left. - 2(x - l_1)^3 \right]_{\alpha_1} + \\ & + P_1 \left[L_1^3 - 3L_1(x - l_1)^2 + 2(x - l_1)^3 \right]_{\beta_1}, \\ & L_1 = 3P_1/4q, \end{aligned} \quad (11)$$

где индекс α при квадратных скобках означает изменение x в пределах $-L \leq x \leq 0$, а индекс β — в пределах $0 \leq x \leq L$. Аналогично индексы α_1 и β_1 — в пределах $-L_1 + l_1 \leq x \leq l_1$ и $l_1 \leq x \leq L_1 + l_1$. Индекс γ означает изменение x в области $-L \leq x \leq L$.

Простое решение (11) является сугубо приближенным, так как в нем L и L_1 определены неточно. Точное решение можно получить, исходя из условий непрерывности функций прогиба, углов поворота, изгибающих моментов и перерезывающих сил с учетом сосредоточенных сил при $x = 0$ и $x = l_1$. Обозначая функции прогиба на трех участках через w_0, w_1, w_2 , запишем указанные условия в виде

$$\begin{aligned} w_0 = w_1, \quad \frac{dw_0}{dx} = \frac{dw_1}{dx} \quad (x = 0), \\ \frac{d^2 w_0}{dx^2} = \frac{d^2 w_1}{dx^2}, \quad \frac{d^3 w_0}{dx^3} + \frac{P}{D} = \frac{d^3 w_1}{dx^3} \quad (x = 0), \\ w_1 = w_2, \quad \frac{dw_1}{dx} = \frac{dw_2}{dx} \quad (x = l_1), \\ \frac{d^2 w_1}{dx^2} = \frac{d^2 w_2}{dx^2}, \quad \frac{d^3 w_1}{dx^3} + \frac{P_1}{D} = \frac{d^3 w_2}{dx^3} \quad (x = l_1). \end{aligned}$$

При этом условия (4) на концах всего поднятого участка трубопровода сохраняются.

6. Анализ подъема участка трубопровода сосредоточенной силой на основе линейной теории изгиба позволяет выразить простыми зависимостями удельные веса материала трубы, транспортируемой среды и окружающей жидкости, характеристики упругости и поперечного сечения трубы, необходимую подъемную силу, длину подъема трубопровода. Возможно обобщение на случай произвольного числа сосредоточенных подъемных сил. Такой анализ является необходимым первым шагом в решении задачи с учетом нелинейностей, большой глубины водоема и других факторов, что возможно с помощью численных методов. Показано совпадение значений длины подъема трубопровода, определенных из минимизации полной потенциальной энергии системы и функции сосредоточенной подъемной силы от входных параметров. Длина поднятой части равна отношению подъемной силы к весу трубопровода, умноженному на $4/3$. Установлено, что две трети веса поднятого участка трубопровода воспринимается подъемной сосредоточенной силой, одна третья часть веса – на концах участка (на опорах). Приведенные здесь результаты справедливы в случае малого отношения глубины водоема к длине поднятого участка трубопровода.

В приведенной постановке задачи предполагается, что максимальный подъем не превышает уровня поверхности водоема. Если участок длиной l около места приложения подъемной силы P становится выше этого уровня, то в соответствующем уравнении (3) распределенную силу q по (1) нужно принимать без учета выталкивающей силы воды ($\rho_f = 0$). В таком случае при $x = l$ ставятся условия равенства прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и перерезывающих сил слева и справа от сечения $x = l$.

Как известно, в линейной теории упругости, в сопротивлении материалов, теории изгиба тонкостенных пластин и оболочек перемещения и деформации линейно зависят от поперечных сил. Особенность рассмотренной здесь задачи состоит в том, что под действием поперечной сосредоточенной силы длина поднятого участка балки, стержня, трубы

(находящихся на горизонтальной плоскости и подвергнутых изгибу) прямо пропорциональна этой силе и обратно пропорциональна их весу, а высота (стрела) подъема прямо пропорциональна четвертой степени сосредоточенной силы и обратно пропорциональна кубу веса единичной длины. Увеличение подъемной силы в два раза приводит к увеличению стрелы подъема в 16 раз. Такая сильная зависимость прогиба от сил выглядит необычной. Это объясняется зависимостью длины, подвергнутой подъему, от приложенных сил.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00106, <https://rscf.ru/project/24-21-00106/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Palmer A.C., King R.A. Subsea Pipeline Engineering. Oklahoma: PWC, 2004. 570 p.
2. Peek R., Yun H. Flotation to trigger lateral buckles in pipelines on a flat seabed // J. Engineering Mechanics. 2007. V. 4. P. 442–451. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2007\)133:4\(442\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2007)133:4(442))
3. Chee J., Walker A., White D. Controlling lateral buckling of subsea pipeline with sinusoidal shape pre-deformation // Ocean Engineering. 2018. V. 151. P. 170 – 190. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2018.01.024>
4. Wang Z., Tang Y. Study on symmetric buckling mode triggered by dual distributed buoyancy sections for subsea pipelines // Ocean Engineering. 2020. V. 216. P. 105–110. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.108019>
5. Зарипов Р.М., Масалимов Р.Б. Использование компенсаторов в подводном участке морского газопровода для предотвращения его всплытия // Известия Томского политехн. ун-та. Инжиниринг георесурсов. 2023. Т. 334. № 2. С. 196–205. <https://doi.org/10.18799/24131830/2023/2/3761>
6. Утяшев И.М., Шакирьянов М.М. Пространственные колебания трубопровода с вибрирующими опорами // Изв. РАН. МГТ. 2023. № 4. С. 38–52. <https://doi.org/10.31857/S057232992260058X>
7. Li S.J., Karney B.W., Liu G. FSI research in pipeline systems – A review of the literature // J. Fluids and Structures. 2015. V. 57. P. 277–297. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2015.06.020>
8. Ильгамов М.А., Якупов Р.Г. Сильный изгиб трубопровода // Изв. РАН. МГТ. 2003. № 6. С. 109–116.
9. Елисеев В.В., Зиновьева Т.В. Нелинейно-упругая деформация подводного трубопровода в

- процессе укладки // Вычисл. мех. сплош. сред. 2012. № 1. С. 70–78.
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.1.9>
10. Ильгамов М.А. Модель всплытия подводного трубопровода // ДАН. Физика, Технические науки. 2022. Т. 504. С. 12–16.
<https://doi.org/10.31857/S2686740022030087>
11. Ильгамов М.А. Всплытие подводного газового трубопровода // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 2. С. 147–159.
<https://doi.org/10.31857/S0572329922600487>
12. Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells. 2nd ed. N.Y.: McGraw-Hill. 1959. 591 p.

UNDERWATER PIPELINE LIFTING BY CONCENTRATED FORCE

Corresponding Member of the RAS **М. А. Ilgamov**^{1,2,3,*}

¹*Blagonravov Institute of Machine Science, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

²*Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Kazan, Russia*

³*Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Center, Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia*

We consider a static linear bending of a pipeline when it is lifted by a concentrated force. The weights of the pipe, the transported medium and the lifting force of the water are taken into account. It is assumed that the length of the raised section of the pipeline is greater than the depth of the reservoir. A parametric analysis of the influence of the weight and rigidity characteristics of the pipeline on the required lifting force is given.

Keywords: pipeline, lift, concentrated force, length of the raised section

УДК 620.9

ПЕРСПЕКТИВЫ ДОСТИЖЕНИЯ УГЛЕРОДНОЙ НЕЙТРАЛЬНОСТИ ЭКОНОМИЧЕСКИ РАЗВИТЫМИ СТРАНАМИ

© 2024 г. Академик РАН В. В. Клименко^{1,2,3,*},
академик РАН А. В. Клименко², А. Г. Терешин^{1,2}

Поступило 05.03.2024 г.

После доработки 03.06.2024 г.

Принято к публикации 05.06.2024 г.

Исследованы перспективы достижения углеродной нейтральности экономически развитыми странами (США, ЕС, Норвегия, Канада, Япония, Австралия). Выполнен анализ структуры энергетики и землепользования в этих странах. Разработаны сценарные оценки динамики углеродных показателей экономик ведущих стран мира. Показано, что существующие темпы декарбонизации и развития индустрии улавливания и хранения углерода не позволяют гарантировать достижение климатической нейтральности к 2050 г. даже в ведущих экономиках мира. Центральной проблемой в достижении климатической нейтральности становится быстрое и масштабное внедрение технологий улавливания и хранения углерода во всех ее возможных проявлениях. Все исследованные страны, кроме Японии, располагают собственными возможностями для захоронения углерода на период более ста лет. Для достижения климатической нейтральности ведущим странам ОЭСР к 2050 г. необходимо будет обеспечить ежегодное захоронение не менее 6 млрд т CO₂, что почти в 25 раз превосходит их современные мощности (действующие, строящиеся и находящиеся в стадии проектирования). Несмотря на то, что проблема изменения климата занимает едва ли не лидирующее место в мировой повестке, действительные результаты усилий в этой области далеки от декларируемых. Удержать потепление в пределах 1.5°C сейчас уже нереально и при нынешних темпах декарбонизации, достигнутых даже мировыми лидерами, скоро и оборона второго критического рубежа в 2°C окажется под угрозой.

Ключевые слова: экономически развитые страны, энергетика, эмиссия и поглощение парниковых газов, климатическая нейтральность, сценарии

DOI: 10.31857/S2686740024040116, EDN: JOMPUK

2023-й год оказался самым теплым в истории инструментальных наблюдений и завершился установлением поразительного рекорда среднеглобальной температуры, превысившей (по данным CRU) доиндустриальный (1850–1900 гг.) уровень на 1.46°C. При этом прежний рекорд 2016 г. был превышен сразу на 0.17°C, что является беспрецедентным событием за всю эпоху инструментальных наблюдений.

Климатически значимая средняя за десятилетие (2014–2023 гг.) аномалия среднеглобальной температуры составила 1.21°C, и, таким образом, мир оказался в шаге от достижения рубежа в 1.5°C, что однозначно рассматривается мировым сообществом как крайне нежелательное событие. При сохранении достигнутых в последние 30 лет скоростей потепления примерно в 0.2°C за декаду следует ожидать, что критический рубеж будет преодолен уже в середине 2030-х гг.

Мировое сообщество в последние 30 лет предпринимает значительные усилия для борьбы с опасным потеплением, и центральное место в них занимают мероприятия по

¹Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия

²Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», Москва, Россия

³Институт энергетических исследований Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: nilgre@mei.ru

сокращению эмиссии парниковых газов (ПГ), вплоть до достижения т.н. климатической нейтральности, когда эмиссия ПГ уравнивается их стоком в естественные или антропогенные резервуары [1–9].

В своих недавних работах [10–12] авторы исследовали возможности решения Россией поставленной задачи в области охраны климата – достижения к 2060 г. углеродной нейтральности национальной экономики. Нами было показано, что, несмотря на существенный потенциал снижения выбросов парниковых газов в различных отраслях экономики [13–15], наша страна пока значительно отстает от развитых экономик мира по темпам снижения «углеродного следа», что серьезно затрудняет своевременное достижение поставленных задач. К таким же выводам приходят авторы других исследований [16–20].

В настоящей работе мы постараемся найти ответ на вопрос, способны ли страны, которые в настоящее время являются лидерами декарбонизации мировой экономики, достичь своих амбициозных целей в установленные ими сроки (табл. 1).

Для детального анализа нами были выбраны шесть представителей из числа наиболее развитых промышленных стран: США и ЕС (включая Великобританию) как крупнейшие экономики мира, Канада и Норвегия как ведущие экспортеры нефтегазовых энергетических ресурсов, Австралия, для которой уголь является основой национальной энергетики и важной

статьей экспорта, и, наконец, Япония – как технологически высокоразвитая страна, почти лишенная собственных природных энергоресурсов. Основные энергетические показатели избранных для исследования стран приведены в табл. 2. Данные табл. 2 показывают, что, несмотря на постепенное и неуклонное снижение их доли потребления всех видов энергии, избранные страны продолжают занимать видное место в мировом энергобалансе, в сумме представляя около 90% энергетики Организации экономического сотрудничества и развития (ОЭСР).

Избранные для исследования страны являются ключевым элементом современного постиндустриального общества, характеризующегося насыщением энергопотребления (рис. 1), когда приходящееся на душу населения потребление первичной энергии (нефть, газ, уголь, электроэнергия ГЭС, АЭС и ВИЭ) стабилизировалось на уровнях, в основном определяемых природно-географическими условиями [22]. Более того, в последние 15–20 лет во всех исследуемых странах наблюдается даже некоторое снижение этого показателя, вызванное не только структурными изменениями в экономике, повышением энергоэффективности, но также климатическими изменениями, в результате которых в странах умеренного и холодного климата происходит уменьшение затрат энергии на отопление.

За период 1990–2022 г. в топливно-энергетическом балансе развитых стран произошли

Таблица 1. Добровольные обязательства по снижению эмиссии парниковых газов сторон Рамочной конвенции ООН по изменению климата (РКИК) по данным *UNFCCC* (2024)

Сторона РКИК	Базовый год	Эмиссия, в % к базовому году*		Год достижения	
		в 2030 г.	в 2050 г.	пика эмиссии	климатической нейтральности
США	2005	72–74 (48–50)	20 (0)	2007	2050
ЕС	1990	60 (45)	5 (0)	1990	2050
Канада	2005	70 (55–60)	20 (0)	2007	2050
Япония	2005	76 (54)	0	2013	2050
Норвегия	2005	45–50	0	2004	2050
Австралия	2005	72–74	0	2018	2050

*Примечание. Указаны первоначальные (2016 г.) и актуальные (в скобках, по состоянию на 01.03.2024) обязательства стран-участниц РКИК.

Таблица 2. Объемы потребления и добычи различных энергоресурсов по данным [21]

Энерго-носитель	Год	Ед. изм.	Канада	США	Норвегия	Австралия	Япония	ЕС28	6 стран	ОЭСР	Мир в целом	
Потребление	Нефть	1990	ЭДж	3.47	33.50	0.38	1.35	10.67	29.03	78.40	85.2	135.64
		2022		4.27	36.15	0.36	2.07	6.61	24.80	74.26	88.0	190.69
		1990	%: от мира	2.6%	24.7%	0.3%	1.0%	7.9%	21.4%	57.8%	62.8%	
		2022		2.2%	19.0%	0.2%	1.1%	3.5%	13.0%	38.9%	46.1%	
	Газ	1990	ЭДж	2.30	18.61	0.08	0.60	1.81	12.46	35.87	36.0	70.13
		2022		4.38	31.72	0.14	1.50	3.62	14.95	56.31	64.7	141.89
		1990	%: от мира	3.3%	26.5%	0.1%	0.9%	2.6%	17.8%	51.1%	51.3%	
		2022		3.1%	22.4%	0.1%	1.1%	2.5%	10.5%	39.7%	45.6%	
	Уголь	1990	ЭДж	1.14	19.22	0.03	1.60	3.27	19.09	44.34	45.6	93.26
		2022		0.39	9.87	0.03	1.55	4.92	7.19	23.94	28.9	161.47
		1990	%: от мира	1.2%	20.6%	0.0%	1.7%	3.5%	20.5%	47.5%	48.9%	
		2022		0.2%	6.1%	0.0%	1.0%	3.0%	4.5%	14.8%	17.9%	
АЭС	1990	ЭДж	0.74	6.20	—	—	1.99	8.12	17.05	17.7	20.44	
	2022		0.78	7.31	—	—	0.47	5.91	14.47	16.1	24.13	
	1990	%: от мира	3.6%	30.4%	—	—	9.7%	39.7%	83.4%	86.7%		
	2022		3.2%	30.3%	—	—	1.9%	24.5%	60.0%	66.8%		
ГЭС	1990	ЭДж	3.15	3.11	1.29	0.16	0.93	3.09	11.72	13.1	22.98	
	2022		3.7	2.4	1.2	0.16	0.70	2.65	10.88	13.2	40.68	
	1990	%: от мира	13.7%	13.5%	5.6%	0.7%	4.0%	13.4%	51.0%	57.1%		
	2022		9.2%	6.0%	2.9%	0.4%	1.7%	6.5%	26.7%	32.5%		
ВИЭ	1990	ЭДж	0.05	0.73	^	0.01	0.13	0.21	1.13	1.2	1.73	
	2022		0.59	8.43	0.16	0.70	1.53	9.99	21.40	23.5	45.18	
	1990	%: от мира	2.6%	42.5%	0.1%	0.5%	7.4%	12.2%	65.4%	71.6%		
	2022		1.3%	18.7%	0.4%	1.6%	3.4%	22.1%	47.4%	52.1%		
Добыча	Нефть	1990	млн т	92.76	416.62	82.14	30.28		129.70	751.49	917.1	3157.93
		2022		273.98	759.46	88.95	17.49		52.99	1192.88	1331.8	4407.19
		1990	%: от мира	2.9%	13.2%	2.6%	1.0%	0.0%	4.1%	23.8%	29.0%	
		2022		6.2%	17.2%	2.0%	0.4%	0.0%	1.2%	27.1%	30.2%	
	Газ	1990	млрд м ³	103.45	483.38	25.29	20.61		190.21	822.93	833.5	1969.72
		2022		185.02	978.55	122.85	152.82		79.29	1518.52	1589.1	4043.82
		1990	%: от мира	5.3%	24.5%	1.3%	1.0%	0.0%	9.7%	41.8%	42.3%	
		2022		4.6%	24.2%	3.0%	3.8%	0.0%	2.0%	37.6%	39.3%	
	Уголь	1990	млн т	68.33	933.56		213.14	8.26	1080.05	2303.34	2331.3	4764.25
		2022		45.09	539.40		443.43	0.70	369.21	1397.82	1507.2	8803.37
		1990	%: от мира	1.4%	19.6%	0.0%	4.5%	0.2%	22.7%	48.3%	48.9%	
		2022		0.5%	6.1%	0.0%	5.0%	0.0%	4.2%	15.9%	17.1%	

Примечание. Пересчет электроэнергии, выработанной на ГЭС, АЭС и за счет ВИЭ, в первичную энергию производился методом оценки затрат органического топлива на ее эквивалентную выработку на ТЭС с учетом среднемирового КПД тепловой генерации – 36% в 1990 г. и 40.7% в 2022 г.

значительные изменения (рис. 2а). Во всех странах заметно (в 1.5–3 раза) снизились объемы потребления угля и его доля в энергобалансе (за исключением Японии, где после аварии на АЭС Фукусима в 2011 г. выработка закрытых атомных станций была временно замещена угольными ТЭС) и в 1.5–2 раза выросла доля природного газа в национальном энергопотреблении. Также для всех этих стран характерен многократный рост использования ВИЭ. Доля безуглеродных источников энергии (ГЭС, АЭС и ВИЭ) в суммарном потреблении первичных энергоресурсов составила в 2022 г. более 70% в Норвегии, около 45% в Канаде, более 30% в ЕС и 15–20% в США, Японии и Австралии.

В электроэнергетике эти изменения еще более заметны (рис. 2б). Во всех рассматриваемых странах, кроме Японии, значительно (в 1.7–3.3 раза) сократилась доля угля в производстве электроэнергии и примерно в такой же мере увеличилась доля природного газа (в Канаде – в 6 раз), а также повысился вклад безуглеродной выработки (включая ГЭС и АЭС) за счет развития ВИЭ-генерации, достигнув более 80% в Канаде, более 60% – в Евросоюзе, около 40% в США и более 30% в Австралии. Даже в Норвегии, где практически вся электроэнергия и ранее вырабатывалась на ГЭС, получила развитие ветрогенерация, обеспечив увеличение средней выработки на 10%. Единственным аутсайдером в этом процессе является Япония, где возобновляемым источникам не удалось пока заместить выработку закрытых АЭС.

Согласно сценарию STEPS (Stated Policies Scenario) Международного энергетического

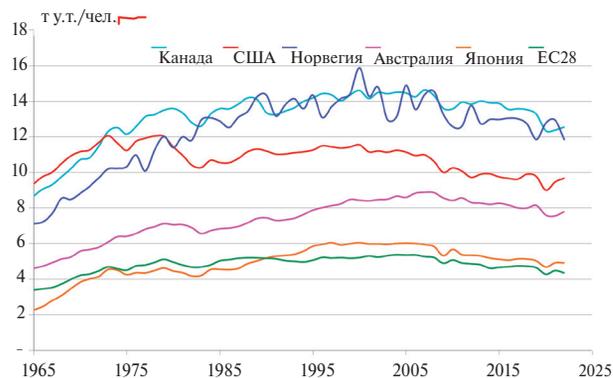


Рис. 1. Удельное потребление первичной энергии на душу населения в развитых странах мира (BP, 2023).

агентства [23], предполагающему последовательную реализацию уже заявленных национальных программ декарбонизации, к 2050 г. доля безуглеродных энергоресурсов в ЕС достигнет 65%, а в США и Японии – 45% общего энергопотребления (рис. 2). Национальные программы низкоуглеродного развития энергетики Канады [24] и Норвегии [25] также предусматривают рост этих показателей до 45% и 85% соответственно (рис. 2). Австралия, хотя и заявила о своей цели достичь углеродной нейтральности к 2050 г. [27], пока так и не обнародовала свои планы по декарбонизации национальной энергетики, а правительственный прогноз развития национальной энергетики 2015 г. предполагал существенный рост потребления органического топлива без развития ВИЭ [26] (рис. 2а).

Структурные изменения в топливно-энергетическом балансе развитых стран определили динамику углеродного коэффициента

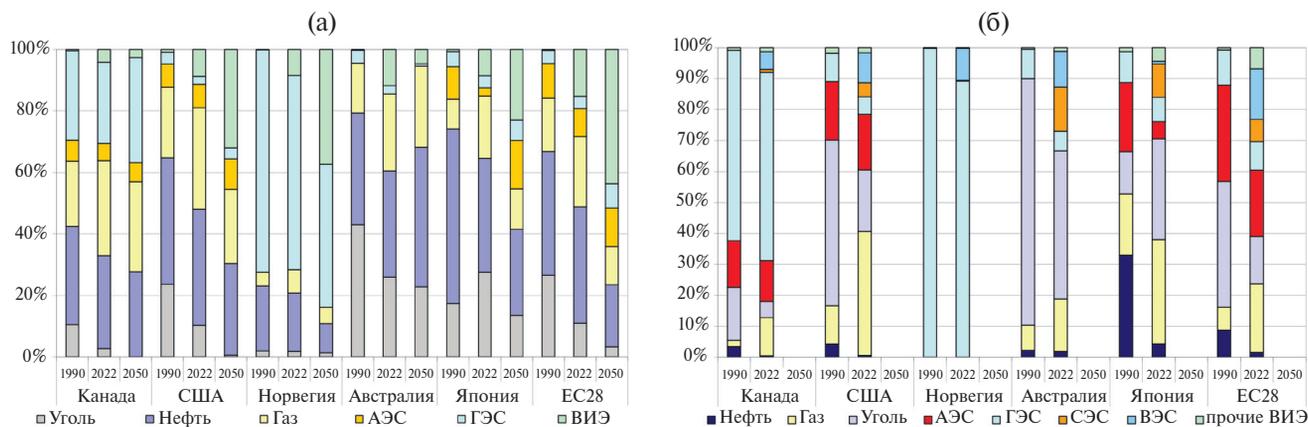


Рис. 2. Структура ТЭБ (а) и электрогенерации (б) в 1990 и 2022 гг. [21]; 2050 г. – сценарий STEPS МЭА [22] для ЕС, США и Японии, национальные программы Канады [24], Норвегии [25] и Австралии [26].

энергопотребления, под которым здесь понимается величина выбросов диоксида углерода (рис. 3а) из энергетических источников (включая сжигание органического топлива, а также утечки метана при его добыче и транспортировке), приходящаяся на единицу потребляемой первичной энергии. Безусловным лидером здесь являются 27 стран Евросоюза и Великобритания (объединенные в настоящей работе в группу ЕС28), углеродоемкость энергетики которых за период 1990–2022 гг. снизилась более чем на 20%. Удельные показатели выбросов в энергетике США уменьшились за этот период почти на 15%, а Австралии – менее чем на 10%. Углеродные характеристики энергопотребления Норвегии и Японии за последние два десятилетия практически не изменились, но вызвано это совершенно различными причинами. В Норвегии исторически сложившееся преобладание возобновляемых источников в энергобалансе уже сейчас обеспечивает минимальные в мире показатели выбросов парниковых газов в энергетике страны, в основном приходящиеся на транспорт, переход которого на безуглеродные источники энергии сейчас находится в активной продвинутой стадии. В Японии авария на АЭС Фукусима в 2011 г. прервала убывающий тренд карбооемкости энергопотребления, когда она за 1990–2010 гг. снизилась более чем на 5%, до вполне достойного уровня в 1.75 т CO₂/т у.т. Однако закрытие японских АЭС и вызванный этим рост потребления органического топлива, преимущественно угля на ТЭС резко увеличили удельные выбросы диоксида

углерода до 2 т CO₂/т у.т., и, несмотря на предпринимаемые усилия, в первую очередь за счет развития возобновляемой энергетики, вернуться к уровню 2010 г. пока не удалось.

На рис. 3а также представлены «инерционные» сценарии динамики углеродной интенсивности энергопотребления до 2060 г., полученные экстраполяцией исторических рядов [21] с темпами изменения за последние 25 лет (для Японии – за последние 10 лет, после Фукусимской аварии). По этим сценариям к середине столетия углеродоемкость энергетики Норвегии будет находиться на минимальном уровне 0.5 т CO₂/т у.т., а остальных стран – в пределах 1.0–1.5 т CO₂/т у.т.

Реализация существующих национальных программ трансформации энергетики [23–27] в исследуемых странах заметно ускоряет процессы декарбонизации энергетики, снижая углеродный коэффициент энергопотребления до 0.3 т CO₂/т у.т. в Норвегии и до 0.7–1.2 в остальных странах (необходимо отметить, что энергетический сценарий 2015 г. для Австралии [26] вообще не предполагает какого-либо снижения углеродоемкости национальной энергетики).

Как видно из рис. 3б, даже по инерционному сценарию происходит заметное снижение выбросов диоксида углерода при сжигании топлива: к 2050 г. в ЕС их объемы будут составлять менее 40% от уровня 1990 г. (национальный максимум выбросов), в США, Канаде и Норвегии – 50, 70 и 80% соответственно от пикового значения 2005 г., в Австралии – 87% от

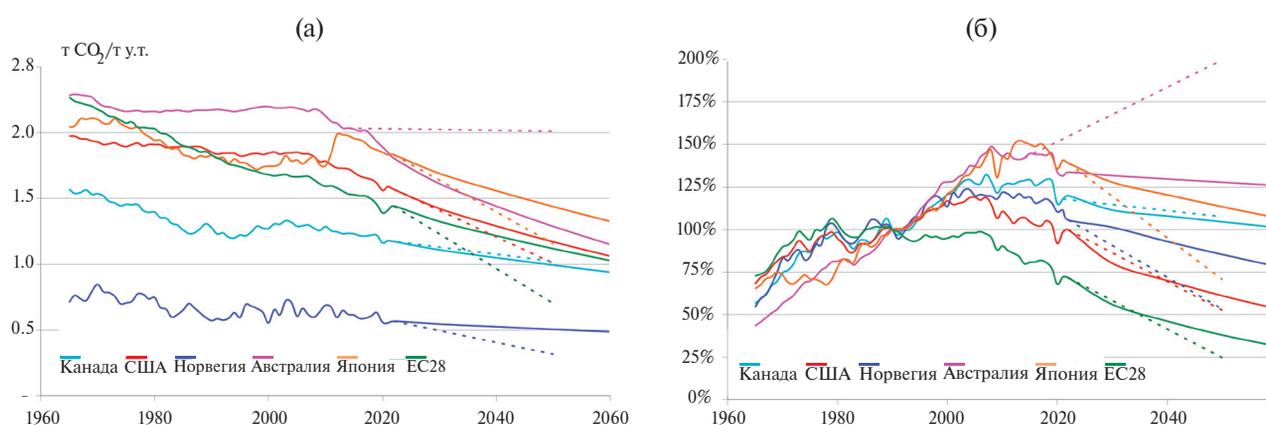


Рис. 3. Изменение удельной (а) и валовой (б) энергетической эмиссии CO₂ по данным [21] с экстраполяцией, выполненной с темпами изменения последних 25 лет («инерционный» сценарий), а также сценарий STEPS МЭА [23] для ЕС, США и Японии, национальные программы Канады [24], Норвегии [25] и Австралии [26] (штриховые линии).

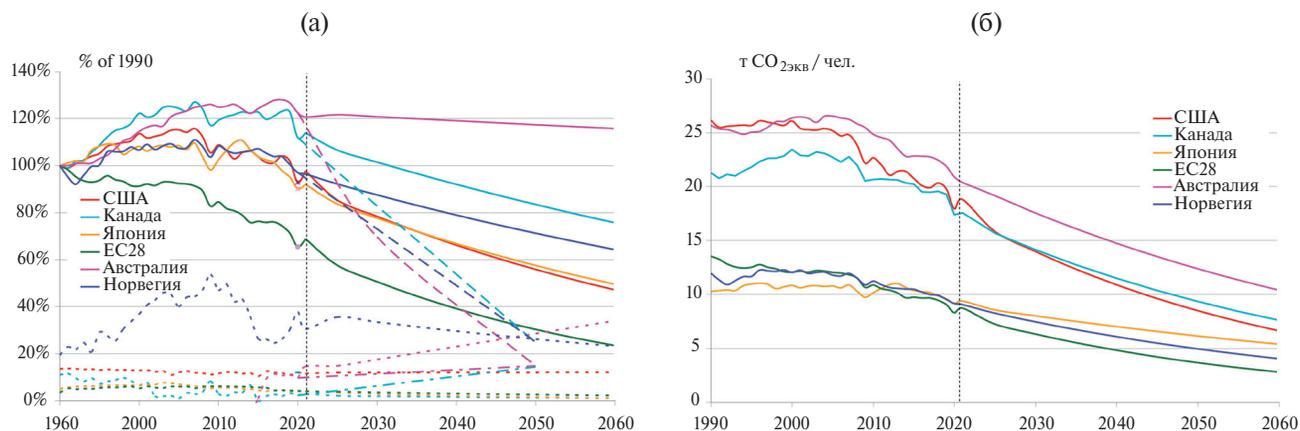


Рис. 4. Динамика суммарных выбросов (сплошные линии) и поглощения (штриховые линии) ПГ (относительно уровня антропогенных выбросов 1990 г.) (а) и удельных выбросов ПГ на душу населения (б) по данным *UNFCCC* (2024). Экстраполяция выполнена с темпами изменения последних 25 лет («инерционный» сценарий) и согласно актуальным национальным планам достижения климатической нейтральности и согласно актуальным национальным планам достижения климатической нейтральности (длинные штриховые линии).

максимума 2008 г. и в Японии – 74% от пика 2013 г. Однако сохранение исторических темпов декарбонизации энергетики даже близко не позволяет подойти к решению главной проблемы – снижению до нуля (или близкой к нему величины) углеродного коэффициента энергопотребления.

Действующие программы энергоперехода [23–27] существенно повышают темпы снижения выбросов диоксида углерода в ЕС, Норвегии и Японии (штриховые линии), доводя соответствующие значения эмиссии CO₂ в 2050 г. в 25, 40 и 45% от пиковых величин, но тем не менее сохраняя значительные и пока некомпенсированные объемы выбросов этого парникового газа.

Таким образом, реализация национальных целей «климатической нейтральности» (рис. 4) требует еще более радикальных мер снижения выбросов в энергетике и других отраслях экономики, а также увеличения стоков углекислого газа – в биологические резервуары (леса, болота, пахотные земли) или закачки его в геологические формации.

Однако ни данные дистанционного зондирования Земли (рис. 5а), ни результаты национальных инвентаризаций земельных ресурсов (рис. 5б) не свидетельствуют о каком-либо значимом увеличении площади лесных земель. Во всех странах, кроме Австралии, за период 1990–2021 гг. произошло некоторое (на 5–15%) сокращение площади пахотных земель, в Австралии

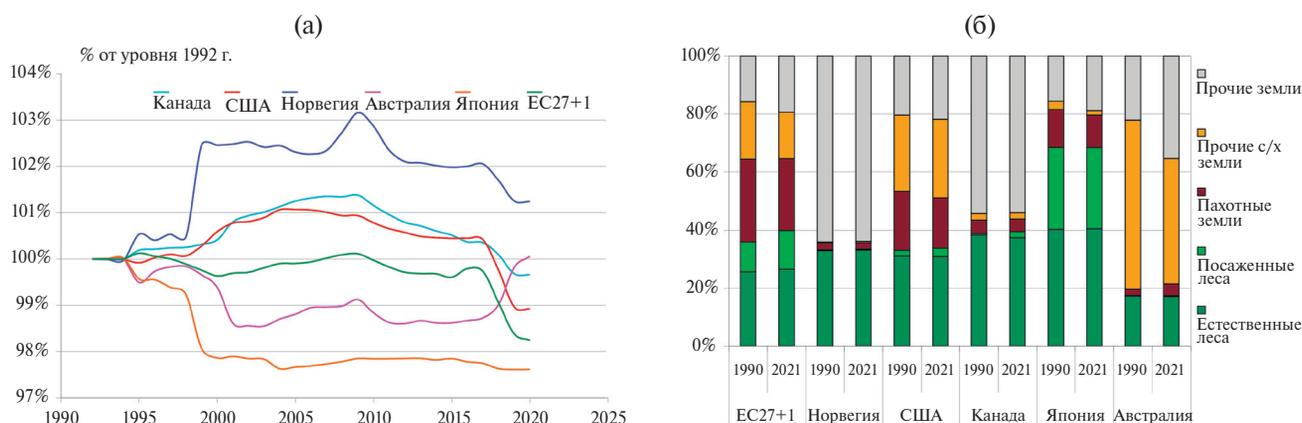


Рис. 5. Изменение площади земель, покрытых древесной растительностью (по сравнению со значением 1992 г.), по спутниковым данным *FAO*, (а) и структуры землепользования, по данным национальных инвентаризаций *FAO* (б).

Таблица 3. Оценки геологических ресурсов для захоронения CO₂ [32], мощность хранилищ для захоронения CO₂ *S* и их доля σ в предполагаемой нетто-эмиссии ПГ в 2030 г. [31]

Страна	Геологические ресурсы для захоронения CO ₂ , млрд т CO ₂			<i>S</i> ₂₀₃₀ , млн т CO ₂ / год	σ ₂₀₃₀ , %
	суша	шельф	всего		
США	551–3872	261–1836	812–5708	200–250	4–5
ЕС27+1	161–1129	141–991	302–2120	70–80	2.5–3
Канада	206–1445	112–790	318–2235	15	3
Япония	4–26	5–34	9–60	0	0
Норвегия	–	85	85	30–40	75–85
Австралия	334–2349	261–1835	595–4184	9–19	1.5–3

за это время они почти удвоились. Площадь лесов на исследуемых территориях оставалась практически неизменной, лишь в ЕС по данным инвентаризации отмечен их рост более чем на 20%, причем треть современных европейских лесов – результат посадок при лесовосстановлении (в Японии – более 40%). При относительно стабильной площади лесов и постоянной замене ненарушенных массивов менее продуктивными посадками не приходится рассчитывать, что они примут на себя дополнительную нагрузку по поглощению углерода из атмосферы. Ситуация дополнительно осложняется необратимыми потерями углерода из пахотных земель, ежегодно теряемых в результате продолжающейся урбанизации в масштабах 16–33 тыс. км

в год [28]. Детальные расчеты [29] показывают, что биосфера уже сегодня близка к пределу своих возможностей по депонированию углерода.

Что касается улавливания и захоронения диоксида углерода в различных геологических резервуарах, то теоретический потенциал этих технологий огромен и составляет сотни миллиардов тонн CO₂ (табл. 3), что даже по нижним оценкам способно обеспечить хранение избыточного CO₂ при современном уровне эмиссии в течение полутора столетий. Однако реализация подобных проектов сопряжена с многочисленными трудностями (экономическими, технологическими, экологическими), хотя и развивается бурными темпами в последнее десятилетие (рис. 6). Поэтому в настоящее время



Рис. 6. Проекты по захоронению углекислого газа в мире в 2020 г. [30] и динамика их мощностей (млн т CO₂/год) [31].

общая мощность нескольких сотен хранилищ различной степени завершенности в мире достигла лишь 310 млн т CO₂/год, из которых в эксплуатации находится только около 16%, обеспечивающих хранение лишь 49 млн т CO₂/год [31], что составляет менее 0.15% современной эмиссии. В табл. 3 представлены данные о перспективах развития технологий улавливания и хранения углерода (УХУ, CCS – от англ. Carbon Capture and Storage) до конца текущего десятилетия. Эти данные показывают, что наиболее активно эти технологии развиваются в Европе и США, а Норвегия является единственной страной мира, способной уже в 2030 г. улавливать не менее 75% своих выбросов CO₂. Сейчас наиболее затруднительным выглядит положение Австралии, располагающей всего 9 млн т CO₂/год мощностей УХУ, и Японии, не имеющей таких мощностей вовсе, но планирующей ввод к 2030 г. семи первых проектов неуказанного размера. В целом, можно констатировать, что для реализации планов по достижению климатической нейтральности ведущим странам ОЭСР необходимо в ближайшие 25 лет поддерживать ежегодные темпы ввода хранилищ CO₂ на уровне 20%, что не выглядит простой задачей, поскольку исторические темпы в последнее десятилетие (2013–2023 гг.) находились на уровне 11%.

ВЫВОДЫ

1. Существующие темпы декарбонизации и развития индустрии улавливания и хранения углерода не позволяют гарантировать достижения климатической нейтральности к 2050 г. даже в ведущих экономиках мира. Наилучшими в этом отношении выглядят шансы Евросоюза и Норвегии, наихудшими – Австралии и Канады.

2. Центральной проблемой в достижении климатической нейтральности становится быстрое и масштабное внедрение технологий УХУ во всех ее возможных проявлениях. Все исследованные страны, кроме Японии, располагают собственными возможностями для захоронения углерода на период более ста лет.

3. Для достижения климатической нейтральности ведущим странам ОЭСР к 2050 г. необходимо будет обеспечить ежегодное захоронение не менее 6 млрд т CO₂, что почти в 25 раз

превосходит их современные мощности (действующие, строящиеся и находящиеся в стадии проектирования).

4. Несмотря на то, что проблема изменения климата вербально занимает едва ли не лидирующее место в мировой повестке, действительные результаты усилий в этой области далеки от декларируемых. Удержать потепление в пределах 1.5°C сейчас уже нереально и при нынешних темпах декарбонизации, достигнутых даже мировыми лидерами, скоро и оборона второго критического рубежа в 2°C окажется под угрозой.

БЛАГОДАРНОСТИ

В работе использованы данные Рамочной конвенции ООН по изменению климата (РКИК, <https://unfccc.int/>), базы данных для глобальных исследований атмосферы Европейской Комиссии (EDGAR, <https://edgar.jrc.ec.europa.eu>), Организации ООН по лесному и сельскому хозяйству (FAO, <http://www.fao.org/faostat/en/#data>), Демографической службы ООН (<https://population.un.org/wpp/>), Всемирного института улавливания и захоронения углерода (<https://www.globalccsinstitute.com>).

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда в НИУ «МЭИ» (проект № 20-19-00721-П) в части энергетических исследований, в ИНЭИ РАН (проект № 21-79-30013) в части расчетов выбросов парниковых газов и в НИТУ «МИСИС» (проект № 23-19-00398) в части исследования улавливания, захоронения и поглощения парниковых газов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shirov A.A., Kolpakov A.Yu., Gambhir A., Koasidis K., Köberle A. C., McWilliams B., Nikas A.* Stakeholder-driven scenario analysis of ambitious decarbonisation of the Russian economy // *Renewable and Sustainable Energy Transition*. 2023. V. 4. Id. 100055. <https://doi.org/10.1016/j.rset.2023.100055>
2. *Hechelmann R.-H., Paris A., Buchenau N., Ebersold F.* Decarbonisation strategies for manufacturing: A technical and economic comparison // *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2023. V. 188. Id. 113797. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2023.113797>

3. *Rinaldi A., Sylva A., Patel M.K., Parra D.* Optimal pathways for the decarbonisation of the transport sector: Trade-offs between battery and hydrogen technologies using a whole energy system perspective // *Cleaner Production Letters*. 2023. V. 5. Id. 100044. <https://doi.org/10.1016/j.cpl.2023.100044>
4. *Li C., Tian G., Chen C., Liu P., Li Z.* A long-term or a short-term decision when planning the decarbonisation transition pathway of power systems? A case study of China // *Energy for Sustainable Development*. 2023. V. 76. Id. 101264. <https://doi.org/10.1016/j.esd.2023.101264>
5. *Stephenson J.R., Sovacool B.K., Inderberg T.H.J.* Energy cultures and national decarbonisation pathways // *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2021. V. 137. Id. 110592. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2020.110592>
6. *Fragkos P., van Soest H. L., Schaeffer R., Reedman L., Köberle A.C., Macaluso N., Evangelopoulou S., De Vita A., Sha F., Qimin C., Kejun J., Mathur R., Shekhar S., Dewi R.G., Diego S.H., Oshiro K., Fujimori S., Park C., Safonov G., Iyer G.* Energy system transitions and low-carbon pathways in Australia, Brazil, Canada, China, EU-28, India, Indonesia, Japan, Republic of Korea, Russia and the United States // *Energy*. 2021. V. 216. Id. 119385. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2020.119385>
7. *Kilinc-Ata N., Proskuryakova L.N.* Empirical analysis of the Russian power industry's transition to sustainability // *Utilities Policy*. 2023. V. 82. Id. 101586. <https://doi.org/10.1016/j.jup.2023.101586>
8. *Durakovic G., Zhang H., Knudsen B.R., Tomasgard A., del Granado P.C.* Decarbonizing the European energy system in the absence of Russian gas: Hydrogen uptake and carbon capture developments in the power, heat and industry sectors // *J. Cleaner Production*. 2024. V. 435. Id. 140473. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2023.140473>
9. *Crowley-Vigneau A., Kalyuzhnova Y., Ketenci N.* What motivates the 'green' transition: Russian and European perspectives // *Resources Policy*. 2023. V. 81. Id. 103128. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2022.103128>
10. *Клименко В.В., Клименко А.В., Терешин А.Г.* Безуглеродная Россия: есть ли шанс достичь углеродной нейтральности к 2060 году? // *Доклады РАН. Физика, технические науки*. 2023. Т. 511. С. 67–77. <https://doi.org/10.31857/S2686740023040065> EDN: VPFUXM
11. *Клименко В.В., Клименко А.В., Терешин А.Г., Локтионов О.А.* Дорога к климатической нейтральности: через лес под землю // *Энергетическая политика*. 2023. № 7 (185). С. 8–25. EDN: WVMBKT
12. *Клименко В.В., Клименко А.В., Терешин А.Г.* На пути к климатической нейтральности: выстоит ли русский лес против энергетики? // *Теплоэнергетика*. 2024. № 1. С. 5–20. <https://doi.org/10.56304/S0040363624010053>
13. *Клименко А.В., Терёшин А.Г., Прун О.Е.* Перспективы России в снижении выбросов парниковых газов // *Известия РАН. Энергетика*. 2023. № 2. С. 3–15. <https://doi.org/10.31857/S0002331023020036> EDN: JXOTOM.
14. *Клименко А.В., Терёшин А.Г., Прун О.Е.* Пути снижения выбросов парниковых газов в черной металлургии России // *Промышленная энергетика*. 2023. № 9. С. 8–19. <https://doi.org/10.34831/EP.2023.67.59.002>
15. *Клименко В.В., Терешин А.Г., Коликов К.С., Бернадинер И.М.* Перспективы России в снижении выбросов метана и присоединении к Глобальному соглашению по метану // *Энергетическая политика*. 2023. № 11 (190). С. 56–73. https://doi.org/10.46920/2409-5516_2023_11190_5E DN: TMXGQO
16. *Баишаков И.А.* Стратегия низкоуглеродного развития российской экономики // *Вопросы экономики*. 2020. № 7. С. 51–74.
17. *Баишаков И.А.* Сценарии движения России к углеродной нейтральности // *Энергосбережение*. 2023. № 1. С. 40–49.
18. *Дегтярев К.С., Березкин М.Ю., Синюгин О.А.* Оценка инвестиционных затрат на переход к безуглеродной экономике в России к 2060 г. // *Окружающая среда и энергетика*. 2022. № 2. С. 29–39.
19. *Мастепанов А.М.* Россия на пути к углеродной нейтральности // *Энергетическая политика*. 2022. № 1(167). С. 94–108.
20. *Ланьшина Т.А., Логинова А.Д., Стоянов Д.Е.* Переход крупнейших экономик мира к углеродной нейтральности - сферы потенциального сотрудничества с Россией // *Вестник международных организаций*. 2021. Т. 16. №4. С. 98–125.
21. *Statistical Review of World Energy 2023*. London: Energy Institute, 2023. 64 p.
22. *Клименко В.В.* Влияние климатических и географических условий на уровень потребления энергии // *ДАН*. 1994. Т. 339. № 3. С. 319–332.
23. *International Energy Agency. World Energy Outlook 2023*. Paris: IEA, 2023. 355 p.
24. *Canada's Energy Future 2023: Energy Supply and Demand Projections to 2050*. Ottawa: Canada Energy Regulator, 2023. 134 p.
25. *Energy Transition Norway 2022. A National Forecast to 2050* / Ed.: M. Irvine. Høvik, Norway: DNV and Norsk Industri, 2022. 56 p.
26. *Syed A.* Australian Government Energy Projections to 2050 / Kimura, S. and H. Phoumin (eds.), *Energy Outlook and Energy Saving Potential in East Asia*. ERIA Research Project Report 2014-33, Jakarta: ERIA, 2015. P. 49–68.

27. Australian Long Term Emissions Reduction Plan. A whole-of-economy Plan to achieve net zero emissions by 2050. Australian Government Department of Industry, Science, Energy and Resources, 2021.
28. Ковалева Н.О., Столпникова Е.М. Экология: жизнь в неустойчивой биосфере // История и современность. 2022. № 4. С. 58–80.
29. Клименко В.В., Микушина О.В., Терешин А.Г. Динамика биотических потоков углерода при различных сценариях изменения площади лесов // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2020. Т. 56. № 4. С. 462–472. <https://doi.org/10.31857/S0002351520040033>
30. Global Status of CCS Report 2021. Melbourne, Australia: Global Carbon Capture and Storage Institute, 2021.
31. Global Status of CCS Report 2023. Executive summary. Melbourne, Australia: Global Carbon Capture and Storage Institute, 2023.
32. Филиппов С.П., Жданев О.В. Возможности использования технологий улавливания и захоронения диоксида углерода при декарбонизации мировой экономики (обзор) // Теплоэнергетика. 2022. № 9. С. 5–21. <https://doi.org/10.56304/S0040363622090016>
33. Member State Specific Pathway for NETP Deployment / Editors/Authors: Nixon Sunny, Solene Chiquier, Niall Mac Dowell. London: NEGEM, 2023.
34. Freer-Smith P., Muys B., Bozzano M., Drössler L., Farrelly N., Jactel H., Korhonen J., Minotta G., Nijnik M. and Orazio C. Plantation forests in Europe: challenges and opportunities. From Science to Policy 9. European Forest Institute, 2019. <https://doi.org/10.36333/fs09>
35. Rhodes D., Stephens M. Planted forest development in Australia and New Zealand: comparative trends and future opportunities // New Zealand J. of Forest Science. 2014. V. 44 (Suppl 1), S10. <https://doi.org/10.1186/1179-5395-44-S1-S10>

PROSPECTS FOR ACHIEVING CARBON NEUTRALITY BY ECONOMICALLY DEVELOPED COUNTRIES

Academician of the RAS V. V. Klimenko^{a,b,c},
Academician of the RAS A. V. Klimenko^b, A. G. Tereshin^{a,c}

^aNational Research University «MPEI», Moscow, Russia

^bNational University of Sciences and Technology «MISIS», Moscow, Russia

^cEnergy Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

The prospects for achieving carbon neutrality by economically developed countries (USA, EU, Norway, Canada, Japan and Australia) are studied. An analysis of the structure of energy and land use in these countries is carried out. Scenario estimates of the dynamics of carbon indicators of the economies of the world's leading countries have been developed.

It is shown that the current rates of decarbonisation and development of the carbon capture and storage industry do not guarantee the achievement of climate neutrality by 2050, even in the world's leading economies. A central challenge in achieving climate neutrality is the rapid and large-scale deployment of CCS in all its possible manifestations. All of the countries studied, except Japan, have their own capacity to store carbon for more than a hundred years.

To achieve climate neutrality, the leading OECD countries will need to ensure the annual capture of at least 6 billion tons of CO₂ by 2050, which is almost 25 times higher than their current capacities (operating, under construction and under design) Despite the fact that climate change occupies almost a leading place on the global agenda, the actual results of efforts in this area are far from declared. It is no longer realistic to keep warming within 1.5°C, and at the current rate of decarbonization, even by world leaders, the defense of the second critical frontier in 2°C will soon be threatened.

Keywords: economically developed countries, energy, greenhouse gas emissions and absorption, climate neutrality, scenarios

Свидетельство о регистрации средства массовой информации
ПИ № ФС 77-77142 от 6 ноября 2019 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Подписано к печати 99.99.2024 г. Дата выхода в свет 99.99.2024 г. Формат 60 × 88¹/₈ Усл. печ. л. Уч.-изд. л.
Тираж экз. Зак. Цена свободная

Учредитель: Российская академия наук

Издатель: Российская академия наук, 119991 Москва, Ленинский пр., 14
Исполнитель по контракту № 4У-ЕП-039-24 ФГБУ «Издательство «Наука»
121099, г. Москва, Шубинский пер., д. 6, стр. 1.
Отпечатано в ФГБУ «Издательство «Наука»
121099, г. Москва, Шубинский пер., д. 6, стр. 1

Журналы РАН, выходящие в свет на русском языке

- Автоматика и телемеханика
 Агрохимия
 Азия и Африка сегодня
 Акустический журнал
 Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы
 Астрономический журнал
 Биологические мембраны
 Биология внутренних вод
 Биология моря
 Биоорганическая химия
 Биофизика
 Биохимия
 Ботанический журнал
 Вестник Дальневосточного отделения Российской академии наук
 Вестник древней истории
 Вестник Российской академии наук
 Вестник российской сельскохозяйственной науки
 Водные ресурсы
 Вопросы истории естествознания и техники
 Вопросы ихтиологии
 Вопросы языкознания
 Вулканология и сейсмология
 Высокомолекулярные соединения. Серия А
 Высокомолекулярные соединения. Серия Б
 Высокомолекулярные соединения. Серия С
 Генетика
 Геология рудных месторождений
 Геомагнетизм и аэрномия
 Геоморфология и палеогеография
 Геотектоника
 Геохимия
 Геоэкология. Инженерная геология. Гидрогеология. Геокриология
 Государство и право
 Дефектоскопия
 Дифференциальные уравнения
 Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления
 Доклады Российской академии наук. Науки о жизни
 Доклады Российской академии наук. Науки о Земле
 Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки
 Доклады Российской академии наук. Химия, науки о материалах
 Журнал аналитической химии
 Журнал высшей нервной деятельности им. И.П. Павлова
 Журнал вычислительной математики и математической физики
 Журнал неорганической химии
 Журнал общей биологии
 Журнал общей химии
 Журнал органической химии
 Журнал прикладной химии
 Журнал физической химии
 Журнал эволюционной биохимии и физиологии
 Журнал экспериментальной и теоретической физики
 Записки Российского минералогического общества
 Зоологический журнал
 Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа
 Известия Российской академии наук. Механика твердого тела
 Известия Российской академии наук. Серия биологическая
 Известия Российской академии наук. Серия географическая
 Известия Российской академии наук. Серия литературы и языка
 Известия Российской академии наук. Серия физическая
 Известия Российской академии наук. Теория и системы управления
 Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана
 Известия Российской академии наук. Энергетика
 Известия Русского географического общества
 Исследование Земли из космоса
 Кинетика и катализ
 Коллоидный журнал
 Координационная химия
 Космические исследования
 Кристаллография
 Латинская Америка
 Лёд и Снег
 Лесоведение
 Литология и полезные ископаемые
 Мембраны и мембранные технологии
 Металлы
 Микология и фитопатология
 Микробиология
 Микроэлектроника
 Молекулярная биология
 Нейрохимия
 Неорганические материалы
 Нефтехимия
 Новая и новейшая история
 Общественные науки и современность
 Общество и экономика
 Океанология
 Онтогенез
 Палеонтологический журнал
 Паразитология
 Петрология
 Письма в Астрономический журнал
 Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики
 Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования
 Почвоведение
 Приборы и техника эксперимента
 Прикладная биохимия и микробиология
 Прикладная математика и механика
 Проблемы Дальнего Востока
 Проблемы машиностроения и надежности машин
 Проблемы передачи информации
 Программирование
 Психологический журнал
 Радиационная биология. Радиоэкология
 Радиотехника и электроника
 Радиохимия
 Расплавы
 Растительные ресурсы
 Российская археология
 Российская история
 Российская сельскохозяйственная наука
 Российский физиологический журнал им. И.М. Сеченова
 Русская литература
 Русская речь
 Сенсорные системы
 Славяноведение
 Современная Европа
 Социологические исследования
 Стратиграфия. Геологическая корреляция
 США & Канада: экономика, политика, культура
 Теоретические основы химической технологии
 Теплофизика высоких температур
 Успехи современной биологии
 Успехи физиологических наук
 Физика Земли
 Физика и химия стекла
 Физика металлов и металловедение
 Физика плазмы
 Физикохимия поверхности и защита материалов
 Физиология растений
 Физиология человека
 Химическая физика
 Химия высоких энергий
 Химия твердого топлива
 Цитология
 Человек
 Экология
 Экономика и математические методы
 Электрохимия
 Энтомологическое обозрение
 Этнографическое обозрение
 Ядерная физика